

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Ряміна Дар'я Максимівна

ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

_____ Т. Д. Лукашова
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри
математики

« ____ » _____ 2025 року

Виконавець:

_____ Д. М. Ряміна

« ____ » _____ 2025 року

Суми 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	10
1.1. Поняття задачі в шкільному курсі математики.....	10
1.2. Роль і функції задач	11
1.3. Класифікація математичних задач	14
1.5. Основні типи текстових задач в шкільному курсі математики та підходи до їх розв’язання.....	22
Висновки до розділу 1.....	33
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ’ЯЗУВАННЮ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	34
2.1. Аналіз модельних та навчальних програм з тематики дослідження	34
2.2. Аналіз шкільних підручників з математики щодо якісного та кількісного вмісту текстових задач	38
2.3. Методичні особливості розв’язування текстових задач в шкільному курсі математики.....	48
2.3.1. Вікові особливості школярів в контексті тематики дослідження.....	48
2.3.2. Організація навчальної діяльності учнів при розв’язуванні текстових задач в основній школі	50
2.3.4. Метод математичного моделювання при розв’язуванні текстових задач.....	63
2.4.5. Формування умінь учнів розв’язувати текстові задачі.....	71
2.4.6. Труднощі та помилки, які виникають у учнів при розв’язуванні текстових задач	80
Висновки до розділу 2.....	81
ВИСНОВКИ	83
Список використаних джерел.....	85

ВСТУП

Актуальність. У сучасному суспільстві, що стрімко розвивається в умовах цифровізації, математична освіта набуває дедалі більшого значення. Математика формує логічне, критичне та алгоритмічне мислення, сприяє розвитку інтелектуального потенціалу учнів, готує їх до успішної самореалізації у майбутньому [1][3]. Одним із провідних інструментів у навчанні математики є задачі, які виступають не лише засобом закріплення знань, а й ефективним методом формування пізнавальної активності, самостійності, математичної компетентності. [4][22]

Серед таких задач значна частина пов'язана з числами і вимагає певних математичних знань, умінь виконувати арифметичні перетворень та розв'язувати алгебраїчні рівняння, нерівності та системи. В таких задачах здійснюється перехід від життєвих ситуацій до їх математичних моделей (рівнянь, нерівностей, систем). Текстовий опис ситуації з вимогою дати кількісну характеристику її компонентів називають текстовими задачами. [2][12]

Як відомо, одним із завдань навчання математики в школі є розвиток математичного мислення через навчання загальним способам дій з математичними моделями реальної дійсності і способам побудови цих моделей. Навчання побудови моделей, в основному, здійснюється при розв'язуванні текстових задач. [5][20]

Розв'язування текстових задач сприяє активізації мислення учнів та їх зацікавленості у вивченні математики, бо внаслідок цього відбувається знайомство з практичними, життєвими поняттями і прийомами розв'язання, а також відчувається реальна необхідність застосування отриманих знань для досягнення певної практичної мети. [6][22] Систематичне і цілеспрямоване розв'язування текстових задач з урахуванням рівня розвитку пізнавальних здібностей учня сприяє розвитку всіх пізнавальних процесів школярів, формуванню математичної інтуїції й творчого підходу до вирішення найрізноманітніших задач. [7][22]

Важливе значення для формування вміння розв'язувати текстові задачі відіграє підбір навчальних завдань, які мають відповідати певним загально-методичним вимогам: забезпечувати засвоєння учнями програмного матеріалу з математики (зокрема, формувати в них знання про задачу, процес її розв'язання), вчити використовувати набуті знання в різних ситуаціях. [8][22] При цьому зміст завдань має відповідати темі уроку і меті вивчення матеріалу, числові дані мають бути реальними; послідовність застосування вправ повинна сприяти свідомому засвоєнню теоретичних знань і вмінню розв'язувати задачі, розвитку прийомів розумової і творчої діяльності школярів; забезпечувати автоматизацію елементарних дій, з яких складається діяльність при розв'язуванні задач; створювати умови для узагальнення способів діяльності; відповідати логіці й структурі процесу формування вмінь. Кількість задач має враховувати вікові та психологічні особливості школярів і бути достатньою для формування певного вмінь або навички. [9][22]

В умовах реформи Нової української школи, що орієнтується на компетентнісний підхід, важливо не лише передати учням знання, а й сформувати в них здатність застосовувати їх у реальному житті. Саме текстові задачі, особливо практико-орієнтовані, створюють умови для реалізації такого підходу, сприяючи розвитку ключових компетентностей, зокрема математичної компетентності. [10]

Розв'язування текстових задач є важливою складовою шкільної математичної освіти в усьому світі. [11] У зарубіжній педагогічній практиці такі задачі розглядаються не лише як інструмент перевірки знань, а як ключовий засіб розвитку логічного мислення, математичного мовлення, здатності до аналізу, узагальнення та практичного застосування отриманих знань. [4] [11]

Сучасна математична освіта покликана не лише передавати учням знання, а й формувати вміння застосовувати ці знання на практиці, розвивати логічне мислення, аналізувати і моделювати реальні процеси. Особливу роль у

цьому відіграють текстові задачі, які дозволяють поєднувати математичні знання з практичною діяльністю, стимулюють розвиток критичного мислення та творчих здібностей учнів. [1][12] Як зазначає Захарченко Н. М., текстова задача є словесною моделлю певної ситуації, що потребує від учня виділення даних, побудови математичної моделі та інтерпретації результатів у вихідному контексті, що сприяє формуванню ключових компетентностей і пізнавальної активності школярів. [12][13][18]

У Сполучених Штатах Америки, згідно з вимогами Стандартів Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM), основну увагу приділено розвитку стратегічного мислення через розв'язування задач, наближених до реальних життєвих ситуацій. [1][2][14] Учнів заохочують не лише знайти правильну відповідь, а й пояснити обраний спосіб розв'язання, порівняти кілька підходів, використовуючи математичні обґрунтування.

У фінській системі освіти, відомій своєю гнучкістю та акцентом на учнівську автономію, також активно впроваджуються задачі прикладного характеру. Тут практикується міжпредметна інтеграція: алгебраїчні задачі пов'язуються з темами з фізики, хімії та економіки, що забезпечує контекстуалізацію знань. [4][15] У Японії задачі розглядаються як відкриті проблеми, що не мають єдиного правильного розв'язання. Це сприяє глибшому розумінню структури задачі та розвитку математичного мислення. Учнів вчать самостійно висувати гіпотези, узагальнювати та знаходити закономірності, що сприяє формуванню навичок дослідження. [5][16]

Отже, проблема навчання учнів розв'язуванню текстових задач є актуальною і затребуваною в усьому світі. Окрім того, важливим є дослідження ролі текстових задач у формування ключових компетентностей учнів.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема використання математичних задач у навчальному процесі привертала увагу багатьох українських учених, які досліджували її з методичної, психолого-педагогічної та дидактичної точок зору. Значний внесок у розвиток методики навчання математики зробили

О.Я. Савченко, С.О. Скворцова, Г.М. Філіпенко, А.І. Трофимова, О.І.Ляшенко, М.І. Бурда, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова та інші.

Так, М. І. Бурда у своїх працях розкриває роль навчальних задач як засобу активізації пізнавальної діяльності учнів і розвитку логічного мислення. Учений наголошує на необхідності цілеспрямованого підбору задач відповідно до дидактичної мети уроку. [6][17]

Н.А. Тарасенкова досліджує використання компетентнісного підходу у навчанні математики, підкреслюючи важливість задач, що моделюють життєві ситуації та сприяють формуванню математичної компетентності. У співавторстві з колегами Тарасенковою Н.А. запропоновано ефективні підходи до структурування змісту навчання з урахуванням сучасних освітніх вимог.

С.О. Скворцова звертає увагу на розвиток критичного та логічного мислення засобами задач, що мають варіативний підхід до розв'язування. Її дослідження містять рекомендації щодо поетапного формування вмінь і навичок розв'язування задач різного типу. [18][22]

Ю.І. Мальований у своїх роботах аналізує класифікацію математичних задач і доводить важливість їхнього системного впровадження в освітній процес залежно від рівня підготовки учнів та мети уроку.

О.І. Ляшенко акцентує на інтегративному підході до навчання, в якому задачі є засобом формування міжпредметних зв'язків та прикладного мислення. [7][19]

Однак більшість досліджень зосереджені на загальних методичних питаннях, тоді як проблема використання текстових задач як засобу формування математичної компетентності учнів залишається недостатньо вивченою. Це й зумовлює необхідність подальшого аналізу та розробки ефективних підходів до використання задач у навчальному процесі в умовах реалізації компетентнісного підходу.

Мета дослідження полягає вивченні ролі і значення текстових задач у шкільному курсі математики, виявленні методичних особливостей використання

задач зазначеного типу на уроках й дослідженні впливу таких задач на формування математичної компетентності учнів.

Відповідно до мети дослідження було визначено наступні завдання:

1. Проаналізувати навчальну, психолого-педагогічну та методичну літературу з проблеми дослідження.
2. Розглянути роль і значення задач (зокрема, текстових) у шкільному курсі математики.
3. Розглянути підходи до класифікації математичних задач, виділити основні типи текстових задач.
4. Проаналізувати основні методи розв'язування текстових задач у курсі алгебри основної школи.
5. Виявити найбільш ефективні шляхи і способи організації навчальної діяльності учнів при розв'язуванні текстових задач на уроках математики, Дослідити роль та значення текстових задач як засобу формування математичної компетентності учнів.
6. Визначити методи та прийоми ефективного використання текстових задач у навчальному процесі.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики в основній та старшій школі.

Предмет дослідження – використання текстових задач як засобу формування математичної компетентності учнів та підвищення якості навчання.

Методи дослідження. Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань використано наступні методи:

– *теоретичні методи:* аналіз психолого-педагогічної, навчально-дидактичної та методичної літератури з метою з'ясування сучасного стану проблеми дослідження; узагальнення підходів до класифікації текстових задач; моделювання педагогічних процесів; порівняльний аналіз результатів;

– *емпіричні методи:* педагогічне спостереження, бесіди з учителями шкіл, узагальнення власного педагогічного досвіду.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що розглянуті в роботі методичні особливості навчання учнів розв'язуванню текстових задач можуть бути використані вчителями математики. Запропоновані рекомендації сприятимуть підвищенню ефективності навчального процесу, формуванню мотивації до вивчення математики та розвитку математичної компетентності учнів та учениць.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі розглянуто актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, окреслено його теоретичну і практичну значущість.

У першому розділі «Теоретичні основи дослідження» проаналізовано роль та місце математичних задач у навчальному процесі, охарактеризовано основні типи текстових задач, наведено відповідні приклади.

У другому розділі «Методичні особливості навчання учнів розв'язуванню текстових задач в шкільному курсі математики», який є основним у роботі, з'ясовано роль та місце текстових задач у сучасних навчальних програмах і шкільних підручниках з математики, розглянуто основні підходи та методи організації навчального процесу, спрямовані на ефективне формування в учнів умінь і навичок розв'язування текстових задач.

У Висновках узагальнено результати проведеного аналізу проблеми навчання учнів розв'язуванню текстових задач у шкільному курсі математики. Сформульовано основні висновки щодо ефективності застосування запропонованих методичних підходів, окреслено перспективи подальшого вдосконалення методики формування в учнів умінь розв'язувати текстові задачі, наведено рекомендації для вчителів математики щодо підвищення результативності навчального процесу.

Апробація результатів дослідження. Основні положення дослідження були апробовані в ході педагогічної практики у закладах загальної середньої

освіти. Результати дослідження були обговорені на VII Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2025 Форум молодих дослідників» 28 листопада 2025 року м. Суми, Україна [48] та на Всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання», присвяченій 325-річчю Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, 18 листопада 2025 року, Чернігів. [49].

Загальний обсяг магістерської роботи – 89 сторінок. Список використаних джерел налічує 49 найменувань. У тексті роботи міститься 3 таблиці, 2 схеми та 2 рисунки.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей, вчителям математики, закладів загальної середньої освіти, методистам і тим, хто займається удосконаленням навчального процесу в галузі математичної освіти.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Математика як наука виникла з потреб практичної діяльності людей. Відірваність шкільного курсу математики від практики призводить до нерозуміння учнями мети вивчення формул, означень, теорем, і, як наслідок, виникає втрата інтересу до математики як інструменту пізнання навколишнього світу. Саме тому одним з основних завдань вчителя математики є демонстрація нерозривного зв'язку теорії з практикою, розкриття ролі математики в пізнанні навколишнього світу, інтеграція з іншими шкільними предметами. Одним із засобів реалізації цієї мети є текстові задачі. [8][21]

1.1. Поняття задачі в шкільному курсі математики

З терміном «задача» люди постійно стикаються в повсякденному житті як на побутовому, так і на професійному рівні. Кожному з нас доводиться вирішувати ті чи інші проблеми, які часто ми називаємо задачами. Це можуть бути як загальнодержавні задачі (освоєння космосу, виховання майбутніх поколінь, оборона країни тощо), задачі великих колективів і громад (побудова будинків, споруд, випуск газет тощо), так і задачі, які стоять перед окремими групами осіб чи перед конкретними особами.

До теперішнього часу немає єдиного трактування самого поняття «задача». У широкому сенсі слова під задачею розуміють деяку ситуацію, що вимагає дослідження і розв'язання її людиною (чи системою). Розв'язати задачу означає встановити зв'язок між заздалегідь диференційованими об'єктами (даними об'єктами і об'єктами, які нам потрібно відшукати, відомими і невідомими, умовою і висновком). [22][40]

Окремо стоять математичні задачі, розв'язування яких досягається спеціальними математичними засобами і методами. Серед них виділяють наукові задачі (наприклад, Велика теорема Ферма, проблема Гольдбаха тощо), вирішення яких сприяє розвитку математики та її застосувань, і навчальні задачі, які спрямовані на формування необхідних математичних знань, умінь і навичок

у різних груп учнів (школярів, слухачів курсів, студентів тощо) і мають на меті зміну якостей особистості учня (не знав - знаю, не вмів - вмію і т.п.). У шкільній практиці до навчальних задач відносять текстові (сюжетні) задачі та різні вправи й приклади.

Кожна математична задача містить умову і запитання. В умові задачі вказуються зв'язки між даними числами, а так само між даними і шуканими; ці зв'язки і визначають вибір відповідних математичних перетворень.

Саме ця послідовність перетворень – від вербальної умови до математичної інтерпретації і назад – формує в учня компетентності моделювання, аргументації й рефлексії. [23]

Навчальні математичні задачі є ефективним, а інколи незамінним засобом засвоєння учнями понять і методів шкільного курсу математики. Розв'язування таких задач служить досягненню всіх цілей, які ставляться перед навчанням математики.

Кожна математична задача містить умову і запитання. В умові задачі вказуються зв'язки між даними і шуканими величинами, які визначають вибір відповідних математичних моделей та перетворень. Саме ця послідовність перетворень – від вербальної умови до математичної інтерпретації і навпаки формує в учня уміння моделювати, аргументувати й оцінювати результат.

1.2. Роль і функції задач

У навчанні математики задачі є й предметом (через набір математичних понять і методів, що в них втілені), і засобом навчання (інструментом формування умінь, мислення й компетентностей). Кожна конкретна навчальна математична задача спрямована на досягнення найчастіше не однієї, а декількох педагогічних, дидактичних або навчальних цілей. Вони визначаються як змістом задачі, так і призначенням, яке надає задачі вчитель.

Дидактичні цілі визначають роль і функції задач у навчанні математики: *навчальну, розвивальну, виховну і контролюючу*. [24][39]

Навчальна функція задач (зокрема, пізнавальна та дидактична) пов'язана з формуванням в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. Через систему задач учні не лише навчаються застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються у потребі здобуття нових знань. У контексті вивчення текстових задач ця функція передбачає застосування в основній школі арифметичних та алгебраїчних методів (розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем, робота з параметрами, дослідження функцій), а у старшій – також методів математичного аналізу (пошук похідної для знаходження екстремумів, використання інтегралу для обчислення площ і накопичених величин). [25]

При реалізації даної функції на практиці задачі потрібно структурувати за принципом «від простого до складного», мають бути типові та репродуктивні задачі для відпрацювання основних прийомів, вправи для повторення і закріплення процедурних навичок. [26]

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток логічного, алгоритмічного і творчого мислення учнів та формування у них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, вміння моделювати ситуацію тощо. Задачі, які забезпечують цю функцію часто мають нестандартну постановку, вимагають вибору стратегії або комбінування методів (аналітичного, графічного, чисельного), передбачають використання кількох підходів до розв'язання, порівняння їх ефективності тощо. Для реалізації даної функції учитель може використовувати проблемні питання, відкриті задачі, проєктні мінімальні дослідження; сприяти рефлексії (учні пояснюють вибір стратегії). [27][28]

Виховна функція задач спрямована на формування в учнів наукового світогляду, розвитку пізнавального інтересу та позитивних рис особистості (наполегливості, волі, відповідальності за доручену справу та ін.), поваги до процесу аргументованого доведення, економічного, екологічного, естетичного виховання. Для реалізації даної функції учитель може пов'язати задачу з

реальними соціальними, екологічними, моральними чи культурними контекстами (наприклад, розрахунок енергозбереження в домогосподарстві, аналіз витрат).

Прикладом задачі, що виконує виховну функцію є наступна: «Школа планує скоротити енергоспоживання на 15%, купивши LED-лампи. Розрахуйте термін окупності інвестиції, якщо економія щомісяця складає ...».

Для реалізації даної функції учитель має підбирати задачі за фабулою близькі до життя учнів; використовувати міжпредметні зв'язки; заохочувати дискусію про практичні наслідки рішень.

Контролююча функція задач спрямована на встановлення рівня навченості, загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом в цілому. В задачах для контролю повинні чітко відображатися очікувані навчальні результати (мають бути чіткі критерії оцінювання), ефективно поєднуватися кількісна (коректність відповіді) та якісної (аргументація, моделювання, рефлексія) перевірка.

Жодна із названих функцій не може виступати ізольовано від інших, ефективна задача одночасно може виконувати кілька функцій: наприклад, прикладна текстова задача про оптимізацію витрат виконує навчальну (алгебра/аналіз), розвивальну (моделювання), виховну (економічна грамотність) і контролюючу (перевірка рівня) функції. В кожній конкретній задачі вчитель має виділяти провідну функцію і за належної цільової установки домагатися її реалізації в першу чергу й забезпечити відповідні прийоми оцінювання. Окрім того, при плануванні важливо зіставляти задачі з потрібними компетентностями: математичною, цифровою, інформаційною, соціальною та комунікативною (наприклад, навчальну і розвивальну або розвивальну і виховну).

Кожна з основних функцій задач важлива в загальній системі навчання, але в останній час особлива увага приділяється розвивальній функції. Не випадково Д. Пойя, Е. Резерфорд, Н. Бор, А. Ейнштейн та інші видатні вчені зазначали, що задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань і

тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати метод підходу до явищ, що вивчаються, та дослідницький стиль розумової діяльності. [46]

Таким чином, функції задач (навчальна, розвивальна, виховна і контролююча) утворюють єдину систему педагогічного впливу. Для досягнення повноцінного освітнього результату кожна з цих функцій повинна бути усвідомлено врахована при доборі задач, їх формулюванні, методах навчання й оцінювання. Текстові задачі повинні одночасно закріплювати предметні знання й розвивати компетентності, виховувати відповідальність та сприяти достовірному контролю навчальних досягнень.

1.3. Класифікація математичних задач

Розглянемо підходи щодо класифікації математичних задач. Спочатку необхідно визначити ту ознаку, по якому будемо класифікувати.

Залежно від ролі (функції), яку відіграють математичні задачі у навчальному процесі, їх можна поділити на задачі з **дидактичними, пізнавальними та розвивальними функціями**.^[8]

Задачі з **дидактичними функціями** (звідні, тренувальні) використовуються для полегшення введення або закріплення досліджуваних теоретичних відомостей. Це задачі на безпосереднє застосування досліджуваної теорії, закріплення основних понять і фактів.

Задачі з **пізнавальними функціями** (теоретичні, практичні) містять нову для учнів навчальну інформацію. Вони орієнтовані на більш глибоке засвоєння основного матеріалу шкільного курсу, в процесі їх вирішення учні знайомляться з новими в пізнавальному відношенні теоретичними відомостями: новими поняттями, фактами, методами розв'язання задач. Задачі з дидактичними та пізнавальними функціями відносять до задач навчального характеру. Виділяють наступні види математичних задач за їх роллю у навчанні:

- задачі для засвоєння математичних понять;
- задачі для оволодіння математичної символікою,

- задачі для навчання доведенням;
- задачі для формування математичних умінь і навичок,
- задачі, що передують вивчення нових математичних фактів, що створюють проблемну ситуацію.

До задач з **розвивальними функціями** належать такі задачі, зміст яких відходить від основного курсу й певним чином ускладнює питання програми. Це задачі на кмітливість, розвиток математичної інтуїції, просторового уявлення і уяви, логічного мислення (зокрема, нестандартні задачі).

Одне з основних призначень задач полягає в тому, щоб активізувати розумову діяльність учнів на уроці. Математичні задачі повинні, перш за все, будити думку учнів, змушувати її працювати, вдосконалюватися, розвиватися. Говорячи про активізацію мислення учнів, не можна забувати, що при вирішенні математичних задач учні не тільки виконують побудови, перетворення, запам'ятовують формулювання, а й навчаються чіткому мисленню, вмінню розмірковувати, зіставляти і протиставляти факти, знаходити в них спільне і відмінне, робити правильні умовиводи.

Наведемо види задач, які активізують і розвивають мислення учнів:

- задачі та вправи, що включають елементи дослідження,
- задачі на доведення,
- задачі та вправи на відшукування помилок,
- цікаві задачі,
- відшукування різних варіантів розв'язання і вибір кращого з них,
- складання задач учнями.^[8]

За **змістом** задачі поділяють на **практичні** (задачі з практичним змістом) і **суто математичні**.^[40] При розв'язуванні практичних задач використовується метод математичного моделювання, суть якого полягає в наступному:

а) реальна ситуація «переводиться» на математичну мову і будується математична модель (рівняння, система, нерівність);

б) виконується дослідження побудованої математичної моделі з метою отримати результат;

в) отриманий результат інтерпретується й аналізується.

Залежно від того, яку **вимогу** поставлено в задачі, розрізняють задачі на **обчислення, доведення, побудову та дослідження**.^[38]

У задачах на **обчислення** потрібно знайти число (або множину чисел) за даними числами і умовами, якими вони пов'язані між собою та з невідомими числами. До таких задач належать текстові задачі й різні приклади (задачі на розв'язування рівнянь, нерівностей, їхніх систем тощо).

В задачах **на доведення** потрібно довести сформульоване в них твердження. Цим вони не відрізняються від теорем. Тому не дивно, що те саме твердження подається в різних підручниках або під рубрикою теорем, або під рубрикою задач. Теоремами зазвичай вважають найважливіші твердження, які широко використовують під час розв'язування різних задач і доведення інших теорем. Водночас на окремі задачі доводиться посилатися як на теореми.

До задач **на побудову** належать як геометричні задачі, в яких потрібно побудувати певну фігуру, що задовольняє умову задачі, так і задачі на побудову графіків функцій, діаграм, перерізів багатогранників та інших тіл.

В задачах **на дослідження** потрібно дослідити що-небудь.

Залежно від кількості розв'язків задачі на обчислення і побудову бувають **визначені і невизначені**. Визначеними називають задачі, які мають скінченну кількість розв'язків, а невизначеними – ті, які мають безліч розв'язків.

За **характером даних** розрізняють задачі із зайвими і суперечливими даними. За **характером розумової діяльності** розрізняють **стандартні і нестандартні** задачі.^[8] До **стандартних** належать задачі, які мають певний алгоритм розв'язування. Задачі, які не мають загального алгоритму розв'язування, називаються **нестандартними**. Нестандартні задачі мають чітко виражену розвиваючу функцію. Функції стандартної задачі залежать від того, якими теоретичними знаннями володіють учні до її розв'язання. Якщо

учням відомий алгоритм розв'язування цієї задачі, то її можна вважати шаблонною. Якщо до моменту розв'язування стандартної задачі загальний метод її вирішення не відомий, то така задача є нестандартною (при її розв'язуванні необхідно виявити загальний метод розв'язання або застосувати будь-який штучний прийом). Нестандартні та нешаблонні задачі (внаслідок спільності їх функції у навчанні) можна об'єднати в групу творчих задач.

По **цільм застосування задач** у навчальному процесі виділяють: підготовчі задачі, задачі на закріплення, задачі на отримання нових знань та задачі на розвиток мислення.^[8]

За **складністю** математичні задачі поділяють на *прості і складні*.^[8] До простих задач відносять задачі, які можна розв'язати однією дією. Задачі, які складені з декількох простих і тому розв'язуються за допомогою двох і більше дій, називають складними задачами.

1.4. Текстові задачі у шкільному курсі математики

Як зазначалося вище, навчальні математичні задачі розрізняються за змістом або характером їхніх об'єктів. В одних задачах всі об'єкти математичні (числа, геометричні фігури, функції тощо), в інших об'єктами є реальні предмети (люди, тварини, автотранспортні і механічні засоби, сплави, рідини і т.д.) або їх властивості і характеристики (кількість, вік, швидкість, продуктивність, довжина, маса тощо). Задачі, всі об'єкти яких математичні (доведення теорем, обчислювальні вправи, встановлення ознак досліджуваного математичного поняття тощо), як зазначалось вище, є суто математичними задачами.^[8]

Математичні задачі, в яких є хоча б один об'єкт, що є реальним предметом, називають *практичними, текстовими або сюжетними*. Перераховані назви беруть початок від способу запису (задача представлена у вигляді тексту), сюжету (описуються реальні об'єкти, явища, події), характеру математичних дій та перетворень (встановлюються кількісні

відношення між значеннями деяких величин, пов'язані частіше за все з обчисленнями). Останнім часом найбільш поширеним є термін «текстова задача». У навчально-методичній літературі *текстовою задачею* називають опис деякої ситуації (явища, процесу) природною та (або) математичною мовою з вимогою або дати кількісну характеристику якогось компонента цієї ситуації (визначити числове значення деякої величини по відомим числовим значенням інших величин і залежностей між ними), або встановити наявність або відсутність деякого відношення між її компонентами або визначити вид цього відношення, або знайти послідовність необхідних дій.^[38]

Дотримуючись сучасної термінології, можна стверджувати, що текстова задача являє собою словесну модель ситуації, явища, події, процесу тощо. Як у будь-якої моделі, у текстовій задачі описується не вся подія або явище, а лише їх кількісні та функціональні характеристики. Основна особливість текстових задач полягає в тому, що в них не вказується прямо, яка саме дія (або дії) повинна бути виконана для отримання відповіді на вимогу задачі.^[38]

Текстова задача – це цілісна навчальна одиниця, що в усній або письмовій формі подає ситуацію з реального або штучного контексту й вимагає від учня виконати наступні дії:

- виокремити й структурувати дані,
- вибрати математичну модель (рівняння чи систему рівнянь, функцію, нерівність, похідну, інтеграл),
- провести обчислення та інтерпретувати отриманий результат у вихідному контексті.

У кожній текстовій задачі можна виділити:

а) числові значення величин, які називаються даними, або відомими (їх повинно бути не менше двох);

б) деяку систему функціональних залежностей в неявній формі, що пов'язують шукані величини з даними і дані між собою (словесний матеріал, який вказує на характер зв'язків між даними і шуканими);

в) вимога або питання, на який треба знайти відповідь.

Числові значення величин та існуючі між ними залежності, тобто кількісні та якісні характеристики об'єктів задачі і відношення між ними, називають *умовою* (або умовами) задачі. У задачі може бути не одна, а декілька умов, які називають елементарними. Вимоги можуть бути сформульовані як у запитальній, так і в оповідальній формах, їх також може бути декілька.

Величину, значення якої потрібно знайти, називають *шуканою величиною*, а числові значення шуканих величин – *шуканими*, або *невідомими*. Систему взаємопов'язаних умов і вимог називають *моделлю задачі*. Для того щоб усвідомити структуру задачі, треба виявити її умови та вимоги, тобто побудувати модель задачі.

Основним методом розв'язування текстових задач є *метод математичного моделювання*, що передбачає створення моделі задачі (рівняння, система рівнянь тощо), розв'язання цієї моделі та її інтерпретацію.

Наведемо приклади текстових задач.

Приклад 1.1. Василь і Петро розділили між собою 39 горіхів. Число горіхів, що дісталися кожному з них, менше подвоєного числа горіхів, що дісталися іншому. Квадрат третини числа горіхів, що дісталися Петі, менше числа горіхів, що дісталися Васі. Скільки горіхів у кожного?

Розв'язання. Нехай x і y кількість горіхів, що дісталися відповідно Василя і Петра. Тоді з умов задачі випливає, що:

$$\begin{cases} x + y = 39, \\ x < 2y, \\ y < 2x, \\ \frac{y^2}{9} < x. \end{cases}$$

Складність завдання – у розв'язанні системи. При цьому ми повинні пам'ятати, що x та y – цілі додатні числа. З рівняння маємо: $x = 39 - y$. Для y будемо мати систему з трьох нерівностей:

$$\begin{cases} 39 - y < 2y, \\ y < 78 - 2y, \\ \frac{y^2}{9} < 39 - y. \end{cases}$$

З перших двох нерівностей знайдемо $y > 13, y < 26$. Останню нерівність перепишемо у вигляді $y^2 + 9y - 351 < 0$. Можна, звичайно, вирішити цю нерівність. Але краще вчинити інакше. Оскільки y - ціле додатне число, то при $y=14$ будемо мати $14^2 + 9 \cdot 14 - 351 = -29 < 0$, А при $y=15$ буде $15^2 + 9 \cdot 15 - 351 = 9 > 0$, То $y \leq 14$. Таким чином, $y=14, x=25$.

Відповідь: 25 і 14 горіхів.

Приклад 1.3. Пункт А знаходиться на березі річки, ширина якої 400 м, швидкість течії 3 км / ч. Пункт У розташований нижче за течією в 4 км від А (якщо В 1 - проекція В на берег, на якому розташований А, то $AB_1 = 4$ км), на відстані 2 км 680 м від протилежного берега (А і В - по різні боки річки). Турист виїхав з А на човні, перетнув річку, залишив на березі човен, дійшов до В і повернувся тим же шляхом. На всіх ділянках, по річці і по суші, він рухався прямолінійно. Швидкість човна в стоячій воді 5 км / год, швидкість пересування туриста пішки 3,2 км / ч. За який найменший час міг виконати свою подорож турист?

Розв'язання. Нехай турист приплив в точку С на протилежному березі. Причому $CD=x$, де D - пункт, протилежний А (рис. 1.1) (AD перпендикулярний берегам). Якщо час на проходження ділянки AC одно t_1 , то на ділянці CD можна знайти таку точку C_1 , що $AC_1 = 5t_1, C_1C = 3t_1$.

Це означає, що вектор $\overline{AB}$ - Шлях, реально пройдений човном, ми представляємо у вигляді суми двох векторів: $\overline{AC_1}$ - шлях, пройдений човном, якщо б не було течії, і $\overline{CC_1}$ - шлях човна під впливом одного течії.

Записавши для трикутника AC_1D теорему Піфагора, отримаємо

$$(5t_1)^2 - (x - 3t_1)^2 = (0,4)^2$$

або

$$16t_1^2 + 6xt_1 - x^2 - 0,16 = 0 \quad (1.1)$$

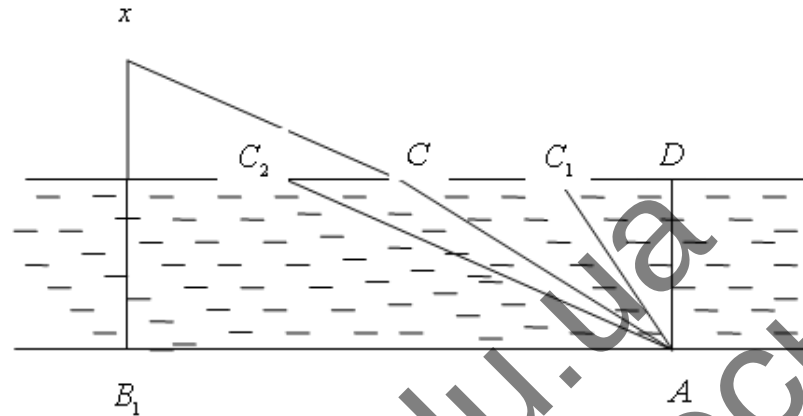


Рис. 1.1

Аналогічно, якщо t_2 - час на шляху від С до А, визначивши точку нижче С так, що $CC_2 = 3t_2$, $C_2A = 5t_2$, Отримаємо для t_2 рівняння

$$16t_2^2 - 6xt_2 - x^2 - 0,16 = 0 \quad (1.2)$$

Оскільки t_1 і t_2 – додатні корені рівнянь (1.1) і (1.2) відповідно, то

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{8} \sqrt{25x^2 + 2,56}$$

- час пересування на човні. Час руху по суші

$$\frac{2CB}{3,2} = \frac{\sqrt{(2,68)^2 + (4-x)^2}}{1,6}$$

Таким чином, час, витрачений на подорож, буде:

$$T = \frac{1}{8} \sqrt{25x^2 + 2,56} + \frac{5}{8} \sqrt{(2,68)^2 + (4-x)^2} = \frac{5}{8} (\sqrt{x^2 + (0,32)^2} + \sqrt{(2,68)^2 + (4-x)^2})$$

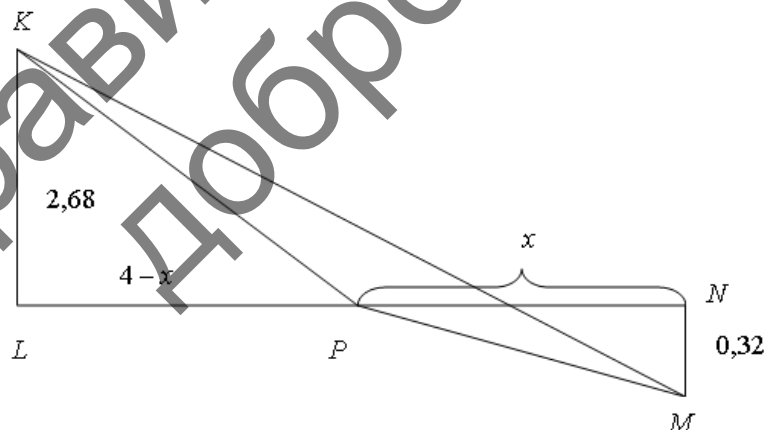


Рис. 1.2.

Розглянемо два прямокутні трикутника PNM і KLP: катети одного x і $0,32$, іншого $(4-x)$ і $2,68$, розташованих, як показано на рисунку 1.2. Тоді

$$PM = \sqrt{(0,32)^2 + x^2}, \quad KP = \sqrt{(2,68)^2 + (4 - x)^2}$$

Довжина ламаної KPM буде мінімальною, якщо точка P лежить на відрізку KM. Але

$$KM = \sqrt{4^2 + (0,32 + 2,68)^2} = 5$$

Таким чином, мінімальний час буде:

$$T_0 = \frac{5}{8} \cdot 5 = 3 \frac{1}{8} (\text{Ч}).$$

Відповідь: Найменший час, за який турист міг виконати свою подорож $3 \frac{1}{8}$ год.

1.5. Основні типи текстових задач в шкільному курсі математики та підходи до їх розв'язання

Класифікація текстових задач є важливим теоретичним аспектом, який допомагає систематизувати різноманітність математичних завдань, що застосовуються в шкільному курсі алгебри, та визначити їх специфіку з огляду на навчальні цілі і методику викладання. Розуміння класифікації дозволяє вчителю більш свідомо підбирати задачі, формувати навчальні комплекси та планувати послідовність засвоєння матеріалу.

Уміння розв'язувати текстову задачу залежить від багатьох чинників. Перед усім необхідно навчитися розрізняти основні типи задач і вміти розв'язувати найпростіші із них. Традиційно у курсі алгебри основної школи виділяють наступні типи текстових задач [44]:

- задачі на рух (одного чи кількох об'єктів, в одному чи в різних напрямках, за і проти течії);
- задачі на сумісну роботу;
- задачі на проценти;
- задачі на розчини, суміші (сплави).

У старшій школі до таких задач доєднуються задачі, при розв'язуванні яких використовуються поняття похідної та інтеграла (Рис. 1.1).



Рис. 1.1. Основні типи текстових задач

Найпростіші **задачі на рух** розглядаються ще у курсі математики молодших класів. В результаті в учнів формуються первинні уявлення про швидкість зближення і швидкість віддалення, про додавання та віднімання швидкостей (наприклад, рух за течією чи проти течії річки). Основними методами розв'язування подібних задач є арифметичний метод (є основним у 5-6 класах) та аналітичний метод (7-11 класи). У обох випадках використовується метод математичного моделювання для створення відповідної математичної моделі.

При розборі задачі корисно ставити наступні питання:

1. Як рухаються тіла відносно один одного (в одному напрямку, в різних).
2. Якою дією знаходиться швидкість (додаванням, відніманням)

Слід підкреслити, що при розв'язуванні задач на рух вважають, що швидкості рухомих тіл сталі на всьому проміжку шляху, тобто рух рівномірний та відбувається по прямій, зустріч відбувається в точці тощо. [23]

Розрізняють наступні види задач на рух (Рис.1.2)



Рис. 1.2. Види задач на рух

Якщо рух на окремих ділянках вважається рівномірним, то пройдений шлях визначається за формулою $S=vt$, де v — швидкість руху тіла, а t — час руху. Повороти тіл, що рухаються, вважаються миттєвими, тобто проходять без затрат часу, швидкість при цьому також змінюється миттєво.

При рівноприскореному русі найчастіше використовують дві формули, що зв'язують час t , пройдений шлях S , початкову швидкість v_0 , прискорення a і швидкість V : $S=v_0t+at^2/2$, $a=(v-v_0)/t$, де $a>0$, якщо рух рівноприскорений, і $a<0$, якщо рух рівносповільнений.

При зустрічному русі необхідно врахувати наступне:

- 1) якщо два тіла рухаються назустріч одне одному з двох пунктів, то до зустрічі вони разом проходять усю відстань між цими пунктами.
- 2) при одночасному виході тіл з двох пунктів час їх руху до моменту зустрічі однаковий для обох тіл, і рівний $S/(v_1 + v_2)$.
- 3) за одиницю часу рухомі тіла зближаються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (з розрахунку на цю саму одиницю часу).

Приклад 1.3. З пунктів А і В, відстань між якими 160 км, одночасно на зустріч один одному виїхали велосипедист і мотоцикліст. Через дві години вони зустрілися і продовжили свій рух. Через півгодини після зустрічі велосипедисту залишилося проїхати відстань у 11 раз більшу ніж залишилося проїхати мотоциклісту. З якою швидкістю рухався мотоцикліст?

Розв’язання. Позначимо швидкість мотоцикліста через x км/год, а велосипедиста – відповідно y км/год. Зустрівшись через 2 год, велосипедист і мотоцикліст проїхали всю відстань від А до В (км), отже $(x+y) \cdot 2 = 160$.

За півгодини велосипедист проїхав $\frac{y}{2}$ (км), а мотоцикліст – $\frac{x}{2}$ (км). Велосипедисту залишилося проїхати $2x - \frac{y}{2}$ (км), а мотоциклісту $2y - \frac{x}{2}$ (км).

За умовою задачі $2x - \frac{y}{2}$ в 11 раз більше, ніж $2y - \frac{x}{2}$. Складемо рівняння:

$$2x - \frac{y}{2} = 11(2y - \frac{x}{2}).$$

Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 160, \\ 2x - \frac{y}{2} = 11(2y - \frac{x}{2}) \end{cases}$$

Звідки $x=60$, $y=20$.

Відповідь: 60 км/год.

При зустрічному русі в одному напрямку є очевидними наступні положення:

1) одне рухоме тіло може догнати друге лише тоді, коли швидкість його більша за швидкість тіла, яке рухається попереду.

2) якщо два тіла, відокремлені певною відстанню, рухаються в одному напрямку, ця відстань з кожною годиною (хвилиною, секундою) зменшується і перетворюється в нуль, коли тіл з більшою швидкістю доганяє тіло, яке має меншу швидкість. Зменшення відстані між тілами за одиницю часу дорівнює різниці швидкостей тіл.

3) при одночасному виході з одного й того ж самого пункту й руху в одному напрямку тіл, що мають неоднакову швидкість, відстань між ними з кожною

годиною (хвилиною, секундою) збільшується. Збільшення відстані між рухомими тілами за одиницю часу дорівнює різниці їх швидкостей.

4) одне тіло наздожене або випередить друге за стільки годин (хвилин, секунд), скільки разів різниця між швидкостями цих тіл міститься у відстані, що їх розділяє. Якщо $v_1 > v_2$, то перше тіло наздожене друге за час, рівний $S/(v_1 - v_2)$.

При розв'язуванні задач на рух за і проти течії враховується наступне: якщо тіло рухається за течією річки, то його швидкість v (відносно берега) складається із швидкості тіла в стоячій воді $v_{вл}$ (власна швидкість тіла) і швидкості течії річки $v_{теч}$: $v = v_{вл} + v_{теч}$, а якщо тіло рухається проти течії річки, то його швидкість (відносно берега) $v = v_{вл} - v_{теч}$. Якщо в умові задачі мова йде про рух плотів, то вважають, що пліт рухається зі швидкістю течії.

Приклад 1.4. За 4 години за течією річки човен проходить той же шлях, що й за 5 годин проти течії. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії річки, якщо шлях 70 км човен подолає за течією річки за 3 год 30 хв.

Розв'язання. Позначимо шукані й допоміжні невідомі величини. Нехай x – власна швидкість човна, а y – швидкість течії. Тоді $x+y$ – швидкість човна за течією, $x-y$ – швидкість човна проти течії.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4(x+y) = 5(x-y), \\ 3,5(x+y) = 70. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases} 4x + 4y - 5x + 5y = 0, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 9y = 0, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

$$x=18, y=2.$$

Відповідь: власна швидкість човна 18 км/год, швидкість течії 2 км/год.

Слід зазначити, що задачі на знаходження миттєвої швидкості та прискорення за законом руху у старшій школі розв'язуються із використанням похідної (інтеграла).

Текстові задачі на відсотки (процентні розрахунки) з'являються ще у 5-6 класах. Відсоток - це сота частина. Процентні обчислення ґрунтуються здебільшого на таких найпростіших способах розв'язання:

- 1) зведенням до одиниці;
- 2) зведенням до дробів;
- 3) способом пропорцій;
- 4) із використанням рівнянь;
- 5) із використанням готових формул.

Добре, якщо учні можуть розв'язувати задачу на проценти (як і будь-яку іншу) різними способами.

До основних задач на відсоткові розрахунки відносять наступні:

- 1) знаходження проценту від числа;
- 2) знаходження числа за даним числом його процентів;
- 3) знаходження процентного відношення двох чисел.

Проілюструємо наведені способи розв'язування та основні типи задач на проценти на прикладах.

Приклад 1.5. До овочевого магазину завезли 800 кг яблук, при чому 62% з них першого сорту. Скільки кілограмів яблук першого сорту завезли до магазину?

Розв'язання. Дана задача зводиться до знаходження % від числа.

I спосіб (зведення до одиниці).

Знайдемо спочатку, скільки кілограмів відповідає одному процентові, тобто соту частину всіх яблук: $800:100=8\text{кг}$.

Щоб знайти 62%, потрібно виконати множення: $8\cdot 62=496\text{кг}$.

II спосіб (зведення до дробів).

Подамо спочатку проценти у вигляді десяткового або звичайного дробу і знайдемо дріб від числа 800 дією множення цього числа на дріб:

$$62\% = \frac{62}{100} = 0,62; \quad 800 \times 0,62 = 496 \text{ кг.}$$

III спосіб (спосіб пропорцій).

$$800 \text{ кг становить } 100\%; \quad \frac{800}{x} = \frac{100}{62};$$

$$x \text{ кг становлять } 62\%; \quad x = 800 \cdot \frac{62}{100} = 496 \text{ кг.}$$

IV спосіб (за допомогою рівнянь).

Нехай x кг – кількість яблук першого сорту. Тоді

$$x \cdot \frac{100}{800} = 62; \quad x = 62 \cdot 8 = 496 \text{ кг.}$$

V спосіб (за формулою).

$$b = ap/100,$$

де b – шукане число; a – дане число; p – кількість процентів, які потрібно знайти від числа a .

$$\text{Отже, } x = 800 \cdot \frac{62}{100} = 496 \text{ кг.}$$

Найкращим методичним варіантом навчання учнів розв'язування задач на проценти є поступове ознайомлення з різними способами розв'язування того самого виду задач упродовж вивчення усього шкільного курсу математики.

Задачі на спільну роботу шкільного курсу математики є одними з найважчих для учнів. Вони потребують цілкового розуміння суті взаємних зв'язків між компонентами, застосування як арифметичних, так і алгебраїчних методів. Для задач на спільну роботу часто не вказується обсяг роботи, який, попри це, безумовно потрібний для подальших розрахунків. Доводиться або штучно домовлятися, що він дорівнює одиниці (тобто виконується одна робота), або вводити іншу ненульову сталу, яка наприкінці задачі зникне сама собою (це складніше зробити і теж доволі штучно, але таким чином зберігається реальний сенс задачі).

Арифметичний метод розв'язання задач на спільну роботу має досить широкий спектр варіацій, що підпорядковуються принципам здорового глузду та

можуть бути застосовані до великої кількості різноманітних задач, навіть «цікавих» та конкурсних.

Власне, для розв'язання простих задач можна не залучати таблицю, а просто виконувати дії в певній послідовності згідно певного алгоритму. Заповнення таблиці для задач на спільну роботу переслідує кілька цілей: співставлення тексту умови з формальними характеристиками процесу роботи, поданими в таблиці, сприяє розвитку вміння інтерпретувати умови задачі в потрібному ракурсі;

- заповнення таблиці надає розв'язанню задачі більшої наочності, бо стає однією з цілей розв'язання; до того ж, за допомогою таблиці легше помітити необхідність перетворення іменованих чисел;

- вміння заповнювати таблиці, яке набувається під час роботи над задачами в 6-му класі, стане у нагоді і тоді, коли в комірках таблиці будуть розташовані змінні, а сама таблиця слугуватиме інструментом для складання рівнянь.

Приклад 1.6. Один тракторист обробляв поле 9 годин, потім до нього приєднався другий тракторист. За 7 годин спільної роботи вони закінчили обробляти поле. За скільки годин впорався би з цією роботою кожен тракторист, якщо першому з них потрібно було б на 3 години більше, ніж другому?

Складемо таблицю:

	При роботі взагалі		За даного режиму роботи		
	Перший тракторист	Другий тракторист	Перший тракторист	Другий тракторист	Разом
Часу на роботу, годин	$x+3$	x	16	7	
Продуктивність, частина поля зхв годину	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x}$	
Кількість роботи, частина поля	1	1	$16 \times \frac{1}{x+3}$	$7 \times \frac{1}{x}$	1

Рівняння, що конструюється за допомогою такої таблиці, базується не на додаванні продуктивності обох працівників, а на додаванні частин виконаної роботи, і має вигляд:

$$16 \cdot \frac{1}{x+3} + 7 \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Модифікована таблиця станеться в нагоді і для задач на рух, якщо вони розраховані на аналогічний принцип додавання частин шляху.

Якщо ж умови задачі більш варіативні, що часто властиво задачам на спільну роботу, схожість двох означених класів задач зникає. Так, в задачах на спільну роботу можуть зустрічатися числові послідовності і альтернативні умови, для розв'язання можуть бути застосовані системи лінійних і нелінійних рівнянь. До кожної такої задачі необхідно буде знайти певний комплексний підхід залежно від того, композицією яких задач певних класів вона є.

Окремо треба спинитися на так званих задачах на **змішування (суміші, розчини, сплави)**, які досить часто зустрічаються на практиці, а також під час вивчення хімії, фізики і, як показує досвід, викликають у школярів певні труднощі при розв'язанні.

В умовах задач на розчини фігурує термін «концентрація». Необхідно пояснити зміст цього поняття. Якщо m – маса розчиненої речовини, n – маса розчину, то відношення $\frac{m}{n}$, подане в процентах, називають концентрацією

Якщо позначити концентрацію буквою C , то для її визначення можна скористатися формулою:

$$C = \frac{m}{n} \cdot 100\%$$

Концентрацію розчину можна виразити не тільки в процентах, а й у частинах. Кажуть, наприклад, що концентрація солі у морській воді дорівнює $\frac{1}{20}$ (за масою).

Для зручності розв'язування задач на розчини можна користуватися формулою, яку неважко вивести. Нехай маємо два розчини однієї і тієї самої речовини. Концентрація першого розчину дорівнює C_1 , а його маса n_1 ; відповідно для другого розчину C_2 і n_2 . Важливо підкреслити, що n_1 і n_2 мають бути в одних і тих самих одиницях.

За формулою $C = \frac{m}{n} \cdot 100\%$ знаходимо масу речовини в розчині: $m = \frac{n}{100} \cdot C$. Маса речовини в першому розчині: $m_1 = \frac{n_1}{100} \cdot C_1$, у другому розчині: $m_2 = \frac{n_2}{100} \cdot C_2$. Отже, у розчині масою $n_1 + n_2$ маса речовини становить

$$\frac{n_1}{100} \cdot C_1 + \frac{n_2}{100} \cdot C_2$$

тобто концентрація C суміші дорівнює

$$C = \frac{\frac{n_1 C_1}{100} + \frac{n_2 C_2}{100}}{n_1 + n_2} \cdot 100$$

$$C = \frac{n_1 C_1 + n_2 C_2}{n_1 + n_2}$$

Зазначимо, що концентрація суміші, утвореної з k розчинів однієї й тієї самої речовини, обчислюється за формулою:

$$C = \frac{n_1 C_1 + n_2 C_2 + \dots + n_k C_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Під час розв'язування задач не обов'язково користуватися готовою формулою. Можна поступово виконувати розрахунки, пов'язані з визначенням маси розчину і маси розчиненої речовини, й користуватися поняттям концентрації.

Приклад 1.7. У посудині 10,5 л 40%-ного розчину сірчаної кислоти. Скільки треба влити в посудину 75%-ного розчину тієї самої кислоти, щоб вийшов 50%-ний розчин?

Розв'язання. Позначивши через x л шуканий об'єм 75%-ного розчину кислоти, складаємо рівняння:

$$\frac{10,5 \cdot 40 + 75x}{10,5 + x} = 50$$

звідки $x=4,2$ л.

Відповідь: 4,2 л.

Розв'язуючи задачі на концентрацію кислот і сплавів, треба пам'ятати, що міцність кислоти або спирту звичайно виражається в сотих долях, або процентах, які в цьому випадку називають градусами. У задачах на сплави сплав можна розглядати як розчин, в якому один з компонентів (довільний) є розчинник, а другий розчинна речовина.

Серед задач на сплави окреме місце займають задачі на «проби». Слід пояснити, що пробою дорогоцінних металів називається вагомий вміст золота, срібла або платини в одиниці сплаву, з якого виготовлено ювелірний виріб або викарбовано монету (від латинського слова *probo* – випробовую, оцінюю).

Проби сплавів дорогоцінних металів, з яких дозволяється виготовляти ювелірні вироби, в кожній країні встановлюються законодавчим шляхом. У більшості країн загальноприйнятою є метрична система позначення проб. За цією системою, пробою є число грамів золота, срібла або платини в 1000 г лігатурної (ligo – зв’язую) маси сплаву, причому чистому металу відповідає тисячна проба. Отже, пробою називається число грамів чистого золота, срібла або платини в одному кілограмі сплаву.

Приклад 1.8. Є сплав 850-ї проби, маса якого становить 1500г. Скільки до нього треба додати сплаву 920-ї проби, щоб вийшов сплав 900-ї проби?

Розв’язання. Нехай сплаву 920-ї проби треба взяти x г.

Складаємо рівняння: $\frac{1500 \cdot 850 + 920x}{1500 + x} = 900$, звідки $x = 3750$ г.

Відповідь: 3750 г.

У задачах на розчини (сплави) часто фігурують відношення, в яких певні метали входять у сплав. Наприклад, якщо сказано, що деякий сплав складається з двох металів, які входять у відношенні 2:3, то концентрація першого металу в цьому сплаві дорівнює $\frac{2}{5}$, а другого $\frac{3}{5}$. Розрахунки проводяться за формулою у частинах.

Розглянемо наприкінці текстові задачі на відшукування невідомих чисел.

Приклад 1.9. Знайдіть двоцифрове число, у якого різниця між останньою цифрою й першою рівна 3, а добуток самого числа на суму його цифр – 70.

Розв’язання. Нехай у шуканому числі x десятків і y одиниць. Тоді це число можна записати у вигляді $10x + y$. За умовою задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ (10x + y) \cdot (x + y) = 70, \end{cases}$$

яка зводиться до розв’язування квадратного рівняння: $22x^2 + 39x - 61 = 0$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{61}{22}$. Корінь x_2 не задовольняє умову задачі, отже, $x = 1$, тобто у шуканому числі один десяток. Число одиниць дорівнює 4, а шукане двоцифрове число є 14.

Перевірка: Сума цифр шуканого числа дорівнює 5, а добуток числа на суму його цифр дорівнює 70, як і дано в умові задачі.

Відповідь: 14.

Ефективною методикою навчання учнів розв'язуванню текстових задач є використання комплексного підходу до навчального процесу. Це означає, що має чітко визначатися мета навчання учнів розв'язування задач того чи іншого виду або оволодіння певним методом, ретельно розроблятися система самих задач, які будуть розв'язуватись. [5]

Висновки до розділу 1

У навчанні математики задачам в цілому і текстовим задачам зокрема, відведено особливу роль. З одного боку, вони становлять специфічну частину програмного матеріалу, який учні мають засвоїти, а з іншого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання й розвитку школярів. Отже, задачі у навчанні математики є й предметом вивчення, і засобом навчання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Аналіз модельних та навчальних програм з тематики дослідження

Вивчення математики в основній школі має забезпечити базову математичну підготовку учнів, що спрямована на їх загальний розвиток, формування математичної грамотності та є достатньою для реалізації обраного шляху подальшого здобуття освіти.

Зміст математичної освіти в основній школі структурується за такими змістовими лініями: *числа; вирази; рівняння і нерівності; функції; геометричні фігури; геометричні величини; елементи комбінаторики; початки теорії ймовірностей та елементи статистики*. Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на певному ступені шкільної математичної освіти, вікових особливостей і зумовлених ними навчальних можливостей школярів. В основній школі виокремлюються такі два ступені: 5-6 класи; 7-9 класи. [29][10]

Відповідно до **нових модельних програм з математики для 5–6 класів НУШ (2021, 2022 рр.)**, курс спрямований на формування в учнів цілісної системи початкових математичних знань і умінь, необхідних для подальшого вивчення алгебри та геометрії на наступних рівнях освіти. Зміст курсу забезпечує розвиток в учнів уявлень про натуральні та дробові числа, дії над ними, числові та буквені вирази, рівняння і нерівності, величини та їх вимірювання, геометричні фігури й просторові тіла.

Програма акцентує увагу на розвитку критичного й логічного мислення, просторової уяви, алгоритмічної культури та здатності використовувати математику для розв'язування реальних життєвих ситуацій. Значну роль відіграє формування мовленнєвих умінь у процесі пояснення способів розв'язування задач, інтерпретації математичних результатів і побудови висловлювань математичною мовою. Метою курсу є всебічний розвиток учнів, їхніх

інтелектуальних здібностей та вміння використовувати математику як інструмент пізнання навколишнього світу і основу подальшого навчання. [29]

Важливе місце відводиться **текстовим задачам**, які слугують засобом розвитку логічного мислення, уміння моделювати реальні ситуації та застосовувати математичні знання в практичних контекстах. Розв'язування таких задач супроводжує опрацювання кожної теми програми.

У 5–6 класах текстові задачі пов'язані з темами «Натуральні числа і дії з ними», «Десяткові дроби», «Пропорції», «Відсотки», «Швидкість, час, відстань». Учні вчаться перекладати умову задачі на математичну мову та розв'язувати її за допомогою арифметичних дій. [6]

У 7–9 класах вивчення математики здійснюється за оновленими модельними програмами, які містять два взаємопов'язані курси – **алгебра та геометрія**. Відповідно до чинних модельних програм з математики для 7-9 класів (зокрема, авторів М. Бурди, Г.Бевза, О. Істера), розв'язування текстових задач інтегрується у вивчення алгебраїчного матеріалу:

- 7 клас – «Лінійні рівняння з однією змінною» (розв'язування задач за допомогою рівнянь);
- 8 клас – «Системи лінійних рівнянь», «Квадратні рівняння» (математичне моделювання реальних ситуацій);
- 9 клас – «Функції», «Пропорції», «Відсоткові та статистичні задачі», «Ймовірність випадкової події».

У цих темах текстові задачі розглядаються як засіб математичного моделювання та формування уміння застосовувати рівняння для опису реальних процесів.

Вивчення алгебри [10]

Зміст курсу спрямований на:

- формування вмінь оперувати алгебраїчними виразами;
- розв'язувати рівняння, нерівності та системи;

- аналізувати й описувати закономірності, що спостерігаються у навколишньому світі;
- будувати і досліджувати функції різних типів;
- застосовувати математичні моделі для розв'язування практичних задач.

Програма підкреслює важливість усвідомлення поняття функції як засобу опису залежностей між величинами. Функціональна лінія посилена: учні вчаться будувати графіки, інтерпретувати їх та використовувати функціональні залежності для моделювання реальних процесів.

Значне місце відведено застосуванню рівнянь для розв'язування навчальних і життєвих задач. Акцент робиться на усвідомленому опануванні алгоритму складання і розв'язування рівнянь та на здатності пояснювати вибір математичної моделі.

Окремою складовою є **практична направленість**, що включає:

- відсоткові розрахунки,
- обчислення, пов'язані зі зміною величин у часі,
- побутові та економічні задачі.

У **старшій школі** вивчення алгебри орієнтується на розвиток математичної компетентності через виконання практично орієнтованих завдань та побудову математичних моделей. Текстові задачі розглядаються як ключовий інструмент формування здатності застосовувати математику в реальних ситуаціях.

Відповідно до діючих програм з (10–11 класи, рівень стандарту, 2017 р.) [25] текстові задачі зберігають важливе місце у змісті курсу алгебри та аналізу. Вони включаються у теми:

- *«Похідна та її застосування»* — задачі на знаходження найбільших і найменших значень функцій;
- *«Інтеграл та його застосування»* — задачі на знаходження площ, об'ємів, роботи;

- «Елементи статистики та теорії ймовірностей» — задачі прикладного характеру, пов'язані з аналізом даних, відсотковими розрахунками, середніми величинами.

Таким чином, у сучасних навчальних програмах з математики текстові задачі є важливою наскрізною складовою змісту математичної освіти. Їх послідовне вивчення забезпечує поступове формування в учнів умінь аналізувати умову, будувати математичну модель, обирати адекватний спосіб розв'язування та інтерпретувати отримані результати.

Наведемо узагальнений аналіз відповідно до нових програм.

Таблиця 2.4. Вимоги програми з алгебри для 10 класу
(оновлені модельні програми, 70 годин)

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки
18	Тема 1. Функції та їх властивості (лінійна, квадратична, степенева, обернено пропорційна)	Пояснює поняття функціональної залежності, аргументу та значення функції; уміє будувати, аналізувати та інтерпретувати графіки функцій. Розв'язує текстові задачі, що зводяться до побудови та дослідження функцій різних видів.
14	Тема 2. Показникова та логарифмічна функції	Розуміє властивості показникової і логарифмічної функцій, уміє будувати та досліджувати їх графіки. Розв'язує показникові й логарифмічні рівняння та нерівності, застосовує їх до текстових задач економічного, природничого та демографічного змісту.
10	Тема 3. Тригонометричні функції	Засвоює основні властивості тригонометричних функцій, їх періодичність. Використовує тригонометричні моделі для розв'язування текстових задач про рух по

		колу, коливання, періодичні процеси. Будує та інтерпретує графіки.
16	Тема 4. Елементи статистики, комбінаторики та ймовірності	Уміє збирати, подавати й аналізувати статистичні дані. Розв'язує текстові задачі на знаходження показників вибірки, частот, ймовірностей; використовує комбінаторні методи для аналізу реальних ситуацій.
12	Тема 5. Математичне моделювання та практичні застосування	Складає та досліджує математичні моделі реальних ситуацій із використанням рівнянь, функцій, графіків та статистичних методів. Інтерпретує результати. Розв'язує практико-орієнтовані текстові задачі різних типів.

Програми для старшої школи зберігають наступність у формуванні вмінь працювати з математичними моделями та розв'язувати текстові задачі, закладених у попередніх курсах. Центральною стає компетентність **застосовувати математику в реальному житті** – у фінансових, фізичних, статистичних, соціальних та технічних контекстах.

Текстові задачі розглядаються не лише як навчальні вправи, а як інструмент розвитку компетентностей, необхідних людині XXI століття. Метод математичного моделювання набуває ключового значення в системі навчання математики на профільному рівні.

2.2. Аналіз шкільних підручників з математики щодо якісного та кількісного вмісту текстових задач

Вивчення математики в основній та старшій школі спрямоване на формування в учнів математичної компетентності, що передбачає здатність застосовувати здобуті знання для розв'язування навчальних і життєвих проблем. Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти та типових освітніх програм, значну увагу приділено формуванню вмінь учнів розв'язувати текстові задачі прикладного змісту.

Однією з умов реалізації навчання математики в основній школі є наявність текстових задач в сучасних підручниках з математики.

Порівняємо зміст текстових задач у підручниках з математики (алгебри) для 5-11 класів. Велика кількість шкіл України на сьогоднішній день проводить навчання за підручниками Істера О.С. та авторського колективу під керівництвом Мерзляка А.Г. Слід зазначити, що кожен із підручників обох авторських колективів містить велику кількість текстових задач. Зокрема, у підручниках з математики для 5-6 класів Істер О.С. виділяє окремі розділи «Текстові задачі на рух» та «Текстові задачі економічного змісту», тобто одразу присутні два блоки сюжетних задач. А.Г. Мерзляк у підручнику 5 класів інтегрує задачі у розділи «Розв'язування задач за допомогою рівнянь».

Обидва автори подають задачі різних типів: життєві та прикладні задачі (з реальними контекстами: наприклад, у підручниках Істер О.С. є рубрика «Ми – українці» – задачі про українські міста та історичні факти, що пов'язує математику з літературою/географією/краєзнавством), логічні та нестандартні задачі (в Істера О.С. – це рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих», у Мерзляка А.Г. – рубрики «Ніщо і ще менше», «Дружимо з комп'ютером»). Вказані підручники для 5-6 класів включають «компетентнісні» завдання: наприклад, в підручниках Істера О.С. є практичні вправи з реальними задачами та міжпредметні зв'язки (через сюжети про життя, історію, фінанси), а в підручниках Мерзляка А.Г. завдання пов'язані з сучасними технологіями (задачі про графіки, діаграми, комп'ютерні ситуації).

Таблиця 2.2. Порівняльний аналіз змісту текстових задач у підручниках 5–9 класів

Клас	Підручник	Текстові задачі – кількість/ розділи	Типи задач	Особливості формулювання (контексти)
5	Істер О.С.	Виділено §13–14 на явні текстові задачі	Задачі на рух, економічні задачі (життєві сюжети:	Реальні контексти з життя (школа, покупки, природа)

Клас	Підручник	Текстові задачі – кількість/ розділи	Типи задач	Особливості формулювання (контексти)
		(обидва блоки – сюжетні задачі)	відстані, швидкості, гроші тощо)	міжпредметні зв'язки (календар, господарська практика).
	Мерзляк А.Г.	Текстові задачі інтегровані в розділи, розв'язування задач за допомогою рівнянь.	Прикладні задачі, логічні задачі , задачі на єдність дій. Часто класичні приклади з життя (літаки, гроші, робота).	Фабула задачі стосується природи, практичної діяльності людини ділення яблук, грошей, задачі на рух тощо. Коментується на сторінках про застосування знань «в практичній діяльності».
6	Істер О.С.	Окремо включено в розділ «Розв'язування задач за допомогою рівнянь» §42; а також розпорошені по інших розділах, є рубрики «Життєві задачі» і «Цікаві задачі».	Практичні (про учнівське життя, дозволя, рідну країну), логічні/пазли . У рубриці «Життєві задачі» – прикладні сценарії, в «Цікавих» – нестандартні головоломки.	Яскраві життєві сюжети, національний контекст (історичні події, географія України), мотивація. Формулювання проблемні, часом заохочують самостійний пошук формули (напр. «скільки яблук зібрали гноми...»).
	Мерзляк А.Г.	Окремий розділ «Розв'язування задач за допомогою рівнянь» (§40). Багато	Прикладні (усне розв'язання через моделювання життєвих ситуацій), комп'ютерні/статистичні (діаграми, графіки, повсякденні дані). Є	Формулювання часто подано простіше, з огляду на наочність (графічні задачі, приклади з навколишнього

Клас	Підручник	Текстові задачі – кількість/ розділи	Типи задач	Особливості формулювання (контексти)
		задач-прикладів по усьому підручнику.	рубрики: «Ніщо і ще менше» (креативні задачі) і «Дружимо з комп'ютером» (інформатика).	світу). Є завдання, що вимагають самостійної роботи на комп'ютері або створення графіків – міжпредметні зв'язки(інформатика
7	Істер О.С.	В підручнику досить багато текстових задач. Присутні рубрики, які були в 6 класі, є практичні й логічні задачі.	Прикладні та практичні задачі на побудову моделей (відсотки, пропорції, швидкість тощо).	Акцент на реальних контекстах (фінанси, будівництво, подорожі) і геометрію (будівництво фігур). Із міжпредметних – поняття масштабу та креслення (зв'язок із географією і кресленням).
	Мерзляк А.Г.	У підручнику з геометрії багато задач з реальними фігурами; в підручнику з алгебри – приклади життя.	Практичні (об'єкти навколо – будівлі, техніка), просторові (геометричні задачі).	Чіткі формулювання, часто з кресленнями. Життєві сюжети відступають на користь практичності (розміри, маса, час тощо). Є порівняння з кресленням, фізикою.
8	Істер О.С.	Текстові задачі залишаються: в алгебрі – прикладні розділи (про прогресію, функції, економіку), в геометрії – задачі	Прикладні та логічні – наприклад задачі на оптимальне планування, економічні задачі (про доходи, витрати) та геометричні побудови.	Акцент на формалізмі: часті формули та графіки. Реальних сюжетів менше, проте є приклади з науки (оцінка експериментальних даних, застосування геометрії в кресленні).

Клас	Підручник	Текстові задачі – кількість/ розділи	Типи задач	Особливості формулювання (контексти)
		побудови фігур і обчислень.		
	Мерзляк А.Г.	У 8 кл. виходять нові НУШ-підручники; очікується велика кількість задач.	Прикладні, статистичні (розв'язування задач із діаграмами, фізичними величинами) та логічні (головоломки, кросворди з числами).	Орієнтовані на практику: інтегровані статистичні дані, ІТ-контексти (комп'ютерне моделювання). З'являються компетентнісні проєкти (наприклад, аналіз графіків соціальних наук).

Розглянемо та проаналізуємо підручник з алгебри для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів авторів *Мерзляка А.Г., Полонського В.Б., Якіра М.С.*^[46] Підручник розділено на чотири параграфи, виклад теоретичного матеріалу зазвичай завершується прикладами розв'язування задач. До кожного пункту підібрані задачі для самостійного розв'язування, серед них є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі.

Текстові задачі займають значне місце в даному підручнику. Всього їх 214 (близько 22%). Найбільша їх кількість міститься в розділах «Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь другого степеня» (37 задач (17%)), «Математичне моделювання» 37 задач (17%)), «Класичне означення ймовірності» (34 задачі (16%)), «Відсоткові розрахунки» (30 задач (14%)) та «Початкові відомості про статистику» (20 задач (9%)). В цьому підручнику із всіх текстових задач найбільша кількість приходить на новий вид - задачі з розділів «Частота та ймовірність випадкової події», «Класичне означення ймовірності» та «Початкові відомості про статистику» (64 задачі (30%)); 58 задач на знаходження чисел за

відомими співвідношеннями (сумою, різницею, часткою, добутком) (27%), 31 задача – на проценти (14,5%), 25 задач на рух (11,5%), 21 задача – задачі на суміші (10%) та 15 задач на сумісну роботу (7%).

Таким чином, аналіз підручників з математики основної школи за авторством Мерзляка А.Г. та Істера О.С. стосовно тематики та змісту текстових задач дозволяє зробити наступні висновки:

1) Кількість задач. Точну кількість текстових задач у наведених вище підручниках порахувати досить складно, оскільки вони розпорошені по багатьом параграфам та рубрикам. У підручниках Істера О.С. для 5–6 класів виділено окремі розділи, де розглядаються виключно текстові задачі, а у відповідних підручниках за авторством Мерзляка задачі згруповані в тематичні параграфи (наприклад, «Розв’язування задач»). Ми не знайшли лічильних даних у джерелах, тому переважно аналіз проведено за структурою та прикладами у змісті.

2) Типи задач. В обох підручниках є і задачі практичного змісту (життєві), і логічного характеру (нестандартні). Істер О.С. виділяє окрему рубрику «Життєві задачі»; у підручниках Мерзляк А.Г. акцентується увага на задачах практичного змісту та математичні «родзинки» («Ніщо і ще менше»); у підручниках обох авторів чітко прослідковуються міжпредметні зв’язки з історією, географією, природознавством, інформатикою.

3) Компетентнісні задачі. Обидва підручники містять завдання на розвиток ключових компетентностей. Істер О.С. у своїх підручниках наводить «цікаві задачі» і життєві кейси, а Мерзляк А.Г. – включає вправи, які вимагають роботи з комп’ютером, конкретними життєвими ситуаціями.

4) Формулювання. В підручниках Істера О.С. задачі часто присутні пояснювальні тексти («історичні відомості», «міста України»). У підручниках Мерзляка А.Г. задачі формулюються більш лаконічно, з акцентом на саму математику, хоча теж використано життєві приклади. Обидва автора

використовують наочність та різні представлення даних (у вигляді схем, діаграм, графіків, таблиць тощо).

У 10–11 класах вивчення математики або поділяється на дві частини «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія», або ж вивчається один курс «Математика». Якість і кількість текстових задач у них теж різняться. Проаналізуємо у контексті тематики дослідження підручники за авторством Неліна Є. П. перевірити посилання та Мерзляка А.Г. з цих предметів.

Підручники для 10–11 класів за авторством Неліна Є. П. містять розділи з прикладними задачами: в підручниках з алгебри та початків аналізу – це задачі на проценти, похідні функцій (які використовуються для розв’язування економічних та фізичних задач), в геометрії – відповідно, задачі практичного змісту, які передбачають побудову фігур і обчислення їх довжин/площ, об’ємів. Формулювання нерідко мають прив’язку до науки: наприклад, розв’язок у геометрії подається через креслення фігур, у алгебрі – через життєві сюжети (проценти, рух).

У підручниках авторського колективу під керівництвом **Мерзляка А.Г.** (10–11 класи містяться текстові задачі схожої тематики. У підручнику з алгебри і початків аналізу – розділи з практичними задачами на фінанси, статистику; в підручнику з геометрії – задачі з реальними будівельними конструкціями (кулі, циліндри, геометричні тіла з кресленнями). Часто зустрічаються прикладні задачі (задачі з економіки, з астрономії), а також логічні вправи (наприклад, головоломки під рубрикою «на злом думки», тобто містить логічні або нестандартні задачі, які розвивають мислення). В обох підручниках є комплексні задачі, що вимагають застосування знань з кількох тем (ці задачі можна вважати компетентнісними). Формулювання здебільшого формальні, але з використанням реальних рисунків та практичних одиниць (см, км, грн тощо).

Таблиця 2.3. Порівняльний аналіз змісту текстових задач у підручниках з алгебри та початків аналізу та геометрії для 10-11 класів

Клас, предмет	Автор	Навчальний рівень	Основні теми з текстовими задачами	Особливості формулювання задач
10, Алгебра і початки аналізу	Нелін	Стандарт	Проценти, функції, логарифми – задачі з економіко-сталім контекстом (проценти, споживання); початки аналізу – рух тіл, зміна швидкостей тощо.	Фабули задач стосуються економіки та фізики (природні контексти). Навчальні результати: застосування формул у реальних розрахунках.
10, Геометрія	Нелін	Стандарт	Побудови фігур, задачі на знаходження площ/об'ємів (будівельні задачі, перерізи тіл).	Формулювання з використанням рисунків.
11, Алгебра і початки аналізу	Нелін	Стандарт	Аналіз функцій (тригонометричні, експоненційні) – задачі з економіки та природознавства; похідні й інтеграли – моделювання змін.	Контексти з економіки та природничих наук, часто окремими блоками («Фізичні задачі»). Вправи компетентнісного рівня – складання моделей.
11, Геометрія	Нелін	Стандарт	Стереометричні задачі – обчислення об'ємів та площ поверхонь тіл у реальних задачах (бак, цистерна); геометричні конструкції (оптика, перспективи).	Багато малюнків і креслень. Задачі підводять до самостійних досліджень (оцінка помилок при вимірюванні, аналогії з кресленням).
10, алгебра	Мерзляк	Стандарт	Проценти, функції, логарифми – практичні задачі	Задачі подано у формі тексту з обґрунтуванням

Клас, предмет	Автор	Навчальний рівень	Основні теми з текстовими задачами	Особливості формулювання задач
			(кредити, зростання), тригонометрія в задачах реальних кутів та хвиль.	(проблемні питання). Є багато задач із тестовими форматами «Перевірте себе» для компетенцій.
10, геометрія		Стандарт	Практичні задачі – побудова тіл (колони, дахи); вправи на використовування формул об'ємів/площ (складні креслення).	Текстові задачі передбачають вміння будувати фігуру за описом.
11, алгебра	Мерзляк	Профіль	Похідні, інтеграли – задачі на екстремуми, оптимізацію; фінансові програми (аналітика інвестицій); статистика (обробка даних).	Задачі у вигляді кейсів (аналіз функції попиту, моделей експоненційного росту). Є комплексні вправи, що вимагають побудови математичної моделі.
11, геометрія		Профіль	Задачі стереометрії – ілюстрації реальних конструкцій (архітектура, кристали); задачі на знаходження відстані і кута між прямими в просторі.	Формулювання з дотриманням точних геометричних термінів. Акцент на побудовах двовимірних проекцій.

Висновки за результатами порівняльного аналізу:

Проведений аналіз змісту текстових задач у підручниках з алгебри, початків аналізу та геометрії для 10–11 класів показав, що сучасні підручники з алгебри, початків аналізу та геометрії для старшої школи (автори Нелін,

Мерзляк) характеризуються високим рівнем практичної та компетентної спрямованості змісту текстових задач. Задачі у більшості випадків мають прикладний характер, пов'язаний із реальними життєвими, економічними, природничими чи технічними ситуаціями, що забезпечує реалізацію міжпредметних зв'язків і формує в учнів уміння застосовувати математичні знання у практичній діяльності.

У підручниках Неліна значна частина задач подана в економічному та природничо-науковому контексті. Вони орієнтовані на моделювання процесів руху, зміни швидкості, застосування похідних та інтегралів для опису реальних явищ. Геометричні задачі містять елементи практичної діяльності (будівельні, оптичні, проєктні задачі), що сприяє розвитку просторового мислення та навичок дослідження.

Підручники Мерзляка відзначаються практико-економічною спрямованістю змісту задач. У них широко представлені вправи, що стосуються фінансових розрахунків, відсотків, кредитів, аналітики інвестицій, статистичних і оптимізаційних моделей. Такі завдання подаються у формі кейсів і спрямовані на розвиток аналітичного мислення та уміння будувати математичні моделі реальних процесів.

Для підручників рівня **«стандарт»** характерне використання задач прикладного змісту, які забезпечують засвоєння базових понять і формул, сприяють формуванню обчислювальних навичок і розумінню практичного значення математики. Натомість у підручниках рівня **«профіль»** задачі мають підвищений рівень складності, передбачають використання похідних, інтегралів, статистичних методів, дослідження функцій і моделювання практичних ситуацій.

Геометричні задачі в усіх аналізованих підручниках супроводжуються рисунками та кресленнями, що сприяє розвитку просторової уяви. Часто вони містять елементи проєктної діяльності та спонукають учнів до самостійних висновків і досліджень.

Отже, усі розглянуті підручники демонструють тенденцію до підвищення практичної спрямованості навчального матеріалу та інтеграції математичних знань із реальними сферами діяльності людини. Такий підхід сприяє формуванню в учнів ключових компетентностей, розвитку логічного й аналітичного мислення, а також здатності до математичного моделювання реальних процесів і явищ.

2.3. Методичні особливості розв'язування текстових задач в шкільному курсі математики

Відповідно до Державного стандарту базової освіти «метою математичної галузі є засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі, ...розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті. Уміння застосовувати отримані знання на практиці є одним з найважливіших завдань навчання математики». [39]

2.3.1. Вікові особливості школярів в контексті тематики дослідження

Дослідження психологів показують, що уміння теоретично розмірковувати, виконувати розумові та практичні дії при розв'язуванні математичних задач з абстрактними даними не завжди забезпечують формування вміння виконувати адекватну систему дій в реальних практичних ситуаціях. Так, Д.М. Богоявленський та Н.А. Мечинська вважають заключним етапом в розвитку розумових операцій учнів не становлення розумових дій, а їх реалізацію в практичній діяльності. Перед вчителем математики постає важлива задача – навчити учнів математизувати життєві практичні ситуації, робити їх теоретичний аналіз. Тільки в цьому випадку математичні знання стануть практично необхідними.

Розв'язування задач вимагає від учня певного рівня абстрактного мислення, вміння аналізувати умову, будувати математичну модель і обґрунтовувати вибір методу. Ці здібності формуються поступово, тому важливо враховувати вікові особливості школярів.

У 7-9 класах в організмі дитини відбуваються кардинальні зміни. Розгортається процес статевого дозрівання, з яким пов'язане виникнення у підлітка відчуття власної дорослості. Відбувається втрата дитячого статусу, але водночас зберігаються нереалістичні уявлення про власні привілеї і статус дорослих. В цьому віці підліток активно пізнає самого себе, у нього виникають потреби у спілкуванні з однолітками, дружбі та симпатії до інших. Усе це досить негативно може вплинути на навчання. Дитина в цьому віці дозволяє собі не виконувати домашні завдання, агресивно реагує на зауваження старших. Спроби зацікавити її оригінальністю форми подання нового навчального матеріалу часто не приносить очікуваного результату.

Але в той же час підліток охоче бере участь у роботі різних гуртків, секцій, активно набуває необхідних для цього теоретичних знань. Особистість підлітка всебічно розвивається під час активного спілкування з однолітками, у процесі якого реалізується основна потреба цього періоду – знайти своє місце в суспільстві. Цим аспектом слід керуватися вчителів при організації навчально-виховного процесу, зокрема:

- для середнього підліткового віку (7–8 класи) найвдалішою буде організація навчально-виховного процесу, при якій застосовуються групові методи, прийоми і форми діяльності з фокусом на практичне застосування знань;
- для старших підлітків (9–11 класи) доцільною буде така організація навчально-виховного процесу, при якій перевага віддавалася б методам, прийомам і формам діяльності з опорою на наукові засади шкільних предметів.

У 7–8 класах учні лише починають знайомство з алгеброю. Для багатьох із них поняття змінної, рівняння, алгебраїчного виразу є новими й абстрактними. Їхнє мислення ще значною мірою конкретно-образне, тому задачі мають бути тісно пов'язані з наочністю, практичними прикладами та повсякденними

ситуаціями. На цьому етапі корисним є використання малюнків, таблиць, схем, щоб учні краще зрозуміли зв'язки між величинами.

У 9–11 класах у більшості учнів вже сформоване логічне мислення, вони здатні до абстрагування, узагальнення, аналізу структури задачі. У старшій школі можна пропонувати учням задачі з параметрами, комбіновані задачі, задачі з кількома варіантами розв'язання. Самостійний вибір методу, обґрунтування рішення та критичний аналіз власних дій стають важливими складовими навчального процесу.

Крім вікових особливостей, необхідно враховувати рівень розвитку пізнавальних процесів (уваги, пам'яті, мислення), індивідуальний стиль навчання, мотивацію та самооцінку учнів. Страх помилитися або недовіра до власних сил можуть заважати навіть здібним учням розв'язувати задачі впевнено. Тому важливо створити психологічно безпечне середовище, у якому учень не боїться помилок, а сприймає їх як частину навчання.

Також важливо враховувати індивідуальні особливості учнів – темп роботи, тип мислення, рівень мотивації, наявність страху перед «складними» задачами. Тому особливої актуальності набувають диференціація та індивідуалізація навчання. [22]

2.3.2. Організація навчальної діяльності учнів при розв'язуванні текстових задач в основній школі

Методика навчання учнів розв'язуванню текстових задач може бути ефективною лише за комплексного підходу до навчального процесу. Це означає, що має бути чітко визначена мета навчання учнів розв'язування задач певного виду чи оволодіння певним методом, ретельно добиратися система задач, які будуть розв'язуватись в класі і пропонуватися як домашнє завдання, аргументовано вибиратися методи і організаційні форми роботи на уроці, засоби навчання, здійснюватися контроль стану сприймання учнями методів і способів

розв'язування, набутих навичок і умінь. Великого значення при цьому набуває раціональність (ясність, стислість, простота) символічних записів умови задачі та її розв'язання. Розвиток мислення учнів неможливий без правильного реагування вчителя на раціональність думок школярів.[11]

Під час роботи учнів над задачею вчитель має продумувати кожен крок для забезпечення належного навчального ефекту та з метою продемонструвати учням певні алгоритми і навчити їх відповідним технікам розумової праці. За таких умов уроки розв'язування задач вже за самим характером роботи перетворюються в справжню школу мислення, творчості, кмітливості.

Суттєвий вплив на формування вмінь і навичок учнів розв'язувати задачі має процес пояснення розв'язування задачі. Письмове пояснення ходу розв'язування задачі є одним із засобів навчання і контролю; воно вимагає великої мобілізації знань і зусиль. Головними вимогами до нього є правильність розкриття математичних і логічних зв'язків і залежностей в задачі, послідовність викладу думок, чіткість, лаконічність, граматична і стилістична правильність речень.[11]

У процесі розв'язування задачі здійснюється як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Для стандартних задач можна сформулювати алгоритми їх розв'язання, але звичайно кращого ефекту можна досягти, якщо спрямувати діяльність учнів на самостійний чи колективний пошук алгоритму розв'язування задачі та його формулювання. Наприклад, розв'язуючи задачі на зустрічний рух, де потрібно визначити час, через який рухомі об'єкти зустрінуться, учні можуть колективно дійти висновку, що в цьому випадку треба розділити відстань між пунктами, від яких почався рух, на сумарну швидкість.

Важливо пам'ятати, що правильне графічне представлення умови задачі є запорукою чіткого розуміння конкретної ситуації, поданої в задачі; В задачах на рух в одному напрямку, для знаходження відстані між об'єктами через певний

час, раціональніше знайти різницю між швидкостями об'єктів та помножити її на заданий час. При розв'язуванні задач на спільну роботу є вказівка щодо прийняття всієї роботи за одиницю і вираження частини всієї роботи, яка виконується окремими особами чи механізмами за одиницю часу, чи частини роботи, яка виконується ними разом. Такі правила-орієнтири, що формулюються на уроці є доцільними вказівками до певних типів задач. Аналогічні вказівки корисно пропонувати учням для засвоєння матеріалу при розв'язуванні задач на проценти, пропорційний поділ, тощо.[39]

При розв'язуванні нестандартних задач використовують евристичні прийоми. Особливу увагу таким прийомам приділено в книзі Д. Пойя. На думку автора, успіх евристичної діяльності учнів багато в чому визначається сформованістю таких загальних розумових дій, як аналіз (аналіз формулювання задачі), синтез (співставлення умови з тим, що потрібно визначити), узагальнення, абстрагування, тощо. Важливу роль при розв'язуванні задачі відіграють аналіз та синтез. Оскільки аналіз умови та співставлення умови з вимогами є основним етапом в розв'язуванні будь-якої задачі, Д.Пойя розробив також план розв'язання задачі.[36] Відповідно до цього плану розв'язування будь-якої задачі зводиться до виконання наступних дій:

- розуміння постановки задачі (аналіз умови задачі);
- складання плану розв'язання (етап пошуку розв'язку);
- реалізація цього плану (етап практичної реалізації плану);
- погляд назад або вивчення отриманого результату (етап перевірки).

Слід зауважити, що останній етап (аналіз результату, перевірка) не є обов'язковим, в деяких задачах його проводити недоцільно, бо це вимагає багато додаткового робочого часу. Проте, для окремих задач перевірка є обов'язковою. Починаючи розв'язування задачі, потрібно:

- вивчити умови задачі, виконати наочні малюнки, креслення, скласти таблиці чи ілюстративні схеми, що допомагають зрозуміти задачу.

- представити всі елементи задачі, виділити відомі та шукані;

- проаналізувати зміст кожного слова задачі, виявити істотні елементи, які потрібно спеціально позначити на малюнку. В деяких випадках корисно (особливо в задачах з геометрії) змінити розташування елементів на малюнку або схемі;

- намагатися зрозуміти умову задачі в цілому, відмітити її особливості, згадати, чи не зустрічалися подібні задачі раніше;

- продумати, однозначно чи ні сформульована задача: чи не містить умова задачі зайвих даних або чогось не вистачає, а можливо є протиріччя;

- уважно вивчити мету, поставлену в задачі, виявити, які саме теоретичні положення пов'язані з даною задачею повністю чи з окремими її елементами;

- заздалегідь продумавши можливість використання певного методу для розв'язування задачі (метод рівнянь, систем, геометричних перетворень, координатний метод тощо), намагатися подати елементи даної задачі на мові відповідного методу (скласти рівняння, виразити дані і шукані величини в координатній чи векторній формі).

На етапі пошуку розв'язку задачі (складання плану розв'язання) слід:

- визначити тип задачі, спосіб розв'язування якої відомий;

- проаналізувати мету задачі і намагатися застосувати до її розв'язання той чи інший метод чи прийом;

- постійно контролювати кожен крок в розв'язуванні задачі, спів ставити отримані частинні розв'язки з умовою та метою даної задачі;

- намагатися видозмінити задачу, переформулювати та спростити її умову, узагальнити умову задачі;

- проаналізувати кожен окремий елемент задачі, скласти та розглянути інші можливі комбінації елементів (частин) задачі;

- спробувати поділити дану задачу на серію допоміжних задач, послідовне розв'язування яких дасть змогу скласти розв'язування даної задачі;

- розглянути граничні випадки для кожного елементу, порівняти як це вплине на основну мету задачі;

- іноді корисно змінити числові значення певної величини, поданої в задачі, це, як правило, дає змогу повністю проаналізувати кожен елемент задачі;

- вивчити уважно подібну розв'язану задачу і намагатися перенести особливості її розв'язування для даної задачі.

На етапі практичної реалізації плану розв'язування задачі важливо звернути увагу на необхідність вибору такого способу оформлення розв'язання, за допомогою якого можна було б зафіксувати розв'язання в короткій та зрозумілій формі, достатній для того, щоб мати можливість повністю виконати розв'язування задачі. Важливо також, в деяких випадках, робити детальне оформлення розв'язування задачі, одночасно вносити певні корективи у відповідності з умовою та метою задачі.

На етапі перевірки правильності отриманого результату корисно:

- вивчити отриманий розв'язок.

- проаналізувати правильність результату в співвідношенні його з умовою.

- прослідкувати кожен крок розв'язування та зроблені відповідні пояснення.

– продумати можливості розв’язування задачі іншим способом. Необхідно пам’ятати, отримання того ж результату іншим методом – це найкраща перевірка правильності розв’язку задачі;

– намагатися знайти більш економний спосіб розв’язування, більш загальний (новий спосіб розв’язування задачі досить часто відкриває нові шляхи розв’язування інших аналогічних задач, збагачує досвід того, хто розв’язує задачу;

– дослідити особливі випадки розв’язування задачі, порівняти результат розв’язання з граничними значеннями окремих елементів. Узагальнити результати розв’язання даної задачі, продумати, при розв’язуванні яких задач можна їх застосувати;

– вивчити ще раз саму задачу, метод її розв’язування та розв’язок. Знайти те корисне, заради чого потрібно було розв’язувати дану задачу (що потрібно знати, уміти та розуміти);

– звернути особливу увагу на ті теоретичні положення та особливості задачі, які є ключовими для знаходження даного (чи інших) розв’язку задачі.

Крім знання основних методів та етапів в розв’язуванні текстової задачі вчителів слід правильно добирати різноманітні організаційні форми роботи при розв’язуванні задач. На уроці можливі колективне фронтальне розв’язування задач, колективна робота окремих груп і самостійне розв’язання.

Готуючись до колективної фронтальної роботи, яка проводиться іноді методом евристичної бесіди, вчителів треба продумати систему запитань розподілених за рівнями складності, що стосуються пошуку розв’язання. Не можна допускати механічного та неусвідомленого переписування задачі з дошки. Тому в процесі оформлення розв’язання можна пропонувати учням

пояснити, чому виконується та чи інша дія або яким має бути наступний крок розв'язання.

Організація групової форми розв'язування задач на уроці має полягати в підготовці вчителем для кожної групи учнів набору задач відповідно до здібностей учнів групи. Під час уроку діяльність учнів має постійно контролюватися та в разі потреби – коректуватися. Корисною перед початком роботи в групах є невелика консультація (3-5 хвилин), в якій беруть участь, крім вчителя, й сильніші учні.

На уроці корисно використовувати різні форми організації самостійної діяльності учнів. Це можуть бути самостійні роботи (навчального або контролюючого характеру). Залежно від мети уроку самостійні роботи можуть пропонуватися на початку, в середині або наприкінці уроку. Найбільш ефективним є письмове самостійне розв'язування задач, в ході якого учні вчаться творчо мислити, самостійно розбиратися в різних питаннях теорії і застосувань математики. Для швидкої та ефективної перевірки таких робіт можна запропонувати учням правильне розв'язання (записавши його завчасно на закритій дошці або за допомогою мультимедійного проектора). Можливо також проводити усну фронтальну перевірку за етапами розв'язання задачі.

Самостійне розв'язування задач на уроках математики має значні переваги. По-перше, воно помітно підвищує навчальну активність та розумову діяльність учнів, пробуджує в них інтерес до розв'язування задач, стимулює творчу ініціативу. По-друге, не маючи можливості копіювати розв'язання задачі з дошки, учень змушений самостійно розібратися в її розв'язку, а тому краще готуватися до уроків математики. По-третє, скорочується час, необхідний для опитування учнів. І нарешті, вчитель одержує можливість спрямовувати індивідуальну роботу учнів, попереджати помилки, вказувати шляхи їх виправлення.

З метою інтенсифікації процесу навчання учнів, до початку уроку записуються скорочено умови 4-5 задач на дошці. Вчитель сам за скороченим записом умови читає зміст задачі і організовує колективний пошук розв'язання. Один з учнів оформлює розв'язання на дошці, а решта — в зошитах або уважно слухають розв'язання та стежать за його оформленням. Потім розв'язання на дошці витирають, а учням пропонується самостійно оформити розв'язання в зошиті. Далі розв'язується наступна задача, а дошка поступово звільняється, що позитивно впливає на настрій учнів. Таким чином, вчитель систематично контролює не тільки засвоєння теоретичного матеріалу, а й розуміння методів розв'язування задач учнями. [45]

2.3.3. Формування уміння аналізувати умову текстової задачі

Досить часто проведення аналізу текстової задачі збігається або є початком побудови репрезентативної (представницької) моделі задачі. [24] Побудова репрезентативної моделі сюжетної задачі може проводитись з різною метою:

- 1) для фіксації результатів аналізу тексту задачі, якщо побудова відбувається під час аналізу;
- 2) для переформулювання задачі (оскільки модель дає можливість подивитися на задачу з різних точок зору);
- 3) для пошуку способу розв'язування, тобто для знаходження розв'язуючої моделі (числового виразу, рівняння, нерівності тощо).

Незалежно від мети побудови, модель є одним із засобів, який полегшує сприймання та осмислення змісту задачі, виявлення найважливіших елементів, залежностей тощо. Крім того, самостійно виконаний учнями короткий запис умови дає можливість учителю з'ясувати, чи правильно вони розуміють залежності між відомими та невідомими величинами, чи всі зв'язки виявлено тощо. Зауважимо, що короткий запис умови не можна зводити до простого

переписування тексту за допомогою скорочення кожного слова. Найчастіше короткий запис умови задачі роблять у вигляді схеми, таблиці, діаграми чи графічної ілюстрації.

Схематичний запис – це спрощений запис умови задачі (з виділенням окремих логічних її частин) у наочній і зручній для сприймання формі, зокрема у вигляді: 1) числових даних і запитання задачі; 2) числових даних з коротким поясненням їх змісту.

Приклад 2.1. У двох діжках 240 л води. Скільки води у першій діжці, якщо в ній на 48 л більше, ніж у другій діжці?

Схематичний запис:

$$240 \begin{cases} I - ? \text{ на } 48 \text{ л} \\ II - \end{cases}$$

Єдиних вимог до створення схем немає. Слід лише привчати учнів не робити багатослівних записів, не завантажувати схеми зайвими деталями.

Табличний запис умови зручно використовувати для задач, в яких задано співвідношення – зв'язок між значеннями різних величин, або задачі мають сюжет (рух об'єктів і т.ін.) або спільна робота (задачі на процеси). Графічний запис сприяє кращому розумінню умови задачі та усвідомленню залежностей між даними і шуканими величинами, оскільки активізує зорове сприймання інформації.

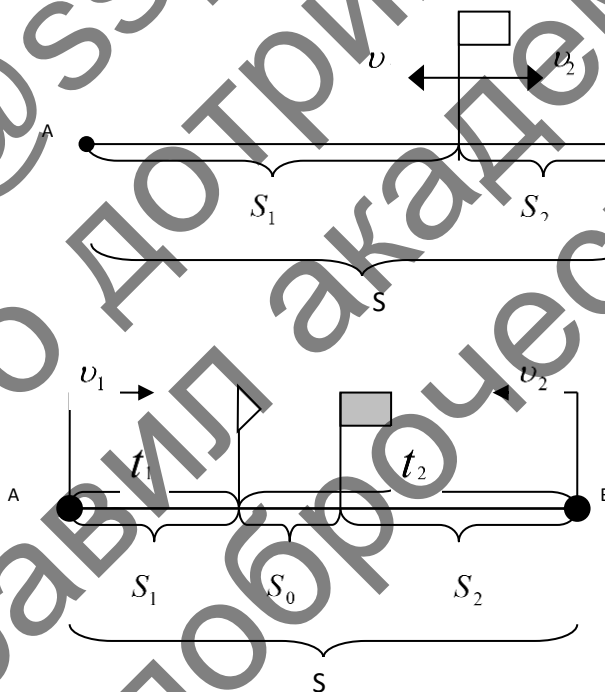
Приклад 2.2. Чотири бригади робітників ремонтували шосе на ділянці довжиною 8400м. Перша бригада відремонтувала $\frac{5}{14}$ усього шосе, друга $\frac{7}{18}$ того, що залилось, а третя і четверта – решту, причому третя відремонтувала вдвічі більше, ніж четверта. Скільки метрів шосе відремонтувала третя бригада?

Для кращого аналізу зв'язків між величинами цієї задачі її умову можна на звичайній дошці представити у вигляді графічної схеми. Таку саму схему учні під керівництвом учителя можуть зобразити у себе в зошитах.



Цю схему вчитель може також запропонувати на готовому паперовому плакаті або рухомій мультимедійній презентації.

У деяких випадках можливе поєднання табличного запису умови задачі з малюнками чи ілюстраціями з метою конкретизації чи додаткового роз'яснення змісту задачі. Для задач на рух іноді використовують графічно-ілюстративні презентаційні схеми, добре відомі учням ще з початкової школи.



Проте не слід надто захоплюватися графічними ілюстраціями. Вони не потрібні під час розв'язування нескладних задач або у випадках, коли задача належить до добре відомого учням виду, і учні не тільки знають видові особливості задачі, але й мають навички щодо її розв'язування з використанням алгебраїчного методу. Графічну ілюстрацію не варто виконувати і тоді, коли її важко зробити, а процес її виконання є тривалим за часом і може навіть заплутати

учня, а не допомогти йому в роз'ясненні зв'язків між величинами в умові задачі. Графічний запис умови задачі не можна ототожнювати з графічним методом розв'язування задач.

Аналіз досліджень процесу розв'язування текстових задач дає можливість зробити висновок, що схематичні зображення задач бувають дуже корисними не тільки для учнів початкової школи і 5-6 класів, а й для учнів 7-9 класів, оскільки дають можливість глибше проникнути в структуру задачі, краще її зрозуміти. Коротку умову також слід записувати, коли важко виділити із тексту задачі речення, що розкривають функціональні залежності між величинами чи коли виникають ускладнення щодо обрання невідомого.

Саме тому важливим є проведення спеціальної роботи щодо навчання учнів створенню схем за текстами задач різних сюжетів і різних математичних структур. Оскільки одна і та сама схема може бути використана під час розв'язування різних за сюжетами задач, тому доречно пропонувати учням завдання на складання задач за готовими схемами, таблицями чи графічними ілюстраціями.

Короткий запис умови – не самоціль, а лише допоміжний засіб під час розв'язування задач. Якщо учні задачу розв'язують без нього, то недоцільно вимагати від них складання структурної або графічної схеми. Також схеми можуть стати у нагоді, коли потрібно «розробити» задачу на логічні частини (ситуації), які легко можна було б виразити за допомогою рівнянь, систем рівнянь чи нерівностей.

Приклад 2.2. Пішохід, велосипедист та мотоцикліст рухались по шосе в одному напрямку кожний зі своєю постійною швидкістю. У той момент, коли пішохід і велосипедист були в селищі В, мотоцикліст відставав від них на 6 км. Коли мотоцикліст наздогнав велосипедиста, пішохід відстав від них на 3 км. На скільки кілометрів велосипедист обігнав пішохода в той момент, коли пішохід наздогнав мотоцикліста?

Розв'язання. У задачі нічого не сказано про швидкості пішохода, велосипедиста та мотоцикліста, крім того, що вони постійні й направлені в один і той самий бік. Вважатимемо, що всі об'єкти рухаються зліва направо. Цей напрям вкажемо стрілками на відповідних графічних схемах.

Введемо позначення: нехай швидкість пішохода — k км/год, швидкість велосипедиста — bk км/год, швидкість мотоцикліста — ak км/год (a, b, k — деякі сталі, окрім того a і b показують у скільки разів швидкості велосипедиста та мотоцикліста більші за швидкості пішохода).

Проаналізуємо тепер три випадки, про які йдеться в задачі.

Випадок 1: Пішохід і велосипедист перебувають в одній точці В. Мотоцикліст відстає від них на 6 км (тобто його можна помістити в точку А, яка знаходиться лівіше точки В), АВ=6 км.

Випадок 2: Мотоцикліст наздогнав пішохода в деякій точці, тобто вони обидва перемістились в точку С, яка лежить правіше точки В.

У цей момент велосипедист проїхав далі й знаходиться на деякій відстані від них у точці D.

Відстані ВС і CD невідомі. Позначимо їх через x і y : $BC=x$, $CD=y$

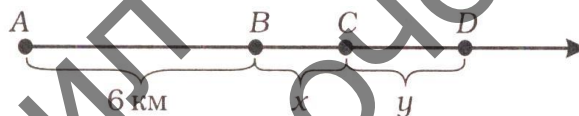


Схема на рисунку дає можливість встановити наступні зв'язки між величинами x , y і k , ak , bk :

1) якщо пішохід пройшов x км зі швидкістю k км/год, то це означає, що на шлях від пункту В до пункту С він витратив $\frac{x}{k}$ год;

2) такий самий час був у дорозі й мотоцикліст, який подолав відстань від В до С і ще шлях від А до В, тобто $\frac{x}{k} = \frac{x+6}{ak}$;

3) такий самий час був у дорозі і велосипедист, який переместився з точки В до точки D, тобто $\frac{x}{k} = \frac{x+y}{bk}$.

Отже, отримали рівності

$$\frac{x}{k} = \frac{x+6}{ak}$$

$$\frac{x}{k} = \frac{x+y}{bk}$$

Виразимо x в кожній із рівностей

$$x = \frac{6}{a-1}$$

$$x = \frac{y}{b-1}$$

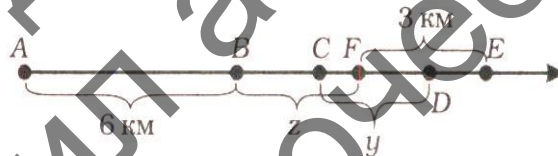
Прирівнюємо праві частини виразів (2.3) і (2.4):

$$\frac{6}{a-1} = \frac{y}{b-1}$$

Виразимо з отриманої рівності y :

$$y = \frac{6(b-1)}{a-1}$$

Випадок 3: Мотоцикліст наздогнав велосипедиста в деякій точці, яка знаходиться правіше точки D. Назвемо її точкою E. У цей час пішохід теж проїхав вперед до деякої точки F. З умови відстань від F до E дорівнює 3 км. Отже, відомо що FE=3, але про довжину відрізка BF нічого не сказано. Позначимо цю величину через z .



Аналізуючи рисунок, доходимо висновків:

1) від пункту A до пункту E мотоцикліст рухався зі швидкістю ak км/год і подолав відстань $6+z+3=9+z$ (км), отже, перебував у дорозі $\frac{9+z}{ak}$ год;

2) за той самий час пішохід пройшов z км зі швидкістю k км/год, тобто $\frac{9+z}{ak} = \frac{z}{k}$, звідси

$$z = \frac{9+z}{a}$$

3) за той самий час велосипедист проїхав відстань від пункту B до пункту E, тобто $(z+3)$ км зі швидкістю bk км/год, тобто $\frac{3+z}{bk} = \frac{z}{k}$, або

$$z = \frac{3+z}{b}$$

З рівностей (2.5) і (2.6) виразимо a і b через z :

$$a = 1 + \frac{9}{z}, b = 1 + \frac{3}{z}$$

Підставимо отримані значення a і b у рівність (2.5) і отримаємо шукане значення y :

$$y = \frac{6(b-1)}{a-1} = \frac{6\left(1 + \frac{3}{z} - 1\right)}{1 + \frac{9}{z} - 1} = \frac{\frac{18}{z}}{\frac{9}{z}} = 2$$

Отже, велосипедист обігнав пішохода на 2 км в той момент, коли мотоцикліст наздогнав пішохода.

Наведений приклад розв'язування олімпіадної задачі про ситуації, що змінюються, наочно продемонстрував можливості графічних схем.

Отже, можна зробити висновок, що єдиних правил-орієнтирів щодо вибору тієї чи іншої форми короткого запису не можна запропонувати, оскільки на такий вибір впливає і фабула задачі, і складність її математичної структури, і попередній досвід учнів щодо використання певних схем до розв'язування окремих типів задач тощо. [5]

2.3.4. Метод математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач

Наявність текстових задач в курсі математики основної школи дає змогу вчителю продемонструвати учням корисність математики, її застосування в інших науках, у практичній діяльності та повсякденному житті. Але як показує аналіз досліджень в цій сфері, навчання учнів розв'язуванню текстових задач – завдання не з легких. Труднощі виникають і в тих, хто навчає, і в тих, хто вчиться.

Текстові задачі навчають учнів мислити. Для їх ефективного розв'язання потрібно навчити учнів спеціальним прийомам розумової роботи, необхідних для застосування теоретичних знань, і сформуувати практичні уміння та навички, що лежать в основі застосування математики на інших уроках, в виробничій та життєвій практиці.

Проблема застосування знань на практиці потребує формування в учнів уміння аналізувати та синтезувати ситуацію, конкретизувати загальні, абстрактні положення, бачити відомі фігури, відношення, залежності в конкретних ситуаціях,

перебудовувати знання в відповідності з вимогами задачі, переосмислення одного і того ж об'єкта чи явища під різним кутом зору, уміння оперувати різними способами дій, переключатися з одного виду діяльності на інший.

У дослідженнях Н.А. Менчинської і Н.І. Зикової показано, що учні нерідко допускають помилки при розв'язуванні текстових задач, оскільки вони не вміють при необхідності перевести конкретну ситуацію з життя на мову математики. В.О. Далінгер в своїй роботі висловлює думку з приводу того, що корисним в плані порівняння є задачі, які розв'язуються одним і тим же методом, особливо ті, що моделюються системою рівнянь чи рівнянням.

Особливістю текстових задач є розв'язування двох різних, хоча і взаємопов'язаних проблем: переклад змісту задач на мову математики (тобто математизація змісту, побудова математичної моделі) і розв'язання власне математичної задачі засобами математики, що утворює процес складної розумової діяльності. Щоб оволодіти ним, треба знати основні етапи розв'язання задач та деякі прийоми їх виконання.

Важливими умовами, що визначають вибір основного, суттєвого під час розв'язування задач, ми вважаємо формування в учнів загального підходу до розв'язування будь-яких задач і засвоєння знань, необхідних для цього. Такими є знання:

- про структуру задачі та структуру розв'язування задачі;
- про основні типи задач;
- про етапи їх розв'язування;
- про основні методи розв'язування задач;

Учителю слід ознайомити учнів із загальною структурою процесу розв'язування задачі. Його можна розділити на 8 етапів (Схема 2.1)

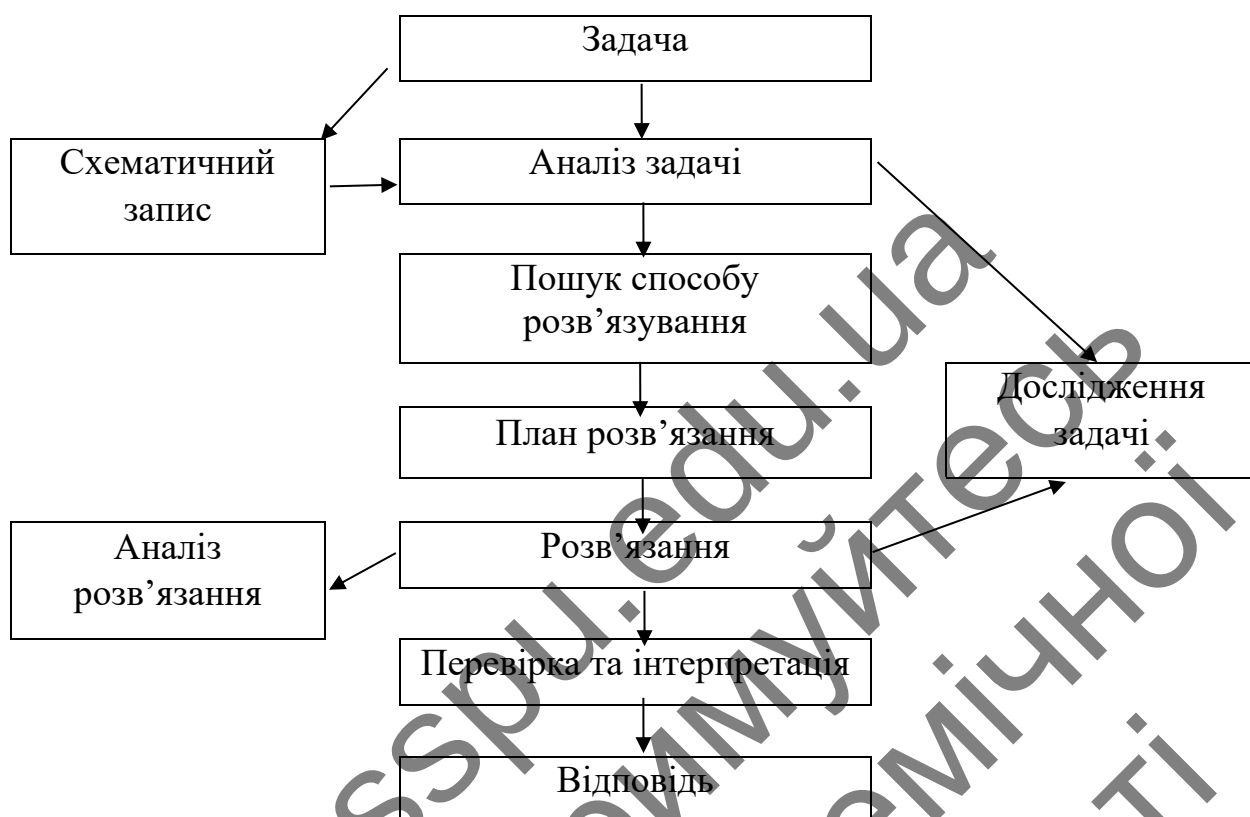


Схема 2.1. Схема процесу розв'язування текстової задачі

У методичній літературі виділяють кілька підходів до визначення послідовності вивчення теоретичного матеріалу і розв'язування задач:

а) вивчається невеликий блок теоретичного матеріалу, потім розв'язуються задачі, пов'язані з ним (традиційний підхід);

б) використовується «випереджальне» вивчення теоретичного матеріалу: після вивчення великого блоку теорії розв'язуються задачі відразу по всьому матеріалу цього блоку;

в) використовується «випереджальне» розв'язування задач: теоретичний матеріал теми розглядається спочатку на ознайомлювальному рівні, теореми спочатку не доводяться; після ознайомлення з формулюваннями визначень і теорем відразу переходять до розв'язування задач; в міру набуття навичок розв'язування задач повертаються до вивчення доведень теорем, причому розгляд більшості з цих доведень виконується учнями самостійно. Досвід вчителів-новаторів показує, що «великоблочне» вивчення теоретичного

матеріалу дозволяє вирішити проблему дефіциту навчального часу, інтенсифікувати навчальний процес, не перевантажуючи учнів.

Основним методом розв'язування текстових задач є **метод математичного моделювання**. Навчання учнів методу математичного моделювання – складний психолого-педагогічний процес, що вимагає від учителя ґрунтовних комплексних знань з психології, дидактики та методики навчання математики.

Для повноцінного застосування методу математичного моделювання при розв'язуванні задач необхідно керуватися наступною таблицею 2.12.

Таблиця 2.2. Алгоритм застосування методу математичного моделювання

Етапи схеми	Послідовність дій	Загальні прийоми розумової діяльності
1. Побудова математичної моделі	Визначити об'єкт дослідження	Аналіз
	Пригадати основні характеристики об'єкта, істотні і неістотні зв'язки і залежності між його елементами	Аналіз, синтез, порівняння, аналогія
2. Розв'язування задачі в межах математичної теорії	Виразити об'єкти, що описані в умові задачі, математичними символами і термінами	Аналіз, синтез, абстрагування
	Описати залежності між елементами мовою математики	Аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення
	Сформулювати відповідну математичну задачу	Абстрагування
	Розв'язати поставлену математичну задачу	Аналіз, синтез
	Проаналізувати отримані розв'язки математичної задачі	Аналіз, порівняння, класифікація
3. Інтерпретація одержаного розв'язку	Перенести отримані розв'язки математичної задачі на об'єкт, що досліджується	Конкретизація
	Перевірити, чи задовольняють отримані результати умову задачі	Аналіз, синтез, порівняння

Розглянемо особливості реалізації загальних прийомів розумової діяльності при розв'язуванні текстових задач.

За таблицею 2.2 кожному з етапів методу математичного моделювання властиві такі прийоми як аналіз та синтез. Аналіз (розчленування, розкладання,

розбір) і синтез (з'єднання, складання, об'єднання) – взаємно обернені дії, складові процесу мислення. Аналіз використовується при розв'язуванні задач, коли потрібно відділити умови й вимоги задачі, виділити величини і фігури, про які йдеться в умові, визначити основні етапи в розв'язанні задачі. Аналіз – міркування від того, що треба знайти, до того, що дано або встановлено раніше. Синтез – міркування, що проводиться в зворотному напрямі. Ці прийоми розумової діяльності ще називають прийомами переосмислення задачі.

Розв'язуючи текстову задачу неодноразово потрібно використовувати порівняння, яке полягає в тому, що розумова дія спрямовується на виділення спільного (зіставлення) і відмінного (протиставлення) в предметах і явищах.

Під час розв'язування задач звичайно ж не обійтися без абстрагування, що спрямоване на виділення в реальних об'єктах та явищах суттєвого та відокремлення несуттєвого. На цьому етапі для описання залежностей між об'єктами математичною мовою часто застосовують прийом узагальнення, який дозволяє знайти спільне в предметах та явищах, про які говориться в задачі. Якщо математична задача вже розв'язана, потрібно отримані розв'язки класифікувати (розділити на типи) за певними ознаками, це допоможе правильно обрати потрібну відповідь. Прийом конкретизації звичайно застосовується під час інтерпретації отриманого розв'язку задачі, що дає змогу більш точно та в конкретній ситуації представити її розв'язок.

Щоб зацікавити учнів при розв'язуванні задач доцільно використовувати засоби ІКТ (математичні програми, презентації, електронні посібники, тощо). Застосування ІКТ на кожному етапі методу математичного моделювання має певні особливості. Основною метою першого етапу є створення в учнів позитивної мотивації щодо оволодіння вміннями моделювання й алгоритмізації шляхом актуалізації знань, отриманих при вивченні інформатики в основній школі. На другому етапі основна увага приділяється розвитку у старшокласників умінь: складання лінійних алгоритмів розв'язання задачі за готовою математичною моделлю та їх опис у вигляді блок-схем; побудови математичних

моделей задач; розв'язування задач на основі аналізу відповідних математичних моделей. На третьому етапі здійснюється повне (самостійне) розв'язування математичних задач за допомогою комп'ютера, можливо – з використанням елементів методу проектів.

В дослідженнях В.О Швеця та Л.О. Соколенко [47] для організації ефективної навчальної діяльності учнів із розв'язування задач на кожному етапі виділено відповідні методичні прийоми і загальні орієнтовані дії. На *етапі створення математичної моделі*, слід:

- використовувати евристичні запитання;
- абстрагуватися від властивостей об'єкту, несуттєвих для побудови адекватної моделі;
- допомагати учням чітко вказувати на відмінності між об'єктом та його моделлю,
- формулювати умову та вимогу задачі на мові математики.

На *етапі дослідження математичної моделі* корисним є:

- використання джерел з додатковими даними та теоретичними відомостями,
- використання ілюстративних креслень, графіків або ескізів, які допомагають при розв'язування задачі;
- використання математичних задач-двійників;
- систематичне застосування ІКТ для виконання рисунків, проведення обчислень, побудови графіків;
- зведення знайденого розв'язку до числового значення або розрахункової формули.

На *етапі інтерпретації розв'язку* задачі необхідно:

- здійснити перевірку розв'язку;
- оцінити ступінь точності отриманого в результаті числового значення.

Л. Кирилюк пропонує наступні особливості реалізації кожного з етапів методів математичного моделювання. На першому етапі особливо важливо

звернути увагу учнів на необхідність при створенні математичної моделі виділяти істотні фактори, що впливають на досліджуваний об'єкт чи явище. На другому етапі провідна роль відводиться умінням переходити від однієї математичної моделі до іншої. Також на даному етапі важливо виконати аналіз процесу розв'язування задачі, по можливості обрати найбільш раціональний метод розв'язання. На останньому етапі особливо цінним є вміння точно інтерпретувати отриманий розв'язок, виявити сутність часткових розв'язків, провести дослідження знайденого результату. [20]

Розглянемо, яким чином можна реалізувати методичні особливості розв'язування текстової задачі на конкретному прикладі.

Приклад 2.3. Студенти взяли на річковій станції напрокат човен. Спочатку вони пропливли 20 км за течією річки, а потім повернулись на станцію, витративши на всю прогулянку 7 год. На зворотному шляху на відстані 12 км від станції вони зустріли пліт, який пропливав повз станцію саме в той момент, коли студенти вирушили на прогулянку. Визначити з якою швидкістю рухався човен за течією і яка швидкість течії.

Розв'язання. Маємо задачу на рух по воді.

I етап: Складання математичної моделі задачі.

Розв'яжемо задачу складанням відповідної системи рівнянь.

Нехай x км/год – швидкість течії, а y км/год – швидкість човна у стоячій воді. Тоді $(x+y)$ км/год, $(y-x)$ км/год – швидкість човна за течією річки і проти течії відповідно.

Важливо пояснити учням, що швидкість руху плота співпадає зі швидкістю течії річки. Тоді відповідно отримаємо наступні співвідношення:

$\frac{12}{x}$ год – час руху плота від прокатної станції до зустрічі з човном,

$\frac{20}{x+y}$ год – час руху човна за течією річки,

$\frac{20}{y-x}$ год – час руху човна проти течії річки.

Для кращого сприймання учнями умови задачі та для правильного складання системи рівнянь доцільно потрібні дані зводити в таблицю:

	Шлях, км	Швидкість, км/год	Час, год
Рух плота	12	x	$\frac{12}{x}$
За течією річки	20	$x+y$	$\frac{20}{x+y}$
Проти течії річки	20	$y-x$	$\frac{20}{y-x}$

За умовою задачі $\frac{20}{x+y} + \frac{20}{y-x} = 7$.

Також час руху човна до зустрічі з плотом дорівнює часу руху плота від станції до зустрічі з човном, тоді:

$$\frac{12}{x} = \frac{20}{x+y} + \frac{8}{y-x}$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{20}{x+y} + \frac{20}{y-x} = 7, \\ \frac{12}{x} = \frac{20}{x+y} + \frac{8}{y-x}, \end{cases}$$

де $x \neq y$, $x > 0$ і $y > 0$.

Складена система рівнянь за умовою задачі, не є повною математичною моделлю реальної ситуації, відображеної в умові задачі. Вона не враховує фізичні властивості об'єктів, про які повідомляється в задачі. Тому розв'язки системи можуть не відповідати дійсності, і треба обов'язково перевіряти, чи задовольняють розв'язки системи умову задачі.

II етап: Дослідження математичної моделі.

Розв'яжемо отриману систему рівнянь. Після певних спрощень отримаємо:

$$\begin{cases} 7x^2 - 7y^2 + 40y = 0, \\ 12y^2 - 28xy = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{7}y, \\ 40y - \frac{40}{7}y^2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки $y \neq 0$, то маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7}y, \\ 1 - \frac{1}{7}y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 7. \end{cases}$$

III етап: *Інтерпретація розв'язку задачі.*

На даному етапі слід здійснити перехід від математичної моделі до реальної практичної ситуації. На цьому етапі важливо проаналізувати отримані результати, переконатися, що не знайдено зайвих, а також, що не втрачено певних розв'язків, що відповідають заданим умовам. Отже, 3 км/год – швидкість течії, 7 км/год – швидкість човна у стоячій воді і відповідно тоді 10 км/год – швидкість човна за течією річки.

Відповідь: 10 км/год, 3 км/год

Таким чином, процес розв'язування текстових задач є досить складним. Деякі методисти вважають, що задачі з життєво пізнавальною тематикою розсіюють та відволікають увагу учнів від сприймання основної математичної теорії. Проте слід мати на увазі, що в реальному світі є велика кількість факторів та явищ, що відволікають увагу. Серед них учень повинен вміти виділити ті, які складають зміст конкретної математичної залежності.

2.4.5. Формування умінь учнів розв'язувати текстові задачі

Розв'язування задач в шкільному курсі алгебри має низку педагогічно обґрунтованих особливостей, що визначають методику викладання, організацію уроку й оцінювання навчальних досягнень. Текстові задачі мають розвивальне та практичне значення, розширюють кругозір, роблять процес навчання цікавим, захоплюючим. Практика показує, що навички розумової діяльності виникають і краще розвиваються в результаті розв'язування пізнавальних прикладних задач, де кожного разу учні знаходять певні значення величин, відволікаючись від несуттєвих деталей, тобто тим самим виховується умінь абстрагувати, аналізувати, розкривати математичний механізм явища дійсності. Розв'язуючи

задачі з різним тематичним змістом, учень поступово починає розуміти, що різні явища в житті можуть мати один і той же математичний зміст. Таким чином, розв'язування текстових задач впливає на глибоке та свідоме засвоєння знань.

Для розв'язування текстових задач в основній та старшій школі використовується декілька способів: арифметичний метод, алгебраїчний (використовується, починаючи з 7 класу) і аналітичний (використовується у старших класах). Кожен з них має свої особливості, проте деякі текстові задачі можуть бути розв'язані кількома способами.

Розв'язувати *арифметичним способом* доцільно такі задачі, які сприяють не лише розвитку логічного мислення, а й більш глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу, підготовці учнів до успішного засвоєння алгебраїчних методів розв'язування задач. Правильно роблять ті вчителі, які в старших класах періодично розв'язують з учнями арифметичні задачі.

Навчальний ефект штучного й надто громіздкого арифметичного розв'язування задач незначний. Всю різноманітність математичної фабули арифметичних задач, які доцільно вивчати в школі, можна вкласти в 10-15 «типів» таких задач. Кожна така задача може бути сформульована за допомогою ланцюга нескладних арифметичних задач так, щоб вона стала само навчаючою, щоб учень, розв'язуючи послідовно кожну задачу ланцюга, сам «відкрив» розв'язання даної типової задачі.

Процес *алгебраїчного розв'язування задач* (процес складання рівнянь) являє собою послідовне арифметичне розв'язування задач з буквеними даними.^[14] Отже, арифметичні підходи до розв'язування готують учнів до застосування алгебраїчних методів. Крім того, арифметичне розв'язування задачі в загальному вигляді (буквене арифметичне розв'язування) має велике практичне значення, бо вказує шлях раціонального розв'язування відповідних числових практичних задач. Розглянемо приклад.

Приклад 2.4. Вологість зерна була 23 %. Після просушування вологість дорівнювала 12 %. На скільки процентів зменшилась вага зерна?

Досить часто можна зустріти наступне «арифметичне» розв'язування цієї задачі:

- 1) $23\% - 12\% = 11\%$. На скільки процентів зменшилась вологість зерна?
- 2) $100\% - 12\% = 88\%$. Скільки процентів становила вага зерна після усушки?
- 3) $11/88 \cdot 100 = 12,5\%$. На скільки процентів зменшилась вага зерна?

Всі дії правильні, відповідь правильна, але це розв'язання арифметично нелогічне, бо проценти 23%, 12% беруться від різних величин, і дія $23\% - 12\%$ ніякого «арифметичного сенсу» не має.

Для обґрунтування правильності розв'язання «в діях» доводиться розв'язувати задачу в загальному вигляді.

Позначимо $p = 23\%$, $q = 12\%$.

- 1) $100\% - p\%$. Скільки процентів від початкової ваги становить вага «чистого» зерна?
- 2) $100\% - q\%$. Скільки процентів від ваги зерна після усушки становить та сама вага «чистого» зерна?
- 3) Яку частину початкової ваги становить вага зерна після усушки?
- 4) На скільки процентів зменшилась вага зерна після усушки?

Можливі й інші способи арифметичного розв'язування. Відзначимо, що розв'язування цієї задачі рівняннями не було б легшим, раціональнішим: ніяк не вдалося б обминути «арифметичні» міркування і тим більше – арифметичні дії.

Сучасна методика математики заперечує існування загального способу алгебраїчного розв'язування текстових задач, загального «підходу» до процесу складання рівнянь. Така думка правильна, якщо мати на увазі всю різноманітність текстових задач на складання рівнянь та їх систем. Але щодо алгебраїчних текстових задач, які звичайно розглядаються у середній школі, така думка неправильна. Коли говорять, що загального «рецепта» для складання рівнянь не існує, то цим ніби підкреслюють, що навчитися добре розв'язувати задачі, можна лише за рахунок розв'язування великої кількості задач. Заперечити проти цієї рекомендації не можна. Проте, навчитися розв'язувати задачі лише

практичним застосуванням різноманітних штучних і нецілеспрямованих прийомів не завжди можливо.

У методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі. Перша застосовується до розв'язування нескладних задач і має такий вигляд:

- 1) позначити через x шукану величину (або одну з шуканих);
- 2) виразити через x інші величини, про які йдеться в змісті задачі;
- 3) спираючись на залежність між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

Друга евристична схема зручна для розв'язування складних задач:

- 1) з'ясувати, виходячи зі змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти;
- 2) вибрати невідому і позначити її буквою x ;
- 3) виразити через x значення величин, які прирівнюватимуться;
- 4) скласти рівняння.

Друга евристична схема забезпечує цілеспрямований вибір невідомої і вираження через неї потрібних величин.

На першому, підготовчому етапі навчання учнів методу рівнянь потрібно нагадати всі види основних задач, які розв'язуються кожною арифметичною дією, їх буквенний запис, сформувані навички складання простих виразів з невідомою. Далі розв'язуються усно найпростіші задачі на складання рівнянь за умовою задачі.

Не можна допускати, щоб учні механічно переписували розв'язання задачі з дошки, не усвідомивши способу. Тому в процесі оформлення розв'язання можна пропонувати окремим учням пояснити, чому виконується та чи інша дія або яким має бути наступний крок розв'язання?

При складанні рівнянь до текстової задачі користуються здебільшого так званим методом послідовного позначення величин, суть якого полягає в тому, що всі величини шляхом «проб» і здогадів виражають через дані і шукані.

При цьому виникають труднощі, зв'язані з «виявленням» в умові задачі величин, які безпосередньо не вказуються. Наприклад, якщо в умові задачі сказано, що поїзд прибуває з пункту А в пункт В з запізнення на 20 хв., то тут виступають дві величини: час, який повинен затратити поїзд на шлях АВ за графіком, і час, який витрачає поїзд на шлях АВ.

В процесі «перекладу» умови задачі на мову алгебри ми поступово «використовуємо» дані елементи; вираження останнього «невикористаного» елемента через решту елементів дає нам необхідне рівняння (якщо рівняння з одним невідомим).

Не можна сказати, що такий план складання рівнянь відзначається якоюсь певною послідовністю, планомірністю і глибоко осмислюється учнями. Учень, який розв'язує задачу вказаним способом, переконаний, що такий «переклад» обов'язково повинен привести до рівняння. Коли замість рівняння виходить тотожність, він шукає інший варіант «перекладу», поки не натрапить на потрібний. Не можна також брати до уваги і внутрішній протест, який виникає в зв'язку з таким сумнівом: а може існує ще якийсь «переклад», який приведе нас до зовсім нової відповіді?

Для порівняння з іншими методами алгебраїчного розв'язання задач, про які мова буде далі, наведемо приклад розв'язування задачі цим способом. Розглянемо задачу.

Приклад 2.5. Велосипедист прибув з пункту А в пункт В призначений строк, рухаючись з певною швидкістю. Якби він збільшив цю швидкість на 3 км/год, то прибув би на годину раніше строку, а якби проїжджав за годину на 2 км менше, то запізнився б на годину. Визначити відстань між пунктами А і В, швидкість велосипедиста і час його руху.

Розв'язання: Позначимо шукану відстань через x км, а швидкість руху – через y км/год. На весь шлях x км велосипедист повинне був витратити часу x/y год. При швидкості, на 3 км/год більшій, часу було б витрачено $x/(y+3)$ год. За умовою задачі

$$x/y - x/(y + 3) = 1.$$

Аналогічно дістанемо друге рівняння: $x/(y - 2) - x/y = 1$.

Таким чином, розв'язування задачі зводиться до розв'язування системи рівнянь.

В ході розв'язування текстових задач в учнів може виникнути ціла низка проблем, пов'язаних із вибором невідомих, наявністю так званих «надлишкових даних», появою обмежень у вигляді нерівностей тощо.

Основними методами пошуку розв'язання задач є аналіз і синтез. Завдяки аналізу здійснюється цілеспрямована актуалізація знань (знання актуалізуються не механічно, навмання, «наосліп», а в зв'язку з потребою в них). У ході аналізу природно визначаються момент використання знань (не тоді, коли згадуєш, а тоді, коли потрібно), вибір знань (беруться лише ті знання, в яких виникла потреба при аналізі), форма використання знань (не так, як у підручнику, а в тому вигляді, в якому це зручніше для вирішення задачі) та характер використання знань (все відразу або по черзі).

Для знаходження розв'язку текстових задач алгебраїчним способом шукана величина позначається через x і на основі тексту задач виводяться наслідки до тих пір, поки не буде отримано рівняння, що зв'язує шукану величину x з даними величинами. Пошук розв'язків текстових задач розв'язуваних арифметичними засобами пошук розв'язків таких задач починають з питання задачі і визначають, які величини треба знати, щоб відповісти на це питання. Далі з'ясовують, чи є ці величини відомими. Якщо деякі з них не дані в умові задачі, то ставиться питання, як можна знайти такі величини, що необхідно знати для цього. Подібні питання повторюють до тих пір, поки не виявиться, що знаходження «проміжних» невідомих величин зводиться до обчислень з даними величинами.

Таким чином, у ході розв'язанні задачі можна виділити наступні загальні прийоми розумової діяльності: прийом розгортання терміна (він складається у виведенні всіляких наслідків з умови задачі або в з'ясуванні всіляких властивостей об'єктів, про які йдеться в задачі); аналіз через синтез (чергування

висхідного аналізу та синтетичних міркувань). Ці два прийоми підводять до формування плану виконання завдання. Третій прийом – прийом побудови дедуктивних умовиводів. Саме ці прийоми повинні бути відпрацьовані з учнями.

Більшість прийомів пошуку розв'язків задач базується на досить серйозному логічному змісті, тому оволодіння ними учнями можливо лише за умови систематичного і цілеспрямованого їх застосування. Корисно практикувати в цих цілях короткий методологічний коментар, роз'яснюють учням суть застосовуваних прийомів пошуку розв'язків задач.

Сам процес розв'язування задач при певній методиці робить досить позитивний вплив на розумовий розвиток дітей, оскільки він вимагає виконання розумових операцій аналізу і синтезу, абстрагування і конкретизації, порівняння, узагальнення.

Існують різні методичні підходи до навчання дітей розв'язуванню текстових задач. Але яку б методику навчання не вибрав вчитель, йому треба знати, як побудовані такі задачі, і вміти їх розв'язувати різними способами.

Досить часто буває так, що як тільки вчитель повідомив завдання, діти відразу ж дають відповідь на її питання. Але це далеко не завжди задовольняє вчителя. Він прагне з'ясувати, як отримана відповідь, на основі яких міркувань, за допомогою якої арифметичної дії і т.п. Спочатку вчитель вимагає зазвичай «повної» відповіді на запитання. Це необхідно не тільки з для розвитку усного мовлення учня, але і для того, щоб діти ще раз повернулися подумки до тексту задачі, зіставили свою відповідь з умовою і питанням задачі. Отримавши відповідь, вчитель продовжує запитувати: «Як ти це дізнався?» Цей, здавалося б, просте запитання нерідко для учня буває важким: «Я здогадався», «Я підрахував» - ось типові відповіді учнів у подібних випадках (а іноді й просто Я не знаю») Серед вчителів була поширена думка, що якщо учень не може пояснити, як отримав відповідь на питання задачі, значить, він не розв'язав її. Діти внутрішньо не можуть з цим погодитися. Виникає свого роду конфліктна ситуація, яка в даному випадку зовсім не корисна. Причина її полягає в тому, що вчитель розуміє, що вимога розв'язати задачу значно ширше, ніж просто дати відповідь на її питання.

Для того, щоб такого непорозуміння між вчителем та учнем не виникало, необхідно роз'яснити дітям сенс вимоги «розв'язати задачу». Корисно, наприклад, сказати дітям наступне: «Задачі, які ви розв'язуєте на уроках математики, - це не загадки, які треба розгадати». Розв'язати задачу означає пояснити які перетворення потрібно виконати над даними в ній числами, щоб після обчислень отримати число, яке в ній потрібно дізнатися.

Навчити дітей розв'язувати задачі – значить навчити їх встановлювати зв'язки між даними і потрібним і відповідно до цього вибирати, а потім і виконувати арифметичні дії.

На першому етапі вчитель веде підготовку до розв'язання задач даного виду. На цьому етапі діти повинні засвоїти зв'язки, на основі яких вони будуть вибирати дії при розв'язуванні таких задач.

На другому етапі вчитель знайомить учнів з розв'язуванням задач розглянутого виду. Тут діти вчаться переходити від конкретної ситуації, вираженої в задачі, до вибору відповідної арифметичної дії.

На третьому етапі вчитель формує вміння розв'язувати задачі розглядуваного виду. Учні повинні навчитися розв'язувати будь-яку задачу незалежно від її конкретного змісту.

При розв'язуванні текстових задач доцільно використовувати мультимедійну презентацію, на якій була б представлена геометрична інтерпретація, відображено взаємозв'язки між об'єктами задачі. Застосування ППЗ Gran-2D, DG, GeoGebra, Desmos при розв'язування прикладних задач з алгебри та геометрії не тільки зекономить час при побудові математичної моделі, але й є ефективним засобом в процесі організації дослідницької діяльності учнів основної школи.

У старшій школі, де поряд із алгебраїчними методами використовуються методи математичного аналізу (зокрема, застосування похідної та інтеграла), текстова задача набуває особливого значення: вона не лише закріплює формальні навички, а й забезпечує перехід від дискретних моделей до неперервного

математичного моделювання. Виділимо методичні особливості розв'язування текстових задач у старшій школі.

1. Поступовість у складності та переході до абстракції. Задачі повинні вести учня від чітко детермінованих алгебраїчних моделей до прикладних задач, у яких необхідно формулювати припущення, вводити параметри та переходити до аналізу поведінки функції (дослідження монотонності, екстремумів) або до обчислення інтегралів. Така поступовість знижує когнітивне навантаження й сприяє формуванню системного мислення.

2. Підсилення ролі математичного моделювання. У старшій школі текстова задача часто вимагає побудови моделі, створення залежності між величинами та дослідження її властивостей за допомогою похідної (темпи зміни, швидкість наростання/убування) або інтеграла (площа під графіком, накопичення ресурсів). Учні мають навчитися формалізувати умови, оцінювати відповідність моделі та проводити інтерпретацію результату.

3. Різноманітність методів розв'язання. Для однієї й тієї самої задачі можливі аналітичний (алгебраїчний), графічний і чисельний підходи. Особливо важливо в старшій школі використовувати похідну для знаходження екстремумів та поведінки функцій, графічні засоби (Desmos, GeoGebra) для візуальної перевірки гіпотез і чисельні методи (приближені обчислення інтегралів, чисельний пошук коренів) для складних випадків.

4. Міжпредметні та практико-орієнтовані контексти. Текстові задачі у старшій школі часто пов'язані з фізичними моделями (рух, продуктивність, енергія), економічними процесами (оптимізація прибутку, мінімізація витрат) і природничими явищами (моделі зростання, розпад). Така спрямованість робить задачі джерелом міжпредметних зв'язків і підвищує мотивацію учнів.

5. Диференціація і розвиток автономії. Задачі різного рівня складності дозволяють організувати індивідуальну траєкторію навчання; при цьому творчі задачі й проєктні роботи стимулюють самостійний пошук і дослідницьку активність.

6. Роль сучасних технологій. ІКТ розширюють можливості роботи з текстовими задачами: побудова графіків функцій і перевірка результатів похідних/інтегралів у GeoGebra та Desmos, чисельні експерименти, їх візуалізація, організація проєктної роботи та спільного аналізу результатів. Технології дозволяють формувати навички цифрової компетентності поряд із предметними.

2.4.6. Труднощі та помилки, які виникають у учнів при розв'язуванні текстових задач

У шкільному курсі алгебри текстові задачі є одним з найважливіших завдань. Однак часто доводиться спостерігати, як учні розв'язують алгебраїчну текстову задачу з недостатнім або зайвим числом даних елементів і щиро дивуються, чому задачі «не розв'язується». Це пояснюється тим, що учні не розуміють логіки і схеми «утворення» задачі, які тісно зв'язані з процесом її розв'язування: свідоме і цілеспрямоване складання задачі є процес, обернений до процесу свідомого і цілеспрямованого її розв'язування. [8]

Незважаючи на значну кількість тренувальних вправ у шкільних підручниках з алгебри, багато учнів стикаються з труднощами під час розв'язування текстових задач. Причини можуть бути різноманітними, але найпоширеніші з них такі:

- **Неправильне або поверхневе розуміння умови задачі.** Учень не завжди вміє виділити головне, сплутує кількісні й якісні характеристики, не усвідомлює, що саме потрібно знайти.
- **Складність переходу від тексту до математичної моделі.** Учні часто не вміють виразити ситуацію у вигляді рівняння або системи рівнянь. Вони не бачать, як реальні умови задачі можна описати мовою алгебри.
- **Формалізм у розв'язанні.** Багато учнів намагаються запам'ятати алгоритм без розуміння суті. Такий підхід призводить до помилок у задачах із неочевидною структурою.

➤ **Невміння перевіряти та аналізувати результат.** Навіть правильно виконаний обчислювальний етап не гарантує вірної відповіді, якщо учень не звірив отримане з умовою.

➤ **Низький рівень сформованості базових алгебраїчних навичок.** Наприклад, помилки в розкритті дужок, приведенні подібних доданків, обчисленнях дробів тощо ускладнюють розв'язання навіть найпростіших задач.

➤ **Страх перед складністю.** Деякі учні зупиняються на першому ж кроці, вважаючи задачу занадто важкою, хоча насправді вона цілком доступна при послідовному підході.

Усі вони потребують методичних заходів: використання схем моделювання, шаблонів для постановки задачі (визначити змінні → записати співвідношення → обрати метод розв'язання → інтерпретувати), активного застосування демонстраційних і практичних прикладів та поетапного зворотного зв'язку. Управління цими труднощами передбачає послідовне формування алгоритмічних навичок, використання схем і чеклістів при розборі задач, поетапне навчання моделюванню і регулярну практику в різних форматах (усні розбори, письмові роботи, проекти).

Для подолання цих труднощів ефективними є такі методичні прийоми:

- поетапний аналіз задачі разом з класом;
- використання зразків і шаблонів (алгоритмів);
- надання учням можливості самостійно обговорити задачу в парах чи групах;
- цілеспрямоване формування вміння перевіряти відповідь.

Особливо важливо не лише пояснювати, як розв'язати задачу, а й чому саме так, формуючи у школярів критичне мислення та здатність міркувати. [38]

Висновки до розділу 2

Текстові задачі в шкільному курсі математики є не лише предметом, а й засобом навчання. Розв'язування текстових задач сприяє формуванню цілої

низки ключових компетентностей: математичної (володіння методами обчислення і доведення), інформаційної та цифрової (уміння працювати з даними, ПЗ), логічної (побудова аргументації), комунікативної (формулювання й обґрунтування рішення), метапізнавальної (самоаналіз обраної стратегії). Тому підбір задач у курсі має бути орієнтований не лише на академічні результати, а й на розвиток цих компетентностей.

fizmat@sspi.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
доброчесності

ВИСНОВКИ

У навчанні математики задачам відведено особливу роль. З одного боку, вони становлять специфічний розділ програми, матеріали якого учні мають засвоїти, а з другого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку школярів. Отже, задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання.

Уміння розв'язувати задачі вимагає від школярів знання деяких життєвих ситуацій, залежностей між величинами, розуміння суті арифметичних дій, знання прийомів обчислень, загальних правил причинно-наслідкових зв'язків, суті та структури задачі тощо. Розв'язування текстової задачі – це процес встановлення (знаходження) зв'язків між даними величинами, між даними та шуканою величиною, формулювання цих зв'язків мовою математики шляхом побудови моделі, виконання послідовності дій для знаходження числового значення шуканої величини. Основне завдання вчителя – навчити учнів знаходити ці зв'язки, будувати відповідну модель, розв'язувати її та критично осмислювати отримані результати.

На підставі проведеного дослідження були розроблені методичні рекомендації, які передбачають комплексний підхід до формування навичок розв'язування текстових задач, в якому акцент робиться на поетапному опрацюванні задачі, що допомагає учням систематизувати власні дії та усвідомлювати логіку розв'язання. Рекомендується використовувати диференційовані завдання різної складності для врахування індивідуальних особливостей учнів та стимулювання їхнього інтересу до математики. Включення текстових задач, що моделюють реальні життєві ситуації, сприяє кращому розумінню алгебраїчних понять і мотивує учнів до навчання.

Окрему увагу слід приділяти роботі з помилками, перетворюючи її на джерело навчання через аналіз типових недоліків в ході колективного обговорення. Активізація парної та групової роботи формує комунікативні компетентності та створює умови для спільного пошуку рішень, що підвищує

ефективність засвоєння матеріалу. Впровадження дослідницьких елементів у навчальний процес, зокрема, розв'язування відкритих задач і задач з кількома шляхами розв'язання, стимулює розвиток творчого мислення і здатності приймати рішення в нестандартних ситуаціях.

Використання сучасних цифрових технологій, таких як інтерактивні графічні калькулятори і онлайн-платформи, дозволяє зробити навчальний процес більш динамічним, наочним і мотивуючим для учнів. Це також надає вчителю можливість оперативно здійснювати контроль результатів навчання та адаптувати навчальні завдання відповідно до потреб класу.

Отже, системне застосування запропонованих методичних рекомендацій сприятиме підвищенню якості викладання алгебри, розвитку у учнів гнучких, усвідомлених, критичних і творчих умінь розв'язувати текстові задачі, що є важливою складовою підготовки учнів до подальшої навчальної, професійної та життєвої діяльності.

Список використаних джерел

1. Boaler, J. Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching. Jossey-Bass, 2016.
2. Common Core State Standards Initiative. Mathematics Standards. 2010. URL: <https://www.corestandards.org>
3. Ministry of Education Singapore. Mathematics Syllabus (Primary and Lower Secondary). Curriculum Planning & Development Division, 2012.
4. Sahlberg, P. Finnish Lessons 2.0: What Can the World Learn from Educational Change in Finland? Teachers College Press, 2015.
5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Програма курсу математики для гуманітарних класів (10–11 класи): Збірник методичних матеріалів, 2006.
6. Бурда М. І., Кудренко Б. В., Біляніна О. Я. та ін. Математика 5–9 класи: навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів.
7. Глобін О., Лапінський В. Моделювання як ефективний засіб реалізації міжпредметних зв'язків у профільному навчанні математики та інформатики // Математика в школі. – 2010. – № 7–8. – С. 17–20.
8. Глущенко Л. Розв'язування текстових задач / Л. Р. Глущенко // Математика. – 2008. – № 31–32. – С. 22–46.
9. Головачанська О. В. Календарно-тематичне планування уроків математики для 10 класу, 2021. Робоча програма навчальної дисципліни "Вища математика".
10. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavniy-standart-bazovoi-serednoi-osviti>
11. Дубіна О. Е. Основи проектування та розробки навчальних курсів за модульною технологією: навч. посібник. Кіровоград: ТОВ «Полімед-Сервіс», 2005.
12. Захарченко Н. М. Текстові задачі в завданнях ЗНО, електронний ресурс. URL: <https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/tekstovyye-zadachi.pdf>

13. Істер О. С. Алгебра: підручник для 7 кл. К.: Освіта, 2007. – 223 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/251-algebra-ster-7-klas.html>
14. Істер О. С. Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи (інтегрований курс)» для закладів загальної середньої освіти, 2023.
15. Істер О. С. Підручник Математика 5 клас, 2022. URL: <https://12baliv.com.ua/book/5-klas/matematyka/o-s-ister-2022>
16. Істер О. С. Підручник Математика 6 клас, 2023, Частина 1 НУШ. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/2590-matematyka-6-klas-ister-2023.html>
17. Істер О. С. Підручник Математика 6 клас, 2023, Частина 2 НУШ. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/2590-matematyka-6-klas-ister-2023.html>
18. Істер О. С. Шкільний підручник для 8 кл. Алгебра. Харків: Генеза, 2025. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/2905-algebra-ister-8-klas-2025.html>
19. Істер О. С., Скворцова С. О., Козак О. В., Лищенко Г. В. Математика. 10–11 класи : модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти (профільний рівень) / за ред. О. С. Істера. — Київ : МОН України, 2022.
20. Кирилюк Л. Л. Використання математичного моделювання при розв'язуванні задач у курсі алгебри основної школи / Л. Л. Кирилюк // Методика. Досвід. — 2009. — № 3–4. — С. 72–78.
21. Коваль Л. В. Методика навчання математики: теорія і практика: підручник, 2-ге вид., перероб. та допов. — Х.: Принт-Лідер, 2021.
22. Коваль Л. В., Скворцова С. О. Методика навчання математики в початковій школі: теорія і практика. Харків: ЧП «Принт-Лідер», 2011.
23. Леута Н. Розв'язування текстових задач 9–11 класи // Математика. — 2004. — № 16 (268).
24. Лук'янова С. М. Розв'язування текстових задач в основній школі: традиції та інновації // Математика в рідній школі. — 2014. — № 1. — С. 37–39.
25. Математика, 10–11 класи. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

26. Мерзляк А. Г. Підручник Математика 6 клас, 2023, Частина 1 НУІІ. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/2589-matematyka-6-klas-merzliak-2023.html>
27. Мерзляк А. Г. Підручник Математика 6 клас, 2023, Частина 2 НУІІ. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/2589-matematyka-6-klas-merzliak-2023.html>
28. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А. та ін. *Чинна модельна навчальна програма з алгебри для 7–9 класів*, 2023. URL: <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/90156/>
29. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А. та ін. *Чинна модельна навчальна програма з геометрії для 7–9 класів*, 2023. URL: <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/90157/>
30. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти, 2022.
31. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти, 2022.
32. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: підручник для 11 класу. К.: Вид-во «Генеза», 2019. URL: <https://shkola.in.ua/516-alhebra-11-klas-merzliak.html>
33. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Шкільний підручник для 5 кл. Алгебра. Харків: Гімназія, 2022. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1638-mat-merzliak-5-klas-2022.html>
34. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Шкільний підручник для 7 кл. Алгебра. Харків: Гімназія, 2024. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/2892-algebra-merzliak-7-klas-2024.html>
35. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Шкільний підручник для 8 кл. Алгебра. Харків: Гімназія, 2025. URL: <https://shkola.in.ua/318-alhebra-8-klas-merzliak.html>

36. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Шкільний підручник для 9 кл. Алгебра. Харків: Гімназія, 2017. – 320 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/982-algebra-merzlyak-9-klas-2017.html>
37. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Шкільний підручник для 10 кл. Математика. Харків: Гімназія, 2018. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1153-matematyka-10-klas-merzlyak.html>
38. Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: навчальний посібник. Харків: Видавець Іванченко І. С., 2012.
39. Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року. URL: <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58879/>
40. Навчальна програма з математики (рівень стандарту) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року. URL: <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/>
41. Нелін Є. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія: підручник для 10 кл. (рівень стандарту), 2018. URL: <https://shkola.in.ua/1673-matematyka-10-klas-nelin-2018.html>
42. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія: підручник для 11 кл. (рівень стандарту), 2019. URL: <https://shkola.in.ua/1126-matematyka-11-klas-nelin-2019.html>
43. Письменна І. В. Календарно-тематичне планування Математика 6 клас НУІІ. URL: <https://vseosvita.ua/library/kalendarno-tematychne-planuvannia-matematyka-6-klas-nush-ister-2023-2024-1-semestr-721980.html>
44. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підручник, 2-ге вид. – К.: Вища школа, 2006.
45. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підручник для студентів матем. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

- 46.Слепкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: навч. посіб. К.: Вища школа, 2005. – 239 с.
- 47.Швець В. А. Про прикладну спрямованість шкільного курсу математики (рос.) / В. А. Швець // Дидактика математики: проблеми та дослідження. – 2008. – Вип. 30. – С. 135–142.
- 48.Ряміна Д. Текстові задачі у Національному мультипредметному тесті з математики. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс–2025 Форум молодих дослідників»: матеріали VII Всеукр. наук.-метод. інтернет-конф. студентів, аспірантів та молодих вчених (Суми, 28 листоп. 2025 р.). Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2025.
- 49.Ряміна Д. Текстові задачі як засіб формування компетентностей учнів в умовах НУШ. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. з міжнар. участю студентів, аспірантів і молодих учених, присвяч. 325-річчю Нац. ун-ту «Чернігівський колегіум» ім. Т. Г. Шевченка (Чернігів, 18 листоп. 2025 р.). Чернігів : НУ «Чернігівський колегіум», 2025.