

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Чкана Дмитро Ярославович

**ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ НА
ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ
У СТАРШІЙ ШКОЛІ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

Шищенко Інна Володимирівна,
доктор педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики
та методик їх навчання

«___» _____ 2025 року

Виконавець:

Чкана Дмитро Ярославович
студент 461 групи

«___» _____ 2025 року

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ	7
1.1. Законодавче забезпечення організації факультативних курсів з математики в українській школі	7
1.2. Психолого-педагогічні та соціально-економічні умови організації факультативних занять з математики в умовах воєнного стану	11
1.3. Методичні засади організації факультативних занять з математики: класифікація, функції та принципи	17
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИКИ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ	28
2.1. Задачі оптимізації економічного змісту: теоретичні основи та місце у шкільному курсі математики	28
2.2. Характеристика факультативного курсу "Оптимізаційні задачі в економіці"	36
2.3. Розв'язування задач оптимізації економічного змісту. Етапи розв'язування задач оптимізації економічного змісту в шкільному курсі математики	57
ВИСНОВКИ	64
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	66
ДОДАТКИ.....	72

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний світ важко уявити без математичних методів, які відіграють ключову роль у різних сферах суспільного життя, зокрема, в економіці та фінансах. Саме тому одним із важливих завдань шкільної освіти є формування в учнів умінь застосовувати математичні знання для розв'язання реальних проблем, включаючи фінансові та економічні аспекти.

Сьогодні фінансово-математичні навички необхідні не тільки професійним економістам і фінансистам, а й кожному, хто прагне свідомо управляти своїми фінансами. Опанування методів розрахунку прибутків і витрат, визначення відсоткових ставок, аналізу фінансових ризиків є невід'ємною складовою сучасної освіченості та фінансової грамотності.

Поєднання математичних підходів з економічною діяльністю відкриває нові можливості для професійного розвитку та матеріального благополуччя. У шкільному навчанні економічна спрямованість факультативних занять сприяє практичному застосуванню математичних знань, допомагаючи учням усвідомити їхню значущість у реальному житті.

Аналіз освітніх програм факультативних курсів із математики та економіки, а також навчальної літератури свідчить, що в шкільній освіті велика увага приділяється практичним задачам з економічним змістом. Використання таких завдань сприяє розвитку математичних компетенцій школярів і допомагає інтегрувати знання з різних предметних галузей.

Оскільки економіка та фінансова сфера постійно змінюються, навчальні матеріали потребують оновлення, а зміст економіко-математичних задач має адаптуватися до сучасних реалій. Це підкреслює **актуальність дослідження** оптимізаційних задач з економічним змістом у рамках факультативних занять із математики.

До проблематики прикладного навчання математики зверталися такі дослідники, як М.С. Лавінський, В.А. Швець, З.І. Слєпкань, Ю.В. Бицюра, В.В. Коваль та інші.

Факультативні курси економічного спрямування є особливо актуальними для учнів 10–11 класів. У цьому віці школярі вже мають певне уявлення про фінансову сферу, замислюються про майбутню професійну діяльність і проявляють зацікавленість у відповідних навчальних дисциплінах. Водночас курс «Оптимізаційні задачі в економіці» містить достатньо складні математичні задачі, що потребують глибокої підготовки як учнів, так і вчителів.

Крім того, такі факультативні курси виконують профорієнтаційну функцію, допомагаючи учням визначитися з майбутньою професією та підготуватися до вступу у вищі навчальні заклади економічного профілю.

Мета дослідження — дослідити теоретичні, дидактичні, методичні та організаційні аспекти навчання розв'язування задач оптимізації економічного змісту на факультативних заняттях з математики у старшій школі.

Для досягнення поставленої мети визначено такі **завдання**:

- 1) проаналізувати стан дослідженості проблеми в психолого-педагогічній, навчальній та методичній літературі;
- 2) розглянути ключові нормативні документи, що регулюють економічно-математичну освіту;
- 3) з'ясувати значення вивчення економічних і фінансових аспектів суспільного життя для формування дослідницького мислення учнів;
- 4) здійснити логіко-дидактичний аналіз факультативних курсів з математики;
- 5) визначити основні теми та розділи факультативного курсу «Оптимізаційні задачі в економіці» та їхню роль у шкільному курсі математики;
- 6) розробити методичні підходи до навчання учнів розв'язуванню задач оптимізації фінансових ресурсів.

Об'єкт дослідження: процес факультативного навчання математики у старшій школі.

Предмет дослідження: задачі оптимізації економічного змісту у процесі факультативного навчання з математики для учнів старшої школи.

Методи дослідження. Для реалізації поставлених завдань було використано наступні методи:

- *теоретичні:* аналіз наукової, психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення та узагальнення нормативних документів, що регулюють економічну та математичну освіту; систематизація та класифікація оптимізаційних задач з економічним змістом; моделювання методичних підходів до навчання фінансової математики;

- *емпіричні:* спостереження за навчальним процесом на факультативних заняттях; аналіз результатів навчальної діяльності учнів під час розв'язування задач оптимізації фінансових ресурсів.

Практичне значення здобутих результатів полягає у створенні методично обґрунтованої системи навчання оптимізаційних задач економічного змісту, готової до впровадження у шкільну практику; розробленні факультативного курсу, кейсів, алгоритмів розв'язування задач і підборі цифрових інструментів при безпосередньому використанні вчителями математики, учнями та викладачами педагогічних університетів.

Апробація результатів дослідження. За темою дослідження опубліковано: тези «Задачі на оптимізацію як ключ до формування ініціативності та підприємливості учнів у процесі навчання математики в НУШ» у матеріалах V Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (29 листопада 2024 р., м. Суми) «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2024 Форум молодих дослідників» [50], 2024. С. 87-89.], тезах «Оптимізаційні задачі та Excel у навчанні математики старшої школи» [51] та стаття «Використання цифрових технологій на факультативних заняттях з розв'язування задач оптимізації економічного змісту» [49] у матеріалах студентської звітної конференції.

Структура та обсяг магістерської роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

У першому розділі представлено теоретичні засади дослідження факультативних занять з математики, розглянуто нормативно-правове забезпечення організації факультативних курсів у закладах загальної середньої освіти; висвітлено психолого-педагогічні та соціально-економічні умови організації факультативів у період воєнного стану, охарактеризовано їх вплив на навчальну мотивацію, психологічний стан учнів та особливості освітнього процесу; подано методичні засади факультативних занять: класифікацію факультативів, їх функції, принципи організації та специфіку математичних курсів.

Другий розділ присвячений методичним особливостям навчання учнів розв'язування задач оптимізації економічного змісту. У ньому розкрито теоретичні основи оптимізаційних задач, їх місце в економіці та шкільному курсі математики; проаналізовано основні види оптимізаційних моделей; наведено характеристику авторського факультативного курсу «Оптимізаційні задачі в економіці»; структуру, змістові модулі, очікувані результати, методи й форми організації навчання; обґрунтовано методiku розв'язування оптимізаційних задач, визначено етапи роботи учнів, типові труднощі та шляхи їх подолання, наведено приклади завдань економічного змісту.

У висновках подано узагальнення теоретичних і методичних результатів дослідження та визначено перспективи подальшої роботи.

Загальний обсяг роботи 70 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел включає 54 одиниць. Текст містить 1 рисунок та 5 таблиць.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей та вчителям математики закладів загальної середньої освіти.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Законодавче забезпечення організації факультативних курсів з математики в українській школі

Система освіти України функціонує в правовому полі, що визначається ієрархією нормативно-правових актів, починаючи від Конституції України і закінчуючи локальними актами окремих навчальних закладів. Конституційною основою права на освіту в Україні є стаття 53 Основного Закону, яка проголошує, що кожен має право на освіту, а держава забезпечує доступність і безоплатність дошкільної, повної загальної середньої, професійно-технічної, вищої освіти у державних і комунальних навчальних закладах [25]. Це конституційне положення створює фундаментальну правову базу для розвитку всіх форм освітньої діяльності, включаючи факультативні форми навчання, які розширюють можливості реалізації права на освіту шляхом надання додаткових освітніх послуг відповідно до індивідуальних потреб та інтересів здобувачів освіти.

Базовим законодавчим актом, що регулює освітню сферу в Україні, є Закон України "Про освіту" від 5 вересня 2017 року № 2145-VIII [43]. Цей закон кардинально змінив підходи до організації освітнього процесу, запровадивши низку принципово нових концепцій. Серед основних принципів освітньої діяльності, закріплених у статті 6 зазначеного закону, особливе значення для організації факультативних курсів мають принцип людиноцентризму, що передбачає орієнтацію освітньої діяльності на потреби людини, а також принцип розмаїття освітніх програм, який дозволяє забезпечувати різноманітність освітніх траєкторій відповідно до здібностей, інтересів і потреб здобувачів освіти.

Револьюційним для української освітньої системи стало запровадження концепції автономії закладів освіти, закріпленої у статті 25 Закону "Про освіту". Згідно з цим положенням, заклади освіти мають право на академічну,

організаційну, фінансову та кадрову автономію у межах, визначених цим та іншими законами. Академічна автономія передбачає самостійність і незалежність у провадженні педагогічної, науково-педагогічної, наукової та інноваційної діяльності, що включає право на розроблення та реалізацію освітніх програм, проведення педагогічних експериментів, вибір форм навчання та форм організації освітнього процесу [43]. Це положення створює широкі можливості для закладів загальної середньої освіти щодо впровадження авторських освітніх програм, включаючи факультативні курси з математики, які можуть бути адаптовані до конкретних потреб та особливостей учнівського колективу.

Конкретизація правових засад організації загальної середньої освіти відбулася з прийняттям Закону України "Про повну загальну середню освіту" від 16 січня 2020 року № 463-IX [44]. Цей спеціальний закон деталізує структуру та зміст загальної середньої освіти, встановлюючи її поділ на початкову освіту (1-4 класи), базову середню освіту (5-9 класи) та профільну середню освіту (10-12 класи). Для організації факультативних курсів з математики особливе значення має профільна середня освіта, оскільки саме на цьому етапі учні здійснюють свідомий вибір майбутньої освітньої та професійної траєкторії. Стаття 12 зазначеного закону передбачає, що зміст профільної середньої освіти формується з урахуванням здібностей і потреб здобувачів освіти та може включати поглиблене вивчення окремих предметів, що створює правові підстави для організації спеціалізованих факультативних курсів.

Важливим аспектом правового регулювання є визначення типів освітніх програм, які можуть реалізовуватися у закладах загальної середньої освіти. Відповідно до статті 11 Закону "Про повну загальну середню освіту", заклади освіти можуть реалізовувати типові освітні програми, затверджені центральним органом виконавчої влади у сфері освіти і науки, авторські освітні програми, розроблені закладом освіти самостійно, та спеціалізовані освітні програми [44]. Ця класифікація дозволяє закладам освіти обирати

найбільш відповідну форму організації навчального процесу, включаючи розробку авторських програм факультативних курсів з математики, що враховують специфіку конкретного навчального закладу та потреби його учнів.

Нормативно-правове забезпечення математичної освіти в Україні базується на державних стандартах освіти, які визначають обов'язкові результати навчання та структуру освітніх програм. Державний стандарт базової середньої освіти, затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року № 898, та Державний стандарт профільної середньої освіти, затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 року № 1392 (зі змінами), встановлюють вимоги до математичної освітньої галузі [40]. Згідно з цими стандартами, метою навчання математики є розвиток особистості учня через формування та розвиток математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями, необхідними для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності, життя у суспільстві та самореалізації.

Особливої уваги заслуговує компетентнісний підхід, закріплений у державних стандартах освіти, який орієнтує освітній процес не на механічне засвоєння знань, а на формування здатності їх практичного застосування. У контексті математичної освіти це означає необхідність розвитку у здобувачів освіти навичок математичного моделювання реальних процесів і явищ, уміння використовувати математичні методи для розв'язання практичних задач. Саме ці цілі може ефективно реалізувати факультативний курс з задач оптимізації, який дозволяє продемонструвати практичне застосування математичних знань у різних галузях людської діяльності.

Щорічне нормативно-методичне забезпечення освітнього процесу здійснюється через інструктивно-методичні рекомендації Міністерства освіти і науки України. Зокрема, лист МОН України від 30 серпня 2024 року №1.1/15776-24 "Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2024/2025 навчальному

році" містить актуальні вказівки щодо організації навчального процесу з математики [54]. Ці рекомендації підкреслюють важливість індивідуального підходу до навчання, необхідність врахування різного рівня математичної підготовки учнів та доцільність використання різноманітних форм організації навчальної діяльності, включаючи факультативні заняття.

Правове регулювання факультативних курсів характеризується значною гнучкістю, що зумовлено принципом автономії навчальних закладів. Факультативні курси визначаються як освітні компоненти, що не є обов'язковими для вивчення всіма здобувачами освіти, але можуть бути включені до освітньої програми за рішенням закладу освіти з урахуванням освітніх потреб та інтересів учнів. Організація таких курсів здійснюється у межах автономії закладу освіти, при цьому вибір факультативних курсів залишається добровільним правом здобувачів освіти. Фінансування факультативних курсів може здійснюватися як за рахунок бюджетних коштів у межах фінансування основної освітньої діяльності, так і за рахунок додаткових джерел фінансування відповідно до чинного законодавства.

Важливим аспектом правового забезпечення є вимоги до якості факультативних курсів. Незважаючи на їх додатковий характер, такі курси повинні відповідати загальним принципам організації освітнього процесу, зокрема забезпечувати відповідність державним стандартам освіти, враховувати вікові та психологічні особливості здобувачів освіти, дотримуватися принципів академічної доброчесності та педагогічної етики. Особливого значення набуває професійна компетентність педагогів, які проводять факультативні заняття, оскільки такі курси часто вимагають поглибленого знання предмета та інноваційних методик навчання.

Актуальним викликом для української освітньої системи є функціонування в умовах воєнного стану, що вимагає адаптації всіх форм освітньої діяльності до нових реалій. Закон України "Про організацію освітнього процесу в умовах воєнного стану" та відповідні підзаконні акти передбачають можливість організації освітнього процесу у змішаній або

дистанційній формі, що створює як нові можливості, так і додаткові виклики для проведення факультативних курсів [42]. Водночас, це стимулює активне впровадження цифрових технологій в освітній процес, що може суттєво розширити можливості організації факультативних курсів з математики, зокрема через використання спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язування задач оптимізації.

Перспективи розвитку правового забезпечення факультативних курсів пов'язані з подальшою імплементацією принципів Нової української школи, зокрема поглибленням компетентнісного підходу та розширенням автономії навчальних закладів. Очікується подальша деталізація механізмів організації індивідуальних освітніх траєкторій учнів, що створить додаткові можливості для організації спеціалізованих факультативних курсів. Важливим напрямом є також розвиток нормативного забезпечення міжпредметної інтеграції, що особливо актуально для курсів з математичної оптимізації, які демонструють застосування математичних методів у різних галузях знань.

Таким чином, чинна нормативно-правова база України створює сприятливі умови для організації та проведення факультативних курсів з математики у закладах загальної середньої освіти. Поєднання конституційних гарантій права на освіту, принципів автономії навчальних закладів, компетентнісного підходу до організації освітнього процесу та гнучкості у виборі форм і методів навчання забезпечує правові підстави для впровадження інноваційних освітніх програм, включаючи спеціалізовані курси з задач оптимізації, які можуть суттєво збагатити математичну освіту українських школярів та сприяти їх підготовці до майбутньої професійної діяльності в умовах сучасного технологічного суспільства.

1.2. Психолого-педагогічні та соціально-економічні умови організації факультативних занять з математики в умовах воєнного стану

Організація факультативних занять з математики в сучасних умовах України відбувається в особливому контексті, що вимагає ретельного аналізу

психолого-педагогічних та соціально-економічних чинників, які визначають ефективність освітнього процесу. Воєнний стан, що діє в Україні з 24 лютого 2022 року, кардинально змінив умови функціонування системи освіти, поставивши перед педагогами, учнями та їхніми родинами нові виклики, які потребують глибокого осмислення та адекватної педагогічної відповіді.

Психологічні особливості учнів старшої школи в умовах воєнного стану характеризуються суттєвими змінами порівняно з мирним часом. Підлітки віком 15-17 років переживають складний період формування особистості, який у воєнних умовах ускладнюється додатковими стресовими факторами. Дослідження психологів показують, що тривалий стрес впливає на когнітивні функції, зокрема на здатність до концентрації уваги, логічного мислення та засвоєння складного математичного матеріалу [39]. Водночас саме математична діяльність може виступати засобом психологічної реабілітації, оскільки логічність та структурованість математичних завдань створюють відчуття порядку та передбачуваності у світі, який здається хаотичним та непередбачуваним.

Особливого значення в цьому контексті набуває мотиваційна сфера старшокласників. Традиційні мотиви навчання, такі як отримання високих оцінок або підготовка до вступу у вищий навчальний заклад, змінюються під впливом воєнних обставин. З'являються нові мотиваційні чинники: прагнення зберегти нормальність життя, бажання підготуватися до майбутньої відбудови країни, усвідомлення важливості економічних знань для розуміння воєнної економіки та післявоєнного відновлення. Факультативні заняття з задач оптимізації економічного змісту відповідають цим новим мотиваційним потребам, демонструючи практичну значущість математичних знань для розв'язання реальних економічних проблем.

Психологічна травматизація учнів внаслідок воєнних дій створює специфічні умови для організації освітнього процесу. Міністерство освіти і науки України у листі від 29 березня 2022 року № 1/3737-22 "Про забезпечення психологічного супроводу учасників освітнього процесу в

умовах воєнного стану в Україні" підкреслює необхідність особливої уваги до психологічного стану здобувачів освіти [33]. Травмовані діти відчують певні труднощі з концентрацією, увагою та поведінкою, що вимагає від педагогів адаптації методик навчання. Факультативні заняття в цьому контексті можуть стати важливим інструментом терапевтичного впливу, оскільки добровільність участі знижує психологічний тиск, а зосередженість на конкретних практичних задачах допомагає відволіктися від травматичних переживань.

Організаційні особливості освітнього процесу в умовах воєнного стану суттєво впливають на можливості проведення факультативних занять. Змішана та дистанційна форми навчання стали домінуючими у багатьох регіонах України, що потребує переосмислення традиційних підходів до організації факультативів. Дослідження ефективності дистанційного навчання показують, що для старшокласників, які мають вищий рівень самоорганізації та мотивації, онлайн-формат може бути достатньо ефективним [17]. Однак математичні дисципліни, особливо такі складні теми як задачі оптимізації, вимагають інтерактивної взаємодії та можливості отримання негайного зворотного зв'язку від педагога, що ускладнюється в дистанційному форматі.

Технічні обмеження, пов'язані з відсутністю стабільного електропостачання та інтернет-з'єднання, створюють додаткові виклики для організації факультативних занять. Необхідність регулярного переривання занять через повітряні тривоги вимагає особливої структуризації навчального матеріалу та використання модульного підходу, коли кожен навчальний епізод може бути завершеним і зрозумілим самостійно. Це особливо важливо для задач оптимізації, які зазвичай мають складну структуру та потребують тривалого часу для розв'язання.

Соціально-економічний контекст воєнного часу створює унікальні можливості для актуалізації математичних знань через призму економічної проблематики. Учні старшої школи стають свідками та учасниками кардинальних економічних змін: перебудови економіки на воєнний лад,

міграційних процесів, інфляційних процесів, проблем логістики та оптимізації ресурсів. Ці реальні економічні виклики можуть стати потужним мотиваційним чинником для вивчення задач оптимізації, оскільки учні безпосередньо спостерігають практичну значущість оптимізаційних підходів у військовій економіці, гуманітарній логістиці, ефективному розподілі обмежених ресурсів.

Особливої актуальності набуває питання формування економічної грамотності як життєвої компетентності. Воєнні умови змушують молодих людей рано стикатися з економічними рішеннями: планування сімейного бюджету в умовах нестабільності, розуміння інфляційних процесів, оцінка ризиків інвестицій та заощаджень. Факультативні курси з задач оптимізації економічного змісту можуть ефективно формувати ці компетентності, демонструючи математичні методи розв'язання практичних економічних проблем.

Педагогічні умови організації факультативних занять в умовах воєнного стану вимагають особливої уваги до принципів гуманістичної педагогіки. Принцип добровільності набуває особливого значення, оскільки будь-який примус може сприйматися як додатковий стресовий фактор. Водночас принцип індивідуалізації стає критично важливим, оскільки воєнні обставини по-різному впливають на учнів: хтось залишається у відносно безпечних регіонах, хтось переживає евакуацію або втрату близьких. Це вимагає гнучкого підходу до планування та проведення занять, можливості адаптації змісту та темпу навчання до індивідуальних потреб та можливостей кожного учня.

Методичні особливості організації факультативних занять в умовах обмеженого часу та частих переривань потребують використання інноваційних педагогічних технологій. Ефективними виявляються методи проблемного навчання, коли учні залучаються до розв'язання реальних оптимізаційних задач, пов'язаних з воєнною економікою або післявоєнним відновленням. Наприклад, задачі оптимізації маршрутів евакуації, розподілу

гуманітарної допомоги, планування відбудови інфраструктури не лише демонструють практичну значущість математичних методів, але й формують громадянську позицію та розуміння складності управлінських рішень.

Роль цифрових технологій у організації факультативних занять істотно зросла в умовах воєнного стану. Використання спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язування оптимізаційних задач, онлайн-платформ для моделювання економічних процесів, інтерактивних дошок для візуалізації математичних концепцій стало не лише бажаним, але й необхідним елементом навчального процесу. Це створює додаткові можливості для індивідуалізації навчання та забезпечення інтерактивності навіть у дистанційному форматі.

Важливим аспектом є формування стресостійкості та адаптивності через математичну діяльність. Розв'язування складних оптимізаційних задач розвиває навички системного мислення, здатність до аналізу складних ситуацій, пошуку альтернативних рішень в умовах обмежених ресурсів. Ці навички виявляються особливо цінними в умовах невизначеності та швидких змін, характерних для воєнного часу.

Соціальна функція факультативних занять у воєнний час виходить за межі традиційної освітньої мети. Такі заняття стають засобом збереження освітньої континуальності, підтримання соціальних зв'язків між учнями, формування спільноти однодумців. Для багатьох учнів факультативи можуть стати островком нормальності у хаотичному воєнному житті, місцем, де можна зосередитися на інтелектуальній діяльності та забути про воєнні тривоги.

Перспективи професійного самовизначення старшокласників також зазнають змін під впливом воєнних обставин. Зростає інтерес до професій, пов'язаних з економікою, логістикою, управлінням ресурсами, відбудовою країни. Факультативні курси з задач оптимізації економічного змісту можуть стати важливим чинником профорієнтації, демонструючи можливості застосування математичних знань у цих актуальних сферах діяльності.

Оцінювання результатів навчання на факультативних заняттях в умовах воєнного стану потребує особливого підходу. Традиційні методи оцінювання можуть створювати додатковий стрес, тому доцільним є використання формувального оцінювання, взаємооцінювання, створення портфоліо досягнень. Важливо підкреслювати індивідуальний прогрес кожного учня, а не порівнювати результати між учнями, оскільки умови навчання можуть суттєво відрізнятись.

Підготовка педагогів до роботи в умовах воєнного стану також потребує особливої уваги. Учителі самі переживають стрес і травматичний досвід, що може впливати на їхню професійну діяльність. Необхідними є спеціальні програми підвищення кваліфікації, що включають як психологічні аспекти роботи з травмованими дітьми, так і методичні особливості організації навчання в умовах обмежених ресурсів та технічних складнощів.

Таким чином, психолого-педагогічні та соціально-економічні умови організації факультативних занять з математики в умовах воєнного стану характеризуються складністю та неоднозначністю. З одного боку, воєнні обставини створюють додаткові виклики: психологічну травматизацію учнів, технічні обмеження, організаційні складнощі. З іншого боку, вони відкривають нові можливості для актуалізації математичних знань через призму реальних економічних проблем, формування життєво важливих компетентностей, розвитку стресостійкості та адаптивності. Успішна організація факультативних курсів з задач оптимізації економічного змісту в цих умовах вимагає комплексного підходу, що враховує як традиційні педагогічні принципи, так і специфіку воєнного часу, забезпечуючи водночас високу якість математичної освіти та психологічну підтримку учнів.

1.3. Методичні засади організації факультативних занять з математики: класифікація, функції та принципи

Факультативні заняття з математики посідають особливе місце в системі математичної освіти, являючи собою гнучкий інструмент індивідуалізації навчального процесу та розвитку математичних здібностей учнів. Розуміння сутності, функцій та принципів організації цих занять є ключовим для ефективного впровадження спеціалізованих математичних курсів у практику загальноосвітніх навчальних закладів.

У педагогічній літературі факультативні заняття визначаються як форма диференційованого навчання, що передбачає добровільну участь учнів у поглибленому вивченні окремих предметів або міжпредметних курсів поза межами обов'язкової навчальної програми. Факультативні курси є системою навчальних занять, що проводяться за вибором учнів із метою розширення, поглиблення та застосування знань, умінь і навичок, отриманих на обов'язкових уроках [38]. У системі профільного навчання такі курси сприяють задоволенню пізнавальних інтересів та освітніх потреб старшокласників, загалом не пов'язаних із специфікою вибраного профілю навчання. [29] Сучасні дослідники розглядають факультативи та курси за вибором як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання, що забезпечує реалізацію індивідуальних освітніх траєкторій учнів. Зокрема, у наукових дослідженнях і методичних рекомендаціях наголошується, що факультативні та елективні курси дають можливість учням обирати зміст і темп навчання відповідно до інтересів і здібностей, тим самим сприяючи персоналізації навчальної траєкторії [31; 28].

Принципова відмінність факультативних занять від інших форм організації навчального процесу полягає у їх специфічних характеристиках. На відміну від обов'язкових уроків, факультативи базуються на принципі добровільності участі та вибору змісту навчання. Якщо урок має чітко регламентовану програму та обов'язковий для всіх учнів зміст, то факультативне заняття дозволяє варіювати глибину та обсяг матеріалу

відповідно до інтересів та здібностей конкретних учнів. Від предметних гуртків факультативи відрізняються більшою систематичністю, наявністю структурованої програми й оцінювання результатів. Гурткова робота часто має епізодичний характер і спрямована переважно на розвиток творчих здібностей, тоді як факультативи передбачають послідовне засвоєння певного обсягу знань і формування відповідних компетентностей.

Репетиторство, на відміну від факультативних занять, має індивідуальний або малогруповий характер і спрямоване на подолання прогалин у знаннях або підготовку до іспитів. Факультативи ж орієнтовані на розвиток здібностей групи учнів зі схожими інтересами та рівнем підготовки. У системі диференціації навчання факультативні заняття виконують роль "вертикального" поглиблення знань, доповнюючи "горизонтальну" диференціацію, що здійснюється на обов'язкових уроках через різнорівневі завдання та індивідуальний підхід.

Різноманітність факультативних курсів з математики потребує їх систематизації за декількома критеріями (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1. Класифікація факультативних курсів з математики

Критерій класифікації	Види факультативів	Характеристика
За змістом	Предметні	Поглиблене вивчення окремих розділів математики; формування стійких знань у межах певної математичної галузі
	Міжпредметні	Інтегрують математичні знання з іншими навчальними дисциплінами, сприяючи усвідомленню міжпредметних зв'язків
	Надпредметні	Розвивають загальні інтелектуальні вміння та універсальні пізнавальні стратегії
За тривалістю	Короткострокові	Тривають від кількох тижнів до одного семестру; охоплюють вузьку тематику
	Довгострокові	Розраховані на навчальний рік чи довше; забезпечують глибоку та систематичну підготовку

За контингентом учнів	Для обдарованих учнів	Мають підвищений рівень складності; спрямовані на розвиток творчого та дослідницького мислення
	Компенсаційні	Орієнтовані на підтримку учнів із труднощами; сприяють вирівнюванню рівня підготовки
	Змішані групи	Об'єднують учнів різного рівня; потребують спеціальних методичних підходів
За функціональним призначенням	Поглиблюючі	Спрямовані на розширення, систематизацію та поглиблення математичних знань
	Розвивальні	Розвивають логічне мислення, інтелектуальні уміння та навички дослідницької діяльності
	Компенсаційні	Допомагають долати навчальні труднощі та формують базові компетентності
	Профорієнтаційні	Ознайомлюють із можливостями застосування математики у професійній діяльності

За змістовим критерієм виділяють предметні, міжпредметні та надпредметні факультативи. Предметні факультативи зосереджені на поглибленому вивченні окремих розділів математики: алгебри, геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей. Такі курси, як "Рівняння та нерівності з параметрами" або "Планіметричні побудови", є типовими представниками цієї групи. Міжпредметні факультативи інтегрують математичні знання з іншими навчальними дисциплінами. Прикладами можуть слугувати курси "Математичні методи у фізиці", "Математика в економіці", "Біоматематика". Надпредметні факультативи спрямовані на формування загальних інтелектуальних умінь і навичок, таких як "Логіка та мислення", "Методи розв'язування олімпіадних задач".

Класифікація за тривалістю передбачає поділ на короткострокові та довгострокові курси. Короткострокові факультативи тривають від декількох тижнів до одного семестру й зазвичай присвячені конкретній темі або проблемі. Наприклад, курс "Золотий переріз у математиці та мистецтві" може розраховуватися на 8-12 занять. Довгострокові факультативи охоплюють навчальний рік або навіть кілька років навчання, забезпечуючи систематичне та глибоке опрацювання великого обсягу матеріалу.

За контингентом учнів факультативи поділяються на курси для математично обдарованих учнів, для тих, хто потребує додаткової підтримки, та змішані групи. Факультативи для обдарованих учнів характеризуються високим рівнем складності, творчими завданнями, олімпіадними задачами. Компенсаційні факультативи призначені для учнів, які мають труднощі в засвоєнні основного курсу математики, і спрямовані на ліквідацію прогалин у знаннях та формування базових навичок. Змішані групи об'єднують учнів різного рівня підготовки, що потребує особливих методичних підходів до організації навчального процесу.

Функціональна класифікація виділяє поглиблюючі, розвивальні, компенсаційні та профорієнтаційні факультативи. Поглиблюючі курси розширюють та систематизують знання учнів з основних розділів шкільної математики. Розвивальні факультативи спрямовані на формування математичного мислення, логічної культури, дослідницьких навичок. Компенсаційні курси допомагають подолати труднощі в навчанні математики. Профорієнтаційні факультативи знайомлять учнів із застосуванням математики в різних сферах діяльності, сприяючи усвідомленому вибору майбутньої професії.

Факультативні заняття з математики виконують комплекс важливих функцій, кожна з яких спрямована на всебічний розвиток учнів і підвищення якості математичної освіти (рис. 1.1).

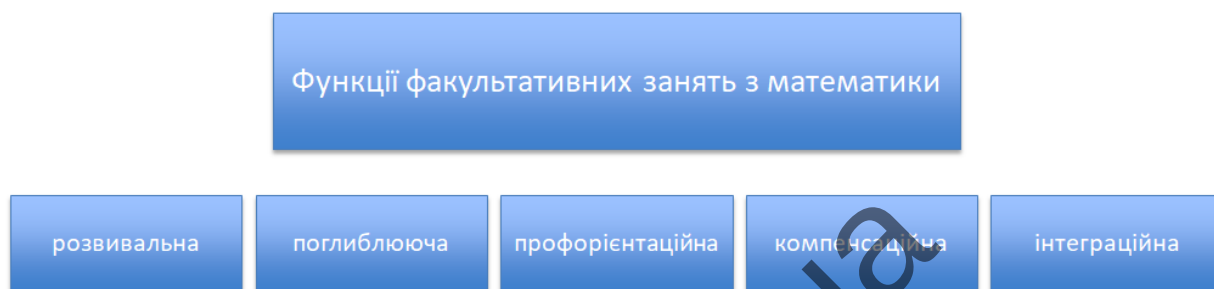


Рис.1.1.Функції факультативних занять з математики

Розвивальна функція факультативних занять з математики є однією з найважливіших і полягає у формуванні та вдосконаленні інтелектуальних здібностей учнів. Математика як навчальний предмет має значний потенціал для розвитку логічного мислення, просторової уяви, здатності до абстрагування та узагальнення. Факультативні заняття, звільнені від необхідності охоплення всіх учнів класу з різним рівнем підготовки, створюють оптимальні умови для інтелектуального розвитку кожного учасника. Як підкреслюють українські дослідники В. Перевертень та І. В. Гончарова, факультативні заняття з математики створюють умови, за яких учні не просто засвоюють готові знання, а й самостійно відкривають математичні закономірності, формують гіпотези, проводять елементи дослідницької діяльності та активно шукають шляхи розв'язання проблемних ситуацій. [37].

Поглиблююча функція реалізується через детальне вивчення тих розділів математики, які в основному курсі розглядаються оглядово або взагалі не включені до програми. Це дозволяє учням отримати більш повне уявлення про математику як науку, усвідомити внутрішні зв'язки між різними математичними теоріями, оцінити красу та логічну стрункість математичних побудов. Поглиблення може відбуватися як за рахунок розширення фактичного матеріалу, так і через підвищення рівня теоретичного осмислення вже знайомих понять та методів.

Профорієнтаційна функція факультативних занять особливо актуалізується в умовах сучасного ринку праці, де математичні компетентності затребувані в багатьох галузях. Ознайомлення з прикладними аспектами математики, зокрема із застосуванням методів моделювання, аналізом даних і дослідницькою роботою, допомагає учням усвідомити практичну значущість математичних знань і може підвищувати їхню зацікавленість у технічних та природничих напрямках навчання. Дослідження показують, що участь у позакласних та факультативних STEM-заходах пов'язана з підвищенням зацікавленості у STEM і зростанням ймовірності подальшого вибору технічних/природничих спеціальностей [3].

Профорієнтаційна функція факультативних занять набуває особливої актуальності в умовах сучасного ринку праці, де математичні компетентності стають затребуваними в найрізноманітніших сферах діяльності. Знайомство з прикладними аспектами математики, із застосуванням математичних методів у техніці, економіці, біології, медицині допомагає учням усвідомити практичну значущість математичних знань і може вплинути на вибір майбутньої професії. Дослідження показують, що учні, які відвідували математичні факультативи, частіше обирають технічні та природничі спеціальності для подальшого навчання.

Компенсаційна функція особливо важлива для системи освіти в цілому, оскільки дозволяє надати додаткову підтримку учням, які з різних причин не встигають засвоювати матеріал основного курсу в необхідному обсязі. Спеціально організовані факультативні заняття можуть ефективно ліквідувати прогалини в знаннях, сформувати міцні базові навички, підвищити мотивацію до вивчення математики. Важливо підкреслити, що компенсаційні факультативи не є механічним повторенням шкільної програми, а передбачають використання альтернативних методів подачі матеріалу, іншого ритму навчання, додаткових засобів унаочнення.

Інтеграційна функція проявляється у встановленні міцних зв'язків між математикою та іншими навчальними предметами, а також між різними

розділами математики. Факультативні заняття створюють унікальні можливості для демонстрації єдності наукового знання, показу застосування математичних методів у різних галузях науки та практичної діяльності. Така інтеграція сприяє формуванню цілісної наукової картини світу, розвиває здатність до міждисциплінарного мислення.

Ефективність факультативних занять з математики значною мірою залежить від того, наскільки послідовно й обґрунтовано реалізуються основні дидактичні принципи їх організації. Саме ці принципи визначають специфіку факультативів, їх відмінність від обов'язкових уроків і можливості для поглибленого та індивідуалізованого навчання.

Принцип добровільності вибору є основоположним для факультативних занять і принципово відрізняє їх від обов'язкового навчання. Цей принцип передбачає не лише право учня самостійно вирішувати, чи відвідувати факультатив, але й можливість вибору конкретного курсу з-поміж запропонованих альтернатив. Добровільність участі забезпечує високу мотивацію учнів, створює атмосферу зацікавленості та творчої співпраці. Однак реалізація цього принципу потребує створення системи інформування учнів про зміст та мету різних факультативних курсів, організації презентацій, консультацій з учителями та батьками.

Індивідуалізація та диференціація навчання на факультативних заняттях можуть здійснюватися значно глибше, ніж на обов'язкових уроках. Менша наповнюваність груп і вища однорідність учнів за інтересами та здібностями створюють сприятливі умови для врахування їхніх індивідуальних особливостей. Диференціація може реалізовуватися через завдання різного рівня складності, різні методи навчання і варіювання темпу. Як зазначає І. В. Лов'янова, диференціація змісту в профільній старшій школі дає змогу ефективно зорієнтувати навчальний процес під специфіку класів та індивідуальні освітні траєкторії учнів [27]. Крім того, теоретико-методичні дослідження Тарасенкової Н.А. підкреслюють важливість особистісно-

орієнтованого підходу в системі засобів навчання математики, зокрема через диференціацію завдань і використання діяльнісних методів.

Принцип практичної спрямованості особливо важливий для математичних факультативів, оскільки дозволяє подолати уявлення про математику як абстрактну науку, відірвану від реального життя. Включення в програму факультативу прикладних задач, моделювання реальних процесів, використання комп'ютерних технологій сприяє формуванню в учнів розуміння практичної значущості математичних знань. При цьому практична спрямованість не повинна зводитися до простого розв'язування життєвих задач, а має демонструвати потужність математичних методів для дослідження складних явищ і процесів.

Баланс між науковістю та доступністю становить одну з основних методичних проблем організації факультативних занять. З одного боку, факультативи мають знайомити учнів із сучасними досягненнями математичної науки, формувати уявлення про математику як живу, динамічну галузь знань. З іншого боку, матеріал має бути доступним для сприйняття учнями відповідного віку і рівня підготовки. Розв'язання цієї проблеми потребує ретельного відбору змісту, використання ефективних методів популяризації складних математичних ідей, застосування наочності та комп'ютерного моделювання.

Систематичність та послідовність у побудові програми факультативного курсу забезпечують ефективність навчального процесу та досягнення поставлених цілей. На відміну від епізодичних гурткових занять, факультатив має бути побудований як логічно завершена система, де кожне заняття органічно пов'язане з попередніми і наступними. Це потребує ретельного планування, врахування внутрішньої логіки предмета, поступового ускладнення матеріалу.

Математичні факультативи мають ряд специфічних особливостей, які відрізняють їх від факультативів з інших навчальних предметів. Передусім це стосується характеру математичного знання, яке має чітку логічну структуру,

високий рівень абстракції, строгість формулювань та доведень. Ці особливості вимагають спеціальних методичних підходів до організації навчального процесу.

За змістом математичні факультативи можна поділити на кілька основних типів. Алгебраїчні факультативи зосереджуються на поглибленому вивченні алгебраїчних структур, рівнянь і нерівностей, функцій та їх властивостей. Популярними є курси "Рівняння та нерівності з параметрами", "Ірраціональні рівняння та нерівності", "Тригонометричні рівняння підвищеної складності". Геометричні факультативи можуть бути присвячені як планіметрії ("Геометричні побудови", "Площі фігур"), так і стереометрії ("Многогранники", "Тіла обертання"). Факультативи з математичного аналізу знайомлять учнів із основами диференціального та інтегрального числення, часто в контексті розв'язування прикладних задач. Курси з прикладної математики демонструють застосування математичних методів у різних сферах: "Математичне моделювання", "Теорія ймовірностей та статистика", "Математика в економіці".

Контингент учнів математичних факультативів характеризується певною специфікою. Зазвичай це учні з підвищеним інтересом до математики, які мають достатній рівень базової підготовки і прагнуть поглибити свої знання. Однак серед учасників факультативів можуть бути як потенційні переможці математичних олімпіад, так і учні, які просто хочуть краще зрозуміти окремі розділи шкільного курсу. Така неоднорідність потребує гнучких підходів до організації навчального процесу, використання диференційованих завдань, створення можливостей для роботи в парах та малих групах.

Зв'язок з основним курсом математики є важливою характеристикою факультативних занять. Факультатив не повинен дублювати шкільну програму, але й не може бути повністю відірваним від неї. Оптимальний підхід передбачає органічне поєднання поглиблення та розширення програмного матеріалу з вивченням нових тем та методів. Це дозволяє, з

одного боку, краще засвоїти основний курс, а з іншого – отримати уявлення про математику, що виходить за межі шкільної програми.

Вітчизняна система освіти накопичила значний досвід організації факультативних занять, який частково зберігає свою актуальність і сьогодні. Факультативи були введені в вітчизняну школу в 1966 році як засіб диференціації навчання та розвитку індивідуальних здібностей учнів. Особливо розвиненою була система математичних факультативів, для яких було створено спеціальні навчальні посібники, розроблено методичні рекомендації. Досвід роботи таких видатних педагогів, як Б.В. Гнеденко, А.Я. Хінчин, І.М. Гельфанд, заклав основи методики викладання факультативних курсів з математики.

Сучасна українська система освіти продовжує традиції організації факультативних занять, адаптуючи їх до нових умов і вимог. Державний стандарт загальної середньої освіти передбачає можливість введення факультативних курсів як компонента, що формується учасниками освітнього процесу. Це створює широкі можливості для врахування потреб конкретних учнів та специфіки навчального закладу. Сучасні українські факультативи характеризуються більшою різноманітністю змісту, активним використанням інформаційних технологій, тіснішим зв'язком з практичними потребами суспільства.

Зарубіжний досвід організації додаткових занять з математики також заслуговує на увагу. У США широко розповсюджені так звані "honors courses" – курси підвищеної складності для академічно успішних учнів. Фінська система освіти пропонує учням можливість вибору поглибленого рівня вивчення математики на старшому ступені навчання. Німецька модель передбачає систему курсів за вибором ("Wahlfächer"), що дозволяє учням формувати індивідуальну освітню траєкторію. Аналіз зарубіжного досвіду показує різноманітність підходів до організації диференційованого навчання математики, що може бути корисним для розвитку вітчизняної системи факультативних занять.

Таким чином, факультативні заняття з математики є важливим елементом сучасної системи математичної освіти, що забезпечує реалізацію принципів особистісно орієнтованого навчання, сприяє розвитку математичних здібностей учнів та їх професійному самовизначенню. Ефективність цих занять залежить від дотримання основних принципів їх організації, врахування специфіки математичного знання та індивідуальних особливостей учнів. Подальший розвиток системи факультативів потребує поєднання кращих традицій вітчизняної педагогіки з сучасними досягненнями методичної науки та зарубіжним досвідом.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИКИ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

2.1. Задачі оптимізації економічного змісту: теоретичні основи та місце у шкільному курсі математики

Задачі оптимізації займають центральне місце в сучасній прикладній математиці та економіці, представляючи собою потужний інструмент для прийняття рішень в умовах обмежених ресурсів. Розвиток ринкової економіки, зростання складності господарських процесів, необхідність ефективного використання ресурсів актуалізують потребу в математичній грамотності майбутніх фахівців різних галузей [6]. У цьому контексті включення елементів теорії оптимізації до змісту шкільної математичної освіти набуває особливої значущості як засіб формування практично орієнтованих математичних компетентностей учнів.

Теорія оптимізації як розділ прикладної математики досліджує методи знаходження найкращого розв'язку серед множини допустимих альтернатив [1]. У найзагальнішому вигляді задача оптимізації формулюється як знаходження екстремуму цільової функції за наявності певних обмежень на змінні. Математично це записується у вигляді: знайти екстремум функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умов $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$, де $i = 1, 2, \dots, m$, та $x_j \geq 0$, де $j = 1, 2, \dots, n$ [19]. Така постановка охоплює широкий клас практичних задач, від розподілу ресурсів на підприємстві до планування інвестиційних портфелів.

Лінійне програмування становить один із найбільш розроблених та практично значущих розділів теорії оптимізації. Основною особливістю задач лінійного програмування є лінійність як цільової функції, так і системи обмежень. Класичним прикладом є задача про оптимальний план виробництва, коли підприємство має максимізувати прибуток від випуску

декількох видів продукції за умов обмеженості сировини, робочої сили, обладнання [16].

Математична модель такої задачі має вигляд: максимізувати функцію $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ за системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

та умов невід'ємності змінних.

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування дає можливість їх наочного розв'язування для випадків двох-трьох змінних. Область допустимих розв'язків являє собою опуклий багатогранник, а оптимальний розв'язок досягається в одній із його вершин. Ця властивість лежить в основі симплекс-методу, класичного алгоритму розв'язування задач лінійного програмування, розробленого Дж. Данцигом у 1947 році [4]. Для шкільної математики особливо цінним є графічний метод розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними, який дозволяє учням візуалізувати процес оптимізації та краще зрозуміти його суть [32].

Задачі на знаходження екстремумів функцій однієї або декількох змінних становлять інший важливий клас оптимізаційних задач. У шкільному курсі математики учні знайомляться з методами знаходження екстремумів за допомогою похідної, що створює природну основу для розгляду простих оптимізаційних задач. Класичними є задачі на знаходження максимальної площі при заданому периметрі, мінімальної поверхні при заданому об'ємі, оптимальних розмірів упаковки. Такі задачі не лише демонструють практичне застосування диференціального числення, але й формують уявлення про оптимізаційне мислення.

Комбінаторна оптимізація розглядає задачі, в яких змінні можуть приймати лише дискретні значення. До цього класу належать задачі комівояжера, про призначення, про покриття множин, про розкладку

предметів у рюкзаку. Хоча повноцінне вивчення методів комбінаторної оптимізації виходить за межі шкільної програми, окремі задачі цього типу можуть бути цікавими для учнів як приклади ситуацій, де потрібно перебрати скінченну, але велику кількість варіантів для знаходження найкращого.

Динамічне програмування являє собою метод розв'язування багатоетапних задач оптимізації, коли рішення приймаються послідовно на кожному етапі з урахуванням їх впливу на майбутні результати. Принцип оптимальності Беллмана стверджує, що оптимальна стратегія має властивість: незалежно від попередніх рішень та стану, в якому система опинилася в результаті цих рішень, наступні рішення повинні становити оптимальну стратегію відносно стану, що виник [2]. Хоча формальний апарат динамічного програмування складний для шкільного рівня, ідеї багатоетапної оптимізації можуть бути проілюстровані на простих прикладах планування діяльності в часі.

Економічні задачі оптимізації виникають у всіх сферах господарської діяльності та на всіх рівнях економічної системи: від управління особистими фінансами до макроекономічного планування. Розуміння природи цих задач є важливим для формування економічної культури учнів та їх підготовки до свідомої участі в економічному житті суспільства.

На рівні підприємства задачі оптимізації пов'язані з максимізацією прибутку, мінімізацією витрат, оптимальним використанням ресурсів. Виробнича функція, що пов'язує обсяги виробничих факторів з обсягом випуску, є основою для формулювання різноманітних оптимізаційних задач [30]. Наприклад, задача про оптимальну комбінацію факторів виробництва за заданого бюджету зводиться до максимізації виробничої функції за бюджетного обмеження. Дуальною до неї є задача мінімізації витрат за заданого рівня випуску.

Задачі транспортного типу належать до класичних задач лінійного програмування і мають пряме економічне тлумачення. Необхідність доставки товарів від постачальників до споживачів з мінімальними транспортними

витратами виникає в діяльності більшості підприємств. Математична модель транспортної задачі включає обмеження на пропозицію товару у пунктах відправлення, обмеження на попит у пунктах призначення та критерій мінімізації загальних транспортних витрат [45].

Фінансові задачі оптимізації стосуються формування оптимальних інвестиційних портфелів, планування грошових потоків, управління ризиками [15]. Модель Марковіца для оптимізації портфеля цінних паперів є класичним прикладом застосування квадратичного програмування в економіці [5]. Інвестор прагне максимізувати очікувану прибутковість портфеля при заданому рівні ризику або мінімізувати ризик при заданому рівні прибутковості. Хоча повна модель Марковіца складна для розуміння школярами, спрощені варіанти задач про диверсифікацію вкладень можуть бути цікавими та корисними.

Задачі оптимізації споживчого вибору демонструють застосування математичних методів у мікроекономіці. Споживач максимізує корисність за бюджетного обмеження, що математично формулюється як задача на умовний екстремум. Метод множників Лагранжа дає можливість знайти оптимальну структуру споживання [9]. Простіші варіанти таких задач, де корисність є лінійною або квадратичною функцією, доступні для розуміння старшокласників.

Екологічні та ресурсні задачі оптимізації набувають все більшої актуальності в контексті сталого розвитку. Оптимізація використання природних ресурсів, мінімізація екологічних збитків, планування відновлюваних джерел енергії потребують математичного моделювання та оптимізаційних методів [13]. Такі задачі особливо цінні з педагогічної точки зору, оскільки поєднують математичний зміст з важливими соціальними проблемами.

Адаптація задач оптимізації для шкільного рівня потребує ретельного дидактичного аналізу, що враховує математичну підготовку учнів, доступність методів розв'язування, наочність та практичну значущість задач [35].

Основним принципом такої адаптації є збереження математичної суті при спрощенні технічних деталей.

Задачі лінійного програмування з двома змінними є найбільш придатними для вивчення в школі завдяки можливості геометричної інтерпретації [10]. Учні можуть будувати область допустимих розв'язків на координатній площині, знаходити вершини цієї області, обчислювати значення цільової функції в кожній вершині та вибирати оптимальну. Такий підхід дозволяє не лише розв'язати конкретну задачу, але й сформувати розуміння загальних принципів оптимізації.

Задачі на знаходження екстремумів функцій природно вписуються в програму старших класів, оскільки базуються на знайомому учням апараті диференціального числення. Особливо цінними є задачі з економічним змістом: знаходження оптимального рівня виробництва для максимізації прибутку, визначення ціни товару для максимізації доходу, оптимізація витрат на виробництво. Такі задачі демонструють практичне застосування похідної та формують розуміння економічних закономірностей.

Комбінаторні задачі оптимізації можуть розглядатися на інтуїтивному рівні як задачі на знаходження найкращого способу серед скінченної множини альтернатив. Прикладами можуть бути задачі про оптимальне розміщення об'єктів, вибір найкращого маршруту, розподіл ресурсів між альтернативними проєктами. Хоча систематичні методи розв'язування таких задач складні, їх розгляд сприяє розвитку логічного мислення та формуванню уявлень про складність обчислень.

Стохастичні задачі оптимізації, що враховують випадковість та невизначеність, важливі для формування реалістичних уявлень про прийняття рішень в економіці. Простіші варіанти таких задач можуть базуватися на поняттях математичного сподівання та ймовірності, що вивчаються в курсі алгебри та початків аналізу. Наприклад, вибір оптимальної стратегії інвестування за умови невизначеності прибутковості може формулюватися як задача максимізації очікуваної корисності.

Важливим аспектом дидактичної адаптації є забезпечення мотивації учнів через демонстрацію практичної значущості задач оптимізації. Задачі мають формуватися в термінах, близьких до життєвого досвіду учнів: планування особистого бюджету, вибір оптимальної стратегії навчання, організація дозвілля [46]. Поступово можна переходити до більш складних економічних ситуацій: управління малим бізнесом, планування виробництва, інвестиційні рішення.

Інтеграція задач оптимізації до шкільного курсу математики має спиратися на чинні навчальні програми та органічно доповнювати традиційний зміст новими прикладними аспектами. Аналіз програм з математики для 10-11 класів показує наявність кількох тем, що створюють природну основу для введення оптимізаційних задач [36].

У курсі алгебри та початків аналізу тема «Застосування похідної до дослідження функцій» безпосередньо пов'язана з задачами на знаходження екстремумів. Традиційно учні розв'язують задачі типу: знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку, дослідити функцію на монотонність та екстремуми. Ці знання можуть бути поглиблені через розгляд прикладних задач оптимізації: максимізація прибутку підприємства, мінімізація витрат виробництва, оптимізація розмірів упаковки. Такий підхід не потребує додаткового математичного апарату, але значно розширює уявлення учнів про застосування диференціального числення.

Тема «Системи рівнянь та нерівностей» створює основу для розгляду задач лінійного програмування. Учні вже вміють розв'язувати системи лінійних нерівностей, будувати області на координатній площині, знаходити координати точок перетину прямих. Ці навички можуть бути використані для графічного розв'язування простих задач лінійного програмування. Важливо підкреслити зв'язок з вже вивченим матеріалом та показати, як знайомі методи застосовуються в нових ситуаціях.

Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей можуть бути збагачені задачами дискретної оптимізації. Задачі на розміщення, сполучення, розбиття

можуть формулюватися як оптимізаційні: знайти найкращий спосіб розподілу, вибрати оптимальну стратегію, мінімізувати ризик. Такий підхід поглиблює розуміння комбінаторних методів та демонструє їх практичну значущість.

Геометричний матеріал також може бути збагачений оптимізаційними задачами. Класичні задачі на знаходження фігури максимальної площі при заданому периметрі, тіла максимального об'єму при заданій поверхні не лише демонструють застосування геометричних знань, але й формують оптимізаційне мислення. Ізопериметричні задачі мають тисячолітню історію та пов'язують шкільну геометрію з сучасними розділами математики.

Статистичний матеріал може включати елементи оптимального планування експериментів, методи знаходження найкращих оцінок параметрів, задачі класифікації та прогнозування. Хоча повноцінне вивчення цих питань потребує серйозної математичної підготовки, окремі ідеї та приклади можуть бути доступними для розуміння школярами.

Задачі оптимізації економічного змісту створюють унікальні можливості для реалізації міжпредметних зв'язків, що є важливим принципом сучасної освіти. Інтеграція математичних методів з економічними знаннями сприяє формуванню цілісної картини світу та розвитку системного мислення учнів [47].

На сучасному етапі розвитку оптимізаційного моделювання сформувався визначений набір стандартних економіко-математичних задач, які знаходять широке застосування в розв'язанні прикладних завдань. Їх аналіз дозволив виділити основні типи оптимізаційних задач економічного змісту, які доцільно включати до факультативного курсу математики старшої школи [24]:

- 1) *задачі на оптимізацію виробництва* (максимізація прибутку, мінімізація витрат);
- 2) *транспортні задачі* (оптимізація перевезень товарів);
- 3) *задачі про оптимальний розподіл ресурсів*;
- 4) *задачі про інвестиції та фінансове планування*;

- 5) *задачі лінійного програмування в економіці;*
- 6) *задачі про оптимальне управління запасами.*

Зв'язок математики та економіки є найбільш очевидним та природним для задач оптимізації. Економічні поняття попиту та пропозиції, функції витрат і доходу, еластичності попиту знаходять математичне вираження у вигляді функцій та рівнянь. Задачі максимізації прибутку, мінімізації витрат, оптимального ціноутворення демонструють застосування математичного апарату для розв'язання економічних проблем. При цьому важливо забезпечити коректність економічних інтерпретацій математичних результатів та сформулювати розуміння обмежень математичних моделей.

Математика та інформатика тісно пов'язані в контексті задач оптимізації через алгоритмічні аспекти їх розв'язування. Сучасні методи оптимізації потребують потужних обчислювальних ресурсів, а комп'ютерні технології роблять доступними складні оптимізаційні задачі. Учні можуть використовувати електронні таблиці для розв'язування задач лінійного програмування, створювати комп'ютерні моделі економічних процесів, досліджувати поведінку оптимальних розв'язків залежно від параметрів задачі. Програмування простих алгоритмів оптимізації може стати цікавим проєктом для учнів, що поєднує математичні та інформаційні компетентності.

Зв'язок з географією може реалізовуватися через задачі розміщення підприємств, оптимізації транспортних мереж, планування використання природних ресурсів [8]. Такі задачі мають яскраво виражену просторову компоненту та потребують врахування географічних факторів. Використання картографічних матеріалів, аналіз розташування економічних об'єктів, врахування природно-кліматичних умов роблять математичні задачі більш реалістичними та цікавими.

Екологічний аспект задач оптимізації пов'язує математику з біологією та основами екології. Задачі оптимального використання відновлюваних ресурсів, мінімізації екологічних збитків, планування заходів з охорони довкілля демонструють можливості математичного моделювання для

розв'язання екологічних проблем. Такі задачі особливо важливі для формування екологічної свідомості учнів та розуміння ролі математики в забезпеченні сталого розвитку.

Історичний аспект може бути представлений через розгляд розвитку теорії оптимізації, біографій видатних математиків та економістів, історії виникнення конкретних задач. Знайомство з історією лінійного програмування, виникненням теорії ігор, розвитком математичної економіки сприяє гуманітаризації математичної освіти та формуванню культурологічних компетентностей.

Психолого-педагогічний аспект задач оптимізації пов'язаний з теорією прийняття рішень, дослідженням поведінки людини в умовах вибору, аналізом факторів, що впливають на якість рішень. Задачі оптимізації можуть розглядатися як моделі раціональної поведінки, що дозволяє обговорювати з учнями питання економічної психології, поведінкової економіки, теорії ігор. Таким чином, задачі оптимізації економічного змісту володіють значним освітнім потенціалом для шкільного курсу математики. Їх включення до факультативних занять дозволяє поглибити математичні знання учнів, продемонструвати практичну значущість математики, сформувати уявлення про сучасні напрями розвитку прикладної математики [23]. При цьому важливою є ретельна дидактична адаптація матеріалу з урахуванням вікових особливостей учнів, їх математичної підготовки та пізнавальних можливостей. Реалізація міжпредметних зв'язків сприяє формуванню цілісного світогляду та підготовці учнів до свідомої участі в економічному житті суспільства.

2.2. Характеристика факультативного курсу «Оптимізаційні задачі в економіці»

Ефективна організація факультативних занять з задач оптимізації економічного змісту потребує ретельного планування, врахування специфіки математичної підготовки учнів та застосування сучасних педагогічних технологій. Методичні особливості таких занять визначаються не лише

математичним змістом, але й необхідністю формування у школярів розуміння практичної значущості оптимізаційних методів в економічній діяльності.

Організація факультативних занять з оптимізаційних задач має базуватися на фундаментальних дидактичних принципах, адаптованих до специфіки прикладної математики. Принцип науковості передбачає забезпечення математичної коректності всіх розглянутих понять та методів, навіть у їх спрощеній формі для шкільного рівня. [26] Це означає, що навіть елементарні задачі оптимізації мають демонструвати справжню природу оптимізаційних процесів, а не бути лише формальними вправами.

Принцип доступності набуває особливого значення при роботі з оптимізаційними задачами, оскільки їх повне математичне обґрунтування часто виходить за межі шкільної програми. Методична адаптація має забезпечити розуміння учнями основних ідей оптимізації без надмірного ускладнення технічних деталей. Це досягається через використання геометричних інтерпретацій, числових прикладів, комп'ютерних експериментів.

Принцип зв'язку теорії з практикою є центральним для факультативних занять з оптимізації економічного змісту. Кожна розглянута задача має мати чітке економічне обґрунтування та демонструвати реальну практичну потребу в оптимізації. Учні мають розуміти не лише як розв'язати конкретну задачу, але й у яких життєвих ситуаціях можуть застосовуватися подібні методи.

Принцип поетапності у вивченні оптимізаційних задач передбачає побудову навчального процесу від простих одновимірних задач до складних багатовимірних проблем. Початкові етапи мають сформувати у учнів розуміння суті оптимізації, наступні - познайомити з основними методами, завершальні - продемонструвати можливості застосування в реальних економічних ситуаціях.

Принцип індивідуалізації навчання особливо важливий для факультативних занять, оскільки рівень математичної підготовки та пізнавальні можливості учнів можуть значно відрізнятися. Необхідно

передбачити завдання різного рівня складності, альтернативні способи розв'язування, додаткові матеріали для поглибленого вивчення.

Структура факультативного курсу

Факультативний курс «Оптимізаційні задачі в економіці» для учнів старшої школи являє собою цілеспрямовану спробу інтегрувати прикладні математичні знання в контекст економіки з метою розвитку аналітичного та критичного мислення учнів. Запропонована навчальна програма базується на потребі формування в учнів здатності розв'язувати задачі прикладного змісту, які моделюють реальні економічні процеси, з використанням математичних методів оптимізації, доступних на рівні шкільної підготовки. Курс призначений для учнів 10-11 класів і розрахований на 34 академічні години протягом навчального року за принципом одна година на тиждень, що забезпечує оптимальну інтеграцію з основною навчальною програмою.

Мета курсу має багатоаспектний характер і включає не лише поглиблення математичних знань учнів через розв'язання прикладних задач, але й розвиток навичок математичного моделювання реальних економічних ситуацій, формування вмінь застосовувати різноманітні методи оптимізації в практичних умовах. Важливою складовою мети є підготовка учнів до вступу до закладів вищої освіти за економічними спеціальностями, а також демонстрація міжпредметних зв'язків математики з економікою, фінансами та підприємництвом. Курс спрямований на формування у школярів практичних умінь, необхідних для моделювання та розв'язування реальних задач економічного змісту, розвиток здатності до аналітичного мислення та прийняття обґрунтованих рішень в умовах обмежених ресурсів.

Структурно програма курсу організована у 6 тематичних модулів, що поступово ускладнюються як за змістом, так і за рівнем математичної абстракції та забезпечують логічну послідовність викладу матеріалу від простих оптимізаційних задач до комплексних економічних моделей. Вступний модуль знайомить учнів з поняттям оптимізаційної задачі, основними термінами та підходами до математичного моделювання

економічних ситуацій. Ця частина курсу має на меті формування мотивації до вивчення оптимізаційних задач та загального розуміння їх ролі в економіці. Доцільно розпочати з історичних прикладів оптимізаційних задач, демонстрації їх актуальності в сучасному світі, обговорення професій, де застосовуються оптимізаційні методи. Важливо на цьому етапі сформувати у учнів розуміння того, що оптимізація - це не абстрактна математична теорія, а практичний інструмент прийняття рішень [48].

Другий модуль присвячений оптимізації функцій за допомогою диференціального числення, де розглядаються екстремуми функцій однієї та багатьох змінних, умовний екстремум із застосуванням методу множників Лагранжа в спрощеному вигляді. Найбільшою за обсягом є третя частина курсу, що охоплює лінійне програмування, включаючи графічний метод розв'язання, задачі виробничого планування та транспортні задачі. Четвертий модуль вводить учнів у цілочисельне та динамічне програмування з розглядом принципу оптимальності Беллмана, п'ятий модуль розглядає спеціальні типи оптимізаційних задач, включаючи задачі на мінімізацію витрат, фінансової математики та елементи теорії ігор для прийняття рішень в умовах невизначеності.

У зміст курсу включено широкий спектр тем, що не обмежується виключно технічними аспектами математичної оптимізації, а інтегрує міжпредметні зв'язки з економікою, фінансами та підприємництвом. Така структура дозволяє не лише забезпечити логічну послідовність засвоєння знань, а й розвивати навички побудови математичних моделей, аналізу умов оптимальності, застосування похідних, а також методів лінійного, цілочисельного та динамічного програмування. Завершальний модуль передбачає узагальнення знань через розв'язання комплексних задач та виконання підсумкового проєкту, що формує важливі елементи навчальної автономії та самореалізації учня.

Очікується, що після завершення вивчення курсу учні зможуть впевнено будувати й аналізувати математичні моделі, інтерпретувати отримані

результати з погляду економічної доцільності, самостійно розв'язувати задачі оптимізації з використанням шкільного математичного апарату. По завершенні навчання *учні повинні знати* основні типи оптимізаційних задач економічного змісту, математичну природу економічних процесів, методи диференціального та лінійного програмування, принципи побудови математичних моделей та економічну інтерпретацію математичних понять. Практичні навички включають уміння будувати математичні моделі для економічних задач, застосовувати диференціальне числення для знаходження екстремуму, розв'язувати задачі лінійного програмування графічним методом, аналізувати результати з економічної точки зору, оцінювати результати з позицій доцільності та самостійно досліджувати оптимізаційні задачі різних типів. *Учні повинні володіти* алгоритмами розв'язування типових оптимізаційних задач, методами аналізу та інтерпретації отриманих результатів, елементами аналітичного мислення та базовими принципами економічного аналізу.

Особливістю даної програми є її орієнтація на шкільний рівень математичної підготовки, що забезпечує доступність матеріалу для всіх учнів старшої школи, незалежно від рівня їхніх математичних здібностей, водночас пропонуючи достатню глибину вивчення для тих, хто планує продовжити освіту в економічній сфері. Значна увага приділяється розвитку в учнів навичок роботи в команді, самостійного дослідження, публічного представлення результатів через проведення практичних робіт, мініпроектів та захистів. Застосування активних методів навчання, таких як кейс-метод, ділові ігри, метод проектів, робота в малих групах, сприяє мотивації учнів до глибшого осмислення змісту задач та кращому засвоєнню матеріалу.

Методичне забезпечення включає тематичні добірки задач з розв'язками, опорні конспекти, дидактичні матеріали для самостійної роботи та контрольні завдання, що створює комплексну систему підтримки навчального процесу. Програма передбачає використання задач наростаючої складності від базових

навичок до творчих та дослідницьких завдань, що відповідає принципам диференціації та індивідуалізації навчання.

Програма факультативного курсу є сучасною спробою реалізації компетентнісного підходу в математичній освіті та являє значний педагогічний потенціал для формування економічної грамотності, розвитку здатності до аналітичного мислення та прийняття обґрунтованих рішень в умовах обмежених ресурсів. Вона націлена на розширення кола математичних уявлень учнів, підготовку до участі в економічних конкурсах і олімпіадах, а також формування основ професійної орієнтації для тих, хто планує обрати економічні або інженерні спеціальності у закладах вищої освіти.

Викладання задач з економічною складовою в старшій школі потребує особливого підходу до вибору форм і методів навчання, які б сприяли формуванню в учнів здатності до аналізу, моделювання та прийняття рішень в умовах невизначеності [52]. Одним із найбільш ефективних у цьому контексті є *проблемно-пошуковий метод*, який вважається базовим у процесі організації факультативних занять з питань оптимізації.

Сутність проблемно-пошукового методу полягає в тому, що навчальний процес починається з проблемної ситуації, яка має економічне підґрунтя та вимагає математичного аналізу й моделювання [11]. Учні стикаються з реальною або наближеною до реальної життєвою ситуацією, що потребує ухвалення оптимального рішення. На основі цієї ситуації учні повинні самостійно сформулювати математичну модель задачі, виділити змінні, побудувати цільову функцію, визначити обмеження та обрати доцільний метод її розв'язання. Заключним етапом є інтерпретація отриманих результатів у контексті вихідної економічної ситуації [53].

Роль учителя змінюється — він не подає готові знання, а виступає як організатор пошукової діяльності: спрямовує мислення учнів, задає навідні запитання, надає своєчасні підказки та коригує помилкові шляхи пошуку. Такий підхід не лише активізує пізнавальну діяльність, а й формує

дослідницькі навички та критичне мислення — ключові компоненти математичної компетентності старшокласників.

Проблемно-пошуковий метод може реалізовуватись у різних формах організації навчання, серед яких:

Евристична бесіда з економічної оптимізації. Учитель ставить учням запитання відкритого типу, наприклад: *«Як визначити оптимальний обсяг виробництва для максимізації прибутку?»* Учні міркують, аналізують умову, висувають припущення щодо математичної моделі. У процесі бесіди відбувається поступове спільне формування структури задачі та способів її розв'язання.

Дослідницький підхід до економічних явищ. Наприклад, учні аналізують залежність між ціною товару та попитом на нього з метою знаходження ціни, що максимізує прибуток. Вони формують гіпотези про характер залежності, будують графіки, використовують похідну для знаходження екстремумів, оцінюють адекватність отриманих результатів.

Метод "мозкового штурму". Під час обговорення задач з оптимізації витрат підприємства (наприклад, пошуку найефективнішого співвідношення витрат на сировину і трудові ресурси) учні генерують ідеї, які потім аналізуються на предмет доцільності та математичної реалізації. Така форма сприяє розвитку креативності та вміння працювати в команді.

Розв'язання проблемних ситуацій. Наприклад: *«Фермер має 100 га землі для вирощування двох культур. Як розподілити площу, щоб отримати максимальний прибуток?»* Учні виділяють обмеження, формують цільову функцію, будують модель, застосовують метод графічного аналізу або симплекс-метод.

Проблемно-пошуковий метод доцільно поєднувати з іншими формами організації навчання: роботою в малих групах, індивідуальними проектами, моделюванням на основі реальних статистичних даних, що дає змогу урізноманітнити дидактичний інструментарій учителя й посилити практичну спрямованість навчання.

Серед сучасних методів навчання, що сприяють активізації пізнавальної діяльності старшокласників, особливе місце посідає **кейс-метод**. Він передбачає аналіз реальних або наближених до реальних ситуацій, у яких потрібно ухвалити обґрунтоване оптимальне рішення на основі математичного моделювання. Цей метод виявляється особливо ефективним при вивченні економічних задач оптимізації, адже створює природний контекст для застосування математичних знань [21].

Кейси, які використовуються у навчальному процесі, мають відповідати рівню пізнавальних можливостей учнів, водночас бути достатньо складними, щоб стимулювати пошукову діяльність, дискусію, прийняття рішень. Доцільно добирати ситуації, які передбачають кілька варіантів розв'язання або альтернативні підходи, що дозволяє організувати обговорення стратегій оптимізації, порівняння ефективності різних моделей [7].

Кейс-метод реалізується як у формі групової взаємодії, так і під час індивідуальної дослідницької роботи, що сприяє розвитку комунікативних навичок, уміння аргументовано захищати власну позицію, аналізувати й оцінювати прийняті рішення. Учні поступово засвоюють логіку прикладного математичного мислення: від постановки задачі — до прийняття обґрунтованого рішення на основі розрахунків.

Приклади навчальних кейсів з оптимізації економічного змісту

Кейс "Мережа магазинів": компанія планує розширити свою присутність у місті, відкривши нові точки продажу. Учням пропонується визначити оптимальне розташування магазинів, виходячи з географії попиту, логістичних витрат і охоплення цільової аудиторії. Задача формулюється як задача на мінімізацію витрат або максимізацію прибутку, залежно від акценту.

Кейс "Виробництво меблів": фабрика виготовляє столи та стільці з обмеженої кількості ресурсів (деревина, трудові години, обладнання). Учні мають скласти математичну модель з обмеженнями та знайти оптимальний виробничий план, який забезпечить максимальний прибуток.

Кейс "Інвестиційний портфель": у цьому кейсі учні виступають у ролі інвестора, який має розподілити кошти між різними фінансовими інструментами. Необхідно знайти співвідношення вкладень, що забезпечить максимальний дохід при допустимому рівні ризику. Завдання стимулює учнів до пошуку компромісу між ризиком і прибутковістю — ключового аспекту економічного мислення.

Кейс "Логістична компанія": учні аналізують роботу компанії, яка доставляє товари зі складів у пункти призначення. Задача полягає в оптимізації маршрутів доставки з метою зниження витрат на паливо та логістику. Можливе застосування графів, таблиць витрат, або ж побудова систем рівнянь для знаходження оптимального розподілу ресурсів.

Кейс "Ресторанне господарство": менеджер ресторану планує меню на тиждень, враховуючи собівартість продуктів, попит на страви та обмеження на зберігання. Учнім необхідно обрати найвигідніший варіант меню, який забезпечить максимальний прибуток або задоволення попиту.

Застосування кейс-методу забезпечує високий рівень залученості учнів у процес навчання, сприяє формуванню системного бачення, розвитку аналітичних, комунікативних та управлінських навичок, а також усвідомленому застосуванню математичних знань у реальних економічних контекстах.

Серед сучасних педагогічних технологій, які сприяють формуванню дослідницької, аналітичної та критичної складових математичної компетентності учнів, *дослідницький метод та проєктна діяльність* посідають особливе місце. Їх ефективність зростає в умовах розв'язування оптимізаційних задач економічного змісту, де важливо не лише знайти числову відповідь, а й зрозуміти поведінку математичної моделі, оцінити вплив зовнішніх факторів і обґрунтувати доцільність прийнятого рішення.

Дослідницький підхід доцільно застосовувати на етапі поглибленого вивчення властивостей оптимальних розв'язків, а також для аналізу стійкості та чутливості моделі. Учні можуть змінювати параметри задачі — коефіцієнти

цільової функції, праві частини обмежень — і досліджувати, як це впливає на значення та структуру оптимального розв'язку. Такий підхід дозволяє:

- формувати уявлення про стійкість оптимальних рішень;
- порівнювати ефективність різних методів розв'язання задач;
- розвивати навички самостійного аналізу та висунення гіпотез;
- поглиблювати розуміння взаємозв'язків між математичною моделлю та реальним економічним контекстом [12].

Прикладом дослідницької задачі може бути вивчення впливу цін на продукцію в задачі максимізації прибутку: учні моделюють різні сценарії зміни цін і аналізують, як це змінює оптимальний виробничий план.

Проектна діяльність є формою інтеграції знань з різних предметів, зокрема математики, економіки, інформатики, екології. Реалізація навчальних проєктів на основі оптимізаційних задач економічного змісту забезпечує:

занурення учнів у реальні або наближені до реальності проблемні ситуації;

розвиток навичок роботи з даними, побудови моделей, аргументації та презентації результатів;

мотивацію до навчання, що базується на практичній значущості проєкту.

Проекти можуть реалізовуватися індивідуально або в малих групах і охоплювати як шкільне, так і позашкільне середовище. Тематика таких проєктів має враховувати вікові особливості, інтереси учнів та локальний контекст.

Приклади проєктів

«Оптимальне планування сімейного бюджету» — аналіз та моделювання особистих витрат, розподіл коштів з урахуванням потреб та пріоритетів;

«Екологічно-економічна оптимізація» — пошук оптимального балансу між прибутком і екологічною безпекою (наприклад, у виробництві, транспорті);

«Стартап: від ідеї до бізнес-плану» — створення бізнес-ідеї, математичне обґрунтування ресурсного плану, ціноутворення, аналіз прибутковості;

«Міська логістика» — оптимізація маршрутів транспортування, зменшення витрат і часу на доставку;

«Енергоефективність школи» — аналіз даних про енергоспоживання школи, моделювання способів зменшення витрат на комунальні послуги.

Етапи реалізації навчального проекту

Постановка проблеми — формулювання реальної задачі з економічним змістом, яка потребує оптимізації.

Збір та аналіз даних — пошук інформації, робота зі статистичними джерелами, анкетування, спостереження.

Математичне моделювання — побудова цільової функції та системи обмежень.

Розв'язання задачі — застосування відповідних математичних методів (аналітичних або чисельних).

Аналіз результатів — інтерпретація розв'язку, перевірка адекватності моделі.

Презентація результатів — представлення висновків у вигляді презентації, усного захисту або письмового звіту.

Ефективне навчання розв'язуванню оптимізаційних задач економічного змісту потребує раціонального поєднання групових та індивідуальних форм організації навчальної діяльності. Така комбінація дозволяє враховувати як соціальні аспекти навчання, так і індивідуальні пізнавальні потреби учнів, забезпечуючи умови для розвитку як когнітивних, так і комунікативних компонентів математичної компетентності.

Групова робота особливо ефективна для розв'язування складних, комплексних задач, які моделюють реальні процеси з діяльності підприємств, організацій, установ. В умовах командної співпраці учні мають змогу розвивати навички:

- співпраці та колективного прийняття рішень;
- розподілу функцій та відповідальності (наприклад, ролі менеджера, економіста, аналітика, математика);
- аргументації власної позиції, вміння чути й враховувати альтернативні думки;
- узгодження та пошуку компромісів у разі конфлікту рішень або стратегій.

Приклади форм групової діяльності

Мікрогрупи (3–4 особи): виконання кейсів типу «Планування діяльності малого підприємства» — кожна група працює з різними початковими даними, що дозволяє порівнювати рішення та обговорювати відмінності у підходах.

Робота в парах: взаємоперевірка при розв'язуванні задач на знаходження екстремумів функцій прибутку, обговорення альтернативних методів (аналітичний vs графічний).

Дискусійні групи: тематичне обговорення, наприклад, «Чи завжди максимізація прибутку є оптимальною метою для підприємства?», що сприяє інтеграції етичного виміру в процес навчання.

Командні змагання: вирішення задач на час (наприклад, побудова оптимального плану перевезень) з елементами гейміфікації для підвищення мотивації.

Індивідуальна форма навчання необхідна для закріплення знань, самостійної практики, формування впевненості у власних силах, а також для реалізації персоналізованого підходу до навчання. Індивідуальні завдання мають бути диференційованими — за складністю, обсягом, типом діяльності — відповідно до рівня підготовки, інтересів та особливостей мислення кожного учня.

Основні форми індивідуальної роботи:

Персональні дослідження: наприклад, аналіз фінансових показників локального підприємства з метою пошуку резервів оптимізації витрат.

Індивідуальні консультації: застосовуються для корекції труднощів у засвоєнні теми або для підтримки обдарованих учнів, які готові працювати з задачами підвищеної складності.

Самостійне розв'язування задач: забезпечується шляхом добору градуйованих завдань — від базових прикладів до задач з елементами відкритого дослідження.

Таким чином, оптимальне поєднання групової та індивідуальної роботи сприяє реалізації принципів диференціації та індивідуалізації навчання, створює умови для всебічного розвитку математичної компетентності учнів, а також забезпечує глибше осмислення економічного змісту оптимізаційних задач.

Сучасна математична освіта у старшій школі має враховувати зростаючу роль інформаційних технологій у професійній та науковій діяльності. *Комп'ютерне моделювання* відкриває нові можливості для навчання розв'язування задач оптимізаційного характеру, особливо тих, що мають економічний зміст та високу складність. Застосування програмних засобів дає змогу не лише автоматизувати обчислення, а й візуалізувати результати, проаналізувати варіанти, перевірити гіпотези та сформулювати більш глибоке розуміння структури задач.

Використання цифрових інструментів сприяє формуванню інформаційно-математичної компетентності учнів, розвиває навички аналізу даних, роботи з інтерфейсами прикладного програмного забезпечення, критичного оцінювання результатів.

Конкретні інструменти комп'ютерного моделювання та приклади їх застосування.

Excel Solver. Потужний вбудований інструмент для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування. Наприклад, під час вивчення задач оптимізації виробництва на умовній кондитерській фабриці, учні можуть задати обмеження на використання сировини, потужності обладнання та робочий час, а потім знайти максимальний прибуток або мінімальні витрати.

GeoGebra. Динамічне середовище для візуалізації математичних об'єктів, яке дозволяє зручно і наочно розв'язувати задачі з двома змінними. Наприклад, задачі на оптимальне використання земельних ресурсів можуть бути подані у графічній формі — з побудовою області допустимих розв'язків та лінії рівня цільової функції, що полегшує розуміння суті задачі.

Програмування мовою Python з використанням бібліотек, зокрема `scipy.optimize`, дозволяє учням старших класів, які мають базові навички програмування, працювати з нелінійними задачами оптимізації. Наприклад, можна змоделювати оптимальну ціну товару з урахуванням еластичності попиту, що сприяє інтеграції міжпредметних зв'язків між математикою, економікою та інформатикою.

Онлайн-калькулятори для задач лінійного програмування (наприклад, Simplex-калькулятори) дозволяють швидко перевірити обчислення або підтвердити результати, отримані вручну, що зручно при самотійній роботі учнів чи під час дистанційного навчання.

Симуляційне моделювання (наприклад, з використанням спеціалізованих платформ або спрощених макросів в Excel) застосовується для моделювання процесів за умов невизначеності. Учні можуть досліджувати, як змінюється оптимальне рішення в залежності від зміни параметрів задачі, наприклад, коливання попиту, вартості ресурсів тощо.

Застосування комп'ютерного моделювання робить процес навчання більш інтерактивним, наближеним до реальних ситуацій і таким, що орієнтований на формування практичних умінь та сучасних компетентностей, затребуваних у майбутній професійній діяльності випускників.

Сучасні інформаційно-комунікаційні технології відкривають нові можливості для організації факультативних занять з оптимізаційних задач. Використання комп'ютерних засобів дозволяє розв'язувати складніші задачі, візуалізувати результати, проводити численні експерименти з різними параметрами [14].

Електронні таблиці (Excel, Google Sheets) є найбільш доступним інструментом для розв'язування задач лінійного програмування. Вбудований засіб "Поиск решения" (Solver) дозволяє знаходити оптимальні розв'язки без складних обчислень [34]. Учні можуть сконцентруватися на постановці задачі та інтерпретації результатів, не витрачаючи час на технічні обчислення.

Системи комп'ютерної математики (GeoGebra, Wolfram Alpha) ефективні для візуалізації оптимізаційних задач. Графічне представлення області допустимих розв'язків, ліній рівня цільової функції, траєкторії руху до оптимуму значно полегшує розуміння геометричної суті оптимізації. Динамічні можливості таких систем дозволяють досліджувати залежність оптимального розв'язку від параметрів задачі [20].

Спеціалізовані програмні засоби оптимізації (LINDO, CPLEX, Gurobi) можуть використовуватися для демонстрації можливостей сучасних методів оптимізації. Хоча повноцінне освоєння таких систем виходить за межі шкільної програми, ознайомлення з їх можливостями розширює уявлення учнів про практичне застосування оптимізаційних методів.

Онлайн-ресурси та веб-додавки надають доступ до широкого спектра оптимізаційних інструментів без необхідності встановлення спеціального програмного забезпечення. Такі ресурси особливо корисні для домашньої роботи та самостійного вивчення.

Інформаційно-комунікаційні технології відіграють важливу роль у вивченні та розв'язанні оптимізаційних задач економічного змісту. Вони дозволяють візуалізувати математичні моделі економічних процесів, що робить їх більш зрозумілими для учнів; автоматизувати рутинні обчислення, зосереджуючи увагу учнів на розумінні суті задачі та інтерпретації результатів; моделювати складні економічні ситуації, які неможливо розглянути використовуючи лише традиційні методи; проводити обчислювальні експерименти для дослідження впливу різних факторів на оптимальне рішення; реалізовувати інтерактивні методи навчання,

підвищуючи зацікавленість учнів; використовувати реальні економічні дані для створення актуальних та практично орієнтованих задач.

Серед програмних засобів, за допомогою яких можна розв'язувати досить широкі класи оптимізаційних задач і які є найбільш доступними, можна виділити спеціалізовані пакети оптимізації, комп'ютерні математичні системи і редактори електронних таблиць [22].

Табличні процесори є одним з найдоступніших інструментів для розв'язання оптимізаційних задач економічного змісту [34]. За їх допомогою можна досить просто і наочно створювати математичні моделі економічних процесів у вигляді таблиць. Табличний процесор Excel містить зручну надбудову «Пошук рішень», яка дозволяє розв'язувати задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-методу, з можливістю покрокового перегляду симплекс-таблиць. Крім того, доступне розв'язання задач нелінійного програмування — як гладкого (методом узагальненого градієнта), так і негладкого (за допомогою еволюційного методу). Також програма дає змогу налаштувати точність розв'язання, кількість ітерацій, переглядати проміжні результати на кожному кроці. Кожен метод має свої параметри, які дозволяють адаптувати процес до конкретних умов задачі, з урахуванням особливостей моделі чи можливих похибок. Крім того, Excel надає можливість формувати аналітичні звіти в різних форматах і зберігати сценарії розв'язання, що сприяє глибшому аналізу результатів і формуванню навичок математичного моделювання в учнів. В цій програмі також можна будувати графіки функцій та візуалізувати область допустимих значень, проводити аналіз чутливості оптимального розв'язку до зміни параметрів задачі.

Для прикладу застосування інструменту "Пошук рішення" в MS Excel нами була розв'язана задача про складання оптимального раціону, результат розв'язання якої подано на рис. 1.

Задача. Для нормального функціонування організму людині потрібно щоденно споживати не менше 120 г білків, 90 г жирів і 310 г вуглеводів. У

магазині є продукти трьох видів. Вміст поживних речовин у 100 г кожного продукту та ціни наведені в таблиці:

Продукт	Білки (г)	Жири (г)	Вуглеводи (г)	Ціна (грн)
Продукт 1	12	6	10	25
Продукт 2	10	12	40	40
Продукт 3	8	8	30	30

Скільки продуктів кожного виду треба купувати щодня, щоб забезпечити необхідну кількість поживних речовин з мінімальними витратами? (рис.2.1)

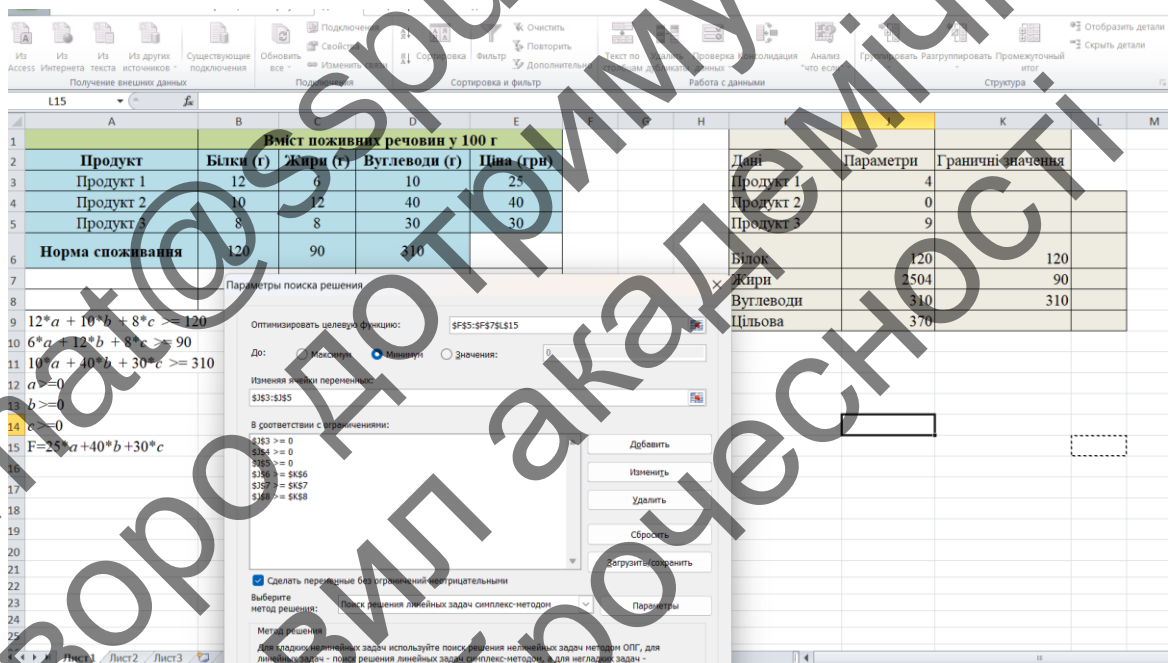


Рис. 2.1. Використання інструмента «Пошук розв'язку» в MS Excel

Програми GeoGebra та Desmos є ефективними засобами для візуального розв'язання оптимізаційних задач. Вони дають змогу будувати графіки функцій, створювати інтерактивні моделі та досліджувати, як зміна параметрів впливає на результат. Ці інструменти особливо зручні для геометричного підходу, оскільки наочно відображають область допустимих значень і цільову функцію.

Задача. Меблева фабрика виготовляє столи й стільці. На виготовлення стола йде 5 м^2 деревини і 4 години роботи, а на виготовлення стільця — 2 м^2 деревини і 3 години роботи. Фабрика має 350 м^2 деревини і 300 годин робочого часу на тиждень. Прибуток від продажу одного стола становить 500 грн., а одного стільця — 300 грн. Скільки столів і стільців треба виготовляти щотижня, щоб прибуток був максимальним?

Якщо позначити через x — кількість столів, а через y — кількість стільців, то з умови задачі отримаємо систему обмежень

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 350, \\ 4x + 3y \geq 300, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

цільову функцію $P = 500x + 300y \rightarrow \max$. Ввівши необхідні дані у Desmos, швидко одержимо многокутник допустимих розв'язків і його вершини, що значно спрощує подальше розв'язання оптимізаційної задачі.

Приклад графічного розв'язання даної задачі у середовищі Desmos наведено на рисунку 2.2.

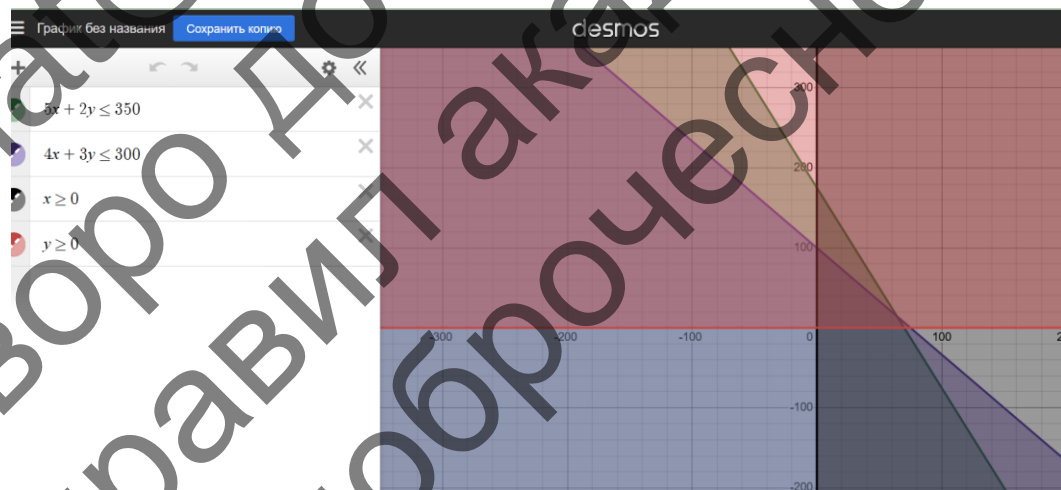


Рис. 2.2. Використання Desmos для побудови многокутника допустимих розв'язків оптимізаційної задачі

Для більш складних оптимізаційних задач можуть використовуватися спеціалізовані програмні пакети, типу Solver, AMPL, GAMS. Хоча вони мають вищий поріг входження, ознайомлення з їх базовими функціями може бути

корисним для учнів, які планують продовжувати вивчення математики та економіки на вищому рівні [20].

Також існує ряд онлайн-платформ та сервісів, які пропонують готові моделі оптимізаційних задач економічного змісту та інструменти для їх розв'язання:

- Wolfram Alpha (дозволяє розв'язувати задачі оптимізації та візуалізувати результати);
- Khan Academy (містить відеоуроки та інтерактивні завдання з тематики оптимізації);
- Coursera та edX (пропонують курси з математичної економіки та оптимізації).



Рис. 2.3. Приклад використання Wolfram Alpha для розв'язання оптимізаційної задачі

Сучасні мобільні додатки також можуть використовуватися як допоміжний інструмент для вивчення оптимізаційних задач, серед них слід

відмітити Graphing Calculator (для візуалізації функцій та графічного розв'язання задач), Math Solver (для розв'язання різних типів математичних задач, включаючи оптимізаційні), Economic Calculator (для розв'язання базових економічних задач).

Розв'язування оптимізаційних задач економічного змісту за допомогою інструментів штучного інтелекту відкриває принципово нові підходи до роботи з математичними моделями. Сучасні ІІІ-системи здатні автоматично ідентифікувати тип оптимізаційної задачі (лінійне, нелінійне, цілочисельне програмування) та підбирати найефективніші алгоритми для її розв'язання. Нейронні мережі можуть аналізувати структуру задачі, виявляти приховані залежності та обмеження, а також пропонувати евристичні методи для задач, які складно розв'язати класичними алгоритмами.

Важливою перевагою ІІІ є можливість здійснювати багатоваріантне моделювання, одночасно досліджуючи сотні комбінацій параметрів і умов. Це дозволяє учням вивчати не лише стандартні, а й комплексні економічні сценарії. Генеративні моделі можуть трансформувати абстрактні математичні моделі в зрозумілі економічні інтерпретації, пояснюючи крок за кроком процес оптимізації та логіку прийняття рішень.

Особливо цінним є те, що ІІІ може демонструвати не один, а кілька підходів до розв'язання оптимізаційної задачі, порівнюючи їх ефективність та обґрунтовуючи доцільність застосування кожного методу в залежності від конкретних умов та цілей. Завдяки цьому учні отримують комплексне розуміння математичних принципів оптимізації та їх практичного застосування в економічних реаліях.

Впровадження цифрових технологій в освітній процес при розв'язуванні оптимізаційних задач повинно відбуватися поступово та методично виважено [14]. На початковому етапі доцільно використовувати табличні процесори, зокрема Excel, який завдяки зрозумілому інтерфейсу та функціоналу, доступному для старшокласників, дозволяє реалізувати базові методи розв'язання оптимізаційних задач — від побудови моделей до пошуку

розв'язків засобами надбудови «Пошук рішень». Це створює передумови для подальшого ознайомлення учнів із більш складними програмними системами, такими як GeoGebra, Wolfram Mathematica чи Python з бібліотеками для математичного моделювання, і переходу від інтуїтивно зрозумілих підходів до строгої комп'ютерної математики. Важливо підкреслити, що ІКТ не мають замінювати класичні аналітичні методи, а, навпаки, доповнювати їх, надаючи можливість порівнювати способи та результати розв'язання задач. Такий підхід формує у школярів цілісне уявлення про структуру оптимізаційної моделі, її аналітичний аналіз і комп'ютерну реалізацію, а також дозволяє розвивати навички критичного мислення й аналізу.

Успішність факультативних занять з оптимізаційних задач значною мірою залежить від врахування психологічних особливостей учнів старшого шкільного віку. У цьому віці формується професійне самовизначення, зростає інтерес до практичного застосування знань, розвиваються здібності до абстрактного мислення.

Формування мотивації до вивчення оптимізаційних задач потребує демонстрації їх актуальності та практичної значущості. Учні мають бачити зв'язок між математичними методами та реальними життєвими ситуаціями, розуміти професійні перспективи застосування отриманих знань. Важливо підкреслювати універсальність оптимізаційного підходу, його застосування у різних сферах діяльності.

Подолання математичної тривожності є важливим завданням при організації факультативних занять. Багато учнів мають негативний досвід з математикою, пов'язують її з формальними обчисленнями та відірваністю від реального життя. Зміщення акценту з технічних обчислень на розуміння суті задач, використання комп'ютерних засобів для рутинних операцій може значно знизити рівень тривожності.

Розвиток критичного мислення є одним з найважливіших результатів вивчення оптимізаційних задач. Учні мають навчитися ставити під сумнів припущення моделі, оцінювати реалістичність отриманих результатів,

розуміти обмеження математичних методів. Це вимагає систематичної роботи з формування навичок аналізу та оцінювання.

Врахування індивідуальних особливостей учнів передбачає диференціацію як за рівнем складності завдань, так і за способами їх подання. Деякі учні краще сприймають візуальну інформацію, інші - словесні пояснення, треті - потребують практичних маніпуляцій. Різноманітність форм роботи дозволяє кожному учню знайти оптимальний для себе спосіб освоєння матеріалу.

Таким чином, методичні особливості організації факультативних занять з задач оптимізації економічного змісту визначаються специфікою математичного змісту, необхідністю формування практичних умінь та врахуванням психолого-педагогічних факторів. Ефективна організація таких занять потребує системного підходу, що поєднує сучасні педагогічні технології з глибоким розумінням математичної суті оптимізаційних методів.

2.3. Розв'язування задач оптимізації економічного змісту. Етапи розв'язування задач оптимізації економічного змісту в шкільному курсі математики

Розв'язування задач оптимізації економічного змісту у шкільному курсі математики потребує систематичного підходу та чіткого дотримання певних етапів. Адаптуючи загальну методологію розв'язування екстремальних задач до рівня шкільної математики, можна виділити шість основних етапів, які допоможуть учням успішно справлятися з оптимізаційними задачами економічного характеру (рис.2.4).

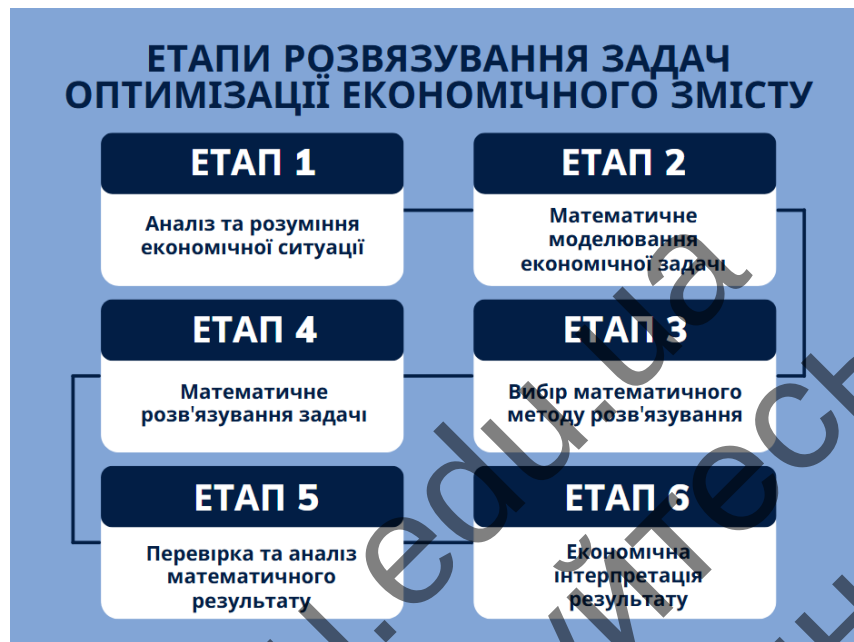


Рис. 2.4. Етапи розв'язування задач оптимізаційного змісту

Перший етап полягає у ретельному аналізі умови задачі та з'ясуванні економічної суті проблеми. На цьому етапі учні повинні:

- визначити, що саме потрібно оптимізувати (максимізувати прибуток, мінімізувати витрати, знайти оптимальний обсяг виробництва тощо);
- виявити всі економічні величини, що впливають на результат (ціна товару, собівартість, попит, пропозиція, ресурси);
- з'ясувати обмеження, які діють в економічній ситуації (обмежені ресурси, мінімальні або максимальні обсяги виробництва, ринкові умови).

Важливо, щоб учні навчилися «читати» економічний зміст задачі, розуміючи взаємозв'язки між різними економічними показниками та їх вплив на кінцевий результат.

На другому етапі економічна задача перетворюється на математичну модель, яка являє собою систему математичних залежностей і відношень, які описують певні властивості, ознаки чи характеристики реальних об'єктів, процесів, явищ, що досліджуються, і відображають принципи їх внутрішньої організації або функціонування.

Математична модель дозволяє звести розв'язування реальної задачі до розв'язування математичної задачі, що дає можливість застосовувати добре вивчені і розроблені математичні методи. [18]

Учні повинні:

- ввести позначення для всіх невідомих величин (зазвичай це змінні, значення яких потрібно знайти);
- записати цільову функцію – математичний вираз, який описує величину, що підлягає оптимізації;
- сформулювати математичні обмеження, які відповідають економічним умовам задачі;
- визначити область допустимих значень змінних.

Наприклад, якщо необхідно максимізувати прибуток від продажу товару, то цільова функція може мати вигляд $P(x) = px - C(x)$, де x – кількість товару, p – ціна, $C(x)$ – функція витрат.

На наступному етапі залежно від типу отриманої математичної моделі, учні обирають відповідний метод розв'язування. У шкільному курсі математики найчастіше використовуються:

- методи дослідження функцій на екстремум за допомогою похідної;
- аналіз поведінки функції на межах області визначення;
- графічні методи;
- методи розв'язування систем нерівностей для визначення області допустимих розв'язків.

Вибір методу залежить від складності функції, наявності обмежень та рівня математичної підготовки учнів. В умовах широкого використання інформаційних технологій у різних сферах людської діяльності для розв'язування оптимізаційної задачі можна використати комп'ютер з відповідним програмним забезпеченням, щоб розв'язати задачу на рівні моделі.

На етапі математичного розв'язування задачі застосовується обраний математичний метод для знаходження оптимального розв'язку. Процес включає:

- знаходження критичних точок функції (якщо використовується диференціальне числення);
- перевірку поведінки функції в критичних точках та на границях області визначення;
- визначення глобального максимуму або мінімуму;
- перевірку того, що знайдений розв'язок задовольняє всі обмеження задачі.

Важливо навчити учнів не лише механічно застосовувати формули та алгоритми, а й розуміти математичну логіку кожного кроку.

Після отримання математичного розв'язку необхідно провести його ретельну перевірку:

- підставити знайдені значення в початкові умови та переконатися, що вони задовольняють всі обмеження;
- перевірити розумність отриманих результатів з математичної точки зору;
- проаналізувати, чи не було допущено обчислювальних помилок;
- у разі виявлення невідповідностей повернутися до попередніх етапів для виправлення помилок.

Завершальний етап полягає у поверненні від математичного розв'язку до економічної інтерпретації:

- сформулювати відповідь мовою початкової економічної задачі;
- пояснити економічний зміст отриманих результатів;
- оцінити практичну значущість розв'язку;
- за можливості дати рекомендації щодо практичного застосування результатів.

Наприклад, знайшовши оптимальний обсяг виробництва, потрібно пояснити, що це означає для підприємства, як це вплине на прибуток, чи реально забезпечити такий обсяг виробництва в практичних умовах.

Розглянемо постановку задачі оптимізації в загальному вигляді. Екстремальна задача є задачею відшукування екстремуму (мінімуму чи максимуму) деякої функції $f(x)$ на деякій множині $X \in R^n$, при цьому областю значень цієї функції є множина дійсних чисел R .

Серед екстремальних задач виділяють задачі мінімізації і задачі максимізації. Задача мінімізації записується у вигляді

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \quad (1)$$

або

$$\min_{x \in X} f(x).$$

де функція $f(x)$ називається цільовою функцією, X – допустимою множиною, а будь-який елемент $x \in X$ – допустимою точкою цієї множини.

Якщо $X \neq \emptyset$, то задача (1) називається сумісною, в протилежному випадку – несумісною.

Якщо $X = R^n$, то задача (1) називається задачею без обмежень на змінні або задачею безумовної мінімізації, у протилежному випадку – задачею з обмеженнями на змінні або задачею умовної мінімізації.

Формалізація екстремальної задачі полягає у точному визначенні її основних елементів: функції $f(x)$ і множини X . Цільова функція $f(x)$, яку часто називають також критерієм якості або критерієм ефективності, являє собою математичний опис мети, досягнення якої вимагається при розв’язуванні реальної задачі. Допустима множина X визначає умови, за яких перебігає процес, що досліджується, і яким має задовольняти розв’язок задачі.

Аналогічно до (1) задачу максимізації функції на множині записують у вигляді

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X \quad (2)$$

або

$$\max_{x \in X} f(x).$$

Розглянемо приклади реальних задач економічного змісту з різних галузей економічної діяльності людини, математичні моделі яких є екстремальними задачами і дають змогу продемонструвати широкі можливості застосування теорії оптимізації на практиці.

1. Задача про оптимальний план виробництва продукції.

Підприємство виробляє продукцію n видів і для її виготовлення використовується m видів ресурсів. Позначимо через a_{ij} витрати i -го виду ресурсів ($1 \leq i \leq m$) на виробництво одиниці продукції j -го виду, через b_i наявні ресурси i -го виду ($1 \leq i \leq m$), c_j – прибуток, що отримує підприємство від реалізації одиниці продукції j -го виду ($1 \leq j \leq n$), а через d_j, D_j – задані нижню і верхню межі обсягів виробництва j -го виду продукції. Необхідно скласти такий план $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ виробництва продукції, щоб при наявних ресурсах задовольнити задані обмеження на випуск кожного виду продукції і в той же час забезпечити якомога більший загальний прибуток.

Математична модель задачі має вигляд: $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$, за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad d_j \leq x_j \leq D_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

2. Транспортна задача.

Запаси деякого однорідного продукту розподілені на кількох базах постачання і цей продукт потрібно доставити до кількох пунктів призначення. Відома вартість перевезень продукту між базами постачання і пунктами призначення. Задача полягає в тому, щоб визначити, яку кількість продукту потрібно перевезти з кожної бази постачання до кожного пункту призначення, щоб забезпечити їх потреби і сумарна вартість перевезень була мінімальною.

Нехай m - кількість баз постачання, n - кількість пунктів призначення, a_i - кількість одиниць продукту на i -тій базі постачання ($1 \leq i \leq m$); b_j - потреба j -го пункту призначення ($1 \leq j \leq n$) в продукті (в тих же одиницях); c_{ij} - вартість перевезення одиниці продукту з i -тої бази постачання до j -го пункту призначення.

Позначимо через x_{ij} - кількість одиниць продукту, яку заплановано перевезти з i -ї бази постачання до j -го пункту призначення. Тоді вартість перевезення продукту дорівнює $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ і її потрібно мінімізувати. При цьому на змінні накладаються такі обмеження: а) $x_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq m$; б) $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, $1 \leq j \leq n$ (слід повністю задовольнити потреби всіх пунктів призначення); в) $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$, $1 \leq i \leq m$ (з будь-якої бази не можна вивезти продукту більше від наявного там запасу).

3. Задача про сплав. Металургійному підприємству потрібно виплавити новий сплав, що містить m хімічних елементів у відповідному співвідношенні $a_i\%$ ($1 \leq i \leq m$). Припустимо, що у розпорядженні підприємства є n різних сплавів, кожний j -й сплав містить $s_{ij}\%$ i -го хімічного елементу ($1 \leq i \leq m$) і може бути використаний для виробництва нового сплаву. Ціна одного кілограма j -го сплаву дорівнює c_j грн ($1 \leq j \leq n$). Завдання полягає у тому, щоб визначити, яку кількість кожного сплаву потрібно витратити на кожний кілограм нового сплаву, щоб він був найдешевшим?

Позначивши шукані величини через x_j , маємо таку цільову функцію

$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, яку потрібно мінімізувати при такій системі обмежень

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} x_j = a_i, 1 \leq i \leq m, x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n.$$

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі розв'язано комплекс теоретичних і методичних питань, пов'язаних з використанням оптимізаційних задач економічного змісту у процесі факультативного навчання математики у старшій школі. Здійснений аналіз дозволив отримати узагальнені висновки відповідно до поставлених завдань.

1. У результаті аналізу психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури встановлено, що проблематика економічних та оптимізаційних задач у шкільній математиці є актуальною й активно розробляється сучасними науковцями. Виявлено тенденцію до зростання уваги до прикладної та економічної складової математичної освіти, застосування компетентнісного й діяльнісного підходів. Обґрунтовано значення оптимізаційних задач як засобу розвитку дослідницького мислення, математичної грамотності та практичних умінь старшокласників.

2. Розгляд нормативних документів, що регулюють економічно-математичну підготовку учнів, дав змогу визначити законодавчі підстави для запровадження факультативних курсів, зокрема тих, що поєднують математику з економічним змістом. Окреслено вимоги Державного стандарту, освітніх програм НУШ та чинних методичних рекомендацій щодо формування ключових та предметних компетентностей. Підтверджено, що економічно-математична підготовка є складовою сучасної шкільної освіти.

3. Встановлено значення економічних і фінансових аспектів у навчанні учнів старших класів. Показано, що включення економічних задач до змісту шкільної математики сприяє підготовці учнів до реальних життєвих ситуацій, формуванню вміння приймати обґрунтовані рішення, розвивати фінансову та підприємницьку грамотність. Доведено, що економічний контекст задач значно підсилює мотивацію та сприяє розвитку дослідницького мислення.

4. Проведений логіко-дидактичний аналіз факультативних курсів з математики дав змогу визначити їх змістові акценти, типові моделі організації, педагогічні цілі та структуру. Установлено, що факультативи забезпечують

гнучкість, можливість диференціації та індивідуалізації навчання, сприяють розвитку аналітичних і творчих здібностей учнів. Окреслено специфіку факультативних занять, спрямованих на поєднання економічного та математичного змісту.

5. Визначено та обґрунтовано основні теми факультативного курсу «Оптимізаційні задачі в економіці». З'ясовано, що курс має міжпредметний характер і включає теми, пов'язані з моделями оптимізації, фінансовою математикою, ресурсним плануванням, інвестиційним аналізом. Встановлено, що такі теми логічно інтегруються у шкільний курс математики, поглиблюючи його прикладну складову та забезпечуючи профорієнтаційний ефект.

6. Розроблено й обґрунтовано методичні підходи до навчання учнів розв'язуванню оптимізаційних задач фінансових ресурсів. Сформовано етапи роботи з такими задачами: аналіз ситуації, побудова математичної моделі, вибір методу розв'язування, реалізація обчислень, інтерпретація результатів. Визначено типові труднощі та запропоновано шляхи їх подолання. Показано роль цифрових технологій (Excel, GeoGebra, Desmos, Solver) у формуванні інформаційно-цифрової компетентності та підвищенні ефективності навчання.

Узагальнюючи результати дослідження, можна стверджувати, що оптимізаційні задачі економічного змісту мають значний дидактичний потенціал у старшій школі. Їх використання у межах факультативного курсу сприяє:

- формуванню математичної, економічної й інформаційно-цифрової компетентностей;
- розвитку аналітичного та критичного мислення;
- підготовці учнів до реальних життєвих і професійних ситуацій;
- посиленню практичної спрямованості шкільної математичної освіти;
- підвищенню навчальної мотивації старшокласників.

Результати роботи можуть бути застосовані в практиці вчителів математики, при укладанні факультативних програм, створенні методичних рекомендацій та модернізації змісту шкільної економіко-математичної освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ashby R. An introduction to optimization. London: Academic press, 2019. 342 p. <https://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~ahmad.hably/Documents/IntroOptimization.pdf>
2. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957. 342 p.
3. Blotnicky K. A., Franz-Odendaal T., French F., Joy P. A study of the correlation between STEM career knowledge, mathematics self-efficacy, career interests, and career activities on the likelihood of pursuing a STEM career among middle school students. *International Journal of STEM Education*. 2018. Т. 5, стаття 22. DOI: 10.1186/s40594-018-0118-3.
4. Dantzig G.B. Linear Programming and Extensions. Princeton: Princeton University Press, 1963. 625 p.
5. Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Yale University Press, 1959. 344 p.
6. Serin, H. The Significance of Mathematical Literacy in Today's Society. *International Journal of Social Sciences & Educational Studies*, 2023. 10(2), 396-402. <https://doi.org/10.23918/ijsses.v10i2p396>
7. Андрієць О. М. Використання кейс-методу у формуванні та розвитку професійної компетентності здобувачів освіти. *Педагогічні науки: теорія та практика*. 2019. Вип. 64, ч. 1. С.56-58.
8. Антонова І. В., Лукашкевич М. І. Міжпредметні зв'язки математики та географії / І. В. Антонова, М. І. Лукашкевич // зб. наук. праць. Запоріжжя, 2022. 76 с.
9. Базилінська О.Я., Мініна О.В. Мікроекономіка: Навчальний посібник. К.: «Центр учбової літератури», 2009. 352 с.
10. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.

11. Гаврилiна, О. В. Дослiдницький метод в системi сучасних методiв навчання. *Теорiя та методика навчання суспiльних дисциплiн : науково-педагогiчний журнал*. Суми : СумДПУ iменi А. С. Макаренка, 2011. № 1. С. 64–68.

12. Голодюк Л. Формування навчально-дослiдницьких уминь учнiв на уроках математики *Науковi записки Кiровоградського державного педагогiчного унiверситету iменi Володимира Винниченка*. Серiя: Проблеми методики фiзико-математичної i технологiчної освiти. 2015. Вип. 7(3). С. 32–38.

13. Коренюк П. I., Федулова С. О. Економiка природокористування: навчальний посiбник. Днiпропетровськ: Акцент ПП, 2014. 274 с

14. Добровольська Н. В. Методика використання iнформацiйних технологiй при розв'язаннi оптимiзацiйних задач // Сучаснi iнформацiйнi технологiї та iнновацiйнi методи навчання в пiдготовцi фахiвцiв: методологiя, теорiя, досвiд, проблеми. 2018. Вип. 52. С. 290–296.

15. Долiнський Л. Б. Фiнансова математика : навч. посiб. Київ : КНЕУ, 2003. 265 с.

16. Дослiдження операцiй в економiцi : пiдручник / за ред. I. К. Федоренка, О. I. Черняка. Київ : Знання, 2007. 558 с.

17. Ефективнiсть дистанцiйного навчання: рекомендацiї та практичнi поради / Ed Era. 2022. Режим доступу: URL: <http://blog.ed-era.com/iefiektivnist-distantsiinogho-navchannia/>

18. Жалдак М. I., Триус Ю. В. Основи теорiї i методiв оптимiзацiї: Навчальний посiбник. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 608 с.

19. Зайченко Ю. П. Дослiдження операцiй : пiдручник. Київ : ЗАТ «ВIПОЛ», 2001. 688 с.

20. Захарчук В. I. Методи оптимiзацiї та комп'ютернi технологiї : навч. посiб. для студ. вищ. навч. закладiв. Луцьк : РВВ Луцького НТУ, 2017. 144 с.

21. Iнновацiйнi методи викладання економiчних дисциплiн та їх використання в процесi пiдготовки бакалаврiв i магiстрiв з економiки.

Навчально-методичний посібник для студентів галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки», спеціальності 051 «Економіка» (Економічна теорія). Х.: Видавництво Іванченка І. С., 2019. 162 с.

22. Іщук А.А. Використання комп'ютера в процесі навчання розв'язування деяких задач оптимізації. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, 2016. Вип. 18 (25). С. 127-139.

23. Коберник Г. І. Формування фінансової грамотності учнів початкової школи в процесі вивчення математики. *Перспективи та інновації науки* (Серія «Педагогіка», Серія «Психологія», Серія «Медицина»). 2022. № 12(17). С. 137–144.

24. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі : методичний посібник / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмара. Київ : Педагогічна думка, 2015. 245 с.

25. Конституція України : Закон України від 28.06.1996 № 254к/96-ВР. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/254%D0%BA/96-%D0%B2%D1%80>

26. Кузьмінський А.І., Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики : монографія. Черкаси : ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2009. 320 с.

27. Лов'янова І. В. Диференціація змісту навчання математики у профільній старшій школі . Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу ГТМ*плюс- 2012 : матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р., м. Суми). У 3-х частинах. Суми, 2012. Частина 1. Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/2343>

28. Логвіненко Н. Факультативи як форма організації диференціації та варіативності навчального процесу. *Український журнал інноваційної освіти*, 2011, № 9. Режим доступу: <https://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi->

bin/irbis_nbu/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF%2Fulvzsh_2011_9_13.pdf

29. Мальований Ю. І. Курси за вибором у змісті профілю навчання. Педагогічна і психологічна науки в Україні : зб. наук. праць : у 5-ти т. Т.3.: Загальна середня освіта. К. : Пед. думка, 2012. 432 с. С. 218–225

30. Мас-Колелл А., Вінстон М., Грін Дж. Мікроекономічна теорія. К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2016. 981 с.

31. Матвієнко В.В. Розробка факультативного курсу: методичні підходи. *Сучасні проблеми навчання і науки* (електронний журнал). 2019. Режим доступу: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/download/1586/pdf>

32. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.

33. Матеріали для використання в роботі під час воєнних дій / Інститут модернізації змісту освіти. Режим доступу: URL: <https://imzo.gov.ua/psychologichnyj-suprovid-ta-sotsialno-pedahohichna-robita/materialy-dlia-vykorystannia-v-roboti-pid-chas-voiennykh-diy/>

34. Медведєв М. Г., Листопад В. В., Шоха В. П. Два підходи до розв'язання економічних задач оптимізації з допомогою Microsoft Excel *Інтелект XXI*. 2014. № 2. С. 111–118.

35. Методика навчання математики (практикум): у 4 ч./ Н. А. Тарасенкова та ін. Черкаси : ЧДУ ім. Б.Хмельницького, 2002 . Ч. 3, 2004. 111 с.

36. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (наказ МОНУ від 23.10.2017 № 1407) Режим доступу: https://innaterletska.blogspot.com/p/blog-page_68.html

37. Перевертень В. Факультативні заняття з математики та методика їх проведення. Переяслав-Хмельницький : КДПУ, 2018.

38. Прикладна спрямованість навчання математики в гімназії : Методичний посібник / Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В.,

Вашуленко О. П., Тарасенкова Н. А. [Електронне видання]. К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. 161 с.

39. Про забезпечення психологічного супроводу учасників освітнього процесу в умовах воєнного стану в Україні : лист МОН України від 29.03.2022 № 1/3737-22. URL: https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/86164/

40. Про затвердження Державного стандарту базової середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. Режим доступу: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF>

41. Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 № 1392. Режим доступу: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF>

42. Про організацію освітнього процесу в умовах воєнного стану : Закон України від 15.07.2022 № 2368-IX. Режим доступу: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2368-20>

43. Про освіту : Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII. Режим доступу: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19>

44. Про повну загальну середню освіту : Закон України від 16.01.2020 № 463-IX. Режим доступу: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20>

45. Прокудін Г. С. Моделі і методи оптимізації перевезень у транспортних системах : монографія. Київ : Національний транспортний університет, 2006. 224 с.

46. Прус А. В. Про засоби здійснення прикладної спрямованості курсу стереометрії. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*. Серія: Педагогічні науки. 2005. 22. Режим доступу: https://eprints.zu.edu.ua/397/2/C6332715.pdf?utm_source=chatgpt.com

47. Стрельченко О. Елементарні функції та прикладні задачі економічного напрямку. *Математика в школі*. 2005. № 6. С. 44–49.

48. Ткач Ю. М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: Навчально-методичний посібник. Х.: Вид-во «Ранок», 2011. 176 с.

49. Чкана Д. Використання цифрових технологій на факультативних заняттях з розв'язування задач оптимізації економічного змісту. Збірник праць студентів фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка. Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2025. Випуск 19. С. 111-117.

50. Чкана Д. Задачі на оптимізацію як ключ до формування ініціативності та підприємливості учнів у процесі навчання математики в НУШ. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2024 Форум молодих дослідників»: матеріали V Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (29 листопада 2024 р., м. Суми). Суми:, 2024. С. 87-89.

51. Чкана Д. Оптимізаційні задачі та Excel у навчанні математики старшої школи. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2025. Випуск 19. С.55-57.

52. Шайдецька М.А. Методичні особливості розв'язування математичних задач з економічним змістом на уроках математики : кваліфікаційна робота магістерського рівня. Рівне, 2019. 72 с.

53. Швець В., Першина Н. Формування умінь математичного моделювання під час розв'язування прикладних задач економічного змісту. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 33. № 1. С. 57-62. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-033-1-010

54. Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2024/2025 навчальному році : лист МОН України від 30.08.2024 №1.1/15776-24.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Факультативний курс "Оптимізаційні задачі в економіці"

для учнів старшої школи

Анотація курсу

Факультативний курс "Оптимізаційні задачі в економіці" розроблений для учнів 10-11 класів, які цікавляться прикладними аспектами математики. Курс знайомить учнів з основними методами розв'язання оптимізаційних задач економічного змісту, демонструє зв'язок між математичними абстракціями та реальними економічними процесами. Всі теми та задачі курсу відповідають рівню математичної підготовки учнів старшої школи і не виходять за межі шкільної програми.

Мета курсу:

- поглибити знання учнів з математики через розв'язання прикладних задач;
- розвинути навички математичного моделювання реальних економічних ситуацій;
- сформувати вміння застосовувати різноманітні методи оптимізації;
- підготувати учнів до економічних олімпіад та вступу до ВНЗ за економічними спеціальностями;
- продемонструвати міжпредметні зв'язки математики з економікою.

Тривалість курсу: 34 години (1 година на тиждень протягом навчального року)

Програма курсу

Модуль 1: Вступ до оптимізаційних задач (2 години)

Заняття 1: Поняття оптимізаційної задачі

- Що таке оптимізація та її роль у повсякденному житті
- Види оптимізаційних задач: максимізація та мінімізація
- Економічні приклади оптимізаційних задач
- Основні поняття: цільова функція, обмеження, допустимий розв'язок

Заняття 2: Математичне моделювання економічних ситуацій

- Побудова математичних моделей для простих економічних задач
- Аналіз економічних моделей
- Практична робота: моделювання реальних економічних ситуацій

Модуль 2: Оптимізація функцій за допомогою диференціального числення (6 годин)

Заняття 3-4: Екстремуми функцій однієї змінної

– Повторення теорії похідної та її застосування для знаходження екстремумів

- Необхідна та достатня умови екстремуму
- Економічна інтерпретація похідної
- Розв'язування задач на максимізацію прибутку та мінімізацію витрат

Заняття 5-6: Функції багатьох змінних і їх застосування

- Поняття функції двох змінних та її графічне представлення
- Частинні похідні та їх застосування
- Точки екстремуму функцій двох змінних
- Економічні задачі, що приводять до функцій багатьох змінних

Заняття 7-8: Умовний екстремум

- Метод множників Лагранжа (спрощений підхід)
- Економічна інтерпретація множників Лагранжа
- Розв'язування задач на максимізацію корисності при обмеженому бюджеті
- Практична робота: оптимізація портфеля інвестицій

Модуль 3: Лінійне програмування (10 годин)

Заняття 9-10: Основи лінійного програмування

- Постановка задачі лінійного програмування
- Стандартна та канонічна форми
- Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування
- Многокутник допустимих розв'язків

Заняття 11-13: Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

- Алгоритм графічного методу
- Визначення оптимального розв'язку за допомогою ліній рівня
- Особливі випадки (необмежена цільова функція, відсутність допустимих розв'язків)

- Економічні задачі, що розв'язуються графічним методом

Заняття 14-16: Задачі виробничого планування

- Задачі оптимального використання ресурсів
- Задачі оптимального складу продукції
- Задачі оптимального розкрою матеріалів
- Практична робота: створення оптимального виробничого плану для умовного підприємства

Заняття 17-18: Задачі транспортного типу

- Постановка транспортної задачі
- Метод північно-західного кута
- Метод потенціалів (у спрощеному вигляді)
- Розв'язування задач на мінімізацію транспортних витрат

Модуль 4: Цілочисельне та динамічне програмування (6 годин)

Заняття 19-20: Задачі цілочисельного програмування

- Особливості задач з цілочисельними змінними
- Методи розв'язування задач цілочисельного програмування
- Задача про рюкзак та її варіації
- Задачі розподілу ресурсів з умовами неподільності

Заняття 21-22: Основи динамічного програмування

- Принцип оптимальності Беллмана
- Метод динамічного програмування для простих задач
- Задача оптимального розподілу інвестицій
- Задача оптимального управління запасами

Заняття 23-24: Практичні застосування динамічного програмування

- Задачі про найкоротший шлях
- Економічні задачі послідовного прийняття рішень
- Задачі планування багатоетапних процесів
- Практична робота: оптимальний розподіл інвестицій за періодами

Модуль 5: Спеціальні типи оптимізаційних задач (6 годин)

Заняття 25-26: Задачі на мінімізацію витрат

- Економічні задачі на складання оптимального раціону
- Задачі оптимального розподілу бюджету
- Задачі мінімізації витрат при заданому рівні виробництва
- Практикум з розв'язування задач на мінімізацію витрат різними

методами

Заняття 27-28: Задачі фінансової математики

- Оптимізація інвестиційного портфеля
- Задачі оптимізації кредитної політики
- Задачі оптимальних виплат за кредитами
- Задачі оптимізації страхових внесків

Заняття 29-30: Задачі на прийняття рішень в умовах невизначеності

- Основи теорії ігор
- Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності
- Економічні ігри двох осіб з нульовою сумою
- Економічні задачі на оптимізацію стратегій

Модуль 6: Підсумки та застосування (4 години)

Заняття 31-32: Комплексні задачі економічної оптимізації

- Порівняння різних методів оптимізації
- Вибір оптимального методу для конкретної задачі
- Розв'язування комплексних економічних задач
- Аналіз отриманих результатів та їх економічна інтерпретація

Заняття 33-34: Підсумковий проєкт та захист

- Розробка учнями власних оптимізаційних моделей
- Презентація та захист проєктів

- Обговорення перспектив використання методів оптимізації
- Підведення підсумків курсу

Очікувані результати

По завершенні факультативного курсу учні будуть:

Знати:

- основні типи оптимізаційних задач економічного змісту;
- методи розв'язування задач оптимізації, що відповідають шкільній програмі;
- економічну інтерпретацію математичних понять та методів;
- принципи побудови математичних моделей економічних ситуацій.

Вміти:

- будувати математичні моделі для розв'язування економічних задач;
- застосовувати методи диференціального числення для знаходження оптимуму;
- розв'язувати задачі лінійного програмування графічним методом;
- аналізувати отримані результати з економічної точки зору;
- самостійно досліджувати оптимізаційні задачі різних типів.

Володіти:

- навичками математичного моделювання реальних економічних ситуацій;
- алгоритмами розв'язування типових оптимізаційних задач;
- методами аналізу та інтерпретації отриманих результатів;
- базовими принципами економічного аналізу.

Методичне забезпечення

- Тематичні добірки задач з розв'язками
- Опорні конспекти за темами курсу
- Дидактичні матеріали для самостійної роботи
- Завдання для практичних робіт
- Контрольні запитання та задачі

Рекомендована література

1. Вахрушева Н.В. "Економіко-математичні методи та моделі у розв'язуванні задач"
2. Горбачук В.М. "Методи математичної економіки"
3. Колемаєв В.А. "Математична економіка"
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. "Математичне програмування"
5. Таха Х.А. "Введення в дослідження операцій" (адаптовані розділи)
6. Ястремський О.І. "Основи теорії економічного ризику"

Додаток Б

Приклади типових задач з розв'язками

Приклад 1. Оптимізація прибутку (застосування похідної). Фірма виробляє x одиниць продукції на день. Функція прибутку має вигляд $P(x) = -2x^2 + 120x - 100$. Знайти оптимальний обсяг виробництва для максимізації прибутку.

Розв'язання. Знаходимо похідну функції прибутку $P'(x) = -4x + 120$ та прирівнюємо до нуля: $-4x + 120 = 0$. Звідси $x = 30$. Друга похідна $P''(x) = -4 < 0$, отже, це максимальне значення.

Відповідь: оптимальний обсяг виробництва складає 30 одиниць продукції на день.

Приклад 2. На основі досліджень була встановлена залежність попиту q від ціни p за одиницю товару $q = 100000 - 200p$, де q – кількість одиниць товару для продажу за рік. Витрати на випуск q одиниць товару складають $C(q) = 150000 + 100q + 0,003q^2$. Розрахувати річний дохід фірми і визначити його максимальне значення.

Розв'язання. За умовою задачі ціна за одиницю товару складає $p(q) = 500 - \frac{q}{200}$, а річна виручка $P(q) = p(q) \cdot q = 500q - \frac{q^2}{200}$. Річний дохід із врахуванням витрат на випуск розраховується так:

$$\begin{aligned} R(q) &= P(q) - C(q) = \\ &= 500q - \frac{q^2}{200} - (150000 + 100q + 0,003q^2) = -0,008q^2 + 400q - 150000. \end{aligned}$$

Визначимо максимальний прибуток

$R'(q) = -0,016q + 400$, $-0,016q + 400 = 0$, $q = 25000$, $R''(25000) < 0$. Отже, $q = 25000$ – оптимальний об'єм продаж, а $R(25000) = 4850000$ грн – максимальне значення прибутку.

Приклад 3. Оптимізація прибутку (екстремуми функції двох змінних). Знайти комбінацію ресурсів x та y , за якої фірма одержить максимальний прибуток, якщо задано виробничу функцію фірми

$f(x, y) = p_0 x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$ та ринкові ціни продукції $p_0 = 2$ і ціни факторів виробництва відповідно $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$ грн.

Розв'язання. Функція прибутку фірми $P(x, y) = p_0 x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} - x - \frac{1}{2}y$.

Дослідимо її на екстремум. Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку і прирівняємо їх до нуля:

$$P'_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1, \quad P'_y = x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0 \\ x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Отже, точка $M(1; 4)$ є критичною.

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їх значення в точці $M(1; 4)$:

$$P''_{xx} = -\frac{3}{8} x^{-\frac{7}{4}} y^{\frac{1}{2}}, \quad P''_{xy} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{2}}, \quad P''_{yy} = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Тоді } A = P''_{xx}(M) = -\frac{3}{4}, \quad B = P''_{xy}(M) = \frac{1}{8}, \quad C = P''_{yy}(M) = -\frac{1}{16}.$$

Оскільки $\Delta = AC - B^2 = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} = \frac{1}{32} > 0$ і $A = -\frac{3}{4} < 0$, то максимальний

прибуток фірми $P_{\max} = P(1; 4) = 1$.

Приклад 4 (умовний екстремум). Інвестор розподіляє 100 тис. грн між двома активами. Очікувана прибутковість портфеля

$R(x, y) = 0,08x + 0,12y - 0,001x^2 - 0,002y^2$, де x та y – кошти (тис. грн), вкладені в перший та другий актив відповідно. Існує бюджетне обмеження: $x + y = 100$. Знайти оптимальний розподіл коштів.

Розв'язання. Щоб знайти максимум функції при наявності обмеження, скористаємося методом Лагранжа. Уводимо допоміжну функцію Лагранжа:

$$L(x, y; \lambda) = 0,08x + 0,12y - 0,001x^2 - 0,002y^2 + \lambda(x + y - 100).$$

Для знаходження критичних точок знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,08 - 0,002x - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0,12 - 0,004y - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 100.$$

Знайдемо критичні точки, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,08 - 0,002x - \lambda = 0, \\ 0,12 - 0,004y - \lambda = 0, \\ x + y = 100, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60, \\ y = 40, \\ \lambda = -0,04. \end{cases}$$

Можна впевнитись, що при $x = 60$, $y = 40$ отримаємо максимум і $R(60, 40) = 2,8$. Отже, оптимальний розподіл коштів: у перший актив – 60 тис. грн, у другий – 40 тис. грн, а максимальний очікуваний прибуток – 2800 грн.

Приклад 5. Виробництво меблів (лінійне програмування, графічний метод)

Меблева фабрика виготовляє столи й стільці. На виготовлення стола йде 5 м² деревини і 4 години роботи, а на виготовлення стільця — 2 м² деревини і 3 години роботи. Фабрика має 350 м² деревини і 300 годин робочого часу на тиждень. Прибуток від продажу одного стола становить 500 грн., а одного стільця — 300 грн. Скільки столів і стільців треба виготовляти щотижня, щоб прибуток був максимальним?

Розв'язання:

Позначимо через x — кількість столів, а через y — кількість стільців. З умови задачі маємо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 350 & (\text{деревина}) \\ 4x + 3y \leq 240 & (\text{робочий час}) \\ x \geq 0, y \geq 0 & (\text{невід'ємність змінних}) \end{cases}$$

Цільова функція: $P = 500x + 300y \rightarrow \max$.

Будуємо многокутник допустимих розв'язків, який складається з осей координат $x = 0$, $y = 0$ та прямих $5x + 2y = 350$, $4x + 3y = 300$.

Знаходимо точки перетину сторін цього многокутника:

розв'язавши систему $\begin{cases} 5x + 2y = 350, \\ 4x + 3y = 300, \end{cases}$ отримаємо точку, наближені

координати якої $(64,29; 14,28)$;

2) розв'язками систем $\begin{cases} x = 0, \\ 4x + 3y = 300, \end{cases}$ і $\begin{cases} 5x + 2y = 350, \\ y = 0, \end{cases}$ є точки $(0, 100)$ і $(70, 0)$ відповідно.

Отже, вершини многокутника: $(0,0)$, $(0,100)$, $(64,29; 14,28)$, $(70,0)$.

Обчислюємо значення цільової функції у кожній вершині:

$$P(0,0) = 0,$$

$$P(0,100) = 30000,$$

$$P(64,29; 14,28) \approx 36429,$$

$$P(70,0) = 35000.$$

Максимальний прибуток досягається у точці $(64,29; 14,28)$, проте треба взяти ціле число столів і стільців, тобто потрібно виготовляти 64 столів і 14 стільців на тиждень, щоб отримати максимальний прибуток, який складатиме 36200 грн.

Приклад 6. Задача оптимального раціону (мінімізація витрат)

Для нормального функціонування організму людині потрібно щоденно споживати не менше 120 г білків, 90 г жирів і 310 г вуглеводів. У магазині є продукти трьох видів. Вміст поживних речовин у 100 г кожного продукту та ціни наведені в таблиці:

Продукт	Білки (г)	Жири (г)	Вуглеводи (г)	Ціна (грн)
---------	-----------	----------	---------------	------------

Продукт	Білки (г)	Жири (г)	Вуглеводи (г)	Ціна (грн)
Продукт 1	12	6	10	25
Продукт 2	10	12	40	40
Продукт 3	8	8	30	30

Скільки продуктів кожного виду треба купувати щодня, щоб забезпечити необхідну кількість поживних речовин з мінімальними витратами?

План розв'язання:

Вводимо змінні: x_1, x_2, x_3 – кількість продуктів (у сотнях грамів).

Система обмежень:

$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \geq 120 & (\text{білки}) \\ 6x_1 + 12x_2 + 8x_3 \geq 90 & (\text{жири}) \\ 10x_1 + 40x_2 + 30x_3 \geq 310 & (\text{вуглеводи}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція: $C = 25x_1 + 40x_2 + 30x_3 \rightarrow \min$.

Розв'язуємо задачу за допомогою методу штучного базису або симплекс-методу.

Знаходимо оптимальний розв'язок: $x_1 = 5, x_2 = 2,5, x_3 = 5$.

Відповідь: потрібно купувати 500 г продукту 1, 250 г продукту 2 і 500 г продукту 3.

Приклад 7. Оптимальне планування інвестицій на 4 роки (використання принципу Беллмана). Підприємець має початковий капітал у розмірі 5 млн грн і планує вкладати його протягом 4 років, щоб отримати максимальний сумарний прибуток. У кожному році він може інвестувати 0, 1 або 2 млн грн (тільки ціле число мільйонів). Відомо, який дохід (у млн грн) отримає підприємець залежно від того, скільки грошей він вклав у певному році:

Рік	Інвестиція 0 млн	Інвестиція 1 млн	Інвестиція 2 млн
1	0.0	0.3	0.5
2	0.0	0.4	0.7
3	0.0	0.5	0.9
4	0.0	0.6	1.0

Визначити таку послідовність інвестицій на 4 роки, яка не перевищує початковий капітал (5 млн грн) та забезпечує максимальний сумарний прибуток за 4 роки.

Розв’язання. Принцип Беллмана — це основа методу динамічного програмування. Його суть: щоб знайти оптимальне рішення багатокрокової задачі, достатньо знати оптимальні рішення для її підзадач. Інакше кажучи, найкраще рішення відбувається через найкращі рішення на кожному наступному кроці. Ми просуваємось «з кінця в початок», обираючи найвигідніший варіант у кожному році з урахуванням залишку капіталу.

Складемо таблиці зворотного обчислення (від 4 до 1 року).

1) Рік 4 (останній). При залишку капіталу 0–5 млн і можливих інвестиціях 0, 1 або 2 отримаємо такі значення як оптимальний прибуток від року 4 для кожного залишку капіталу:

Залишок капіталу перед роком 4	Вигідна інвестиція	Прибуток
0	0	0.0
1	1	0.6
2	2	1.0
3	2	1.0
4	2	1.0
5	2	1.0

2) Рік 3. Тепер для кожного можливого залишку перед роком 3 (від 0 до 5), розглядаємо інвестиції 0, 1 або 2 млн. Для цього враховуємо прибуток

цього року + прибуток з року 4 від залишку після інвестиції. Наприклад, при залишку в 3 млн є такі варіанти:

вкласти 0 $\rightarrow$ прибуток: $0,0 + \text{оптимум}(3) = 0,0 + 1,0 = 1,0$;

вкласти 1 $\rightarrow 0,5 + \text{оптимум}(2) = 0,5 + 1,0 = 1,5$;

вкласти 2 $\rightarrow 0,9 + \text{оптимум}(1) = 0,9 + 0,6 = 1,5$.

Отже, оптимальний прибуток для 3 млн на 2 роки складає 1,5 млн.

Так заповнюємо таблицю для року 3:

Залишок перед роком 3	Найкраща інвест.	Прибуток (разом з роком 4)
0	0	0,0
1	1	$0,5 + 0,0 = 0,5$
2	2	$0,9 + 0,0 = 0,9$
3	1 або 2	1,5
4	2	$0,9 + 1,0 = 1,9$
5	2	$0,9 + 1,0 = 1,9$

3) Рік 2. Повторимо аналогічні міркування і складемо таблицю:

Залишок	Найкраще рішення	Прибуток
0	0	0,0
1	1	$0,4 + 0,0 = 0,4$
2	2	$0,7 + 0,0 = 0,7$
3	0	1,5
4	2	$0,7 + 1,5 = 2,2$
5	2	$0,7 + 1,5 = 2,2$

4) Рік 1. Починаємо з 5 млн та випробуємо інвестиції:

0 $\rightarrow 0,0 + \text{оптимум}(5) = 0 + 2,2 = 2,2$

1 $\rightarrow 0,3 + \text{оптимум}(4) = 0,3 + 2,2 = 2,5$

2 $\rightarrow 0,5 + \text{оптимум}(3) = 0,5 + 1,5 = 2,0$

Отже, максимальний прибуток складає 2,5 млн грн, а оптимальна стратегія:

Рік 1: інвестувати 1 млн;

Рік 2: інвестувати 2 млн;

Рік 3: інвестувати 2 млн;

Рік 4: залишилось 0 — не інвестуємо.

Приклад 8. Вибір сільськогосподарської культури в умовах невизначеності. Фермер повинен обрати одну культуру для посіву на полі, знаючи, що майбутня погода може бути сухою, нормальною або дощовою. Імовірність кожного варіанта погоди невідома. Для кожної культури наведено прогнозований прибуток (у тис. грн) залежно від погодних умов:

Культура	Суха	Нормальна	Дощова
Пшениця	-5	15	10
Кукурудза	20	25	5
Ячмінь	10	12	15

Фермер хоче прийняти раціональне рішення, застосовуючи різні критерії прийняття рішень в умовах невизначеності:

- а) критерій Вальда (максимін) — обережна стратегія (захист від найгіршого);
- б) критерій Севіджа — стратегія мінімізації можливого жалю;
- в) критерій Гурвіца з коефіцієнтом песимізму $\alpha=0.3$.

Розв'язання. 1) Застосуємо критерій Вальда (максимін), за яким обираємо найнадійніший варіант, тобто захищаємося від найгіршого випадку. Ми беремо найменший прибуток для кожної культури, а потім обираємо максимум серед них:

1. Спочатку знайдемо мінімальний прибуток для кожної культури:

пшениця - -5, кукурудза - 5, ячмінь - 10.

2. Серед них вибираємо максимальне значення: $\max\{-5; 5; 10\} = 10$.

3. Висновок: за критерієм Вальда обираємо ячмінь.

2) Критерій Севіджа (мінімум жалю) порівнює втрати від неправильного вибору — жаль. Для кожної погоди ми вираховуємо, наскільки наш прибуток менший за найкращий можливий у цій ситуації. Потім обираємо культуру з найменшим найгіршим жалем:

1. Для кожної погоди знаходимо максимальний прибуток:

суха: $\max = 20$ (кукурудза)

нормальна: $\max = 25$ (кукурудза)

дощова: $\max = 15$ (ячмінь)

2. Створимо матрицю жалю:

Культура	Суха (20 –)	Нормальна (25 –)	Дощова (15 –)
Пшениця	25 (20 – (-5))	10 (25 – 15)	5 (15 – 10)
Кукурудза	0	0	10
Ячмінь	10	13	0

3. Для кожної культури знайдемо максимальний жаль:

пшениця: $\max = 25$

кукурудза: $\max = 10$

ячмінь: $\max = 13$

4. Вибираємо найменше з цих значень: $\min = 10$ для кукурудзи.

5. Висновок: за критерієм Севіджа обираємо кукурудзу.

3) Критерій Гурвіца — компроміс між оптимізмом і песимізмом.

Ми обчислюємо зважене середнє між найгіршим і найкращим прибутком з коефіцієнтом, що визначає рівень песимізму $\alpha = 0,3$:

$$H = \alpha \cdot \min + (1 - \alpha) \cdot \max.$$

Культура	min	max	$H = 0.3 \cdot \min + 0.7 \cdot \max$
Пшениця	-5	15	$0.3 \cdot (-5) + 0.7 \cdot 15 = -1.5 + 10.5 = 9.0$
Кукурудза	5	25	$0.3 \cdot 5 + 0.7 \cdot 25 = 1.5 + 17.5 = 19.0$
Ячмінь	10	15	$0.3 \cdot 10 + 0.7 \cdot 15 = 3 + 10.5 = 13.5$

Висновок: за критерієм Гурвіца обираємо кукурудзу.

Підсумкова таблиця рішень:

Критерій	Рішення
Вальда	Ячмінь
Севіджа	Кукурудза
Гурвіца ($\alpha = 0.3$)	Кукурудза

Отже, якщо ти обережний (не любиш ризик) обери ячмінь, якщо хочеш уникнути жалю – кукурудзу, якщо ти частково оптиміст, то також кукурудзу.

fizmat@sspi.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічності
доброчесності

Додаток В

Завдання та задачі для модулів факультативного курсу

"Оптимізаційні задачі в економіці"

Модуль 1: Вступ до оптимізаційних задач (2 години)

Заняття 1: Поняття оптимізаційної задачі

Задача 1.1. Школярка Марія має 500 грн на тиждень. Вона витрачає гроші на проїзд (15 грн/день), обіди (35 грн/день) та розваги. Скільки грошей на день вона може витратити на розваги, якщо хоче заощадити принаймні 50 грн на тиждень?

Задача 1.2. Власник кав'ярні помітив, що при ціні кави 25 грн він продає 100 чашок на день, а при ціні 30 грн - 80 чашок. Припустивши лінійну залежність попиту від ціни, при якій ціні його денний дохід буде максимальним?

Задача 1.3. Фермер має 12 га землі. Він може засадити пшеницю (прибуток 8000 грн/га) або кукурудзу (прибуток 12000 грн/га). Скільки гектарів кожної культури засадити для максимального прибутку, якщо на кукурудзу потрібно в 2 рази більше добрив, а загальна кількість добрив обмежена?

Заняття 2: Математичне моделювання економічних ситуацій

Задача 2.1. Інтернет-магазин пропонує безкоштовну доставку при замовленні від 800 грн. Доставка коштує 80 грн. Покупець хоче купити товар за 650 грн. Визначте діапазон цін додаткових товарів, при якому покупцю буде вигідно скористатися безкоштовною доставкою замість оплати доставки.

Задача 2.2. Студент працює в кафе 20 год/тиждень за 50 грн/год. Він може взяти додаткові години, але тоді менше часу залишається на навчання. Якщо оцінки впливають на стипендію (відмінна - 2000 грн/міс, добра - 1500 грн/міс, задовільна - 1000 грн/міс), як знайти оптимальний баланс між роботою та навчанням?

Модуль 2: Оптимізація функцій за допомогою диференціального числення (6 годин)

Заняття 3-4: Екстремуми функцій однієї змінної

Задача 3.1. Магазин продає x одиниць товару щодня. Функція прибутку $P(x) = -x^2 + 80x - 400$. Знайти оптимальну кількість товару для максимізації прибутку.

Задача 3.2. Таксі встановлює тариф x грн за кілометр. При цьому тарифі кількість поїздок на день становить $N(x) = 200 - 4x$. Знайти оптимальний тариф для максимізації денного доходу.

Задача 3.3. Підприємство виробляє x одиниць продукції. Функція витрат $C(x) = x^2 + 10x + 100$, а ціна одиниці продукції 50 грн. Знайти обсяг виробництва для максимізації прибутку.

Заняття 5-6: Функції багатьох змінних і їх застосування

Задача 5.1. Фірма витрачає x тис. грн на рекламу в інтернеті та y тис. грн на радіорекламу. Кількість клієнтів $N(x,y) = 10x + 8y - x^2 - y^2$. Знайти оптимальний розподіл рекламного бюджету 10 тис. грн.

Задача 5.2. Кафе продає x порцій борщу та y порцій котлет щодня. Прибуток $P(x,y) = 15x + 20y - 0,1x^2 - 0,2y^2 - 0,05xy$. Знайти оптимальне меню для максимізації прибутку.

Заняття 7-8: Умовний екстремум

Задача 7.1. Студент має 1000 грн на місяць. Він купує x кг м'яса по 120 грн/кг та y кг фруктів по 40 грн/кг. Функція корисності $U(x,y) = xy$. Знайти оптимальний раціон.

Задача 7.2. Інвестор розподіляє 100 тис. грн між двома активами. Очікувана прибутковість портфеля $R(x,y) = 0,08x + 0,12y - 0,001x^2 - 0,002y^2$, де $x+y = 100$. Знайти оптимальний розподіл коштів.

Модуль 3: Лінійне програмування (10 годин)

Заняття 9-10: Основи лінійного програмування

Задача 9.1. Школярка виготовляє прикраси для продажу: браслети (прибуток 30 грн, час 2 год) та сережки (прибуток 25 грн, час 1.5 год). У неї є 20 годин на тиждень. Матеріалів достатньо для 8 браслетів або 15 пар сережок. Скільки виробів кожного типу робити?

Задача 9.2. Шкільний буфет планує виробництво бутербродів і піріжків на день. Для виготовлення одного бутерброда потрібно 2 скибки хліба та 1 котлета, для виготовлення одного піріжка потрібно 1 скибка хліба та 1 порція начинки. На складі є 100 скибок хліба, 30 котлет і 40 порцій начинки для піріжків. Прибуток від продажу одного бутерброда становить 8 грн, від одного піріжка — 6 грн. Скільки бутербродів і піріжків має виготовити буфет, щоб отримати найбільший прибуток за умови повного використання наявних інгредієнтів?

Заняття 11-13: Графічний метод розв'язання

Задача 11.1. Кондитерська фабрика спеціалізується на виготовленні тортів і тістечок. Для виробництва одного торта потрібно 3 кг борошна, 2 кг цукру та 5 годин робочого часу. Для виготовлення одного тістечка потрібно 2 кг борошна, 4 кг цукру та 3 години робочого часу. Щоденно на фабриці є в наявності: 300 кг борошна, 400 кг цукру, а робочий день становить 450 годин (з урахуванням усіх працівників). Прибуток від продажу одного торта становить 200 грн, від одного тістечка — 150 грн. Визначте графічним методом, скільки тортів і тістечок має виготовляти фабрика щодня, щоб отримати найбільший прибуток за умови повного використання наявних ресурсів.

Задача 11.2. Фермерське господарство займається вирощуванням картоплі та моркви. Для обробки 1 га картоплі потрібно 2 одиниці води та 3 людино-дні праці, а для обробки 1 га моркви потрібно 3 одиниці води та 2 людино-дні праці. У господарства є 50 га землі, 120 одиниць води для поливу та можливість залучити робочу силу на 100 людино-днів протягом сезону. Чистий прибуток від вирощування картоплі становить 5000 грн з гектара, від моркви — 6000 грн з гектара. Визначте, скільки гектарів слід відвести під картоплю, а скільки під моркву, щоб отримати найбільший прибуток за умови раціонального використання всіх наявних ресурсів.

Заняття 14-16: Задачі виробничого планування

Задача 14.1. Меблева майстерня спеціалізується на виготовленні столів та стільців. Для виробництва одного стола потрібно $0,8 \text{ м}^3$ деревини, 3 години робочого часу та 1 комплект фурнітури. Для виготовлення одного стільця потрібно $0,3 \text{ м}^3$ деревини, 2 години робочого часу та 1 комплект фурнітури. Щомісяця майстерня має в розпорядженні: 200 м^3 деревини, 800 робочих годин та 150 комплектів фурнітури. Прибуток від продажу одного стола становить 400 грн, від одного стільця — 200 грн. Визначте оптимальну кількість столів та стільців, яку має виготовляти майстерня щомісяця для отримання найбільшого прибутку за умови повного використання наявних матеріалів та ресурсів.

Задача 14.2. Швейна фабрика спеціалізується на пошитті сорочок та брюк. Для виготовлення однієї сорочки потрібно 2 метри тканини, 1,5 години робочого часу та 8 гудзиків. Для пошиття однієї пари брюк потрібно 3 метри тканини, 2 години робочого часу та 4 гудзики. Щотижня фабрика має в розпорядженні: 1000 метрів тканини, 600 робочих годин та 400 гудзиків. Прибуток від продажу однієї сорочки становить 120 грн, від однієї пари брюк — 180 грн. Визначте оптимальну кількість сорочок та брюк, яку має виготовляти фабрика щотижня для отримання найбільшого прибутку за умови ефективного використання всіх наявних ресурсів.

Заняття 17-18: Задачі транспортного типу

Задача 17.1. Мережа супермаркетів має три регіональні склади та чотири торгові точки. Перший склад має запас товарів 150 т, другий склад — 200 т, третій склад — 100 т. Торгові точки мають наступні потреби у товарах: перший магазин потребує 80 т, другий — 120 т, третій — 130 т, четвертий — 120 т. Вартість транспортування однієї тонни товару (у грн) між складами та магазинами наведена у таблиці:

Склад	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4
Склад 1	4	6	8	5
Склад 2	7	3	5	8
Склад 3	5	8	4	6

Складіть оптимальний план розподілу товарів зі складів до магазинів, який забезпечить мінімальні транспортні витрати за умови повного задоволення потреб усіх торгових точок.

Задача 17.2. Оптимізація перевезення продукції між цехами і складами. На заводі працює три цехи, кожен з яких може виготовити певну кількість продукції за добу: цех 1 — 300 одиниць, цех 2 — 250 одиниць, цех 3 — 200 одиниць. Ця продукція має бути доставлена на три склади, які можуть прийняти не більше 200 одиниць (склад А), 300 одиниць (склад В), 250 одиниць (склад С). Вартість перевезення однієї одиниці продукції (у грошових одиницях) з кожного цеху на кожен склад подано в таблиці:

	Склад А	Склад В	Склад С
Цех 1	8	6	10
Цех 2	9	7	4
Цех 3	5	3	6

Скласти такий план перевезень продукції з цехів на склади, який задовольняє всі потреби складів, не перевищує виробничі потужності цехів та забезпечує мінімальні загальні транспортні витрати.

Модуль 4: Цілочисельне та динамічне програмування (6 годин)

Заняття 19-20: Задачі цілочисельного програмування

Задача 19.1. Оптимальне спорядження туриста. Турист готується до походу і має зібрати рюкзак, місткість якого обмежена — він може нести не більше 15 кг. Перед ним є набір предметів, кожен із яких має свою масу та корисність — умовну числову оцінку важливості цього предмета в поході (наприклад, для безпеки, комфорту чи виживання).

У розпорядженні туриста такі речі:

Предмет	Маса (кг)	Корисність
Спальник	3	8
Каремат	1	3
Палатка	4	10
Їжа	2	7
Вода	1	4
Одяг	2	5

Необхідно обрати такі предмети, щоб їх загальна маса не перевищувала 15 кг та загальна корисність обраного спорядження була якнайбільшою.

Задача 19.2. Оптимальне інвестування в акції. Інвестор планує вкласти свої заощадження в акції трьох компаній. Загальна сума, яку він може інвестувати, становить 50 000 грн. Інвестування можливе тільки у цілу кількість акцій кожного типу, дробові частини не допускаються. Відомі ціни за одну акцію кожного типу та очікуваний прибуток на рік:

Тип акції	Вартість однієї акції (тис. грн)	Річний прибуток з однієї акції (тис. грн)
А	8	1.2
Б	12	2.1
В	15	2.5

Потрібно скласти оптимальний план інвестування, який дозволить не перевищити наявну суму в 50 тис. грн, отримати максимальний річний прибуток.

Заняття 21-22: Основи динамічного програмування

Задача 21.1. Оптимальне планування інвестицій на 4 роки.

Підприємець має початковий капітал у розмірі 5 млн грн і планує вкладати його протягом 4 років, щоб отримати максимальний сумарний прибуток. У кожному році він може інвестувати 0, 1 або 2 млн грн (тільки ціле число мільйонів). Відомо, який дохід (у млн грн) отримає підприємець залежно від того, скільки грошей він вкладе в певному році:

Рік	Інвестиція 0 млн	Інвестиція 1 млн	Інвестиція 2 млн
1	0.0	0.3	0.5
2	0.0	0.4	0.7
3	0.0	0.5	0.9
4	0.0	0.6	1.0

Визначити таку послідовність інвестицій на 4 роки, яка не перевищує початковий капітал (5 млн грн) та забезпечує максимальний сумарний прибуток за 4 роки.

Задача 21.2. Оптимальний розподіл ресурсу між проєктами. Менеджер має 10 одиниць ресурсу, які необхідно розподілити між трьома проєктами. Кожен проєкт може отримати від 0 до 4 одиниць ресурсу. Прибуток, який дає кожен проєкт, залежить від кількості наданого йому ресурсу. Відомі залежності між вкладеним ресурсом та прибутком для кожного проєкту:

Ресурс (од.)	Прибуток від проєкту 1	Прибуток від проєкту 2	Прибуток від проєкту 3
0	0	0	0
1	1	3	2
2	5	6	5
3	8	8	7
4	10	9	8

Потрібно скласти такий план розподілу 10 одиниць ресурсу між трьома проєктами, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Заняття 23-24: Практичні застосування динамічного програмування

Задача 23.1. Оптимальна стратегія модернізації підприємства.

Компанія планує розвиток і модернізацію свого виробництва протягом наступних 5 років. У кожному році вона повинна обрати один із трьох варіантів розвитку:

Без модернізації (витрати — 0 млн грн),

Часткова модернізація (витрати — 2 млн грн),

Повна модернізація (витрати — 5 млн грн).

Кожен варіант дає відповідний прибуток, який залежить від обраної стратегії у кожному році. У таблиці вказано прибуток (у млн грн), який компанія отримає залежно від вибору:

Рік	Без модернізації	Часткова модернізація	Повна модернізація
1	3	4	6
2	3	5	8
3	3	5	9
4	3	4	8
5	3	4	7

Компанія має обмежений інвестиційний бюджет у розмірі 10 млн грн, який можна витратити протягом 5 років на модернізацію. Потрібно визначити оптимальну стратегію, тобто які саме варіанти модернізації обрати в кожному році, щоб не перевищити сумарно бюджет 10 млн грн і при цьому забезпечити максимально можливий сумарний прибуток за 5 років.

Задача 23.2. Оптимальне управління запасами продукції. Менеджер з постачання планує покрити місячний попит на продукцію протягом 5 місяців. Попит у кожному місяці (у кількості одиниць товару) відомий заздалегідь:

Місяць	1	2	3	4	5
Попит (од.)	5	8	3	7	6

У будь-якому місяці можна зробити поставку продукції, і в такому разі компанія несе витрати: фіксована вартість замовлення — 50 грн (незалежно від обсягу поставки), змінна вартість — 8 грн за кожну одиницю продукції. Продукцію можна зберігати на складі, але вартість зберігання становить 2 грн за одиницю за кожен місяць перебування на складі. Якщо ж попит у певному місяці не задовольнено повністю, то за кожну відсутню одиницю продукції нараховується штраф 10 грн (за нестачу в момент попиту). Необхідно розробити оптимальну стратегію поставок, яка дозволяє покрити попит протягом 5 місяців, мінімізувати загальні витрати, які включають витрати на

поставки (фіксовані + змінні), витрати на зберігання запасів, штрафи за нестачу товару.

Модуль 5: Спеціальні типи оптимізаційних задач (6 годин)

Заняття 25-26: Задачі на мінімізацію витрат

Задача 25.1. Мінімізація вартості денного раціону. Їдальня має скласти раціон на день, який забезпечить необхідний мінімальний рівень поживних речовин: білки — не менше 60 г, жири — не менше 40 г, вуглеводи — не менше 200 г. У розпорядженні їдальні є чотири основні продукти. Таблиця показує вміст поживних речовин у 100 г кожного продукту та їхню вартість:

Продукт	Білки (г)	Жири (г)	Вуглеводи (г)	Ціна (грн) за 100 г
М'ясо	20	15	0	25
Хліб	8	1	50	5
Молоко	3	3	5	8
Овочі	2	0	8	12

Скласти найдешевший добовий раціон, який покриває всі мінімальні потреби організму в білках, жирах і вуглеводах. Потрібно визначити кількість кожного продукту (в грамах), яку слід включити до раціону, щоб задовольнити мінімальні поживні норми, змінні (кількість продукту) були невід'ємні, загальна вартість раціону була мінімальною.

Задача 25.2. Оптимальна заправка автопарку. Автопарк планує закупити 1000 літрів пального, використовуючи два типи бензину: А-95 — вартість 32 грн/л, А-92 — вартість 29 грн/л. Водночас необхідно дотриматись таких умов щодо складу пального: обсяг бензину А-95 має бути не менше 30% від загального обсягу, обсяг бензину А-92 не повинен перевищувати 75% від загального обсягу. Знайти найдешевший варіант закупівлі 1000 літрів пального, який задовольняє вказані умови щодо пропорцій та забезпечує мінімальні загальні витрати.

Заняття 27-28: Задачі фінансової математики

Задача 27.1. Оптимальне формування інвестиційного портфеля.

Інвестор має 100 000 грн, які планує розподілити між трьома активами. Про кожен з активів відомі:

Актив	Очікувана прибутковість	Рівень ризику
1	8%	3%
2	12%	7%
3	15%	10%

Інвестор хоче зменшити ризик вкладень, але водночас забезпечити очікувану прибутковість не менше 10 % річних. Знайти оптимальний розподіл інвестицій між трьома активами, який не перевищує загальний бюджет у 100 000 грн; забезпечує очікувану прибутковість не менше 10 %; має мінімально можливий ризик (у середньозваженому розумінні).

Задача 27.2. Мінімізація переплати за кредитом. Людина взяла кредит у розмірі 200 000 грн на 5 років під річну відсоткову ставку 18% (що еквівалентно 1.5% на місяць при щомісячному нарахуванні). Позичальник може щомісяця платити не менше 3 000 грн і не більше 8 000 грн. Потрібно визначити такий графік щомісячних платежів, який дозволить повністю погасити кредит за 5 років (тобто за 60 місяців), мінімізувати загальну переплату (тобто суму всіх виплат – 200 000 грн).

Заняття 29-30: Задачі на прийняття рішень в умовах невизначеності

Задача 29.1. Вибір сільськогосподарської культури в умовах невизначеності. Фермер повинен обрати одну культуру для посіву на полі, знаючи, що майбутня погода може бути сухою, нормальною або дощовою. Імовірність кожного варіанта погоди невідома. Для кожної культури наведено прогнозований прибуток (у тис. грн) залежно від погодних умов:

Культура	Суха	Нормальна	Дощова
Пшениця	-5	15	10
Кукурудза	20	25	5
Ячмінь	10	12	15

Фермер хоче прийняти раціональне рішення, застосовуючи різні критерії прийняття рішень в умовах невизначеності:

- а) критерій Вальда (максимін) — обережна стратегія (захист від найгіршого);
- б) критерій Севіджа — стратегія мінімізації можливого жалю;
- в) критерій Гурвіца з коефіцієнтом песимізму $\alpha=0.3$.

Задача 29.2. Оптимальне планування кількості порцій у ресторані.

Ресторан готує страву, яка має попит у відвідувачів. Однак точна кількість порцій, які будуть куплені впродовж дня, невідома заздалегідь. Відомі можливі варіанти попиту: 50 порцій, 70 порцій, 90 порцій. Перед початком роботи ресторан повинен вирішити, скільки саме порцій приготувати (наприклад, 50, 60, 70, 80 або 90). При цьому потрібно врахувати такі умови: 1) прибуток від проданої порції - 25 грн; 2) збиток від непроданої (залишкової) порції - 15 грн; 3) недостача (якщо попит більший, ніж кількість приготованих порцій) не карається, але ресторан втрачає потенційний прибуток.

Модуль 6: Підсумки та застосування (4 години)

Заняття 31-32: Комплексні задачі економічної оптимізації

Комплексна задача 31.1. Молодіжна організація планує благодійний ярмарок. Бюджет 50 тис. грн. Можна організувати:

Лотерею (витрати 15 тис., очікуваний дохід 35 тис.)

Концерт (витрати 25 тис., дохід 45 тис.)

Виставку-продаж (витрати 10 тис., дохід 20 тис.)

Майстер-класи (витрати 8 тис., дохід 15 тис.)

Додаткові обмеження: волонтерів 20 осіб, площа 200 м², час підготовки 100 год.

Заняття 33-34: Підсумковий проєкт та захист

Тематика проєктів:

1. Оптимізація особистого бюджету студента
2. Бізнес-план кав'ярні біля школи
3. Оптимальний розклад роботи шкільного буфету

4. Інвестиційна стратегія для молодой сім'ї
5. Оптимізація витрат на шкільні заходи
6. Логістика доставки шкільних обідів
7. Оптимальне використання шкільного спортзалу
8. Енергозбереження в школі: економічна оптимізація

fizmat@sspi.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
добросовісності

ДОДАТОК Г

Методичні вказівки до організації практичних занять

Практичні заняття рекомендується проводити з використанням активних методів навчання:

- Робота в малих групах
- Метод проєктів
- Ділові ігри
- Кейс-метод
- Для кожної теми доцільно розглядати задачі наростаючої складності:
 - Задачі для формування базових навичок
 - Задачі середньої складності
 - Задачі підвищеної складності
 - Творчі та дослідницькі задачі

Рекомендована структура практичного заняття:

- Актуалізація теоретичних знань (5-7 хв)
- Розбір типових задач викладачем (10-15 хв)
- Самостійне розв'язування задач учнями (15-20 хв)
- Обговорення результатів та аналіз типових помилок (5-7 хв)
- Підведення підсумків та домашнє завдання (3-5 хв)

Приклади можливих міні-проєктів:

- Розробка бізнес-плану умовного підприємства з використанням оптимізаційних методів
- Створення оптимального інвестиційного портфеля
- Оптимізація використання ресурсів школи/міста/регіону
- Розв'язування економічних задач з реального життя

ДОДАТОК Д

Як люди навчилися знаходити найкраще рішення: захоплююча історія теорії оптимізації

Уявіть собі ситуацію: у вас є обмежена кількість грошей і ви хочете купити якомога більше корисних речей. Або ви плануєте маршрут до школи і хочете витратити на дорогу якомога менше часу. А може, ви допомагаєте батькам у сімейному бізнесі і намагаєтеся організувати роботу так, щоб отримати максимальний прибуток? Усі ці ситуації об'єднує одне - пошук найкращого, або як кажуть математики, *оптимального* рішення.

Слово «*оптимальний*» походить від латинського «*optimum*», що означає «найкращий». А от коли ми шукаємо найбільше (максимум від лат. «*maximum*») чи найменше значення (мінімум від лат. «*minimum*») - це називається пошуком *екстремуму* (від латинського «*extremum*» - крайній). Саме такі задачі і вивчає *теорія оптимізації*.

Виявляється, люди намагалися розв'язувати подібні задачі ще 2500 років тому! Давньогрецькі філософи, включаючи самого Арістотеля, цікавилися такою задачею: якщо у нас є мотузка певної довжини, яку фігуру треба з неї скласти, щоб огородити найбільшу площу? Здається просто, правда? Але спробуйте відповісти самі - результат може вас здивувати!

Архімед, Евклід та інші геніальні мислителі античності також стикалися з подібними проблемами. Але довгий час не існувало загальних методів їх розв'язання - кожен задачу доводилося розв'язувати окремо, проявляючи неабиякий розум і винахідливість.

У 17 столітті французький математик П'єр Ферма зробив революційне відкриття. Він намагався пояснити, чому світло заломлюється саме так, а не інакше, коли переходить, наприклад, з повітря у воду. І з'ясувалося, що світло "вибирає" такий шлях, щоб час подорожі був мінімальним! Це був перший *екстремальний принцип* у фізиці, і він показав, що природа ніби "розв'язує" задачі оптимізації.

Ферма також відкрив перший загальний метод пошуку екстремумів функцій - той самий, який ви зараз вивчаєте на уроках математики: у точці максимуму чи мінімуму похідна функції дорівнює нулю.

У 18 столітті швейцарський математик Леонард Ейлер та французький вчений Жозеф Лагранж розробили методи для більш складних задач. Їхні методи досі використовуються у вищій математиці.

Особливо цікавою була задача про *брахістохрону* (від грецького "найкоротший час"). Уявіть гірку довільної форми. По якій траєкторії має скочуватися кулька, щоб якнайшвидше потрапити вниз? Здавалося б, по прямій лінії - але ні! Найшвидший спуск відбувається по особливій кривій, яка називається *циклоїдою*.

До 1930-х років більшість математиків думали, що всі основні задачі оптимізації вже розв'язані. Але життя показало інше. У 1939 році до радянського математика Леоніда Канторовича звернулися представники фанерного заводу з практичною задачею: як найефективніше розрізати фанеру, щоб мінімізувати відходи?

Виявилося, що це зовсім новий тип задач! Канторович заклав основи *лінійного програмування* - розділу математики, який сьогодні допомагає розв'язувати тисячі практичних проблем: від планування виробництва до складання розкладу польотів авіакомпаній.

Лінійне програмування допомагає розв'язувати, наприклад, такі задачі:

Транспортна задача: У нас є кілька складів з товарами і кілька магазинів, які потребують ці товари. Як організувати доставку, щоб витратити найменше грошей на транспорт?

Задача про виробництво: Завод може випускати різні види продукції, але ресурси (матеріали, робочий час, обладнання) обмежені. Що і в яких кількостях виробляти, щоб отримати максимальний прибуток?

За розробку цих методів Канторович у 1975 році отримав Нобелівську премію!

Сучасні напрями

Сьогодні теорія оптимізації допомагає:

Google знаходити найкращі результати пошуку серед мільярдів веб-сторінок;

Netflix рекомендувати вам фільми, які найімовірніше вам сподобаються;

Лікарям планувати оптимальні дози ліків;

Інженерам проєктувати найефективніші двигуни автомобілів;

Економістам прогнозувати розвиток ринків тощо.

Можливо, ви думаєте: "Навіщо мені це знати?" Але насправді ви щодня стикаєтеся з задачами оптимізації:

Як розподілити час між навчанням, відпочинком і хобі?

Який маршрут обрати, щоб швидше дістатися до потрібного місця?

Як витратити кишенькові гроші, щоб отримати максимум задоволення?

Розуміння принципів оптимізації допоможе вам приймати кращі рішення не тільки в математичних задачах, але і в реальному житті. Це особливо важливо у сучасному світі, де інформації дуже багато, а ресурси (час, гроші, увага) завжди обмежені.

Теорія оптимізації - це не просто розділ математики. Це спосіб мислення, який допомагає знаходити найкращі рішення у складному світі, де завжди доводиться вибирати між різними можливостями. І хто знає - можливо, саме ви відкриєте нові методи, які допоможуть людству розв'язувати задачі майбутнього!