

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Використання цифрових технологій у процесі навчання математики учнів старшої школи (на прикладі вивчення теми "Похідна та її застосування")

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

_____І.В.Шищенко,

доктор педагогічних наук, доцент

«___»_____2025 року

Виконавець:

_____М.В.Білоброва

«___»_____2025 року

Суми 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	7
1.1. Поняття «цифрові технології» та їх роль в освіті.....	7
1.2. Шляхи впровадження цифрових технологій у процес навчання математики учнів старшої школи.....	14
1.3. Аналіз навчальної програми та підручників з математики за темою «Похідна та її застосування».....	22
РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»	34
2.1. Використання цифрових технологій у процесі вивчення нового матеріалу з теми.....	34
2.2. Використання цифрових технологій під час навчання учнів розв'язувати завдання теми.....	3
2.3. Використання цифрових технологій для контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів з теми.....	61
ВИСНОВКИ	72
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	75

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасні вимоги до якості освіти передбачають активне впровадження інноваційних педагогічних технологій, серед яких важливе місце займають цифрові технології. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики є одним із пріоритетних напрямів розвитку освітньої галузі в Україні. Вони відкривають нові можливості для удосконалення навчального процесу, підвищення його ефективності та мотивації учнів.

Питання використання цифрових технологій як засобу підвищення якості освітнього процесу закладу освіти вивчали такі дослідники як: Г. Р. Генсерук [13], А.Г. Гуралюк [14], П. Криворучко [54] та ін. Особливості використання цифрових технологій на уроках математики досліджували такі науковці як: В.С. Величко [9], Р. С. Гуревич [16], Р.С. Маланчук [29], О.І. Матяш [30], О.Г. Федоренко [49] та ін.

Однією з ключових тем шкільної програми з математики старшої школи є розділ «Похідна та її застосування». Розуміння поняття похідної, оволодіння методами її обчислення та вміння застосовувати похідну до розв'язування різноманітних задач є фундаментальним для подальшого вивчення математики у вищих навчальних закладах, а також для застосування математичних знань у природничих та технічних науках. Проте, як показує педагогічна практика, засвоєння цієї теми часто викликає значні труднощі у старшокласників через її абстрактність, необхідність оперувати складними математичними операціями, встановлювати зв'язки між теоретичними поняттями та їх практичним застосуванням.

Використання цифрових технологій у процесі навчання теми «Похідна та її застосування» може стати ефективним інструментом для подолання цих труднощів. Інтерактивні візуалізації, програмні засоби для символічних обчислень та онлайн-платформи з навчальними матеріалами та завданнями здатні зробити процес навчання більш наочним, зрозумілим, цікавим та

індивідуалізованим. Завдяки цифровим інструментам учні старших класів можуть отримати можливість експериментувати з математичними об'єктами, досліджувати їх властивості, візуалізувати абстрактні поняття, отримувати миттєвий зворотний зв'язок та самостійно контролювати свій прогрес у навчанні.

Незважаючи на зростаючий інтерес до використання ІКТ в освіті, питання розробки конкретних методичних рекомендацій щодо застосування цифрових інструментів для ефективного вивчення окремих тем шкільного курсу математики, зокрема «Похідна та її застосування», потребують подальшого дослідження та наукового обґрунтування.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої школи.

Предмет дослідження – вплив використання цифрових технологій на ефективність процесу навчання математики учнів старшої школи під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити ефективність використання цифрових технологій у процесі навчання математики учнів старшої школи на прикладі вивчення теми «Похідна та її застосування».

Зумовлені метою завдання дослідження передбачають:

1. Охарактеризувати поняття «цифрові технології» та визначити їх роль в освіті;
2. Розкрити шляхи впровадження цифрових технологій у процес навчання математики учнів старшої школи;
3. Проаналізувати навчальну програму та підручники з математики за темою «Похідна та її застосування»;
4. Дослідити методичні особливості використання цифрових технологій у процесі навчання учнів теми «Похідна та її застосування».

Методи дослідження. Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань використано наступні методи:

– теоретичні – узагальнення та систематизація нормативних, наукових, навчально-методичних джерел з метою дослідження методики і практики навчання математики учнів старшої школи на прикладі вивчення теми «Похідна та її застосування» та вивчення сучасних підходів до використання цифрових технологій у навчальному процесі;

– емпіричні - тестування з метою аналізу рівня навчальних досягнень учнів старшої школи при навчанні теми «Похідна та її застосування»; опитування вчителів та спостереження за навчальним процесом з метою вивчення передового педагогічного досвіду вчителів математики, дослідження стану викладання математики та визначення перспективних напрямків використання цифрових технологій у процесі навчання математики учнів старшої школи.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розробці та впровадженні ефективних методичних підходів до використання цифрових технологій у навчанні математики учнів старшої школи, що сприятиме удосконаленню методики навчання теми «Похідна та її застосування».

Апробація результатів та публікації.

Основні положення і висновки дослідження висвітлено в публікаціях:

1. Білоброва М. Використання систем електронного тестування у процесі навчання математики. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2024 Форум молодих дослідників»: матеріали V Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. 29 листопада 2024 р., м. Суми. С. 20-21.

2. Білоброва М. Цифрова трансформація математичного інструментарію у процесі навчання учнів старшої школи. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. Суми, 2025. Випуск 19. С 10-11.

3. Білоброва М. Роль цифрових освітніх ресурсів у подоланні типових труднощів учнів при засвоєнні теми «Похідна». Студентська звітна

конференція: Збірник праць студентів фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка. Суми, 2025. Випуск 19. С 17-22.

Структура кваліфікаційної роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 77 сторінок.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
добросовісності

РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Поняття «цифрові технології» та їх роль в освіті

Забезпечення освітньої сфери теоретичними знаннями та практичними навичками застосування сучасних інформаційних технологій, спрямованих на оптимізацію навчально-виховних процесів є одним із ключових напрямів розвитку сучасного суспільства. Активне впровадження новітніх цифрових технологій у навчальний процес створює значний потенціал для якісного поліпшення існуючих педагогічних методик.

Створення у школярів стійкого прагнення до знань і пошук інноваційних підходів та інструментів для їхнього засвоєння є одними з ключових викликів сучасної освіти. Варто зазначити, що саме по собі забезпечення навчальних закладів новітніми ІКТ-засобами не гарантує автоматичного підвищення кваліфікації педагогів та якості навчального процесу. Залучення вчителів до активного використання цифрових технологій у школі відбувається повільніше, ніж зростають вимоги до їхньої професійної компетентності. Таке відставання зумовлене низкою об'єктивних і суб'єктивних причин, серед яких першочергове значення мають швидкий розвиток інформаційних технологій та недостатньо оперативна розробка й видання необхідного навчально-методичного забезпечення для опанування нових цифрових технологій.

Цифрові освітні технології визначаються як інтегроване застосування широкого спектра електронних інструментів, цифрових ресурсів та спеціалізованих програмних рішень у навчальному процесі. Ключовою метою їхнього впровадження є суттєве підвищення якості навчання на всіх рівнях освіти, а також гарантування рівного та зручного доступу до освітніх матеріалів і знань як для учнів та студентів (здобувачів освіти), так і для педагогічних працівників. Використання цих технологій спрямоване на оптимізацію методів викладання, активізацію пізнавальної діяльності учнів та формування необхідних у сучасному світі цифрових компетентностей. Отже, цифрові освітні технології є важливим фактором модернізації освітньої системи,

забезпечуючи більш ефективне, гнучке та доступне навчання для всіх учасників освітнього процесу [28].

Науковець Генсерук Г. Р. наголошує на важливості інтеграції цифрових технологій в освітній процес, розглядаючи це як фундаментальний перехід від традиційного навчання до цифрового. Він вважає, що цифрові інструменти здатні формувати інтерактивне навчальне середовище, яке сприяють активній залученості учнів у процес навчання. На думку науковця, застосування цифрових технологій сприяє організації персоналізованого навчання, надаючи кожному учню можливість концентруватися на власних потребах та інтересах. Інтеграція цифрових технологій в освіту потребує трансформації навчальних підходів та організації освітнього процесу, підкреслюючи необхідність забезпечення викладачів належними знаннями та навичками для ефективного використання цих технологій у їхній професійній діяльності [13, с.110].

Варто зазначити, що у широкому сенсі, під поняттям «цифрові технології» розуміють електронний спосіб обробки та передачі інформації, що базується на використанні кодованих символів, які застосовуються в комп'ютерній техніці та відповідних технологіях.

Науковці А. Г. Гуралюк та Л. С. Шевченко трактують цифрові технології як великий набір інструментів і ресурсів, які оперують інформацією, представленою в різноманітних формах, та функціонують на основі широкого спектра пристроїв і гаджетів [14, с.4].

Дослідник О. В. Москаленко визначає поняття «цифрові технології», вважаючи його більш актуальним і доступним для розуміння сучасній молоді, як інтеграцію комп'ютерних, електронних, інформаційних, інформаційно-комунікаційних і телекомунікаційних технологій [34, с.72].

Зважаючи на різноманітність трактувань терміну «цифрові технології», найбільш вичерпним та системним визначенням є формулювання Н. В. Руденко, яка розглядає їх як комплекс сучасних педагогічних технологій, що активно застосовують комп'ютерні та мережеві засоби навчання в дистанційній, змішаній, груповій та індивідуалізованій освіті [39, с.372].

Цифрова трансформація освіти являє собою інтеграцію цифрових технологій у всі сфери освітньої діяльності, охоплюючи навчальний процес, організацію роботи педагогів, системи оцінювання та моніторингу навчальних досягнень учнів. Ця трансформація набула особливої значущості внаслідок глибоких змін, які цифрові технології внесли у способи комунікації, праці та повсякденного життя людей. Таким чином, освіта повинна адаптуватися до цих змін і ефективно використовувати нові технології для підвищення якості навчання та розширення доступу до освітніх можливостей.

Одним із ключових напрямків цифрової трансформації в освіті є розширення її доступності. Завдяки цифровим технологіям з'являється можливість подолати різноманітні перешкоди, такі як географічна віддаленість, фінансові труднощі та інші фактори, що ускладнюють здобуття якісної освіти. Це досягається шляхом розробки та впровадження електронних навчальних курсів, онлайн-ресурсів, відеолекцій та інших цифрових навчальних матеріалів, які стають доступними для навчання в будь-який час і з будь-якої точки світу, де є підключення до Інтернету [48, с.104].

Незважаючи на переваги, цифрова трансформація освіти висуває нові вимоги до всіх учасників освітнього процесу. Успішна діяльність у цифровому освітньому середовищі передбачає не лише володіння необхідними знаннями та навичками, а й розвинену гнучкість, креативність та вміння ефективно співпрацювати. Крім того, особливої значущості набувають питання кібербезпеки та захисту персональних даних учасників освітнього процесу. Одним із ключових викликів цифрової трансформації освіти є потреба у підготовці висококваліфікованих фахівців для ринку праці. У сучасних умовах зростає попит на професіоналів з високим рівнем комп'ютерної грамотності та навичками використання різноманітного програмного забезпечення та онлайн-інструментів.

Як зазначають Ю.Жук, В. Лапінський та Ю. Машбиць, цифрові технології є дієвим засобом активізації пізнавальної діяльності учнів, оскільки сприяють гнучкості та індивідуалізації освітнього процесу, а також відкривають доступ до

глобальних навчальних ресурсів і можливостей спілкування та обміну досвідом з однолітками з різних куточків світу [23, с.97].

Розглянемо переваги цифрових технологій в сучасному освітньому процесі:

1. Розширення доступу до великого обсягу інформації та навчальних ресурсів. Цифрові технології надають учням доступ до величезної кількості освітніх матеріалів (наприклад: онлайн-бібліотеки, відеолекції, інтерактивні платформи та навчальні програми). Завдяки доступу до Інтернету, учні можуть знаходити відповіді на свої запитання, досліджувати різноманітні теми та опановувати нові знання в будь-який час і в будь-якому місці. Мультимедійні ресурси, такі як відео та аудіоматеріали, здатні значно покращити розуміння та запам'ятовування навчального матеріалу. Цифрові технології інтенсифікують освітній процес, підвищуючи швидкість та якість сприйняття, розуміння та засвоєння знань.

2. Забезпечення персоналізації навчання та адаптивних освітніх можливостей. Цифрові технології відкривають шлях до персоналізації навчання, пристосовуючись до індивідуальних потреб, стилів навчання та темпу кожного учня. Учні можуть навчатися у власному темпі, обираючи курси та завдання, які відповідають їхнім інтересам та рівню знань. Цифрові технології активізують навчальний процес, прискорюючи якість та швидкість сприйняття інформації та полегшуючи засвоєння знань. Персоналізація навчання є ключовою перевагою, оскільки вона дозволяє враховувати індивідуальні потреби та темпи навчання кожного учня.

3. Розвиток ключових навичок цифрової грамотності для XXI століття. Використання цифрових технологій в освіті сприяє розвитку в учнів важливих навичок цифрової грамотності, необхідних для успіху в сучасному цифровому світі. Це передбачає вміння знаходити, аналізувати та застосовувати інформацію в Інтернеті. Розвиток цифрових навичок робить учнів більш конкурентоспроможними та впевненими у використанні різноманітних онлайн-інструментів. Важливим аспектом є вміння використовувати цифрові пристрої

та програмне забезпечення, працювати з онлайн-сервісами та критично оцінювати достовірність інформаційних джерел. Використання цифрових технологій та розвиток цифрових навичок на уроках підвищують залученість учнів, їхню успішність, створюють більше можливостей для співпраці та готують дітей до майбутнього. Використання смартфонів у навчальному процесі сприяє розвитку комп'ютерної грамотності. Інтеграція цифрових технологій у навчання робить їх використання природним та дозволяє учням бачити їхнє практичне застосування, сприяючи глибшому розумінню та комфортному володінню цими інструментами [28].

Якщо розглядати переваги цифрових технологій для вчителів, то можна стверджувати, що дані технології значно полегшують процес підготовки до уроків, надаючи вчителям доступ до великої кількості онлайн-ресурсів, планів уроків та навчальних матеріалів. Педагоги можуть легко знаходити та адаптувати існуючі матеріали, створювати мультимедійний контент та розробляти інтерактивні завдання. Цифрові технології економлять час вчителя в підготовці до уроку. Різноманітні вебсервіси сприяють інтенсифікації процесу навчання та підвищенню рівня професійної підготовки вчителя. Технології роботи з текстовою та графічною інформацією, а також технології числових розрахунків, допомагають автоматизувати процеси інформаційно-методичного забезпечення.

Варто виокремити, що цифрові інструменти здатні автоматизувати перевірку тестів та завдань, звільняючи цінний час вчителів та забезпечуючи швидший зворотний зв'язок для учнів. Онлайн-платформи для тестування та системи управління навчанням часто включають функції автоматизованого оцінювання та аналізу успішності учнів. Таким чином, миттєвий зворотний зв'язок, який забезпечують багато цифрових інструментів оцінювання, допомагає учням швидше визначати сфери для покращення, що сприяє ефективнішому навчанню.

Проте, існує поняття як «цифровий розрив», що відображає нерівність у доступі до технологій та цифрової грамотності, є значною перешкодою для

забезпечення рівної освіти. Нерівний доступ до пристроїв, надійного інтернет-з'єднання та технічної підтримки може поглиблювати існуючу нерівність серед учнів. Сім'ї з низьким рівнем доходу та учні в сільській місцевості часто непропорційно страждають від цифрового розриву. Цифровий розрив проявляється у використанні цифрових технологій, перевагах, отриманих від них, та рівні цифрових навичок, і може погіршити нерівність доходів. Онлайн-навчання може призвести до нової стратифікації учнів, де ті, хто не має доступу до пристроїв та підтримки, відстають [31, с.83].

Варто виокремити, що під час пандемії та на початку повномасштабного вторгнення значний відсоток шкіл покладався лише на вчителів із власним обладнанням та доступом до Інтернету, що свідчить про масштаби цифрового розриву. Деякі учні повністю втратили доступ до освіти через відсутність ресурсів. Для подолання цифрового розриву необхідні системні зусилля для забезпечення доступними пристроями, інтернет-з'єднанням та навчанням цифрової грамотності всіх учнів та їхніх сімей.

Ефективна інтеграція цифрових технологій вимагає від вчителів належної підготовки щодо їх використання та педагогічного застосування. Багато вчителів можуть відчувати труднощі у створенні власного цифрового освітнього контенту та потребують підтримки в адаптації своїх педагогічних практик до цифрового середовища. Для ефективної інтеграції цифрових інструментів у практику викладання необхідне належне навчання викладачів, а також вирішення питань щодо конфіденційності даних та кібербезпеки [40, с.41].

Підсумовуючи, наведемо переваги та недоліки використання цифрових технологій в освіті (табл. 1.1.):

Таблиця 1.1.

Переваги на недоліки використання цифрових технологій в освіті

Переваги	Недоліки
Розширений доступ до великої кількості освітніх матеріалів, онлайн-	Нерівний доступ до технологій та інтернету, який може поглиблювати

бібліотек та інтерактивних платформ.	освітню нерівність.
Цифрові інструменти дозволяють адаптувати навчання до індивідуальних потреб та темпу кожного учня.	Надмірна залежність від гаджетів може призвести до зменшення соціальної взаємодії та зниження рівня критичного мислення.
Використання цифрових технологій допомагає учням розвивати навички, необхідні для життя в цифровому світі.	Вчителі потребують належної підготовки для ефективного використання цифрових технологій в освітньому процесі.
Мультимедійні засоби та інтерактивні інструменти роблять навчання більш захопливим.	Тривале використання екранів може мати негативний вплив на зір та загальне самопочуття.
Цифрові технології дозволяють навчатися в будь-який час і в будь-якому місці.	Існують складнощі у забезпеченні чесності під час онлайн-тестування та контрольних робіт.
Цифрові ресурси та платформи допомагають вчителям швидше готуватися до уроків та знаходити необхідні матеріали.	Неправильне використання технологій може відволікати учнів від навчання.
Мультимедійні та інтерактивні ресурси відповідають різним навчальним уподобанням.	Захист персональних даних учнів є важливим аспектом використання цифрових технологій.

На сьогоднішній час педагоги активно використовують широкий спектр цифрових інструментів на різних етапах навчальної діяльності, включаючи викладання нового матеріалу, розробку завдань для самостійної та контрольної роботи, а також організацію позакласних заходів. Однак, у науково-педагогічному дискурсі підкреслюється, що комп'ютерні технології та цифрові засоби є лише допоміжним інструментарієм для вчителя, потенціал якого

розкривається у сприянні підвищенню продуктивності освітнього процесу та зростанню зацікавленості учнів.

Ефективність застосування цифрових технологій у навчанні безпосередньо залежить від здатності педагога до оптимального поєднання інноваційних засобів із традиційними, усталеними методиками викладання. Дослідження в галузі педагогіки свідчать, що якісне засвоєння навчального матеріалу досягається саме завдяки збалансованій комбінації цифрових технологій зі стандартними методами педагогічної діяльності.

Отже, продуктивна взаємодія учнів у навчальному процесі значною мірою визначається вмінням вчителя інтегрувати можливості сучасних технологій, таких як інтерактивні платформи та мультимедійні ресурси, з класичними підходами, зокрема використанням дошки та крейди, забезпечуючи таким чином різнобічний та ефективний освітній досвід. Такий інтегрований підхід дозволяє максимально використовувати переваги обох методологій, сприяючи глибшому розумінню та засвоєнню навчального матеріалу учнями.

1.2. Шляхи впровадження цифрових технологій у процес навчання математики учнів старшої школи

Математична освіта відіграє фундаментальну роль у розвитку старшокласників, формуючи їхнє критичне мислення, аналітичні здібності та вміння розв'язувати складні завдання, що є необхідними для успіху в подальшому навчанні та професійній діяльності. У сучасному світі, який стрімко цифровізується, інтеграція цифрових технологій в освітній процес стає не просто бажаною, а необхідною умовою для підвищення якості навчання. Глобальна тенденція до цифрової трансформації освіти активно підтримується і в Україні, де впровадження новітніх технологій розглядається як важливий інструмент модернізації освітньої системи. Цифрові освітні технології спрямовані на якісне покращення навчання та розширення доступу до знань для

учнів і викладачів. Швидкість та універсальність цифрових технологій роблять їх надзвичайно затребуваними в освітньому процесі.

Використання цифрових технологій у навчанні математики старшокласників має численні переваги. Вони сприяють підвищенню залученості та мотивації учнів завдяки інтерактивним та візуально привабливим інструментам, а також елементам гейміфікації. Технології забезпечують персоналізоване навчання, адаптуючи уроки до індивідуальних потреб та темпу кожного учня, а також пропонуючи адаптивне навчання. Учні отримують розширений доступ до різноманітних ресурсів та інформації, включаючи онлайн-бібліотеки, цифрові підручники та мультимедійні матеріали [12, с.38].

Використання цифрових інструментів сприяє розвитку цифрових навичок, що є надзвичайно важливим у сучасному світі. Онлайн-платформи забезпечують можливості для кращої співпраці та комунікації між учнями. Учні отримують миттєвий зворотний зв'язок щодо виконання завдань з математики, що сприяє кращому розумінню матеріалу. Для вчителів цифрові технології спрощують багато завдань, таких як оцінювання та підготовка до уроків, завдяки автоматизації процесів та доступу до готових ресурсів. Навчання стає більш гнучким та доступним, дозволяючи учням навчатися в будь-який час та в будь-якому місці.

Варто виокремити, що досвід вчителів математики щодо впровадження цифрових технологій у навчальний процес є різноманітним. З позитивних аспектів вчителі відзначають підвищення зацікавленості учнів, розширення можливостей для персоналізованого навчання та доступ до ширшого спектру навчальних ресурсів. Використання технологій також дозволяє вчителям економити час на підготовці до уроків та перевірці завдань. Покращуються комунікація та співпраця між учнями, а візуалізація математичних концепцій стає більш ефективною. Загалом, вчителі спостерігають позитивний вплив технологій на успішність учнів. Платформа AR Book, наприклад, значно скорочує час, який вчителі витрачають на підготовку експериментів та уроків [22].

Водночас вчителі стикаються з певними труднощами, такими як технічні проблеми, недостатня підготовка та підтримка, складність ефективної інтеграції технологій у навчальну програму, занепокоєння щодо відволікання учнів та неналежного використання технологій, цифровий розрив та нерівний доступ. Існує також думка, що технології можуть замінити навчання, а не доповнити його, тому вчителі наголошують на необхідності ретельного вибору інструментів. Досвід показує, що ефективна інтеграція технологій вимагає не лише наявності інструментів, але й відповідної педагогічної підготовки та підтримки.

Для ефективного використання цифрових технологій з метою підвищення інтересу та успішності учнів у вивченні математики старшої школи необхідно дотримуватися ряду рекомендацій:

- забезпечити надійний доступ до необхідного обладнання та стабільного інтернет-з'єднання для всіх учнів і вчителів;
- впроваджувати інтерактивні навчальні платформи та застосунки, що пропонують візуалізації, симуляції та ігри для кращого розуміння абстрактних математичних концепцій;
- адаптовувати темп навчання до індивідуальних потреб та рівня підготовки кожного учня;
- заохочувати використання онлайн-ресурсів, таких як відеоуроки, інтерактивні вправи та відкриті освітні ресурси, для розширення навчальних можливостей та самостійного навчання;
- застосовувати інструменти для спільної роботи над математичними задачами, сприяючи обміну знаннями та розвитку комунікативних навичок;
- використовувати системи оцінювання та зворотного зв'язку на основі цифрових технологій для оперативного відстеження прогресу учнів та надання своєчасної підтримки;
- проводити навчання для вчителів щодо ефективного використання цифрових інструментів та інтеграції їх у навчальний процес;

– створювати можливості для учнів досліджувати реальні застосування математики за допомогою цифрових технологій, наприклад, через аналіз даних або моделювання;

– сприяти розвитку критичного мислення та цифрової грамотності учнів шляхом оцінки достовірності онлайн-джерел та відповідального використання технологій;

– забезпечувати баланс між використанням цифрових технологій та традиційними методами навчання, зберігаючи важливість розвитку фундаментальних навичок розв'язання задач без використання технічних засобів [53, с.272].

Наведемо шляхи впровадження цифрових технологій у навчання математики в старших класах (рис. 1.1.):

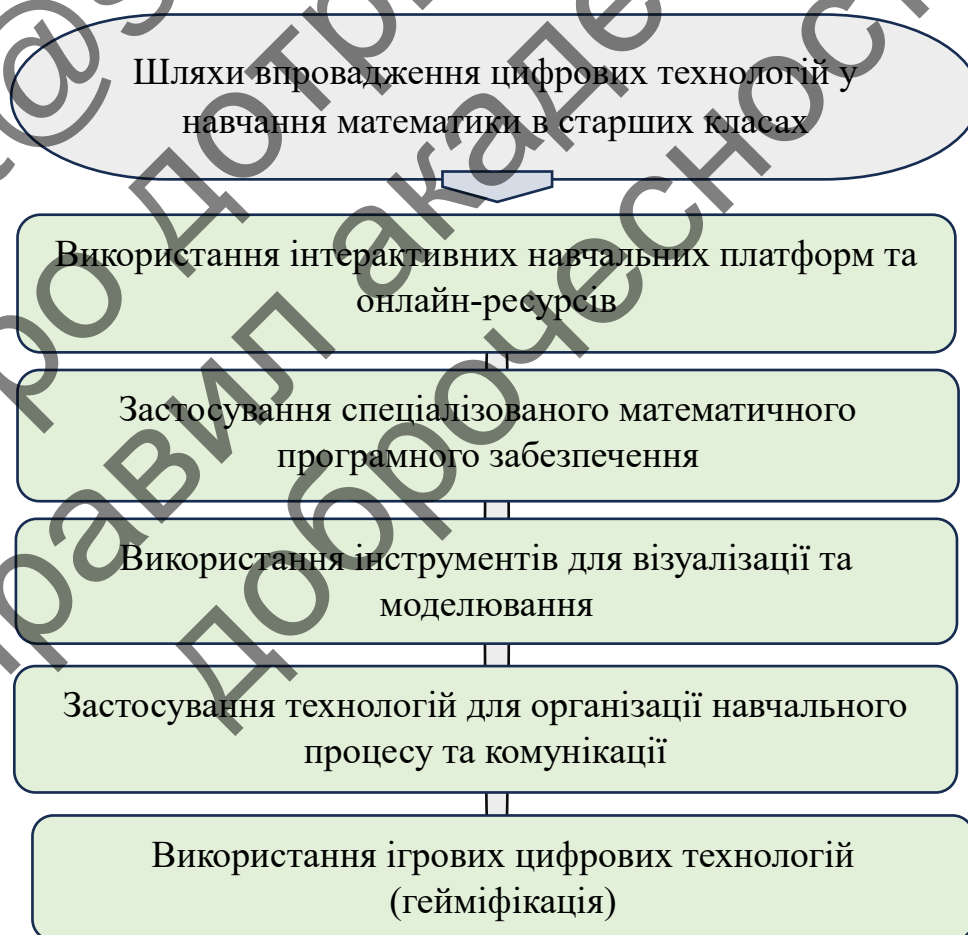


Рис. 1.1. Шляхи впровадження цифрових технологій у навчання математики в старшій школі

Розглянемо детальніше основні шляхи впровадження цифрових технологій у навчання математики старшокласників.

1. Використання інтерактивних навчальних платформ та онлайн-ресурсів:

- Веб-сайти та додатки з математичними вправами, які автоматично перевіряються, надають миттєвий зворотний зв'язок, допомагають учням відстежувати свій прогрес та виявляти прогалини у знаннях. Приклади: Mathway, Wolfram Alpha (для розв'язання та перевірки), GeoGebra (інтерактивна геометрія та алгебра).

- Відеоуроки та навчальні анімації. Навчання математики за допомогою відео та анімацій робить навчання більш зрозумілим та захоплюючим. YouTube-канали, освітні платформи часто містять якісний навчальний контент.

- Цифрові підручники та посібники. Інтерактивні підручники з мультимедійними елементами, тестами та інтерактивними вправами можуть замінити традиційні друковані видання, забезпечуючи більшу гнучкість та доступність.

2. Застосування спеціалізованого математичного програмного забезпечення:

- Програми як, наприклад, Wolfram Mathematica, Maple, SageMath дозволяють виконувати складні символічні обчислення, будувати графіки функцій, розв'язувати рівняння та нерівності, що сприяє глибшому розумінню математичних концепцій та звільняє час від звичайних обчислень.

- GeoGebra є яскравим прикладом програмного забезпечення, яке дозволяє учням візуалізувати геометричні об'єкти, проводити експерименти, досліджувати їхні властивості та взаємозв'язки.

- Такі програми як R, Python, SPSS можуть використовуватися для аналізу даних, побудови графіків, проведення статистичних досліджень, що є важливим у старшій школі.

3. Використання інструментів для візуалізації та моделювання:

- Графічні калькулятори (фізичні та віртуальні) допомагають будувати графіки функцій, аналізувати їхні властивості, розв'язувати рівняння графічним методом.

- Програмне забезпечення для створення діаграм та графіків (Lucidchart, Draw.io) дозволяють візуалізувати дані, будувати концептуальні карти, що сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між математичними поняттями.

- Програмні засоби, що дозволяють створювати математичні моделі реальних процесів, допомагають учням застосовувати математичні знання для розв'язання практичних задач.

4. Застосування технологій для організації навчального процесу та комунікації:

- Платформи Moodle, Google Classroom дозволяють вчителям розміщувати навчальні матеріали, завдання, тести, форуми для обговорення, відстежувати прогрес учнів та надавати зворотний зв'язок.

- Google Docs, Microsoft Teams та інші сервіси дозволяють учням спільно працювати над математичними проектами, розв'язувати задачі в групах, обмінюватися ідеями.

- Платформи як Google Forms, Kahoot!, Quizizz дозволяють швидко створювати та проводити інтерактивні тести, отримувати миттєві результати та аналізувати успішність учнів.

5. Використання ігрових цифрових технологій (гейміфікація):

- Математичні ігри та додатки. Ігрові елементи в навчанні математики можуть підвищити мотивацію учнів, зробити процес навчання більш цікавим та допомогти у засвоєнні математичних базових навичок.

- Використання елементів гейміфікації в навчальних платформах. Нарахування балів, бейджів, створення рейтингів може стимулювати учнів до активної участі та досягнення кращих результатів [55].

Орієнтована на розвиток ключових компетентностей, формування критичного мислення та індивідуалізацію навчання, Нова українська школа відкриває можливості для інтеграції цифрових інструментів у викладання

математики старшокласникам. Однак, ефективність цього процесу безпосередньо залежить від створення та забезпечення низки ключових умов, які є фундаментом для успішної трансформації навчального середовища.

Першочерговою умовою успішного впровадження цифрових технологій є забезпечення належної технічної бази. Наявність достатньої кількості сучасних комп'ютерів, планшетів або інших мобільних пристроїв, інтерактивних дошок у навчальних кабінетах, а також стабільного та швидкісного інтернет-з'єднання є критично важливим елементом. Без доступу до необхідного обладнання та мережі Інтернет, потенціал цифрових інструментів залишається нереалізованим, а спроби їхнього використання можуть призвести до фрагментарності та неефективності навчального процесу. Рівний доступ усіх учасників освітнього процесу до якісної технічної інфраструктури є запорукою подолання цифрового розриву та створення ефективного навчального середовища [47, с.51].

Другою, не менш значущою умовою, є підтримка та навчання педагогів. Успішне використання цифрових технологій у навчанні математики вимагає від вчителя не лише базової комп'ютерної грамотності, але й глибокого розуміння педагогічного потенціалу різноманітних цифрових інструментів та методик їхньої інтеграції в навчальний процес. Забезпечення постійного професійного розвитку педагогів у цій сфері, проведення спеціалізованих тренінгів, семінарів та майстер-класів, обмін досвідом між колегами є необхідними складовими для формування компетентного вчителя, здатного ефективно використовувати цифрові технології для підвищення якості навчання. Вчитель має виступати не лише як транслятор знань, а як фасилітатор, який вміло використовує цифрові інструменти для організації пізнавальної діяльності учнів, стимулювання їхньої самостійності та розвитку критичного мислення.

Третя важлива умова полягає у розробці якісного цифрового навчально-методичного забезпечення. Наявність сучасних, інтерактивних та змістовних цифрових ресурсів, що відповідають вимогам Державного стандарту базової середньої освіти та навчальних програм з математики, є ключовим фактором

успішної інтеграції технологій. Це включає в себе створення або адаптацію електронних підручників, інтерактивних вправ, віртуальних лабораторій, симуляцій, відеоуроків та інших мультимедійних матеріалів, які б сприяли візуалізації складних математичних концепцій, активізації пізнавальної діяльності учнів та забезпеченню індивідуального підходу до навчання. Важливо, щоб ці ресурси були не лише технологічно сучасними, але й педагогічно обґрунтованими, спрямованими на досягнення конкретних навчальних цілей та розвиток ключових компетентностей [51, с.83].

Зазначимо, що четвертою умовою є врахування вікових особливостей та потреб учнів. Підбір цифрових інструментів та методів навчання має здійснюватися з урахуванням психологічних та когнітивних особливостей старшокласників, їхніх інтересів та навчальних потреб. Не всі цифрові технології є однаково ефективними для різних вікових груп та різних навчальних цілей. Важливо використовувати ті інструменти, які максимально сприяють залученню учнів до навчального процесу, стимулюють їхню пізнавальну активність, розвивають самостійність та відповідальність за власне навчання. Індивідуалізація навчання за допомогою цифрових технологій передбачає можливість вибору учнями темпу навчання, рівня складності завдань, формату подання інформації, що сприяє підвищенню їхньої мотивації та досягненню кращих навчальних результатів.

Виокремимо, що п'ятою важливою умовою є створення безпечного та етичного цифрового середовища. В умовах активного використання Інтернету та цифрових ресурсів, важливим є формування в учнів навичок безпечної поведінки в онлайн-середовищі, розуміння принципів етичного використання інформації, поваги до авторських прав та здатності до критичного оцінювання інформації, отриманої з цифрових джерел. Педагоги повинні проводити відповідну роз'яснювальну роботу, навчати учнів розпізнавати недостовірну інформацію, захищати свої персональні дані та відповідально використовувати цифрові технології [4, с. 47].

Отже, успішне впровадження цифрових технологій у навчання математики старшокласників є складним процесом, який вимагає комплексного підходу та узгоджених зусиль усіх учасників освітнього процесу. Забезпечення належної технічної бази, підтримка та навчання педагогів, розробка якісного цифрового навчально-методичного забезпечення, врахування вікових особливостей та потреб учнів, а також створення безпечного та етичного цифрового середовища є ключовими умовами, без яких повноцінна реалізація потенціалу цифрових технологій у математичній освіті буде неможливою. Лише за умови створення сприятливого та підготовленого середовища цифрові технології стануть ефективним інструментом для підвищення якості навчання математики, розвитку ключових компетентностей учнів та їхньої підготовки до успішного життя в інформаційному суспільстві.

1.3. Аналіз навчальної програми та підручників з математики за темою «Похідна та її застосування»

Реформа освіти в Україні, що впроваджується в межах концепції Нової української школи, передбачає створення нових державних стандартів та відповідних освітніх програм. На сьогодні вже затверджено Державний стандарт початкової та базової середньої освіти, тоді як розробка стандарту для профільної середньої освіти ще триває. Очікується, що повний перехід на профільну середню освіту відбудеться у 2027 році. До цього часу навчання учнів 10-11 класів у закладах загальної середньої освіти здійснюватиметься на основі чинного Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти.

Варто зазначити, що одним із ключових завдань освітньої галузі «Математика» у старшій школі є ознайомлення учнів з основними ідеями та методами диференціального й інтегрального числення, а також формування в них базових навичок практичного застосування математичних знань. Тема «Похідна та її застосування» є однією з ключових у шкільному курсі алгебри та

початків аналізу, оскільки поняття похідної є важливим інструментом математичного апарату, що знаходить широке застосування в різних наукових галузях. В алгебрі похідну переважно використовують для дослідження властивостей функцій та побудови їх графіків. У геометрії вона застосовується для визначення рівняння дотичної до кривої, а також для розв'язування геометричних задач на знаходження найбільших та найменших значень (оптимізаційних задач) [15].

Вивчення похідної є важливим елементом шкільного курсу математики в Україні, особливо для учнів старших класів, які навчаються за чинними програмами. Методика навчання цієї теми охоплює кілька етапів, спрямованих на формування теоретичних знань, практичних навичок застосування похідної до розв'язання задач та розвитку математичного мислення. Початковим етапом є введення поняття похідної як показника швидкості зміни функції, хоча сучасні підручники не завжди акцентують її роль у дослідженні функцій.

Загалом, поняття функції є складним для багатьох учнів, які часто не до кінця розуміють його сутність та значення для аналізу інших математичних об'єктів. Для ілюстрації похідної традиційно використовуються приклади з фізики, такі як шлях, швидкість і прискорення, а також практичні завдання на знаходження мінімумів і максимумів, проте їх ефективність є обмеженою.

Іншим підходом є введення похідної через поняття границі числових послідовностей або функцій, що є аналогічним підходу у вищій математиці. Однак успішність цього методу залежить від попереднього формування в учнів чіткого розуміння поняття границі, способів її обчислення та переходу від числових послідовностей до функцій, а також методів розкриття невизначеностей при знаходженні границь [32, с.154].

Другий етап вивчення похідної зосереджується на ознайомленні учнів з таблицями похідних основних функцій та правилами диференціювання їх комбінацій, маючи на меті навчити їх практичному обчисленню похідних. Третій етап присвячений розкриттю геометричного змісту похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції в певній точці. Варто відзначити, що

саме геометрична інтерпретація найкраще ілюструє ключову ідею похідної, демонструючи, що в кожній точці графіка можна провести дотичну, кут нахилу якої відображає локальну поведінку функції. Подальший етап у вивченні похідної присвячений ознайомленню з її практичним застосуванням, насамперед у розв'язанні задач на знаходження максимуму та мінімуму функцій, включаючи задачі оптимізації, які вже згадувалися на початкових етапах. Завершується вивчення теми проведенням письмових контрольних робіт, самостійних робіт або інших форм оцінювання [32, с.155].

Як зазначено в Програмі з математики для 10-11 класів (рівень стандарту), вивчення похідної та інтегралу є важливим завершальним етапом функціональної лінії курсу математики, оскільки ці поняття є необхідним інструментом для дослідження руху та інших процесів. Основні ідеї математичного аналізу є досить простими та наочними, особливо при їх викладанні на інтуїтивному рівні, який відповідає історичному розвитку цих понять і цілком задовольняє потреби загальноосвітньої підготовки учнів. Тому в процесі навчання вчителям рекомендується уникати надмірної формалізації доведень та зменшити час, відведений на суто технічні аспекти. Натомість, акцент слід робити на змістовній інтерпретації ідей та понять, їх геометричному та фізичному розумінні [37].

Навчання розділу «Похідна та її застосування» необхідно будувати з акцентом на практичне застосування знань. При цьому, для успішного вивчення пов'язаних предметів першочергове значення має не стільки володіння технікою знаходження похідних, скільки розуміння ключових понять, закономірностей та методів диференціального числення, що дозволяє створювати математичні моделі явищ і процесів, які досліджуються в цих дисциплінах. Таким чином, вивчення цієї теми та підбір відповідних вправ мають бути спрямовані на розвиток елементарних навичок математичного моделювання з використанням інструментів диференціального числення.

Згідно з діючими навчальними програмами з математики, вивчення поняття похідної передбачено в курсі алгебри і початків аналізу для 10 класу. На

рівні стандарту на цю тему відводиться 14 годин у розділі «Похідна та її застосування». Для учнів, які навчаються за профільним рівнем, вивчення похідної відбувається в межах теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування», на яку виділено 54 години. Учні, які обрали поглиблений рівень вивчення математики, також опановують поняття похідної в рамках аналогічної теми, на яку відведено 68 годин навчального часу [37].

Окрім розвитку математичної компетентності, під час викладання теми «Похідна та її застосування» в курсі алгебри і початків аналізу вчителю необхідно сприяти формуванню ще дев'яти ключових компетентностей. Навчальна програма також визначає чотири наскрізні лінії ключових компетентностей, а саме: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека» та «Підприємливість та фінансова грамотність».

Варто виокремити, що після опанування теми «Похідна та її застосування» учні старших класів повинні вміти:

- давати визначення похідної та пояснювати її геометричну та фізичну інтерпретацію;
- визначати кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції; обчислювати похідні різних функцій;
- використовувати похідну для знаходження інтервалів монотонності та точок екстремуму функції;
- визначати найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку;
- розв'язувати практичні задачі на знаходження оптимальних значень;
- застосовувати результати дослідження функції за допомогою похідної для розв'язування рівнянь і нерівностей, а також для доведення тотожностей і нерівностей;
- описувати поняття опуклості функції та точок перегину; використовувати другу похідну для визначення інтервалів опуклості функції та її точок перегину;

– комплексно досліджувати функції за допомогою першої та другої похідних і застосовувати отримані дані для побудови графіків функцій [10].

На рисунку 1.2. представлено перелік очікуваних навчальних результатів, яких учні мають досягти після опанування теми «Похідна та її застосування» на рівні стандарту:



Рис. 1.2. Очікувані результати навчання з теми «Похідна та її застосування» на рівні стандарту

Для успішного засвоєння нової теми вчителю необхідно підібрати ефективну мотивацію, яка не лише зацікавить учнів, але й стимулюватиме їх до

активної роботи як на уроці, так і вдома. Важливим мотиваційним чинником може стати усвідомлення учнями практичної цінності знань, зокрема, розуміння того, що вміння оперувати похідною є важливим для успішного складання зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО), адже високий бал на цьому іспиті суттєво впливає на їхнє місце в рейтингу вступників та можливість навчання за державним замовленням [24, с.51].

З огляду на те, що старшокласники вже замислюються про майбутні іспити, а учні математичного профілю, ймовірно, обиратимуть спеціальності, де математика є ключовою дисципліною і де їм доведеться складати ЗНО з цього предмета, вчителям слід акцентувати увагу на розв'язанні вправ, подібних до тих, що можуть зустрітися на зовнішньому незалежному оцінюванні.

У таблиці 1.2. представлено фрагмент програми зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) для стандартного та профільного рівнів, що охоплює зміст навчального матеріалу та компетентності, якими повинні оволодіти учні з теми «Похідна та її застосування»:

Таблиця 1.2.

Програма ЗНО з математики на рівнях стандарту та профільному за темою «Похідна та її застосування»

Тема	Зміст навчального матеріалу	Компетентності
Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних та правила диференціювання.	- означення похідної функції в точці; - фізичний та геометричний зміст похідної; - таблиця похідних функцій; - правила знаходження похідної суми, добутку,	- знаходити похідні функцій; - знаходити числове значення похідної функції в точці заданого значення аргументу; - знаходити похідну суми, добутку і частки двох функцій; - знаходити кутовий

	частки двох функцій.	коефіцієнт і кут нахилу до графіка функції в даній точці; - розв'язувати задачі з використанням геометричного та фізичного змісту похідної.
Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіків функцій.	- достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку; - екстремуми функції; - означення найбільшого та найменшого значень функції.	- знаходити проміжки монотонності функції; - знаходити екстремуми функції за допомогою похідної, найбільше та найменше значення функції; - досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки; - розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень функції.

Важливо зазначити, що представлена таблиця охоплює вимоги як для стандартного, так і для профільного рівнів ЗНО. Це означає, що глибина засвоєння матеріалу та складність завдань можуть відрізнятися залежно від обраного рівня. Профільний рівень передбачатиме більш глибоке розуміння теоретичних аспектів та складніші практичні завдання.

Розглянемо особливості викладення теми «Похідна та її застосування» в підручниках з математики для 10 класу рівня стандарт, рекомендованих Міністерством освіти і науки України. Наразі існує п'ять таких підручників,

електронні версії яких у форматі pdf знаходяться у вільному доступі в мережі Інтернет. Це забезпечує зручність використання як для учнів, у випадку відсутності друкованого видання, так і для вчителів під час проведення онлайн-уроків, оскільки дозволяє демонструвати екран, пояснювати навчальний матеріал або розв'язання домашніх завдань.

Існують різні методичні підходи до введення поняття похідної в курсі математики. Один з них передбачає послідовне вивчення: спочатку розглядається границя функції в точці, потім вводиться означення похідної, і на завершення демонструються її застосування в задачах про миттєву швидкість та дотичну до графіка функції. Інший підхід полягає в тому, щоб після вивчення границі функції в точці спочатку розглянути задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка, а вже потім формально ввести поняття похідної функції. Третій підхід починається з розгляду практичних задач про миттєву швидкість та дотичну, після чого вивчається поняття границі функції в точці, і лише потім дається означення похідної функції.

Проаналізуємо розділ, присвячений темі «Похідна та її застосування» за підручником Мерзляка А. Г., Номіровського Д. А., Полонського В. Б., Якіра М. С. (2018). Варто виокремити, що даний розділ охоплює низку важливих питань, починаючи з задач про миттєву швидкість і дотичну до графіка, які, ймовірно, використовуються для мотивації введення поняття похідної. Далі розглядається саме поняття похідної, де наводиться її означення. Згодом представлено правила обчислення похідних, що є ключовим для практичного знаходження похідних різних функцій. Серед застосувань похідної розглядаються рівняння дотичної, ознаки зростання і спадання функції, точки екстремуму функції, знаходження найбільшого і найменшого значень функції та побудова графіків функцій. Завершується розділ вправами для повторення курсу алгебри і початків аналізу 10 класу. Структура розділу видається логічною, починаючи з мотиваційних задач, введення означення та правил обчислення, і завершуючи основними застосуваннями похідної в аналізі функцій та геометрії [33].

У підручнику Бурди та співавторів тема «Похідна та її застосування» розглядається у Розділі 3. Згідно з наявними даними, означення похідної наводиться у параграфах 21 («Задачі, що приводять до поняття похідної») та 22 («Похідна функції, її механічний і геометричний зміст»), де вона визначається як границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. У параграфі 22 також розглядаються приклади знаходження похідної за означенням та ілюструється геометричний (дотична) і фізичний (миттєва швидкість) зміст похідної [5].

Основні правила диференціювання функцій представлені у параграфі 23, що спрощує процес знаходження похідних. Серед застосувань похідної розглядаються ознаки сталості, зростання і спадання функцій, екстремуми функцій та застосування похідної до розв'язування прикладних задач, що включає задачі на оптимізацію. Такий підхід також є послідовним, починаючи з мотивації та означення, переходячи до правил і завершуючи застосуваннями.

Розглянемо підручник з математики Бевза Г.П., Бевз В.П. Зазначимо, що Розділ 3 підручника присвячений похідній та її застосуванням. Означення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 наводиться як границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Для ілюстрації поняття використовується приклад знаходження похідної функції $y = x^2$ за означенням, а також похідної лінійної функції $y = ax + b$. Різні способи знаходження похідної розглядаються у § 16 «Диференціювання функцій», де представлені основні правила диференціювання (суми, добутку, частки, степеневої функції), похідні тригонометричних функцій ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$) та похідна складеної функції. Основні застосування похідної включають знаходження дотичної до графіка функції, дослідження функції на монотонність, знаходження точок екстремуму, визначення найбільшого і найменшого значень функції на проміжку, а також фізичний зміст похідної як швидкості (на прикладі вільного падіння) та її застосування у хімії (швидкість реакції) та фізиці (радіоактивний розпад) [2].

У підручнику Істера тема «Похідна та її застосування» розглядається у Розділі 3, зокрема, у параграфах 3.18 («Похідна функції. Похідна найпростіших функцій») та 3.19 («Фізичний і геометричний зміст похідної»). Як приклади, що ілюструють поняття похідної, розглядаються її фізичний (миттєва швидкість) та геометричний (дотична до графіка функції) зміст. Параграф 3.18, охоплює знаходження похідних найпростіших функцій, а відеоматеріали, пов'язані з підручником, згадують правила диференціювання та таблицю похідних, що свідчить про розгляд різних способів знаходження похідної. Застосування похідної розглядаються, зокрема, у параграфі 3.23 («Застосування похідної до дослідження функцій і побудови їхніх графіків»), що включає аналіз екстремумів та побудову графіків [20].

У таблиці 1.3. наведено порівняльний огляд послідовності введення поняття похідної в сучасних підручниках з математики, що використовуються в навчальному процесі.

Таблиця 1.3.

Аналіз вивчення теми «Похідна та її застосування» в підручниках математики 10 класу.

№	Автор	Логіка введення поняття похідної	Завдання для актуалізації	Завдання для самоперевірки
1	Бурда М.І., Колесник Т.В., Мальований Ю.І., Тарасенкова Н.А.	1. Границя функції в точці 2. Задача про миттєву швидкість 3. Задача про дотичну до кривої 4. Поняття похідної функції	-	+

2	Бевз Г.П., Бевз В.П.	1. Приріст аргументу і функції в точці 2. Дотична до графіка функції. 3. Похідна. 4. Похідна як швидкість	+	+
3	Істер О.С.	1. Границя функції в точці 2. Приріст аргументу і приріст функції 3. Похідна функції 4. Середня та миттєва швидкість 5. Дотична до графіку функції	+	+
4	Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.	1. Задача про миттєву швидкість 2. Задача про дотичну до графіка функції 3. Поняття похідної.	+	-
5	Нелін Є.П	1. Границя функції в точці 2. Задача про миттєву швидкість 3. Задача про дотичну до кривої 4. Означення похідної 5. Геометричний і фізичний зміст похідної	-	+

У деяких підручниках зустрічаються завдання, розміщені в розділах «Вправи для повторення» або «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу». Такі завдання рекомендується пропонувати учням для самостійного виконання перед початком вивчення нової теми. Крім того, наявність у деяких підручниках рубрик «Головне у параграфі» є корисним інструментом для кращого узагальнення отриманих знань учнями під час самостійної роботи з навчальним матеріалом. Завдання для самоперевірки, представлені у формі задач або тестів, надають учням можливість потренуватися та ефективніше підготуватися до контрольних заходів.

Отже, проведений аналіз підтверджує важливість теми «Похідна та її застосування» у шкільному курсі математики, але водночас виявляє необхідність подальшого вдосконалення методичного забезпечення її викладання. Навчальна програма з математики визначає ключові цілі, зміст, обсяг та вимоги до рівня підготовки учнів з теми «Похідна та її застосування». Аналіз програми дозволяє встановити місце цієї теми в загальній структурі курсу, її логічні зв'язки з попереднім та наступним навчальним матеріалом. Зазвичай, вивчення похідної припадає на 10-11 класи (або 10-12 класи за програмою НУШ), що свідчить про її важливість на етапі профільного навчання. Програма окреслює основні поняття, які мають бути засвоєні учнями, включаючи означення похідної, правила диференціювання, геометричний та фізичний зміст похідної, застосування похідної до дослідження функцій (знаходження проміжків монотонності, екстремумів, побудова графіків) та розв'язування задач на оптимізацію.

Внесення відповідних змін до навчальних програм та підручників, а також підвищення методичної майстерності вчителів, сприятиме більш глибокому та усвідомленому засвоєнню учнями теми «Похідна та її застосування», розвитку їхнього математичного мислення та підготовці до успішного навчання на наступних рівнях освіти.

РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

2.1. Використання цифрових технологій у процесі вивчення нового матеріалу з теми

В сучасній українській освіті спостерігається зростаюча тенденція до визнання та впровадження цифрових технологій, особливо в галузі математики. Цифрові інструменти розглядаються як засіб створення більш цікавого навчального середовища, що сприяє залученню учнів та підвищенню їхньої мотивації до навчання. Під час складних обставин, таких як воєнний час, цифрові технології відіграють важливу роль у забезпеченні можливості індивідуалізації навчання та доступу до освіти незалежно від місця перебування учнів.

Ефективна інтеграція цифрових технологій також передбачає дотримання низки ключових принципів. Одним з них є підвищення мотивації та залучення учнів за допомогою мультимедіа, інтерактивних елементів та елементів гейміфікації. Цифрові інструменти можуть сприяти активному навчанню та дослідженню, дозволяючи учням самостійно вивчати математичні концепції через експерименти та дослідження. Важливим є принцип індивідуалізації та диференціації навчання, коли технології дозволяють враховувати різні стилі навчання та темпи засвоєння матеріалу завдяки різноманітним завданням та персоналізованому зворотному зв'язку [56].

Використання цифрових технологій у процесі вивчення нової теми «Похідна та її застосування» відкриває широкі можливості для збагачення навчального процесу, підвищення зацікавленості учнів та глибшого розуміння матеріалу. Наведемо перелік основних інформаційно-комунікаційних технологій, які можна ефективно застосовувати на уроках математики в старших класах:

Таблиця 2.1.

**Основні цифрові технології, які можна використовувати для
вивчення теми «Похідна та її застосування»**

Інформаційно-комунікаційна технологія	Опис використання для вивчення похідної та її застосувань
Онлайн-графічні калькулятори (Desmos, GeoGebra)	Дозволяють динамічно візуалізувати функції та їхні графіки, будувати дотичні та січні, досліджувати поняття границі та похідної як кутового коефіцієнта дотичної. Учні можуть маніпулювати параметрами функцій та спостерігати за змінами графіків у реальному часі.
Інтерактивні вправи та ігри (LearningApps.org, Quizizz, Kahoot!)	Допомагають урізноманітнити процес навчання, підвищити мотивацію учнів та закріпити розуміння основних понять у ігровій формі.
Онлайн-дошки для спільної роботи (Miro, Google Jamboard)	Сприяють взаємодії та співпраці між учнями та вчителем у реальному часі під час обговорення концепцій, розв'язування задач та обміну ідеями.
Електронні підручники та онлайн-ресурси	Забезпечують доступ до навчальних матеріалів у будь-який час і в будь-якому місці, що підтримує індивідуалізацію навчання.
Навчальні відео (Youtube)	Перегляд навчальних відеолекцій, пояснень складних концепцій, розв'язання типових задач.

Мультимедійні презентації (Microsoft PowerPoint, Google Slides, Canva)	Допомагають учителю наочно пояснювати матеріал, використовуючи текст, графіку, анімацію та відео, що сприяє кращому розумінню та запам'ятовуванню.
Хмарні технології (веб-додатки, сервіси освітніх курсів, хмарне сховище, електронні журнали та щоденники)	Спрощують організацію навчального процесу, надають гнучкість у виборі змісту та стилю викладання, а також забезпечують доступ до матеріалів з різних пристроїв.
Тестові платформи (Classtime, Socrative)	Дозволяють проводити онлайн-тестування та миттєво отримувати результати, що допомагає оцінити рівень розуміння матеріалу учнями.
Платформи для опитувань (Mentimeter, Wooclap)	Можуть використовуватися для швидкого збору думок учнів, проведення інтерактивних опитувань та вікторин під час уроку.
Навчальні платформи (Всеукраїнська школа онлайн)	Надають структуровані навчальні матеріали, включаючи відеоуроки, інтерактивні завдання та тести, для дистанційного та змішаного навчання.
Навчально-демонстраційні програми	Ознайомлюють з новим матеріалом у вигляді логічно пов'язаних блоків, після яких подаються запитання для перевірки розуміння.
Комп'ютерні довідники	Надають пояснення математичних термінів і понять, пов'язаних з похідною.
Google Форми	Можуть використовуватися для створення опитувань, вікторин, анкет та тестів для

	перевірки знань учнів .
--	-------------------------

Цифрові технології відкривають широкі можливості для інтеграції в різні підходи до викладання похідної. Наприклад, онлайн-графічні калькулятори (Desmos, GeoGebra) можуть допомогти учням візуалізувати поняття границі як основи похідної. Учні можуть збільшувати масштаб графіків, щоб побачити, як функція наближається до певного значення. Геометричне програмне забезпечення (GeoGebra) дозволяє досліджувати дотичну до кривої в точці та розуміти похідну як кутовий коефіцієнт цієї дотичної. Учні можуть переміщувати точку та спостерігати за зміною дотичної та її кутового коефіцієнта.

Розглянемо детальніше цифрові інструменти. Онлайн дошки для спільної роботи надають віртуальний простір, де учні та вчитель можуть спільно працювати в реальному часі. Вони підтримують різні типи контенту, включаючи текст, малюнки, графіки, стікери та можливість завантажувати зображення. Програми для створення презентацій (наприклад, PowerPoint, Google Slides) дозволяють учителю комбінувати текст, зображення, графіки, анімацію та відео для наочного пояснення навчального матеріалу [52, с.128].

Якщо говорити про застосування відеоуроків, то вони можуть бути використані для пояснення складних математичних концепцій під час вивчення теми «Похідна та її застосування». Вони можуть містити анімації, графіки, розв'язання прикладів крок за кроком та пояснення реальних застосувань похідної. Відео можуть бути створені вчителем або використані з освітніх платформ. Ефективними також є різноманітні онлайн платформи (Google Forms, LearningApps.org, Quizizz, Kahoot!), які дозволяють створювати та використовувати інтерактивні завдання, вікторини та ігри для перевірки розуміння матеріалу та підвищення мотивації учнів [49, с.22].

Варто зазначити, що первинне ознайомлення з поняттям похідної має бути зосереджене на формуванні інтуїтивного розуміння, перш ніж переходити до формальних визначень та правил. Важливо розпочати з реальних прикладів,

де присутнє поняття швидкості зміни, таких як швидкість руху, прискорення, темпи зростання та кути нахилу кривих.

Наведемо структурно-логічну схему вивчення теми «Похідна та її застосування»:

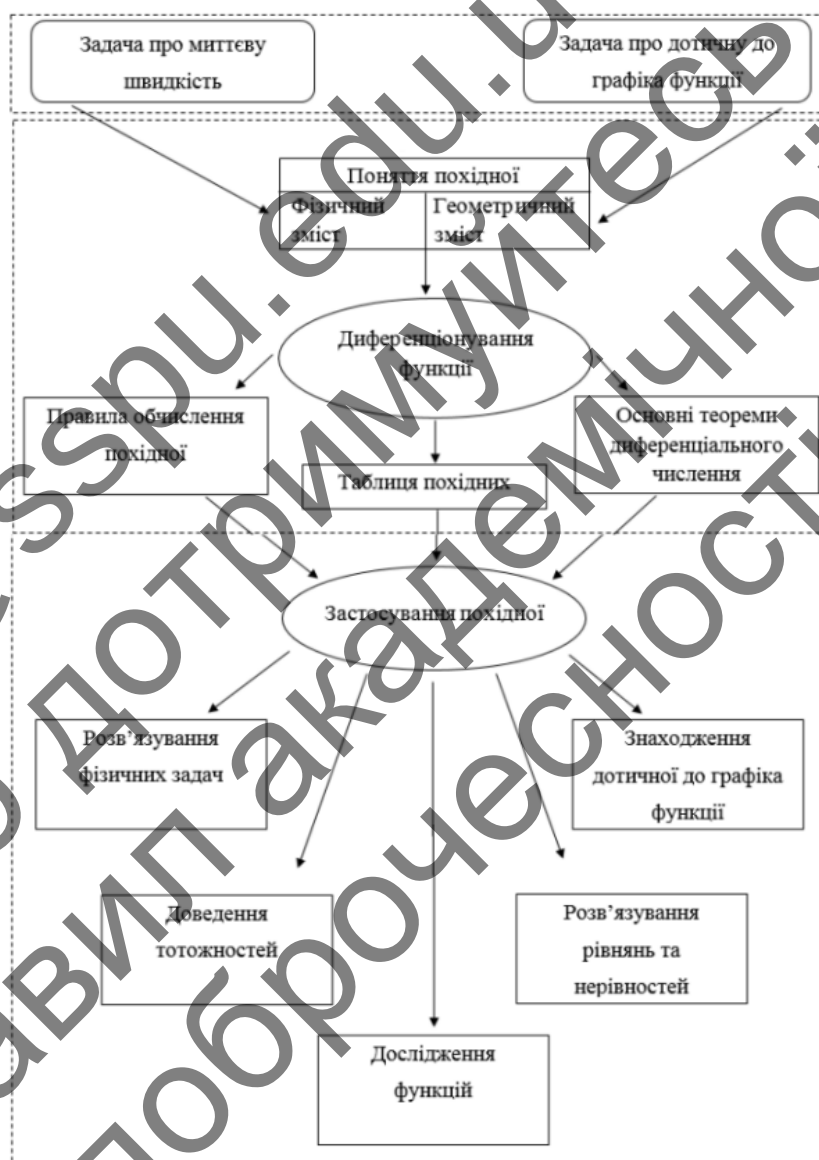


Рис. 2.1. Структурно-логічна схема вивчення теми «Похідна та її застосування»

Варто зазначити, що представлена схема слугує важливим інструментом для структурування навчального процесу, допомагаючи як вчителю, так і учням зосередитися на ключових аспектах теми. Її можна запропонувати учням на початку вивчення нового теоретичного матеріалу як своєрідну дорожню карту.

Схема не лише ознайомлює з основними блоками інформації, які будуть розглянуті, але й надає розуміння практичної цінності нових знань, демонструючи сфери їхнього можливого застосування. Такий підхід сприяє підвищенню мотивації учнів та усвідомленому засвоєнню матеріалу.

На етапі первинного ознайомлення з темою «Похідна та її застосування» для учнів старших класів слід зосередитися на досягненні наступних цілей та завдань:

1. Розуміння основних понять:

- Учні повинні вміти дати визначення та пояснити поняття миттєвої швидкості зміни.
- Учні повинні розуміти взаємозв'язок між функцією та її похідною.
- Учні повинні вміти інтерпретувати похідну як кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в даній точці.
- Учні повинні вміти інтерпретувати похідну як миттєву швидкість у контексті руху.

2. Геометричний зміст:

- Учні повинні вміти візуально визначати дотичну до кривої в точці за допомогою графічних інструментів.
- Учні повинні вміти оцінювати кутовий коефіцієнт дотичної за графіком.
- Учні повинні розуміти, що похідна в точці представляє точний кутовий коефіцієнт дотичної в цій точці.

3. Фізичний зміст:

- Учні повинні вміти пов'язувати похідну функції положення з швидкістю об'єкта.
- Учні повинні вміти інтерпретувати знак похідної з точки зору зростання або спадання величин (наприклад, позитивна швидкість означає рух вперед).

4. Формування первинних навичок:

- Учні повинні вміти використовувати онлайн-графічні калькулятори.
- Учні повинні вміти використовувати інтерактивні симуляції для дослідження взаємозв'язку між функцією та її похідною в різних контекстах.

– Учні повинні вміти обчислювати середню швидкість зміни функції на заданому інтервалі [10].

У методиці навчання математики існує кілька основних шляхів ознайомлення учнів з поняттям «похідна». Один з поширених підходів полягає у попередньому введенні понять приросту функції та приросту аргументу, що створює необхідну базу для розуміння сутності похідної як границі їхнього відношення. Зазначимо, інший методичний варіант передбачає, що вивчення похідної розпочинається з опанування фундаментальних концепцій границі послідовності та границі функції в точці, що дозволяє розглядати похідну як окремий вид границі. Нарешті, ще один ефективний спосіб полягає у тому, щоб підвести учнів до визначення похідної через розгляд конкретної фізичної задачі – опису руху матеріальної точки та знаходження її миттєвої швидкості, що наочно ілюструє практичну значущість цього математичного поняття [15, с.15].

Розглядається певна функція, яку позначають як $y = f(x)$, та фіксується конкретне значення аргументу x_0 , що входить до області її визначення. Далі вводиться поняття змінної x , яка може набувати будь-якого значення в безпосередній близькості до x_0 . При цьому різницю між довільним значенням x та фіксованим x_0 , тобто $(x - x_0)$, визначають як приріст незалежної змінної (або аргументу) у точці x_0 та позначають символом Δx , отже:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Рівність $x = \Delta x + x_0$ є прямим наслідком визначення приросту аргументу Δx як різниці між новим значенням аргументу x та його початковим значенням x_0 . Іншими словами, якщо до початкового значення аргументу x_0 додати його приріст Δx , ми отримаємо нове значення аргументу x . У зв'язку з цим зміненням аргументу відбувається відповідна зміна значення функції f . Початкове значення функції в точці x_0 дорівнює $f(x_0)$, а після отримання аргументом приросту Δx (тобто при новому значенні $x = x_0 + \Delta x$) значення функції стає $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Величина, на яку змінилося значення функції, а саме різниця $f(x) - f(x_0)$, називається приростом функції f у точці x_0 і

позначається символом Δf . Таким чином, приріст функції можна виразити двома еквівалентними способами:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Крім позначення Δf , для приросту функції $y = f(x)$ також широко використовується позначення Δy , яке визначається аналогічно як різниця між новим значенням функції $f(x)$ та її початковим значенням $f(x_0)$, тобто $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Для кращого візуального сприйняття та покращення розуміння введених понять учням зазвичай пропонується відповідний графічний матеріал, наприклад, рисунок 2.1., що ілюструє приріст аргументу та відповідний приріст функції на графіку.

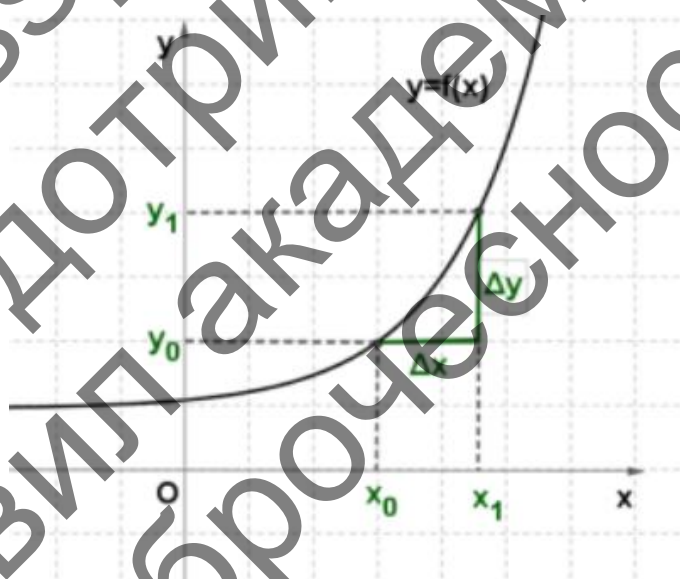


Рис. 2.1. Приріст функції

З метою закріплення введених понять та поглиблення розуміння сутності приросту функції, навчальний процес передбачає розв'язування практичних задач. Ці завдання, як правило, полягають у визначенні приросту конкретної елементарної функції при відомому прирості аргументу та заданій початковій точці. Для наочних прикладів найчастіше використовуються такі функції, як квадратична ($f(x) = x^2$), обернена пропорційність ($f(x) = 1/x$) або лінійна функція загального вигляду ($f(x) = kx + b$). Розгляд цих базових прикладів

допомагає учням краще усвідомити взаємозв'язок між зміною аргументу та відповідною зміною значення функції, а також набути практичних навичок обчислення приросту функції.

Варто виокремити, що перш ніж формально ввести поняття «похідна», у навчальному процесі розглядаються ключові задачі, що мають як математичне, так і практичне значення. До них належать задачі про визначення миттєвої швидкості об'єкта, що рухається нерівномірно по прямій, а також задачі, пов'язані з проведенням дотичної прямої до графіка певної функції в заданій точці. Розв'язання цих задач не лише сприяє розвитку математичної компетентності учнів, але й формує важливі компетентності у галузі природничих наук і технологій, оскільки вони оперують поняттями та принципами, що широко використовуються у фізиці. Такий підхід дозволяє створити мотиваційну основу для вивчення похідної, демонструючи її зв'язок з реальними явищами та міждисциплінарний характер [24].

Розв'язання задачі про миттєву швидкість із застосуванням алгоритму передбачає наступні кроки. Спочатку формулюється умова. Наприклад: автомобіль рухається прямолінійно в одному напрямку, його положення в будь-який момент часу t на проміжку $[0; t]$ визначається функцією $s = s(t)$. Необхідно знайти швидкість автомобіля в довільний момент часу.

Для розв'язання цієї задачі діємо за таким алгоритмом:

1. Обираємо конкретний момент часу t_0 та задаємо невеликий приріст часу Δt . Таким чином, розглядається часовий інтервал від t_0 до $t_0 + \Delta t$.
2. Визначаємо зміну положення автомобіля за цей проміжок часу Δt . Це здійснюється шляхом знаходження різниці між положенням автомобіля в кінці та на початку цього інтервалу: $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

3. Розраховуємо середню швидкість руху автомобіля протягом розглянутого часового проміжку Δt . Середня швидкість визначається як відношення пройденої відстані Δs до затраченого часу Δt : $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

4. Для знаходження миттєвої швидкості автомобіля в момент часу $t = t_0$, необхідно визначити границю середньої швидкості, коли приріст часу Δt прямує до нуля (або, що еквівалентно, коли момент часу t наближається до t_0). Математично це записується як: $v(t_0) = \lim; v_c = \lim \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$. Це граничне значення і є миттєвою швидкістю автомобіля в момент часу t_0 .

Використовуючи наведений алгоритм як орієнтир, учні отримують можливість більш активно долучитися до процесу розв'язання задачі про знаходження дотичної прямої до графіка функції в конкретній точці. Фактично, вони вже мають значну частину готової схеми для визначення кутового коефіцієнта цієї дотичної. На цьому етапі ключова роль вчителя полягає у формулюванні самої задачі, а також у візуальному представленні графіка довільної функції та проведенні до неї дотичної в заданій точці, що створює наочну основу для подальших математичних міркувань.

Розглянемо іншу задачу. Задано неперервну функцію $y = f(x)$, графіком якої є крива (рис. 2.1.). Розглянемо на ній дві точки: фіксовану M_0 та рухомих M . Проведемо січну через ці точки. Якщо точка M наближається до M_0 вздовж кривої, то січна в границі перетворюється на пряму M_0T , яку називають дотичною до кривої в точці M_0 . Необхідно визначити рівняння дотичної M_0T .

Зазначимо, що розв'язання задачі починається з візуалізації: вчитель демонструє графік довільної неперервної функції, на якому зображено січну, що проходить через дві точки на кривій, та дотичну до кривої в одній із цих точок (яка є граничним положенням січної). Подібне графічне зображення можна знайти на рисунку 2.2.



Рис. 2.2. Дотична до графіка функції

Далі в поясненні розкривається математична сутність дотичної як прямої, положення якої визначається її кутовим коефіцієнтом. Дотична M_0T є прямою лінією, рівняння якої в загальному вигляді записується як $y = kx + b$. Положення цієї прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$, повністю визначається її кутовим коефіцієнтом k , який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі OX ($k = \operatorname{tg} \beta$). Таким чином, задача проведення дотичної зводиться до знаходження значення цього кутового коефіцієнта k .

Для знаходження k використовується граничний перехід, що відображає наближення січної до дотичної. Описується наступний алгоритм: Надають аргументу x_0 приросту Δx та одержують нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$. Відносно приросту аргументу знаходять відповідний приріст самої функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Обчислюється кутовий коефіцієнт січної MM_0 , який дорівнює тангенсу кута α між січною та віссю OX : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Обчислюють кутовий коефіцієнт дотичної M_0T , який дорівнює $\operatorname{tg} \beta$:

Место для уравнения.

Після знаходження кутового коефіцієнта k , рівняння дотичної M_0T записується у вигляді: $y = f(x_0) + k(x - x_0)$. Таким чином, пояснення логічно переходить від геометричного розуміння дотичної до конкретного алгоритму її знаходження за допомогою поняття границі.

Проаналізувавши розв'язання наведених різноманітних за змістом і призначенням задач, стає очевидним, що отримані результати з математичної точки зору є ідентичними. Це свідчить про існування певного фундаментального поняття, що лежить в їх основі, і цим поняттям є похідна функції. У процесі розв'язування цих задач викладач акцентує увагу учнів на необхідності чіткого використання символів, пов'язаних з приростом функції та її відношенням до приросту аргументу, що ілюструється розглядом відповідних практичних вправ.

Використання цифрових технологій на уроках є потужним стимулом для навчання старшокласників. Такі заняття сприяють активізації ключових розумових процесів, включаючи пам'ять, сприйняття, мислення та увагу, а також значно підвищують пізнавальний інтерес учнів. У сучасному освітньому середовищі комп'ютерна підтримка навчальних дисциплін вже стала невід'ємною частиною навчального процесу, проте особливо важливим є застосування комп'ютерних технологій на уроках алгебри та геометрії у старшій школі [30, с.43].

Завдяки цифровим інструментам учень отримує можливість самостійно знаходити необхідну інформацію, вивчати та опрацьовувати приклади розв'язання типових задач, об'єктивно оцінювати свій рівень знань за допомогою тестування, виконувати теоретично-практичні завдання та розв'язувати задачі для самоперевірки. Важливою перевагою цих програм є їх універсальність: вони можуть ефективно використовуватися як самими учнями для самооцінювання та самоконтролю, так і вчителями для об'єктивного оцінювання знань учнів.

У процесі вивчення нової теми «Похідна та її застосування» доцільно використовувати різноманітні онлайн-тренажери та вікторини (Kahoot!, Quizizz, LearningApps). Онлайн-платформи пропонують різні типи запитань (вибір однієї правильної відповіді, множинний вибір, встановлення відповідностей, введення короткої відповіді), що дозволяє урізноманітнити навчальний процес та охопити різні аспекти розуміння теми.

Наведемо приклади застосування цифрових технологій на уроках математики у процесі вивчення нового матеріалу з теми «Похідна та її застосування».

Наприклад, представлена вправа (рисунок 2.3.) є чудовим прикладом використання візуалізації для первинного ознайомлення учнів з поняттями приросту аргументу та приросту функції перед формальним введенням означення похідної. Суть вправи полягає в тому, щоб на графіку функції учні візуально ідентифікували та розрізнили: приріст аргументу (Δx) та приріст функції (Δy).



Рис. 2.3. Завдання на знаходження приросту функції та приросту аргументу

Вищезазначена вправа є нескладною і дозволяє виявити учнів, які ще не засвоїли поняття приросту і воно є незрозумілим для них. Для подальшого поглиблення розуміння можна запропонувати завдання практичного спрямування, де учням необхідно за графіком функції визначити приріст функції в заданій точці при відомому прирості аргументу (рис. 2.4.):

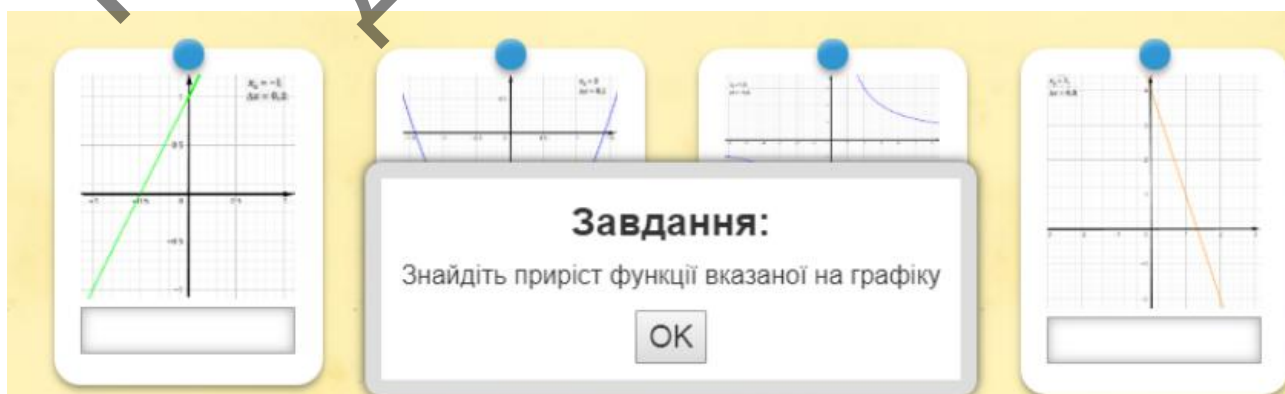


Рис. 2.4. Завдання на знаходження приросту функції вказаної на графіку

У процесі вивчення нової теми, а саме під час засвоєння означення похідної учні нерідко відчують труднощі, забуваючи ключові аспекти, наприклад, що похідною функції в заданій точці є число, а не функція. З метою кращого розуміння та запам'ятовування означення, нами розроблено вправу, яка зосереджує увагу на типових помилках. Як ілюструє рисунок 2.5, в означенні навмисно пропущені деякі слова, і завдання учнів полягає в тому, щоб відновити повний текст, обравши правильні варіанти.

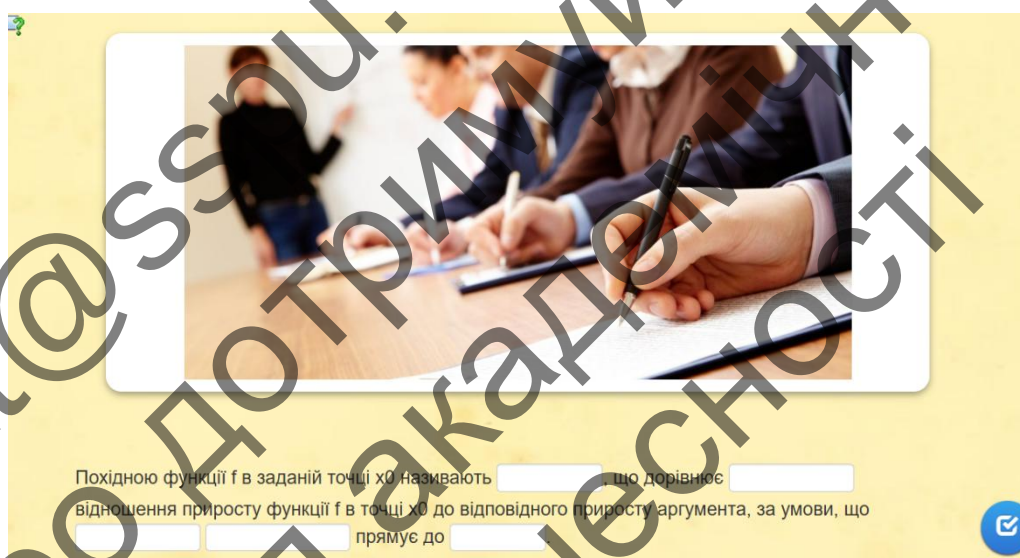


Рис. 2.5. Завдання на визначення означення похідної

Розглянемо іншу вправу, в якій потрібно розташувати слова в правильному порядку для того, щоб отримати правильне означення похідної (рис. 2.6.).

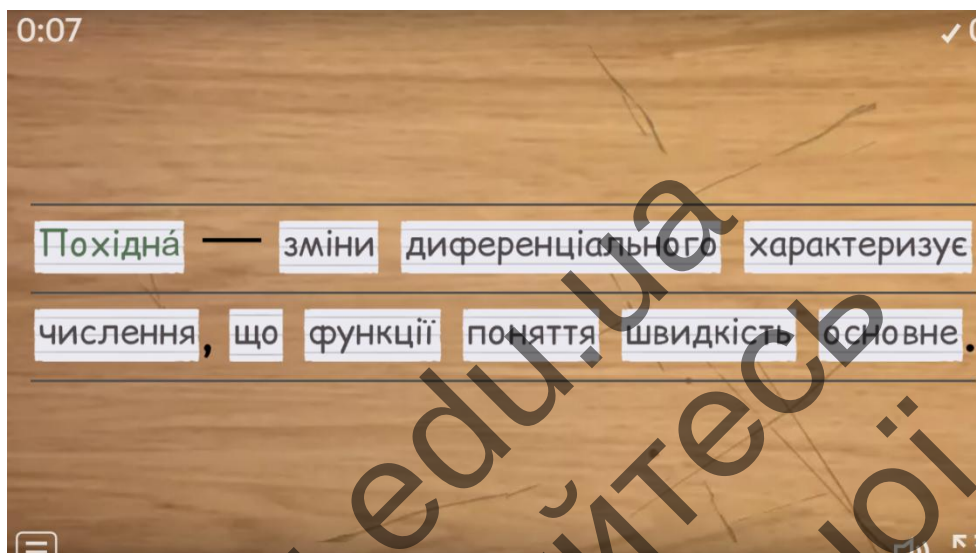


Рис. 2.6. Завдання «Розташуй правильно слова»

Після того, як учні ознайомилися з методом знаходження похідної безпосередньо за означенням, важливо підкреслити, що цей спосіб не завжди є найефективнішим або найзручнішим на практиці. Саме тому наступним логічним кроком є перехід до вивчення таблиці похідних основних елементарних функцій та правил диференціювання. Це дозволить значно спростити та пришвидшити процес знаходження похідних у багатьох випадках. Наведемо приклад таблиці похідних, яку можна застосувати на уроках математики в старших класах (рис.2.7.):

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ				ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ СКЛАДЕНИХ ФУНКЦІЙ			
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	u^n	$nu^{n-1} \cdot u'$	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
x	1	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	e^u	$e^u \cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \cdot \ln a}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$				

ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПОХІДНИХ

- $(cu)' = cu'$, де c - число
- $(u+v-z)' = u' + v' - z'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Рис. 2.7. Таблиця похідних

Зазначимо, що для ефективного засвоєння таблиці похідних та правил диференціювання доцільно використовувати різноманітні інтерактивні вправи, такі як вікторини з вибором правильної відповіді, завдання на встановлення відповідностей між функціями та їх похідними, а також вправи, що передбачають виявлення помилок у наведених рівняннях.

Вправи на встановлення відповідностей є ефективним інструментом не лише для вивчення таблиці похідних, але й для розвитку важливих когнітивних навичок. Вони сприяють підвищенню уважності, виховують наполегливість і сприяють формуванню інформаційної культури учнів, оскільки вимагають орієнтування в представленій інформації та її логічного зіставлення. Наведемо приклад завдання, в якому потрібно знайти до кожної функції її похідну (рис.2.8.).

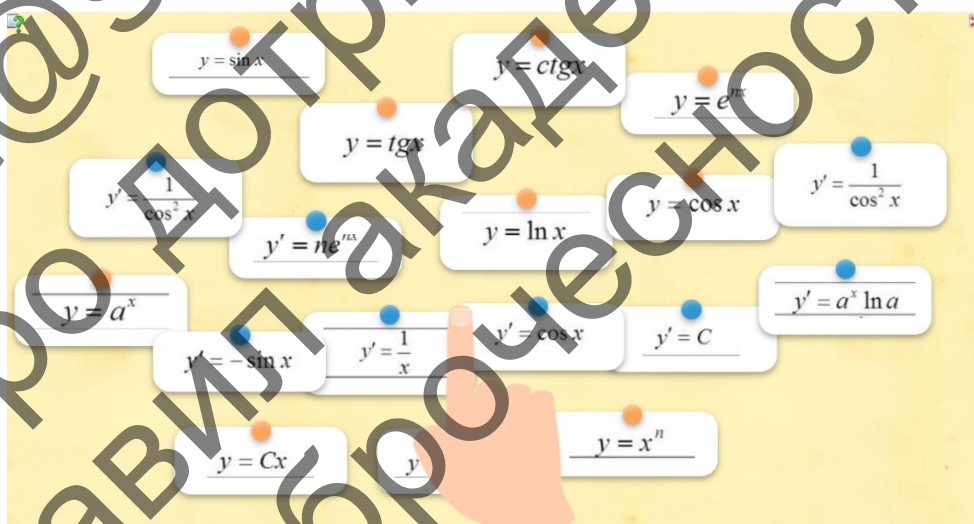


Рис. 2.8. Вправа на знаходження похідної

Освоєння похідної складеної функції доцільно розпочинати з наведення конкретних прикладів, що демонструють її складові частини. Далі необхідно навчити учнів самостійно ідентифікувати зовнішню та внутрішню функції, і лише після цього переходити до формулювання правила диференціювання складеної функції. Важливо також зазначити, що вивчення таблиці похідних відбувається поетапно, паралельно з опануванням відповідних правил обчислення похідних. Наведемо схему вивчення таблиці похідних (рис. 2.9.):

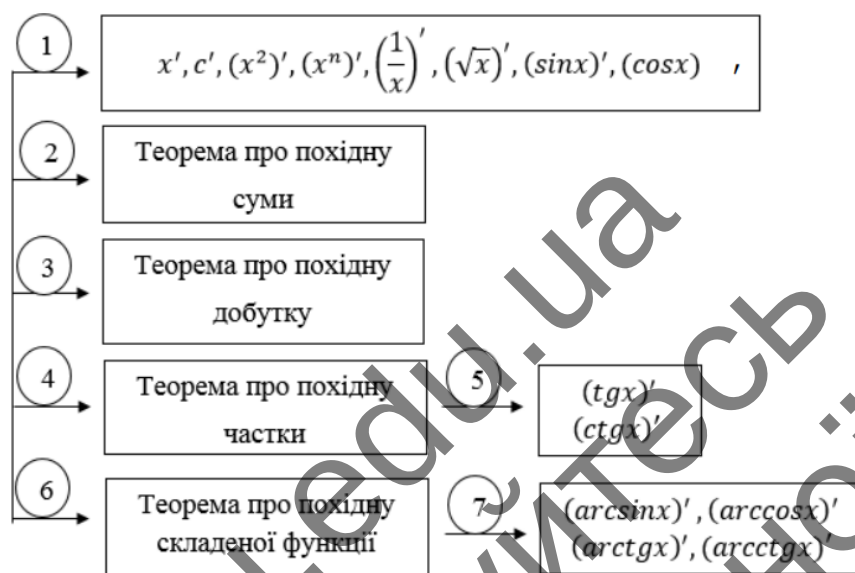


Рис.2.9. Схема вивчення таблиці похідних

Варто виокремити, що така послідовність вивчення похідних є логічно обґрунтованою, оскільки обґрунтування деяких похідних вимагає не лише безпосереднього застосування означення, але й використання раніше вивчених теорем про похідні. Дана схема наочно демонструє ці зв'язки: наприклад, похідну функції тангенс можна отримати, застосувавши теорему про похідну частки, а похідну функції арксинус – використовуючи теорему про похідну складеної функції.

Перш ніж перейти до вивчення способів застосування похідної для дослідження функцій, вкрай важливо актуалізувати попередні знання та вміння учнів. Це необхідно для того, щоб уникнути можливих труднощів при роботі з такими ключовими поняттями, як теореми про зростання та спадання функції, точки екстремуму та самі екстремуми функції, визначення її найбільшого та найменшого значень на заданому відрізку, а також дослідження опуклості функції [16, с.19].

Після опрацювання теорії щодо точок екстремуму функції, буде корисним систематизувати інформацію для учнів, представивши її в схематичній формі із застосуванням цифрових технологій, а саме онлайн сервісу Canva:

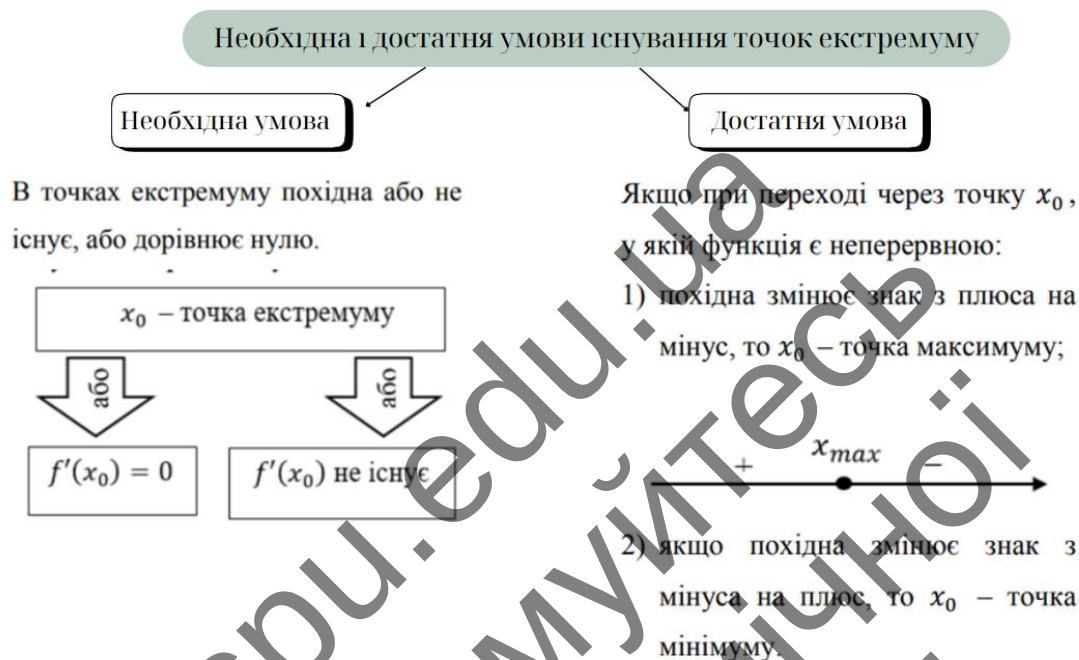


Рис. 2.10. Схема «Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму»
(створено із застосуванням онлайн сервісу Canva)

Ключовим моментом є спільне формулювання з учнями чіткого алгоритму дослідження функцій за допомогою похідної. Після цього необхідно продемонструвати сутність кожного кроку цього алгоритму на конкретному прикладі, підкреслюючи важливість послідовного виконання дій. Наступним важливим етапом є зосередження на розв'язуванні практичних завдань, оскільки саме цей аспект може викликати певні труднощі у засвоєнні матеріалу учнями.

Таким чином, використання цифрових технологій у процесі вивчення нового матеріалу з теми суттєво підвищує ефективність навчання. Воно забезпечує більшу наочність і інтерактивність у представленні інформації, що сприяє кращому розумінню нової теми. Загалом, інтеграція цифрових технологій у вивчення нового матеріалу збагачує навчальний досвід, робить його більш цікавим та зрозумілим, що в кінцевому підсумку сприяє кращому засвоєнню знань та розвитку навичок учнів.

2.2. Використання цифрових технологій під час навчання учнів розв'язувати завдання з теми

Доцільним під час навчання учнів розв'язувати завдання з теми «Похідна та її застосування» є використання різноманітних інтерактивних завдань. Наприклад, можна застосовувати платформу LearningApps, яка пропонує широкий спектр готових інтерактивних вправ та інструментів для створення власних. Завдання у форматі пазлів, вікторин, заповнення пропусків, сортування, створення пар роблять процес навчання більш захопливим та інтерактивним, ніж традиційне розв'язування задач у зошиті. LearningApps дозволяє підбирати або створювати завдання різного рівня складності, враховуючи індивідуальні потреби та темп навчання кожного учня.

Наведемо приклади завдань, які можна використовувати під час навчання учнів розв'язувати завдання з теми «Похідна та її застосування»:

Завдання №1. Знайти похідну функції: $y(x)=(x+1)(x+2)-(x-1)(x-3)$

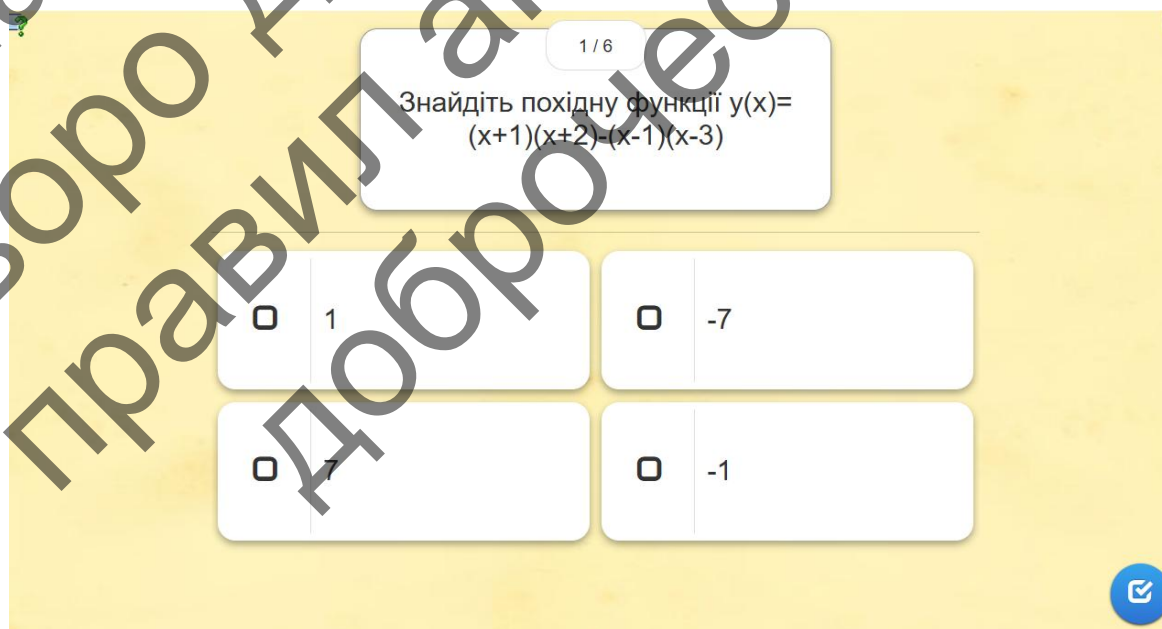


Рис. 2.11. Завдання №1 на онлайн-платформі LearningApps

Завдання №2. Знайди тангенс кута між дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 і віссю x .

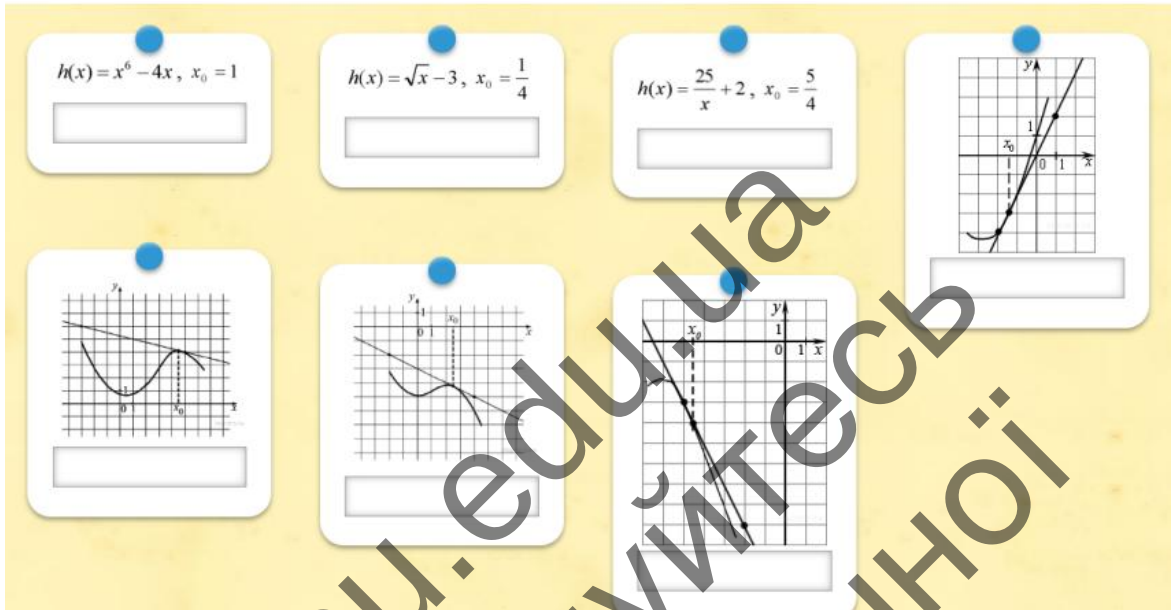
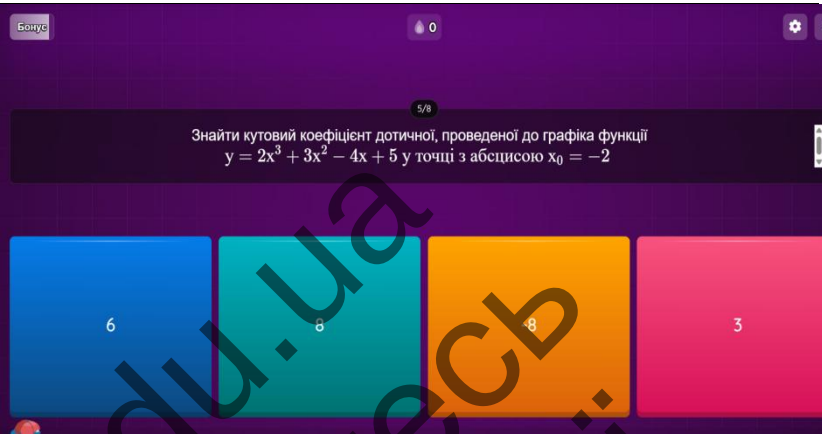
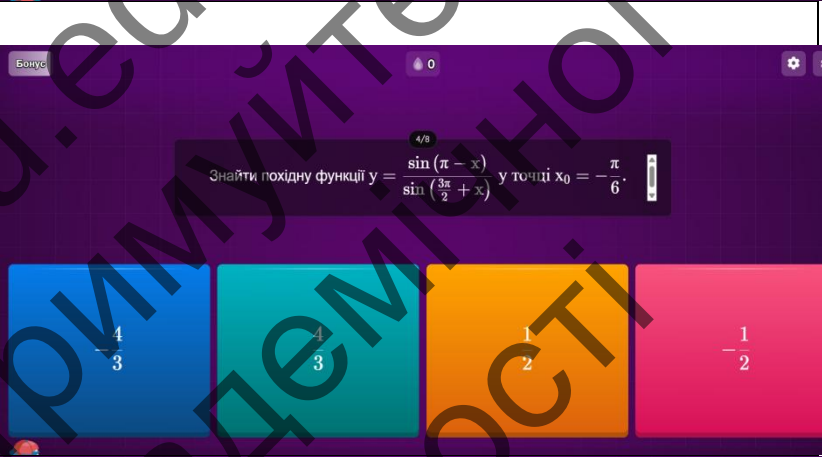
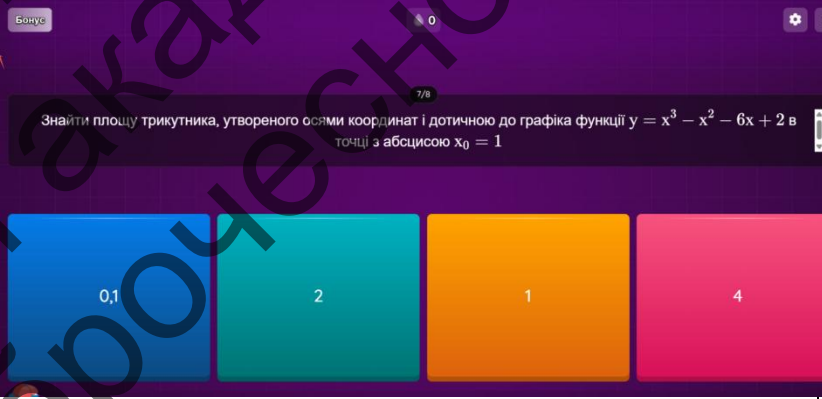


Рис. 2.12. Завдання №2 на онлайн-платформі LearningApps

Варто також виокремити онлайн платформу Quizizz для створення та проведення інтерактивних завдань і опитувань, яка відрізняється ігровим підходом до навчання. Її ключові характеристики роблять її ефективним інструментом для використання в освітньому процесі, зокрема при вивченні складної теми «Похідна та її застосування». Сумісність з Google Classroom та іншими популярними платформами спрощує вчителям процес організації завдань, обміну матеріалами та відстеження прогресу учнів. Цифрова платформа має велику бібліотеку вже створених вікторин на різні теми, включаючи «Похідна та її застосування». Вчителі можуть використовувати ці готові матеріали або легко створювати власні вікторини, адаптовані до потреб конкретного уроку та рівня підготовки учнів.

Наведемо приклади завдань з теми «Похідна та її застосування», які можна використовувати на онлайн-платформі Quizizz:

Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка	
--	--

функції	
Знайти похідну функції	
Знайти площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції	

Учитель створює нову вікторину в Quizizz та додає вищезазначені типи запитань, вводячи текст запитань, варіанти відповідей (для множинного вибору), правильні відповіді та пояснення (за бажанням). Зазначимо, що вчитель математики може налаштувати параметри вікторини, такі як час на відповідь, кількість спроб, відображення таблиці лідерів, використання мемів тощо. Після завершення вікторини вчитель отримує детальну статистику про результати кожного учня та класу в цілому, що дозволяє проаналізувати рівень засвоєння матеріалу та виявити проблемні моменти.

Далі розглянемо GeoGebra як універсальний цифровий інструмент для навчання математики. Варто зазначити, що GeoGebra являє собою динамічне математичне програмне забезпечення, розроблене для використання на всіх освітніх рівнях, яке інтегрує в собі інструменти геометрії, алгебри, електронних таблиць, побудови графіків, статистики та обчислень. Окрім цього, GeoGebra надає доступ до онлайн-платформи, що містить понад мільйон безкоштовних навчальних матеріалів, створених міжнародною спільнотою. Ці ресурси легко поширюються через платформу GeoGebra Клас, призначену для співпраці та відстеження навчального прогресу учнів у режимі реального часу [11, с.56].

Завдяки широкому спектру функціональних можливостей та потужній онлайн-підтримці користувачів, GeoGebra є ефективним інструментом для вивчення значної частини тем шкільного курсу математики. Важливо відзначити, що програма володіє великим набором інструментів для створення динамічних комп'ютерних моделей математичних об'єктів, що дозволяє використовувати її не лише для розв'язання математичних задач, але й для організації евристичного навчання, розвитку дослідницьких умінь та навичок, стимулювання творчих здібностей учнів, а також для створення наочних навчальних матеріалів.

Програмне забезпечення GeoGebra має такі методичні переваги, що роблять його придатним для використання як у школі, так і вдома, для різних форм навчання та з різним комп'ютерним обладнанням в класі. Завдяки цьому забезпечується швидше й ефективніше засвоєння математичних знань та навичок, покращується запам'ятовування матеріалу шляхом інтеграції експериментальних та дослідницьких елементів у навчальний процес. Крім того, GeoGebra сприяє підвищенню мотивації учнів та організації проектної діяльності, демонструючи ефективність застосування сучасних технологій в освіті [16, с.23].

Найбільш ефективним застосування GeoGebra буде на наступних етапах вивчення теми «Похідна та її застосування»:

- при розв'язуванні задачі, що вводить поняття похідної через кутовий коефіцієнт дотичної (за допомогою динамічного зображення графіка функції та рухомої дотичної);
- під час знаходження похідної функції (для самостійної перевірки учнями отриманих результатів шляхом їх порівняння з відповіддю програми);
- при визначенні рівняння дотичної до графіка функції (після аналітичного розв'язання GeoGebra використовується для побудови графіка функції та знайденої прямої з метою візуальної перевірки того, чи дійсно ця пряма є дотичною).
- на етапах вивчення теми, пов'язаних з дослідженням функції на монотонність, екстремуми, опуклість та точки перетину (після аналітичного дослідження в зошиті учні можуть побудувати графік функції в GeoGebra для перевірки своїх висновків).
- при повному дослідженні функції за заданою схемою та побудові її графіка (GeoGebra слугує засобом самоперевірки правильності побудови).
- при застосуванні похідної до розв'язування різноманітних задач, включаючи прикладні, дозволяючи досліджувати відповідні математичні моделі візуально та інтерактивно.

Наведемо приклади використання програмного забезпечення GeoGebra під час навчання учнів розв'язувати завдання з теми «Похідна та її застосування»:

Завдання 1. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x - 8$, яка паралельна прямій $y = 9x - 1$.

Оскільки за умовою дотична до $f(x) = x^2 + 3x - 8$, паралельна прямій $y = 9x - 1$, то їх кутові коефіцієнти рівні. Знайдемо їх: $f'(x_0) = 2x_0 + 3 = 9$, тобто $x_0 = 3$.

Рівняння дотичної має вигляд: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Знаходимо: $f(x_0) = f(3) = 9 + 9 - 8 = 10$.

$f'(x_0) = 9$.

$y = 10 + 9 \cdot (x - 3) = 10 + 9x - 27 = 9x - 17$.

Відповідь: $y = 9x - 17$

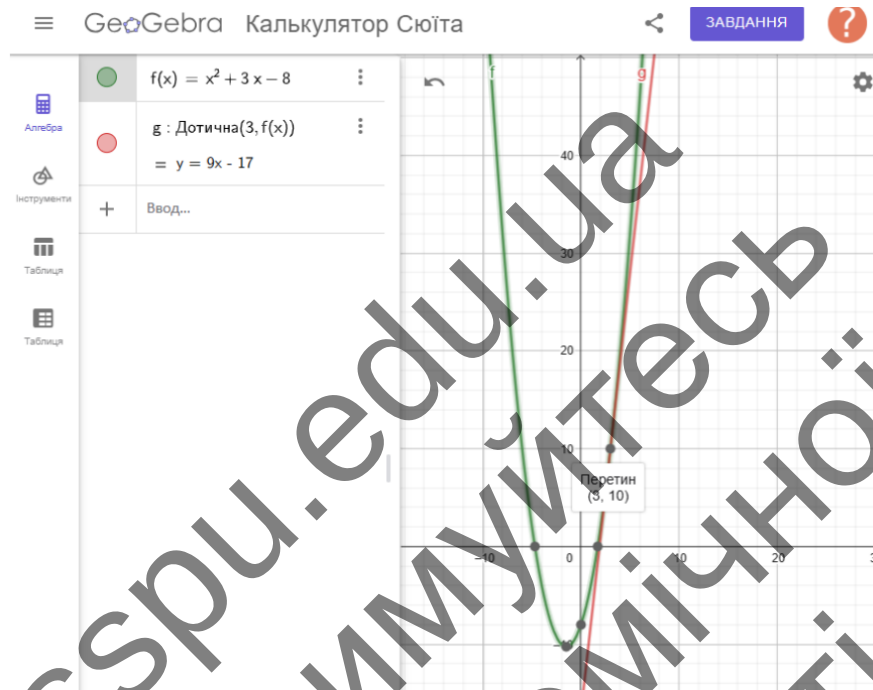
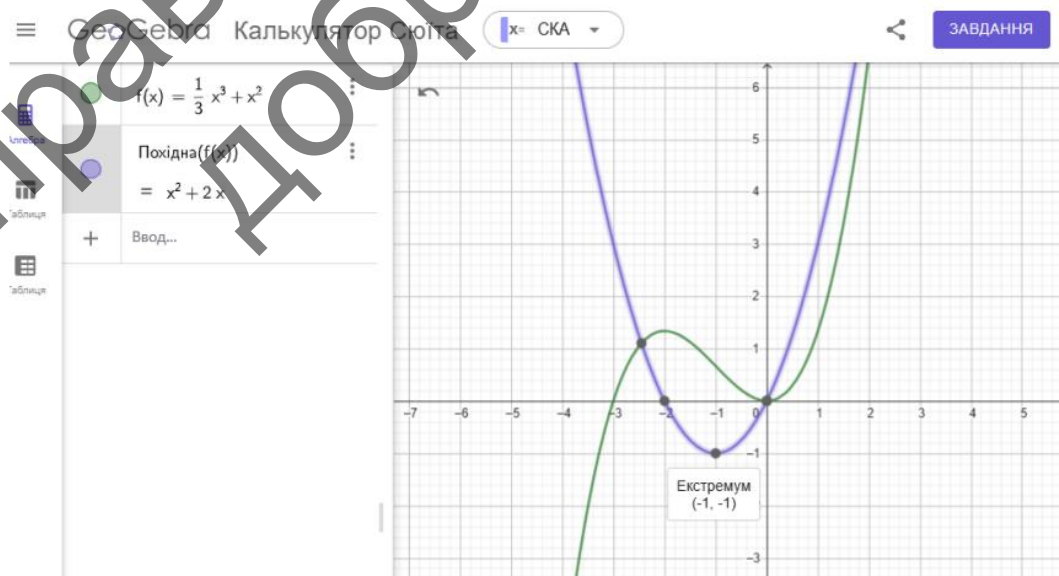


Рис. 2.13. Застосування динамічного середовища GeoGebra у розв'язку завдання №1

Зазначимо, що за допомогою функції Дотична (Точка;Функція) динамічне середовище GeoGebra побудувало дотичну до функції в точці, яку ми знайшли самостійно на рис. 2.11. А також програма знайшла рівняння дотичної.

Завдання 2. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$.

Використовуючи функцію Похідна(Функція) знайдемо похідну функції

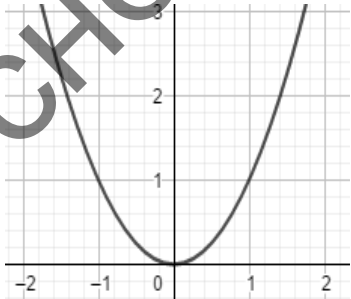
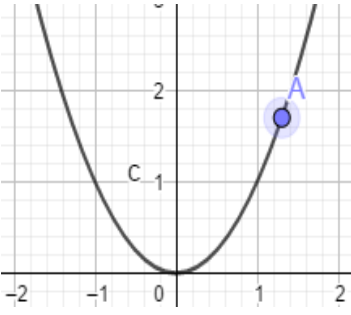


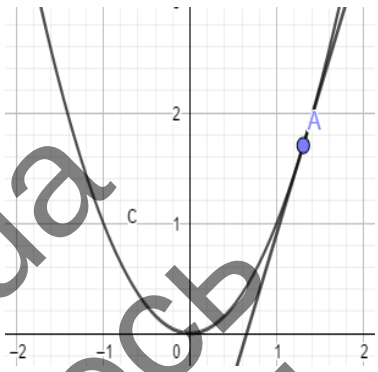
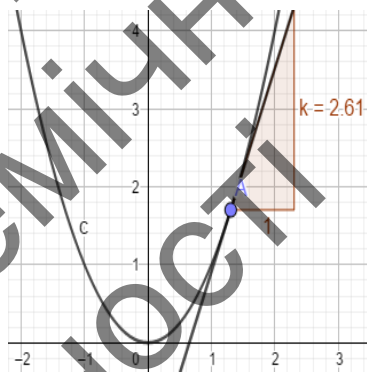
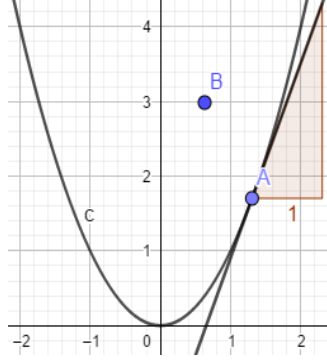
**Рис. 2.14. Застосування динамічного середовища GeoGebra у
розв'язку завдання №2**

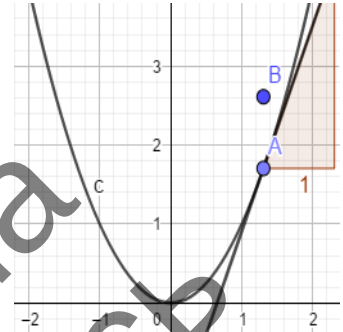
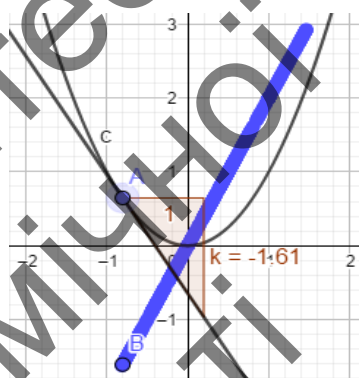
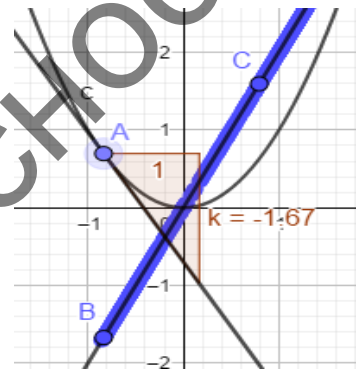
Завдання 3. Розглянемо функцію $y = kx + b$ та знайдемо її похідну за означенням: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(kx + k\Delta x + 2b) - kh - b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\Delta x + b}{\Delta x} = k$. Тобто, $(kx + b)' = k$. Якщо припустити, що $k = 0$, $b = C$, де C — довільна постійна, то одержимо, що $C' = 0$, тобто похідна сталої дорівнює нуль. Якщо у формулі $(kx + b)' = k$ припустити, що $k = 1$, $b = 0$, то одержимо $x' = 1$. Доведемо, що похідна функції $y = x^2$ дорівнює $y' = 2x$. Побудову виконаємо у цифровому додатку GeoGebra.

Таблиця 2.2.

**Приклад покрокового застосування динамічного середовища
GeoGebra у розв'язку завдання №3**

Крок	Побудова
Відкриваємо GeoGebra та вгорі зліва, в рядку введення формул, записуємо функцію $y = x^2$.	
За допомогою інструменту  Точка нанесемо на отриманий графік довільну точку.	

Використовуємо інструмент  Дотична та будуємо через отриману точку A дотичну. Для цього обираємо інструмент та натискаємо по-черзі на точку і функцію.	
Визначаємо кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис. Обираємо  Нахил прямої та клікаємо по дотичній. Спеціально підібрано так, що горизонтальний катет дорівнює 1, а вертикальний катет може змінюватися в залежності від величини кута. Для нас важливо позначення k.	
Обираємо довільну точку B за межами параболи.	

У рядку формул записуємо нові координати для цієї точки. Видаляємо попередні координати, пишем $B = (x(A), k)$ та натискаєм кнопку Enter.	
Вказуємо мишкою на точку B і натискаємо праву клавішу мишки, обираємо команду  Залишити слід. Вказуємо на точку A і зажимаючи ліву кнопку миші, рухаємо точку A вгору і вниз по параболі.	
Обираєм інструмент  Прямі та проводим пряму через слід, що залишила точка B.	
У рядку вводу бачимо рівняння прямої, що залишила точка B і робимо висновки. За допомогою даного прикладу ми довели, що $(x^2)' = 2x$.	g : Прямі (B, C) $\rightarrow y = 2x$

Таким чином, наведені приклади демонструють, як GeoGebra може стати ефективним інструментом для навчання учнів розв'язувати завдання з теми «Похідна та її застосування», поєднуючи аналітичні методи з візуалізацією та можливістю самоперевірки. Після самостійного розв'язання завдання

аналітичним шляхом, вони можуть швидко побудувати відповідні графіки або скористатися вбудованими функціями програми для отримання числових або символьних результатів (наприклад, знаходження похідної, рівняння дотичної, координат екстремумів). Порівняння власних результатів з отриманими в GeoGebra допомагає виявити та виправити помилки, розвиваючи таким чином навички самоконтролю та критичного мислення.

Нами було розглянуто цифрові технології, які можуть бути використані під час навчання учнів розв'язувати завдання з теми «Похідна та її застосування». Вчитель повинен зрозуміти, які саме труднощі мають учні у вивченні теми, і вибрати ті технології, які найкраще відповідають їхнім потребам. Важливо не лише використовувати цифрові технології, але й інтегрувати їх у навчальний план. Завдяки цьому вчителі зможуть ефективно використовувати цифрові технології для покращення навчального процесу та допомоги старшокласникам у засвоєнні теми «Похідна та її застосування».

2.3. Використання цифрових технологій для контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів з теми

Застосування цифрових інструментів у процесі контролю та оцінювання знань з теми «Похідна та її застосування» сприяє об'єктивній діагностиці рівня засвоєння матеріалу, забезпечує своєчасний зворотний зв'язок та оптимізує навчальний процес.

Одним із вагомих аспектів застосування цифрових технологій у контрольно-оцінювальній діяльності є можливість створення різноманітних інтерактивних завдань. Платформи для створення онлайн-тестів та вікторин, такі як Quizizz, Kahoot!, Wordwall, дозволяють розробляти завдання різних форматів: множинний вибір, встановлення відповідності, введення короткої відповіді, упорядкування послідовності тощо. Це сприяє комплексному оцінюванню розуміння учнями як теоретичних аспектів похідної (означення, правила диференціювання, геометричний та фізичний зміст), так і практичних

навичок її застосування до розв'язування задач. Миттєвий зворотний зв'язок, який надають ці платформи після виконання завдання, дозволяє учням оперативно виявляти свої помилки та коригувати розуміння матеріалу, а вчителю – отримувати статистичні дані про рівень засвоєння теми класом в цілому та окремими учнями.

Важливу роль у контролі та оцінюванні відіграють інструменти для візуалізації математичних концепцій, такі як Desmos та GeoGebra. Вони надають можливість учням будувати графіки функцій та їхніх похідних, досліджувати їхній взаємозв'язок, наочно інтерпретувати геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної. Завдання, що передбачають аналіз графічних представлень функцій та їхніх похідних, сприяють глибшому розумінню теоретичного матеріалу та розвитку візуально-просторового мислення. Вчитель, у свою чергу, може використовувати ці інструменти для створення інтерактивних демонстрацій та завдань, спрямованих на перевірку вміння учнів інтерпретувати графічну інформацію та встановлювати зв'язки між аналітичним та геометричним представленнями похідної [49, с.30].

Окрім стандартизованих форм контролю, цифрові технології надають можливості для здійснення формувального оцінювання. Інструменти для створення опитувань дозволяють швидко збирати інформацію про розуміння учнями ключових понять на різних етапах уроку. Запитання можуть бути спрямовані на виявлення труднощів у засвоєнні певних аспектів теми або на перевірку розуміння щойно викладеного матеріалу. Отримані дані можуть бути використані вчителем для оперативного коригування навчального процесу та адаптації подальшого викладання до потреб учнів.

Використання платформ для спільної роботи, таких як Google Docs або Padlet, може бути ефективним для оцінювання вміння учнів працювати в команді при розв'язуванні прикладних задач з теми «Похідна та її застосування». Вчитель може спостерігати за процесом їхньої взаємодії, розподілом ролей та внеском кожного учня у спільний результат. Оцінюванню

підлягає не лише кінцевий розв'язок, але й процес його отримання, аргументація та обґрунтування використаних методів [50, с.383].

Варто виокремити, зацікавленість значної кількості учнів у математиці значною мірою визначається методикою її викладання та ефективністю організації навчального процесу. Важливу роль у цьому відіграють дидактичні ігри на уроках математики, що є сучасним і визнаним методом навчання та виховання, якому притаманні навчальна, виховна і розвивальна функції.

На етапі контролю знань можна застосувати гру на пошук слів. Старшокласникам пропонується спочатку розібратися зі змістом основних понять теми «Похідна та її застосування», виходячи з їхніх означень, а вже потім відшукати відповідні терміни серед набору літер (рис.2.15.):

Похідна

Завдання:
Знайдіть всі слова

ОК

- Операція обчислення похідної
- Значення похідної в певній точці
- Значення похідної в певній точці до відповідного аргумента, за умови, що аргумент прямує до нуля.
- У цій точці похідна змінює знак з $-$ на $+$
- У цій точці похідна змінює знак з $+$ на $-$
- У цій точці існує похідна
- Геометричний зміст похідної

Рис. 2.15. Сканфорд «Терміни»

Застосування кросвордів у навчальному процесі, зокрема при контролі та оцінюванні знань учнів є ефективним з кількох важливих причин. Кросворд поєднує елементи гри та навчання, що сприяє підвищенню зацікавленості учнів та активізації їхньої розумової діяльності. Під час вивчення складної теми як «Похідна та її застосування», такий підхід може стати ефективним способом перевірки розуміння ключових понять, формул та їхнього взаємозв'язку.

Треба зазначити, що кросворд змушує учнів не просто відтворювати завчені ними визначення, а й застосовувати їх у контексті пошуку слів. Розгадування кросворду вимагає аналітичного мислення, логіки та вміння встановлювати асоціативні зв'язки між різними поняттями теми. Запитання кросворду можуть охоплювати широкий спектр основних термінів, означень, теорем та формул, пов'язаних з похідною та її застосуванням (наприклад, означення похідної, правила диференціювання, геометричний та фізичний зміст похідної, точки екстремуму, монотонність, опуклість, дотична тощо).

Елемент гри, притаманний кросворду, може знизити рівень стресу, пов'язаного з контрольною роботою, та підвищити позитивний настрій учнів до процесу оцінювання. Успішне розгадування кросворду викликає відчуття задоволення та досягнення. Складність запитань кросворду може варіюватися, що дозволяє адаптувати його до рівня підготовки різних груп учнів. Можна включати як прості запитання на відтворення базових понять, так і більш складні, що вимагають застосування знань у нестандартних ситуаціях [45, с.265].

Наведемо приклад кросворду з теми «Похідна та її застосування», який було створено за допомогою цифрового інструменту LearningApps (рис.2.16.) :

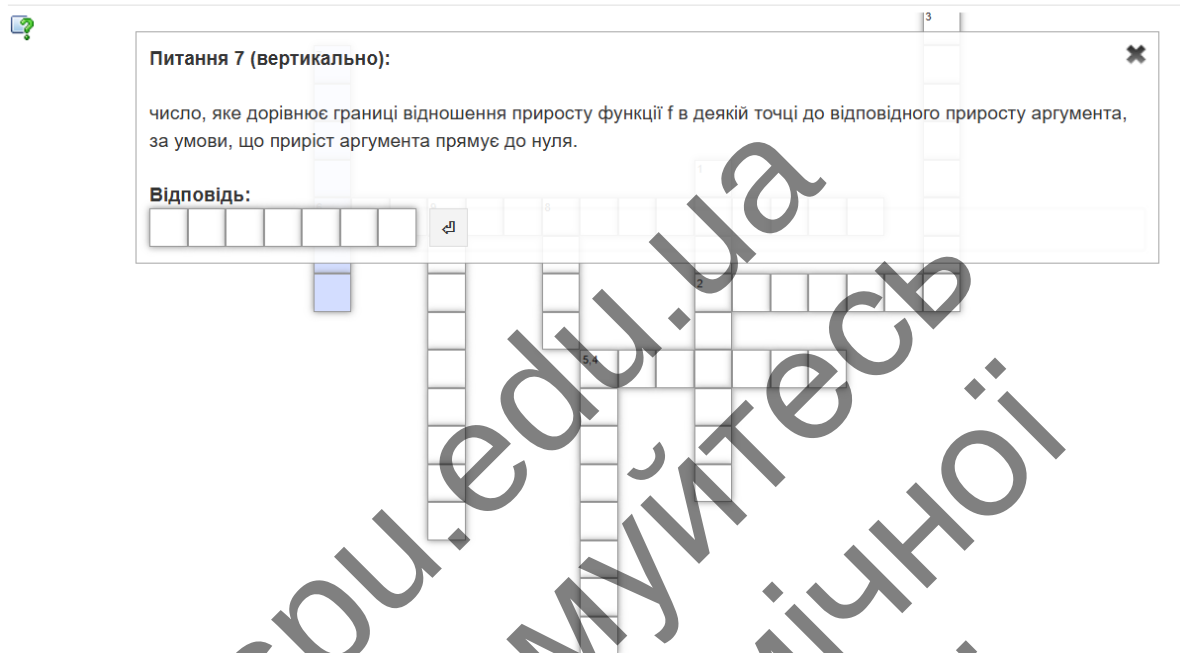


Рис. 2.16. Кросворд з теми «Похідна та її застосування»

Розглянемо цифровий інструмент Classtime для контролю та оцінювання знань з теми «Похідна та її застосування». Сервіс Classtime є одним із найбільш функціонально багатих та зручних інструментів для здійснення онлайн-контролю та перевірки знань учнів. Ця безкоштовна платформа для тестування надає викладачам можливість використовувати дев'ять різних форматів запитань, серед яких є відкриті питання, завдання на встановлення відповідності, а також опція надання розгорнутої відповіді. Завдяки цьому, Classtime ідеально підходить для проведення контрольних тестів з метою закріплення вивченого матеріалу. Крім того, платформа дозволяє створювати опитування та надавати доступ до них учням, що робить її ефективним засобом для миттєвої перевірки розуміння матеріалу одразу після його опрацювання.

Наведемо приклад контрольного оцінювання (10 клас) з теми «Похідна та її застосування» в онлайн-сервісі Classtime:

5  Встановіть відповідність між функцією та значенням похідної

Будьте уважними! Є зайві варіанти!!!

	$\frac{x^2-14x-8}{(x+1)^2}$	$4\sin x$	$2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x - 7$	x^4	$2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2$	$\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$
$f(x) = \frac{x^5}{5}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f(x) = -4\cos x$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2x - 7$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f(x) = \frac{x^2-8x}{x+1}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6  Чи правильно вказана суть фізичного змісту похідної

Якщо шлях, пройдений тілом, що рухається прямолінійно, до моменту часу $t(t > 0)$, визначається за формулою $x(t)$, то швидкість руху $u(t)$ в момент часу t дорівнює похідній цієї функції:

☐ Правда

☐ Неправда

Рис. 2.17. Приклад контрольного оцінювання з теми «Похідна та її застосування» в онлайн-сервісі Classtime

Виокремимо, що сервіс Classtime надає викладачу інструменти для аналізу результатів виконання домашніх робіт. Система в режимі реального часу відображає успішність кожного учня та загальну динаміку засвоєння матеріалу класом. Детальна статистика виявляє типові помилки, що є цінною інформацією для викладача при плануванні подальших уроків та визначенні тем, які потребують додаткового пояснення або повторення. Можливість експорту даних у форматах PDF або Excel забезпечує зручність подальшого аналізу та документування результатів навчальної діяльності.

Значною перевагою Classtime є доступ до великої бібліотеки готових навчальних матеріалів, що включає запитання з різних предметів, у тому числі й матеріали для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО). Використання готових завдань значно скорочує час, необхідний викладачу для розробки домашніх робіт. Крім того, платформа надає можливість створювати власні унікальні запитання та обмінюватися ними з колегами, що сприяє професійному розвитку та збагаченню навчальних матеріалів [36, с.49].

Для ефективної організації процесу виконання домашніх завдань Classtime пропонує гнучкі інструменти налаштування сесій. Викладач може встановлювати часові обмеження на виконання завдань, планувати їхнє відкриття та закриття, визначати момент відображення правильних відповідей (одразу після виконання або після завершення сесії), а також регулювати кількість спроб виконання завдання. Ці функції дозволяють адаптувати процес перевірки домашніх робіт до індивідуальних потреб учнів та специфіки навчального матеріалу [42].

Варто зазначити, що ще однією перевагою Classtime є можливість негайного отримання результатів тестування. Платформа автоматично обробляє відповіді учнів та генерує звіт, що містить статистику за кожне питання та загальний результат кожного учня. Це дозволяє вчителю швидко ідентифікувати проблемні місця в розумінні теми та скоригувати подальший навчальний процес. Крім того, інтерактивний характер Classtime підвищує зацікавленість учнів до процесу оцінювання, роблячи його менш стресовим та більш ефективним.

Однак, використання Classtime не позбавлене недоліків. Основним недоліком є можливість списування. Хоча Classtime пропонує деякі функції для запобігання списуванню, такі як таймер та випадкове змішування питань, повністю усунути цю проблему неможливо. Крім того, деякі типи завдань, що вимагають розгорнутої відповіді та демонстрації логічного мислення, важко реалізувати в рамках платформи Classtime. Для оцінки таких навичок все ще потрібні традиційні письмові контрольні роботи.

Підсумовуючи, Classtime є ефективним інструментом для оцінювання знань учнів з теми «Похідна та її застосування», особливо для перевірки базових знань та навичок обчислення. Однак, для комплексної оцінки розуміння теми необхідне використання Classtime у поєднанні з традиційними методами оцінювання, враховуючи його обмеження щодо запобігання списуванню та оцінювання складних завдань, що вимагають розгорнутих відповідей та логічного міркування. Правильне поєднання онлайн-інструментів

та традиційних методів дозволить досягти найбільш ефективного результату в контролі та оцінюванні навчальних досягнень учнів.

Також одним із найдоступніших інструментів для контролю та перевірки знань учнів з математики є Google Forms. Однією з ключових переваг Google Forms є його доступність та простота використання. Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс дозволяє вчителям швидко створювати тести та опитування, не вимагаючи спеціальних навичок програмування. Це особливо важливо в умовах обмеженого часу, коли необхідно оперативно підготувати матеріали для контролю знань [30, с.43].

В онлайн-сервісі Google Forms є можливість створення різноманітних типів запитань: питання з вибором однієї правильної відповіді, множинним вибором, короткими текстовими відповідями, розгорнутими есе, завантаженням файлів тощо. Це дозволяє викладачу всебічно оцінити розуміння учнями теоретичного матеріалу, їхні навички розв'язування задач різної складності, а також уміння застосовувати похідну для аналізу функцій, знаходження екстремумів, побудови графіків тощо.

Автоматична перевірка питань з множинним вибором та короткою відповіддю значно економить час вчителя, дозволяючи зосередитися на аналізі результатів та наданні індивідуального зворотного зв'язку. Миттєвий зворотний зв'язок, який отримують учні після завершення тесту, сприяє кращому усвідомленню помилок та оперативному коригуванню знань. Інтеграція Google Forms з Google Classroom робить процес призначення тестів та збору результатів максимально зручним та організованим. Учні отримують миттєвий доступ до завдань, а викладач має змогу централізовано відстежувати прогрес кожного учня та всього класу в цілому.

Знайдіть точки екстремуму функції

$$f(x) = 6x^2 - 2x^3 + 1.$$

☐ -6
☐ 0
☐ -2
☐ 2
☐ 6

Функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 7$, причому $f'(x) > 0$ на проміжку $(0; 7)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(7; 10)$. Чи є точка $x_0 = 7$ точкою максимуму чи мінімуму?

☐ Не є точкою максимуму чи мінімуму
☐ Точка мінімуму
☐ Точка максимуму

Рис. 2.18. Приклад застосування онлайн-сервісу Google Forms для контролю знань з теми «Похідна та її застосування» в 10 класі

Таким чином, використання Google Forms у контролі та оцінюванні знань з теми «Похідна та її застосування» сприяє підвищенню об'єктивності оцінювання, забезпеченню оперативного зворотного зв'язку та оптимізації навчального процесу. Це потужний інструмент, який дозволяє зробити навчання більш інтерактивним, ефективним та адаптованим до потреб сучасних учнів.

Особливу увагу привертають електронні освітні ресурси, що сприяють миттєвій взаємодії з аудиторією. Одним із таких інноваційних інструментів є Mentimeter. Хоча його основне призначення відрізняється від сервісів, орієнтованих на створення формальних тестів, Mentimeter може стати цінним доповненням до арсеналу викладача математики для отримання швидкого та анонімного зворотного зв'язку від учнів щодо їхнього розуміння теми «Похідна та її застосування» [27, с.81].

Зазначимо, що Mentimeter акцентує увагу на зборі думок та миттєвому реагуванні аудиторії на поставлені запитання. Ця особливість робить його

ефективним інструментом для швидкої діагностики рівня розуміння матеріалу в режимі реального часу. Вчитель математики може використовувати Mentimeter для проведення бліц-опитувань, щоб з'ясувати, наскільки добре учні засвоїли певні означення, правила чи теореми, пов'язані з похідною та її застосуваннями.

Завдяки можливості онлайн-голосування через мобільні телефони, планшети або комп'ютери, Mentimeter забезпечує залучення всього класу до процесу оцінювання. Анонімність участі, що є однією з ключових особливостей сервісу, створює безпечне середовище, де учні можуть вільно висловлювати свою думку, не боячись помилитися чи бути оціненими. Це особливо важливо при обговоренні теоретичних питань, наприклад таких як геометричний та фізичний зміст похідної, де учні можуть мати різні рівні розуміння [12, с.39].

Вчитель може ставити запитання з варіантами відповідей щодо означення похідної, правил диференціювання, основних теорем (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші) або їхнього практичного застосування. Миттєві результати голосування наочно демонструють рівень засвоєння базових знань у класі. Використовуючи шкалу оцінювання або відкриті запитання, викладач може отримати інформацію про те, які аспекти теми «Похідна та її застосування» викликають найбільші труднощі в учнів. Це дозволяє оперативно коригувати навчальний процес та приділяти більше уваги проблемним моментам.

Хоча Mentimeter не є прямим аналогом сервісів для створення формальних тестів, його функціонал робить його цінним інструментом для отримання миттєвого та анонімного зворотного зв'язку від учнів щодо їхнього розуміння теми «Похідна та її застосування». Його використання сприяє активній участі всього класу, виявленню проблемних аспектів у засвоєнні матеріалу та оперативному коригуванню навчального процесу, роблячи навчання більш інтерактивним та орієнтованим на потреби учнів.

Таким чином, цифрові технології є потужним інструментом, здатним якісно трансформувати процес контролю знань та оцінювання навчальних досягнень учнів з математики. Цифрові технології дозволяють автоматизувати

процес перевірки знань, що значно економить час вчителя та забезпечує миттєвий зворотний зв'язок для учнів. Різноманітні формати завдань, доступні в онлайн-платформах, дозволяють комплексно оцінити рівень розуміння матеріалу, включаючи не лише знання фактів, але й вміння застосовувати їх на практиці.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення впливу конкретних цифрових інструментів на різні аспекти навчальних досягнень учнів з математики та розробку методичних рекомендацій щодо їхнього оптимального використання в освітній практиці.

ВИСНОВКИ

1. Проаналізувавши науково-педагогічну літературу з проблеми використання цифрових технологій в освіті, можна зробити висновок, що використання цих технологій спрямоване на модернізацію освітнього процесу, підвищення його якості, індивідуалізацію навчання, а також підвищення мотивації учнів та активізацію їх пізнавальної діяльності. Цифрові освітні технології визначаються як інтегроване застосування широкого спектра електронних інструментів, цифрових ресурсів та спеціалізованих програмних забезпечень у навчальному процесі. Ключовою метою їхнього впровадження є суттєве підвищення ефективності навчання на всіх рівнях освіти, а також гарантування рівного та зручного доступу до освітніх матеріалів і знань як для учнів, так і для вчителів.

2. Визначено, що основними шляхами впровадження цифрових технологій у навчання математики в старшій школі є: використання інтерактивних навчальних платформ та онлайн-ресурсів, а також спеціалізованого математичного програмного забезпечення, застосування технологій для організації навчального процесу та комунікації, використання ігрових цифрових технологій.

Для успішного впровадження цифрових технологій у навчання математики в старшій школі необхідно забезпечити належну технічну базу, підтримати та навчити педагогів, які повинні глибоко розуміти педагогічний потенціал цифрових інструментів, розробити якісне цифрове навчально-методичне забезпечення, що відповідає освітнім стандартам, та враховувати вікові особливості й потреби учнів при підборі цифрових інструментів і методів навчання. Продуктивна взаємодія учнів у навчальному процесі значною мірою визначається вмінням вчителя математики інтегрувати можливості сучасних технологій з традиційними підходами, забезпечуючи таким чином різнобічний та ефективний освітній процес.

3. Розкрито, що одним із ключових завдань освітньої галузі «Математика» у старшій школі є ознайомлення учнів з основними ідеями та методами диференціального й інтегрального числення, а також формування в них базових навичок практичного застосування математичних знань. Тема «Похідна та її застосування» є однією з ключових у шкільному курсі алгебри та початків аналізу, оскільки поняття похідної має широке застосування в різних наукових галузях. Згідно з навчальними програмами з математики, вивчення поняття похідної передбачено в курсі алгебри і початків аналізу для 10 класу. На рівні стандарту на цю тему відводиться 14 годин у розділі «Похідна та її застосування». Для учнів, які навчаються за профільним рівнем, вивчення похідної відбувається в межах теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування», на яку виділено 54 години.

Після опанування теми «Похідна та її застосування» учні старших класів повинні вміти: давати визначення похідної та пояснювати її геометричну та фізичну інтерпретацію; визначати кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції; обчислювати похідні різних функцій; визначати найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку; розв'язувати практичні задачі на знаходження оптимальних значень; застосовувати результати дослідження функції за допомогою похідної для розв'язування рівнянь і нерівностей, а також для доведення тотожностей і нерівностей; описувати поняття опуклості функції та точок перегину; використовувати другу похідну для визначення інтервалів опуклості функції та її точок перегину, а також комплексно досліджувати функції за допомогою першої та другої похідних і застосовувати отримані дані для побудови графіків функцій.

4. Досліджено методичні особливості використання цифрових технологій у процесі навчання учнів теми «Похідна та її застосування» та виявлено широкий спектр інструментів, які можуть значно покращити якість навчання математики старшокласників. Підсумуємо:

- Онлайн-графічні калькулятори (Desmos, GeoGebra) дозволяють динамічно візуалізувати функції та їхні графіки, будувати дотичні та січні,

досліджувати поняття границі та похідної як кутового коефіцієнта дотичної. Учні можуть маніпулювати параметрами функцій та спостерігати за змінами графіків у реальному часі.

- Інтерактивні онлайн-платформи ігор та вправ (LearningApps.org, Quizizz, Kahoot!) допомагають урізноманітнити процес навчання, підвищити мотивацію учнів та закріпити розуміння основних понять у ігровій формі.

- Онлайн-дошки для спільної роботи (Miro, Google Jamboard) сприяють взаємодії та співпраці між учнями та вчителем у реальному часі під час к матеріалів у будь-який час і в будь-якому місці, що підтримує індивідуалізацію навчання.

- Мультимедійні презентації (Microsoft PowerPoint, Google Slides, Canva) допомагають учителю наочно пояснювати матеріал, використовуючи текст, графіку, анімацію та відео, що сприяє кращому розумінню та запам'ятовуванню.

- Тестові платформи (Classtime, Google Forms) дозволяють проводити онлайн-тестування та миттєво отримувати результати, що допомагає оцінити рівень розуміння матеріалу учнями.

- Платформи для опитувань (Mentimeter, Wooclap) можуть використовуватися для швидкого збору думок учнів, проведення інтерактивних опитувань та вікторин під час уроку.

- Хмарні технології (веб-додатки, сервіси освітніх курсів, хмарне сховище, електронні журнали та щоденники) спрощують організацію навчального процесу, надають гнучкість у виборі змісту та стилю викладання, а також забезпечують доступ до матеріалів з різних пристроїв.

Визначено, що вчитель повинен зрозуміти, які саме труднощі мають учні у вивченні теми, і вибрати ті технології, які найкраще відповідають їхнім потребам. Важливо не лише використовувати цифрові технології, але й інтегрувати їх у навчальний план. Завдяки цьому вчителі зможуть ефективно використовувати цифрові технології для покращення навчального процесу та допомоги старшокласникам у засвоєнні теми «Похідна та її застосування».

Отже, мету дослідження досягнуто, завдання виконано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андросчук М. В. Особливості використання віртуальної дошки на уроках математики. *Актуальні питання сучасної інформатики: Матеріали доповідей VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології в освіті та науці»*(16-17 листопада 2023 р.). 2024. С. 7-11.
2. Бевз Г.П., Бевз В.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу. закладів загальної середньої освіти. К.: Освіта. 2018.
3. Беседін Б., Беседіна І., Гайдар С. Інтерактивні методи навчання, як один із шляхів активізації пізнавальної діяльності на уроках математики в старшій школі. *Гуманізація навчально-виховного процесу*. 2021. №.1(100). С. 109-118.
4. Ботузова Ю. В., Новікова А. О. Використання інтерактивної дошки на уроках математики. *Наукові записки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка. Серія: Педагогічні науки*. 2018. №. 168. С. 47-52.
5. Бурда М. Колесник Т., Мальований Ю., Тарасенкова Н. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу. закладів загальної середньої освіти. К.: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
6. Бурда М., Васильєва Д. Особливості навчання математики в умовах воєнного стану (методичні рекомендації). *Математика в рідній школі, (4–5)*. 2022. С. 6-15.
7. Вакалюк Т.А., Спірін О.М. Інформаційно-цифрові технології: сутність поняття. *Звітна науково-практична конференція Інституту інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України* : матеріали науково-практичної конференції, 2021. С. 16-17.
8. Воевода А., Притуляк М. Формування готовності майбутніх учителів математики до застосування цифрових дидактичних ігор. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 2024. №. 1. С. 88-106.

9. Величко В.Є., Федоренко О.Г., Хорішко Д.С. Інноваційні технології навчання на уроках математики. *Інноваційні технології навчання. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2024. № 14. С.97-105.
10. Величко В., Сенчук І. Формування математичної компетентності учнів в процесі вивчення теми «Похідна та її застосування»: методика навчання математики в закладах загальної середньої та вищої освіти. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2024. №.14. С. 106-114.
11. Вертипорох Т. О., Турка Т. В., Стьопкін А. В. Методика викладання функцій в шкільному курсі математики за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій. *Технології електронного навчання*. 2024. Т. 8. С. 51-60.
12. Глазова В. В., Пащенко І. О., Чебітько Є. А. Інноваційні інструменти та платформи для інтерактивного онлайн-навчання математики. *Технології електронного навчання*. 2024. Т. 8. С. 37-43.
13. Генсерук Г. Р., Бойко М. М. Цифрові технології як засіб підвищення якості освітнього процесу закладу освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. 2020. Т. 30. С. 110-111.
14. Гуралюк А. Г. Цифровізація як умова розвитку системи освіти. *Вісник Національного університету Чернігівський колегіум» імені Т.Г Шевченка*. 2021. Т. 169. №. 13. С. 3-8.
15. Гузенко З.О. Особливості вивчення теми «Похідна та її застосування» в умовах змішаного навчання. *Молодий вчений*. 2021. №10 (98). С. 15.
16. Гуревич Р. С, Коношевський Л. Л., Коношевський О. Л., Кобися В. М., Кобися А. П. Самостійна робота майбутніх учителів математики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Випуск 67. 2023. С.15-35.
17. Гонтаренко М. О. Використання інтерактивної дошки на уроках алгебри в старшій школі. *Наукові записки молодих учених*. 2019. №. 4. С. 93-86.

- 18.Дмитрієва М. В. Чи важливо використання сучасних технологій на уроках математики? *Інформаційні технології в професійній діяльності*: матеріали XVII Всеукраїнської науково-практичної конференції.Рівне:РВВ РДГУ. 2024. С. 162.
- 19.Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavniy-standart-bazovoi-serednoi-osviti>
- 20.Істер О. С. Математика:(алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 384 с.
- 21.Зайцева О. І. Гейміфікація процесу навчання математики в умовах змішаного навчання. *Рік математики на Полтавщині*. 2021. Т. 1. С.37.
- 22.Закидальська І. Підвищення мотивації учнів до вивчення математики через впровадження інноваційних методів навчання. *Тенденції розвитку професійної освіти в сучасних умовах воєнного стану*: матеріали Всеукраїнської наук.-практ. конф., м. Київ 20 лист. 2024 р. Вежа-Друк, 2024. С.357-359.
- 23.Жук Ю. О. Планування навчальної діяльності з урахуванням використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій. *Інформаційні технології і засоби навчання*. Київ. 2015. С. 96-99.
- 24.Каганцова Т. Алгоритм дій вчителя математики ЗЗСО згідно концепції «Нової української школи». *Нова українська школа й підготовка вчителя до забезпечення базової середньої освіти*: матеріали Всеукр. науково-практ. конф., м. Глухів, 24 груд. 2021 р. Глухів, 2021. С. 51-52.
- 25.Ковальчук О.М., Войналович Н.М. Використання хмарних технологій у процесі навчання математики у старших класах ЗЗСО. *Наукові записки молодих учених*. 2024. № 13. С. 98-101.
- 26.Королук О. Інноваційні підходи до методичної підготовки майбутніх учителів математики. *Нові технології навчання*. 2022. №. 96. С. 97-101.

- 27.Савченко Д. Г., Глазова В. В. Використання можливостей інтерактивної дошки під час уроків математики. *Технології електронного навчання*. 2023. Т. 7. С. 78-83.
- 28.Мар'єнко М. В., Сухіх А. С. Особливості організації змішаного навчання з використанням цифрових технологій. *Освітній дискурс*. 2021. Т. 4. №. 32. С. 45-52.
- 29.Маланчук Р. С., Солонецька Г. В. Цифрові інструменти для організації навчання математики учнів основної школи в умовах НУШ. *Редакційний комітет*. 2022. С. 118.
- 30.Матяш О., Риндюк В. Навчання математики з використанням цифрових навчальних платформ: аналіз закордонного досвіду. *Фізико-математична освіта*. 2023. Т. 38. №. 3. С. 43-49.
- 31.Матяш О. І., Михайленко Л. Ф., Воевода А. Л. Актуальні аспекти міжнародних досліджень використання інформаційних технологій навчання в галузі математичної освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, 60. 2021. С. 81-90.
- 32.Медведева М.О., Ткачук Г.В. Інтеграція інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій у фаховій підготовці майбутніх учителів математики. *Věda a perspektivy*. 2022. № 9(16). С.146–157.
- 33.Мерзляк А.Г. Номіровський Д.А., Полонський В.Б. , Якір М.С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу. закладів загальної середньої освіти. Харків, «Гімназія», 2018, 256 с
- 34.Москаленко О.В. Упровадження сучасних цифрових освітніх технологій у підготовку вчителів-математиків. *Педагогічні науки*. 2022. №. 80. С. 70-75.
- 35.Москаленко О. Створення цифрових освітніх ресурсів у системі підготовки майбутніх учителів математики. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Педагогічні науки*. 2023. №. 3. С. 132-143.

36. Москаленко Ю., Басараб Б. Організація інтерактивного навчального середовища на уроках математики в старшій школі. *Збірник наукових праць*. 2023. С. 49-50.
37. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту: URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
38. Романовський О. Г. Формування цифрової компетентності майбутніх учителів математики: констатувальний етап. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2018. № 3. С. 184-200.
39. Руденко Н., Антипова С. Застосування інтерактивних технологій та ікт на уроках математики в закладах загальної середньої освіти. *Молодий вчений*. 2021. № 1 (89). С. 271–276.
40. Руденко Н. М., Головчанська О. В. Застосування інтерактивних технологій з використанням ІКТ на заняттях дисциплін математичного циклу. *Інформатика та інформаційні технології в початкових закладах*. 2015. №. 4 (57). С. 41-47.
41. Рудницька Н.Ю. Сучасні технології навчання математики в контексті впровадження ідей Нової української школи. *Система підготовки майбутніх фахівців у контексті становлення Нової української школи*: монографія. Житомир: Вид. О. О. Євенок, 2019. 344.
42. Потік І.В. Використання цифрових технологій в навчальному середовищі закладів вищої освіти: офлайн та онлайн формати. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Філологія»*. 2021. №. 11 (79). С. 219-221.
43. Пудренко Т. Інформаційні технології на уроках математики. *Відкритий урок: розробки, технології, досвід*. 2010. № 9. С. 29-30.
44. Про освіту: Закон України від 15.07.2021 № 1658-IX. Відомості Верховної Ради (ВВР). 2017. № 38-39. с. 380. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>.

45. Синіцька Н. Особливості використання інтерактивних методів у процесі навчання математики. *Інноватика у вихованні*. 2023. № 17. С. 263-270.
46. Тарасенкова Н., Оладенко Ю. Особливості застосування інтерактивних технологій на уроках математики базової школи. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. 2020. № 1(15). С. 150-158.
47. Турка Т. В., Вертипорох Т. О. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у вивченні шкільного курсу математики. *Технології електронного навчання*. 2023. № 7. С. 48-53.
48. Тихонова Т. В. Інформаційно-комунікаційні технології професійної діяльності педагога: сутність поняття. *Науковий вісник Миколаївського державного університету імені В.О. Сухомлинського. Серія: Педагогічні науки*. 2014. № 1. Вип. 33. С. 101-105.
49. Федоренко О. Г., Кот М. О. Електронні освітні ресурси для викладання математики в основній школі. *Технології електронного навчання*. 2023. Т. 7. С. 23-32.
50. Федосєєв С. Е. Інтерактивне навчання математики: ключові поняття. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2014. № 5. С. 382-391.
51. Хутченко І. Сучасні цифрові технології для реалізації формувального оцінювання на уроках математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 2024. № 2. С. 82-94.
52. Цюняк О. П. Використання цифрових технологій у професійній підготовці майбутніх педагогів у закладах вищої освіти. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах*. 2021. Т. 75. С. 128-133.
53. Чикурова О.Д. Інновації у викладанні математики у початковій школі з використання цифрових технологій. *Інноваційні процеси освітньої сфери України та країн центральної Європи: стан, проблеми і перспективи*. 2024. 271-273.

54. Ямковенко В.О., Криворучко І.І. Використання інтерактивних технологій для покращення засвоєння матеріалу та підвищення ефективності навчання. *Цифрові технології у професійній діяльності* : зб. матер. Всеукр. наук.-практ. інтернет-конф., 12–13 травня 2023 р. Бердянськ, 2023. С. 77–80.
55. Matiash O., Mykhailenko L., Dmitrenko N., Kateryniuk H. & Kalashnikov I. The Use of ICT Tools in Teaching Mathematical Modeling to Students. *Educational Technology*. Volume 1. 2021. pp. 675-687.
56. Matiash O., Panasenko O., Horiashyn A. Learning platforms in the training of future mathematics teachers: analysis of foreign experience. *Pedagogical Education*, 4 (55). 2023. pp. 9-14.