

Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Ся Фанчжоу

**РОЛЬ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У ФОРМУВАННІ КЛЮЧОВИХ
КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТАРШОКЛАСНИКІВ НА УРОКАХ
МАТЕМАТИКИ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

Чкана Ярослав Олегович,

кандидат педагогічних наук, доцент,

доцент кафедри математики, фізики

та методик їх навчання

«___» _____ 2025 року

Виконавець:

Ся Фанчжоу

студент 461 групи

«___» _____ 2025 року

Суми 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ	9
1.1. Компетентнісний підхід у математичній освіті старшої школи	9
1.2. Прикладні задачі як дидактичний засіб навчання математики	22
Класифікація прикладних задач	24
Функції прикладних задач у навчальному процесі	29
Вимоги до прикладних задач для старшокласників	37
1.3. Потенціал прикладних задач у формуванні ключових компетентностей	44
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ	54
2.1. Аналіз навчальних програм та підручників щодо використання прикладних задач	54
2.2. Методика організації роботи з прикладними задачами на уроках математики в старшій школі	60
Методи та прийоми роботи з прикладними задачами	63
Форми організації навчальної діяльності	65
Типові помилки при організації роботи з прикладними задачами	68
Методичні рекомендації щодо підвищення ефективності роботи з прикладними задачами	69
Висновки	72
Список використаних джерел	75
ДОДАТКИ	82
Додаток А	82
Додаток Б	90

ВСТУП

Сучасний етап розвитку української освіти характеризується кардинальними змінами, спрямованими на формування особистості, здатної до життя в умовах постійних трансформацій та викликів XXI століття. Концептуальні засади реформування середньої освіти, закладені в Законі України «Про освіту» (№ 2145-VIII від 05.09.2017) [28] та Концепції «Нова українська школа» (2016) [34], акцентують увагу на необхідності переходу від знаннєвої до компетентнісної парадигми навчання.

Математична освіта, як один із базових компонентів загальної середньої освіти, відіграє ключову роль у формуванні наукового світогляду учнів, розвитку їхнього логічного мислення та здатності до аналітичної діяльності. Однак традиційні підходи до викладання математики, орієнтовані переважно на засвоєння формальних знань та відпрацювання алгоритмічних навичок, часто не забезпечують формування тих компетентностей, які необхідні сучасній молодій людині для успішної самореалізації в професійній діяльності та повсякденному житті.

Державний стандарт базової середньої освіти (2020) [26] визначає десять ключових компетентностей, формування яких має відбуватися комплексно в процесі вивчення всіх навчальних предметів. Серед них: математична, природничо-технологічна, інформаційно-цифрова компетентність, уміння навчатися впродовж життя, ініціативність, підприємливість тощо. Ефективність формування цих компетентностей значною мірою залежить від того, наскільки навчальний процес орієнтований на розв'язання реальних життєвих проблем і ситуацій.

У цьому контексті особливої актуальності набуває використання прикладних задач як дидактичного засобу, що дозволяє поєднати теоретичні знання з практичними потребами та забезпечити формування ключових компетентностей старшокласників. Прикладні задачі, моделюючи реальні життєві ситуації, сприяють усвідомленню учнями практичної значущості

математичних знань, мотивують до навчання та розвивають здатність застосовувати набуті знання в нестандартних ситуаціях [26].

Старша школа є особливо важливим етапом формування компетентностей, оскільки саме в цей період відбувається професійне самовизначення учнів, формуються їхні життєві цінності та стратегії подальшого розвитку. Тому питання ефективного використання прикладних задач для формування ключових компетентностей старшокласників на уроках математики набуває особливої гостроти.

Проблема формування ключових компетентностей у процесі навчання є в центрі уваги багатьох дослідників. О. І. Пометун [47] вважає, що компетентнісний підхід передбачає спрямованість освітнього процесу на формування інтегрованої характеристики особистості, що поєднує знання, уміння, досвід діяльності та цінності. Її концепція стала основою для розробки сучасних програм компетентнісного спрямування в українській школі. Н. А. Тарасенкова [12] розробила модель компетентнісного навчання математики, де прикладні задачі відіграють ключову роль у переході від фактологічного рівня знань до практичного (праксеологічного). Вона підкреслює, що задачі реального змісту мають бути інтегровані на всіх етапах вивчення математики. І. А. Акуленко [1] досліджує систему прикладних задач для профільного навчання математики. Авторка показує, що задачі з практичним контекстом не лише формують предметні компетентності, а й створюють умови для розвитку ключових — аналітичного мислення, критичного судження, комунікації. М. І. Бурда [18] вказує, що навчання математики має ґрунтуватися на балансі між теоретичними знаннями та формуванням компетентностей, необхідних для життя. Він визначає математичну компетентність як поєднання когнітивних, діяльнісних і ціннісних компонентів. О. П. Вашуленко [19] звертає увагу на реалізацію компетентнісного підходу у шкільних підручниках з математики, підкреслюючи важливість системності у доборі прикладних задач. О. І. Матяш [37] розглядає контекстне навчання як чинник підвищення мотивації учнів до

математики, доводячи, що задачі, які відображають реальні ситуації, розвивають пізнавальний інтерес і забезпечують кращу результативність навчання. Н. О. Романчук [11] розкриває поняття математичної компетентності у підготовці майбутніх фахівців технічного профілю, акцентуючи, що компетентність є інтегральним показником готовності до діяльності.

Вагомий внесок у розвиток компетентнісної та контекстної парадигми математичної освіти зробили й зарубіжні вчені. Hans Freudenthal [4] та його послідовники розробили концепцію реалістичної математичної освіти (Realistic Mathematics Education), у якій навчання відбувається через «реінвенцію» математики учнями шляхом розв'язування контекстних задач. Такі задачі розглядаються не як приклади застосування теорії, а як джерело для побудови нових математичних понять. Jan de Lange [2] розширив ідеї Фрейдентала, запропонувавши концепт *mathematical literacy* — здатності використовувати математику для розуміння, інтерпретації та вирішення життєвих проблем. Його дослідження стали теоретичною основою для міжнародних оцінювань PISA, що визначають рівень сформованості компетентностей учнів.

Водночас аналіз наукової літератури свідчить про те, що, незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених окремим аспектам проблеми, комплексне вивчення ролі прикладних задач у формуванні саме ключових компетентностей старшокласників залишається недостатньо розробленим. Потребують подальшого дослідження методичні аспекти систематичного використання прикладних задач, принципи їх добору та конструювання, а також розробка конкретних рекомендацій для вчителів-практиків.

Мета дослідження — теоретично обґрунтувати та розробити методичні рекомендації щодо використання прикладних задач як засобу формування ключових компетентностей старшокласників на уроках математики.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати теоретичні основи компетентнісного підходу в математичній освіті та визначити особливості формування ключових компетентностей у старшій школі.

2. Дослідити сутність прикладних математичних задач, їхню класифікацію та функції.

3. Визначити потенціал прикладних задач у формуванні ключових компетентностей старшокласників.

4. Проаналізувати стан використання прикладних задач у чинних навчальних програмах і підручниках.

5. Розробити методичні рекомендації щодо організації роботи з прикладними задачами.

6. Створити систему прикладних задач для формування ключових компетентностей.

Об'єкт дослідження — процес навчання математики в старшій школі в контексті формування ключових компетентностей.

Предмет дослідження: використання прикладних математичних задач як засобу формування ключових компетентностей старшокласників на уроках математики.

Для досягнення поставленої мети та виконання завдань дослідження використано комплекс взаємопов'язаних методів:

- **теоретичні методи:** аналіз філософської, психолого-педагогічної, науково-методичної літератури з проблеми дослідження; синтез та узагальнення теоретичних положень; систематизація наукових даних; моделювання процесу формування ключових компетентностей через прикладні задачі;

- **емпіричні методи:** аналіз нормативно-правових документів у сфері освіти; вивчення навчальних програм та підручників з математики для старшої школи; узагальнення передового педагогічного досвіду використання прикладних задач;

- **методи математичної статистики:** для обробки та інтерпретації даних контент-аналізу навчально-методичної літератури.

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що:

- комплексно обґрунтовано роль прикладних задач у формуванні всіх ключових компетентностей старшокласників на уроках математики;

- систематизовано та доповнено класифікацію прикладних математичних задач з урахуванням їх потенціалу для формування конкретних компетентностей;

- розроблено методичні рекомендації щодо етапності роботи з прикладними задачами в контексті компетентнісного підходу;

- створено систему прикладних задач, орієнтовану на комплексне формування ключових компетентностей старшокласників.

Практична значущість визначається тим, що розроблені методичні рекомендації та система прикладних задач можуть бути використані:

вчителями математики для удосконалення методики навчання в старшій школі;

авторами підручників та навчальних посібників при створенні навчально-методичного забезпечення;

викладачами педагогічних університетів у процесі підготовки майбутніх учителів математики;

працівниками інститутів післядипломної педагогічної освіти при організації курсів підвищення кваліфікації вчителів.

Апробація результатів та публікації. Приймав участь у роботі V Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (29 листопада 2024 р., м. Суми). За результатами досліджень опубліковано:

1. Ся Фанчжоу. Розвиток інформаційно-цифрової та комунікативної компетентностей старшокласників через прикладні задачі на уроках математики. Збірник праць студентів фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2025. – Випуск 19. С. 89-95.

2. Ся Фанчжоу. Прикладні задачі як інструмент формування ключових компетентностей у старшій школі. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих

здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2024 Форум молодих дослідників»: матеріали V Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (29 листопада 2024 р., м. Суми) – Суми: [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2024. С.75-76.

3. Ся Фанчжоу. Компетентнісний потенціал прикладних задач у шкільному курсі математики. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2025. – Випуск 19. С. 47-48.

Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (60 найменувань) та 2 додатків. Загальний обсяг роботи становить 80 сторінок основного тексту, 43 сторінки додатків. Робота містить 4 таблиці та 3 рисунки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

1.1. Компетентнісний підхід у математичній освіті старшої школи

Компетентнісний підхід є сучасною освітньою парадигмою, що орієнтує навчальний процес на формування здатності учнів застосовувати знання, уміння та особистісні якості для успішної діяльності в різних сферах життя. Цей підхід є відповіддю на виклики інформаційного суспільства, в якому швидкість змін вимагає від людини не стільки володіння великим обсягом інформації, скільки здатності до неперервного навчання, критичного мислення та творчого розв'язування проблем.

Для розуміння сутності компетентнісного підходу важливо з'ясувати зміст базового поняття компетентності. Згідно з визначенням О. І. Пошетун, «компетентність – це складна інтегрована характеристика особистості, під якою розуміють набір її знань, умінь, навичок, ставлень, що дають змогу ефективно провадити діяльність або виконувати певні функції» [47]. Дослідниця підкреслює, що компетентність передбачає не просто накопичення знань, а здатність їх мобілізувати в конкретній ситуації для досягнення певної мети.

Аналіз наукової літератури свідчить про різноманітність підходів до трактування поняття «компетентність», що відображено в таблиці 1.

Таблиця 1. *Поняття «компетентність» у працях зарубіжних та вітчизняних дослідників*

Джерело / Автор	Визначення поняття	Коментар
Дж. Спектор	Компетентність – спроможність кваліфіковано здійснювати діяльність, виконувати завдання або роботу; набір знань, навичок і ставлень, що дають змогу особистості ефективно діяти або виконувати певні функції, спрямовані на досягнення певних стандартів у професійній галузі або певній діяльності	Поєднує функціональний (здатність виконувати діяльність) та структурний (знання, навички, ставлення) виміри компетентності, акцентуючи на відповідності професійним стандартам.
Р. Уайт	Компетентність – це не лише знання та навички, а й мотиваційний компонент, що зумовлює	Закладено основи розуміння компетентності як

	прагнення діяти ефективно (White, 1959)	динамічного утворення
Рада Європи	Компетентності трактуються як ключові вміння, базові навички, фундаментальні способи навчання, загальні уявлення, необхідні для активної участі в суспільстві	Підхід, що визначає компетентності як інтегративні результати освіти
Eurydice (2002)	Компетентність – це «здатність застосовувати знання й уміння в нових ситуаціях»	Орієнтація на практичну значущість здобутих результатів навчання
ЮНЕСКО	Компетентність розглядається як поєднання знань, умінь, цінностей і ставлень, що застосовуються у повсякденному житті	Забезпечено цілісний підхід до формування особистості
IBSTPI	Компетентність – це здатність кваліфіковано виконувати завдання або роботу; включає знання, навички, ставлення, що забезпечують ефективну діяльність	Термін широко використовується в системах професійної підготовки
Учасники конференції UNESCO & МО Норвегії (2004)	Компетентність – це здатність ефективно й творчо діяти у міжособистісних і професійних ситуаціях	Акцент на здатності до творчої взаємодії у соціальному контексті
М. Головань [23]	Компетентність – це оцінка досягнення (або не досягнення) певної норми.	Це поняття завжди стосується особи, характеризує її здатність якісно виконувати певну роботу
Сембрат А.Л., Самойленко Н.І. [53]	Компетентність – інтегрована здатність діяти ефективно в конкретних життєвих і професійних ситуаціях; поєднання знань, умінь, цінностей, досвіду	Автори статті пропонують узагальнене визначення, що враховує практичну значущість
С.Е. Шишов [60]	Компетентність – вміння мобілізувати в конкретній ситуації отримані знання та досвід, з врахуванням зовнішніх обставин; деяка загальна здатність людини, що базується на його знаннях, досвіді, цінностях і здібностях та яка не зводиться ні до конкретних знань, ні до навичок, а проявляється як можливість встановлення зв'язку між знанням та ситуацією	Акцентує на ситуативно-контекстному характері компетентності
А.В. Хуторський [36]	Компетентність – поєднання відповідних знань і здібностей, що дають підставу обґрунтовано судити про цю сферу й ефективно діяти в ній; володіння людиною відповідною компетенцією, що включає його особисте ставлення до неї та предмета діяльності	Наголошує на рефлексивній природі компетентності – здатності не лише діяти, а й аргументовано обґрунтовувати свої дії

Проблему запровадження компетентнісного підходу до навчання та шляхи його практичної реалізації висвітлюють у своїх дослідженнях відомі психологи, педагоги й методисти. Компетентнісний підхід – це процес навчання, спрямований на формування та розвиток життєво важливих умінь і навичок особистості, що дає змогу адаптуватись у соціумі. При цьому результатом освіти стає не сума засвоєних знань, умінь і навичок, а здатність діяти в різних ситуаціях, зокрема і в тих, які не передбачалися в процесі навчання. [17] Саме розвиток в особистості життєво важливих компетентностей може дати людині можливість орієнтуватись у сучасному суспільстві, інформаційному просторі, швидкісному розвитку ринку праці, подальшому здобутті освіти [60].

Важливою характеристикою компетентнісного підходу є його практична спрямованість. Як підкреслює Н.М. Бібік, компетентність формується й проявляється лише у процесі діяльності, у застосуванні знань на практиці [17]. Формування компетентностей можливе лише через активну участь учнів у розв'язанні практичних завдань, моделюванні реальних ситуацій та рефлексії власного досвіду.

Методологічною основою компетентнісного підходу є особистісно-діяльнісна концепція навчання, що передбачає врахування індивідуальних особливостей учнів, їхніх інтересів і потреб. Цей підхід також тісно пов'язаний із конструктивістською теорією навчання, згідно з якою знання не передаються в готовому вигляді, а конструюються самим учнем у процесі активної пізнавальної діяльності.

Компетентнісний підхід є особливо продуктивним для розроблення сучасних систем технологічної підготовки школярів. Сутність цього підходу полягає в переважанні позапредметних, особистісно значущих знань і вмінь над предметними знаннями, адже досвід свідчить: найбільш соціально адаптованими є люди, які володіють не сумою академічних знань, а сукупністю особистісних якостей — ініціативністю, підприємливістю, творчим підходом до справи, умінням самотійно ухвалювати рішення. [27]

Структурування освітнього змісту за принципом від загального до конкретного (метапредметний – міжпредметний – предметний) зумовило формування трирівневої системи компетентностей:

- **ключові компетентності** – охоплюють метапредметний зміст освіти, є універсальними для всіх навчальних дисциплін;
 - **загальнопредметні компетентності** – характеризують певні групи споріднених навчальних предметів або освітні галузі;
 - **предметні компетентності** – мають специфічний характер порівняно з попередніми рівнями, відзначаються конкретністю опису та можливістю цілеспрямованого формування в межах окремих навчальних дисциплін.
- [56]

Термін «ключові компетентності» вперше з'явився на початку 1990-х років у документах Міжнародної організації праці як елемент кваліфікаційних стандартів для фахівців системи післядипломної освіти. З середини того ж десятиліття концепція набула широкого застосування у професійній підготовці. У сучасному розумінні ключові компетентності являють собою комплекс універсальних знань, умінь і навичок, доповнений досвідом самостійної діяльності та усвідомленням особистої відповідальності здобувача освіти.

Актуалізація цієї проблематики значною мірою зумовлена рекомендаціями Ради Європи щодо реформування освітньої системи та її адаптації до соціальних потреб. Важливість розвитку ключових компетентностей у школі підкреслюється в стратегічних документах модернізації вітчизняної освіти, хоча єдиного загальновизнаного визначення та стандартизованого переліку таких компетентностей досі не існує.

Формування переліку ключових освітніх компетентностей базується на фундаментальних цілях загальної освіти, структурному аналізі соціального та індивідуального досвіду, а також провідних видах діяльності учасників освітнього процесу, які забезпечують засвоєння соціального досвіду та формування практичних навичок життєдіяльності в сучасному суспільстві.

Державний стандарт базової середньої освіти, затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року № 898, визначає набір ключових компетентностей, які мають формуватися в учнів упродовж навчання [26]:

1. Спілкування державною мовою – здатність усно і письмово висловлювати й інтерпретувати поняття, думки, почуття, факти та погляди українською мовою в різноманітних соціальних і культурних контекстах.

2. Спілкування іноземними мовами – здатність до міжкультурного спілкування іноземною мовою в усній і письмовій формах у побутових і навчальних ситуаціях.

3. Математична компетентність – здатність застосовувати математичне мислення для розв'язування практичних проблем у повсякденних ситуаціях, використовувати математичні способи пізнання світу.

4. Компетентності в галузі природничих наук і технологій – наукове розуміння природи і сучасних технологій, здатність застосовувати їх у практичній діяльності.

5. Інформаційно-цифрова компетентність – впевнене та критичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією.

6. Уміння вчитися впродовж життя – здатність до пошуку та засвоєння нових знань, набуття нових вмінь, організації навчального процесу.

7. Ініціативність і підприємливість – здатність генерувати нові ідеї й ініціативи та втілювати їх у життя для підвищення як власного соціального статусу, так і розвитку суспільства.

8. Екологічна грамотність і здорове життя – усвідомлення важливості сталого розвитку та здатність застосовувати принципи здорового життя.

Як зазначає О. Савченко, "ключові компетентності є надпредметними і формуються засобами всіх навчальних предметів" [52]. Це означає, що математична освіта має свій специфічний внесок у формування кожної з восьми компетентностей, хоча деякі з них (особливо математична компетентність та

компетентності в галузі природничих наук і технологій) мають більш пряме відношення до змісту математичного навчання.

Науковці європейських країн вважають, що набуття молоддю знань, умінь і навичок, спрямоване на вдосконалення їхньої компетентності, сприяє інтелектуальному й культурному розвитку особистості, формуванню в дітях здатності швидко реагувати на запити часу (рис. 1) [27].

ЄВРОПЕЙСЬКИЙ ПОГЛЯД НА КЛЮЧОВІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

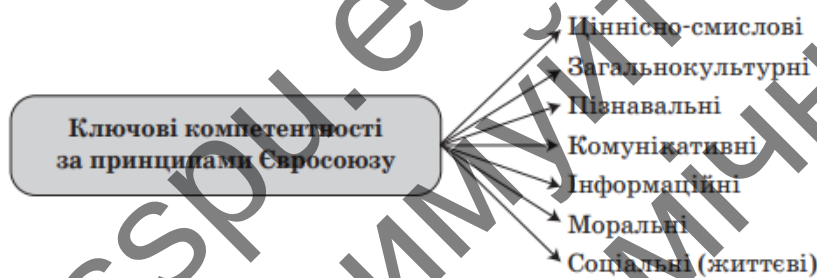


Рис 1. Ключові компетентності за принципами Євросоюзу

Математика як навчальний предмет має унікальні можливості для формування ключових компетентностей завдяки своїм специфічним особливостям: логічності, абстрактності, універсальності застосування та міжпредметному характеру. Математика відіграє фундаментальну роль у формуванні наукового світогляду та розумінні природничих явищ. Як зазначає А. Н. Мітра, «математика є мовою науки, яка забезпечує єдність і взаємозв'язок різних галузей знання» [7].

Математична компетентність є центральною для математичної освіти. За визначенням С. Ракова, вона включає "здатність бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку " [51]. Ключовими компонентами математичної компетентності є *математичне мислення* (здатність розпізнавати математичні аспекти в реальних ситуаціях, формулювати проблеми математичною мовою); *моделювання* (уміння створювати математичні моделі реальних процесів і явищ); *аргументація*

(здатність обґрунтовувати математичні твердження, будувати логічні міркування); *комунікація* (уміння використовувати математичну мову для опису та пояснення математичних ідей, розуміння математичних текстів, символів, діаграм, інтерпретацію математичної інформації, представлення математичних ідей у різних формах (вербальній, символічній, графічній), ведення математичного діалогу, обговорення розв'язків). [5]

Формування цієї компетентності на уроках математики відбувається через розв'язування задач (зокрема, з фізичним, хімічним, біологічним змістом); використання математичних методів для аналізу даних; застосування математичного моделювання для опису природних процесів; формування розуміння ролі математики в розвитку науки і технологій тощо.

Математичне мислення розвивається під час аналізу реальних ситуацій, виявлення в них математичних закономірностей, формулювання гіпотез та їх перевірки. Наприклад, при вивченні прогресій учні аналізують закономірності росту населення, зміни курсу валют, розповсюдження інфекцій, що формує здатність бачити математичні структури в повсякденному житті.

Математичне моделювання як ключова складова компетентності передбачає уміння переходити від реальної ситуації до її математичного опису. У старшій школі це реалізується через побудову функціональних моделей економічних процесів, використання тригонометричних функцій для опису коливальних процесів, застосування похідної для розв'язання задач оптимізації. Учні навчаються не лише будувати моделі, але й критично оцінювати їх адекватність, визначати межі застосування.

Математична аргументація формується через систематичну роботу з доведеннями теорем, обґрунтуванням способів розв'язання задач, аналізом логічної структури математичних міркувань. Особливо важливим є розвиток здатності будувати контрприклад, аналізувати помилки в міркуваннях, формулювати власні математичні твердження.

Математична мова як специфічна знакова система вимагає точності, лаконічності, логічності висловлювань. Учні навчаються формулювати

математичні означення, аналізувати текст задачі, виділяти ключову інформацію.

Робота з математичними текстами розвиває здатність до аналітичного читання, формує навички інтерпретації символічної інформації. При розв'язуванні текстових задач учні тренуються у перекладі природної мови на математичну та навпаки. Особливо ефективними є завдання на складання власних задач за заданими умовами, що вимагає точного та зрозумілого формулювання думок.

Презентація розв'язків математичних задач, участь у математичних дискусіях, захист проєктів розвивають навички усного мовлення, формують здатність аргументовано відстоювати власну позицію, ставити запитання, вести діалог.

Компетентності в галузі природничих наук і технологій формуються на уроках математики через усвідомлення її фундаментальної ролі в описі природних явищ і технологічних процесів. Природничо-наукова компетентність у контексті математичної освіти старшої школи передбачає здатність застосовувати математичний апарат для моделювання природних процесів, аналізу експериментальних даних, формулювання й перевірки гіпотез, а також розуміння математики як універсальної мови для опису закономірностей навколишнього світу.

Математичне моделювання природничих процесів уможливлює розуміння глибинних закономірностей функціонування природних систем. Вивчення показникової та логарифмічної функцій супроводжується аналізом процесів радіоактивного розпаду, популяційної динаміки, кінетики хімічних реакцій. Тригонометричні функції застосовуються для опису коливальних, хвильових і періодичних процесів у різних галузях природознавства, що формує інтегроване розуміння міждисциплінарних зв'язків. Статистичні методи обробки природничо-наукових даних розвивають науковий тип мислення через аналіз експериментальних результатів, обчислення похибок вимірювань, перевірку статистичних гіпотез. Старшокласники оволодівають умінням

критично оцінювати достовірність експериментальних даних, розуміти роль стохастичності в природних процесах, що становить основу науково-дослідницької компетентності. Геометричні та векторні методи забезпечують просторове осмислення природничих явищ: аналіз молекулярної геометрії, кристалічних структур, оптичних явищ. Векторний апарат використовується в механіці для математичного опису сил, швидкостей і прискорень, що поглиблює розуміння технологічних застосувань математики в інженерії та прикладних науках.

Сучасна математична освіта старшої школи органічно інтегрує інформаційно-комунікаційні технології як невід'ємний компонент формування інформаційно-цифрової компетентності. Як зазначає Р. Drijvers, цифрові технології значно розширюють можливості математичної освіти, уможлиблюючи візуалізацію абстрактних понять, проведення обчислювальних експериментів і моделювання складних процесів [3].

У контексті математичної освіти інформаційно-цифрова компетентність передбачає здатність використовувати цифрові технології для розв'язування математичних проблем, критично оцінювати інформацію, створювати математичні моделі засобами ІКТ та дотримуватися принципів безпечної цифрової взаємодії.

Спеціалізоване математичне програмне забезпечення (GeoGebra, Wolfram Alpha, Desmos) створює середовище для дослідження властивостей функцій, побудови динамічних графіків і перевірки гіпотез. Робота з цими інструментами формує в старшокласників технологічний компонент інформаційно-цифрової компетентності – уміння обирати й ефективно застосовувати цифрові ресурси для розв'язування математичних проблем. Електронні таблиці застосовуються для опрацювання статистичних даних, моделювання економічних і соціальних процесів, розв'язування систем рівнянь чисельними методами. Учні оволодівають навичками цифрової обробки інформації: структурування даних, створення складних формул, візуалізації через діаграми та аналізу виявлених закономірностей. Основи програмування в

контексті математичної освіти сприяють розвитку обчислювального мислення як складової інформаційно-цифрової компетентності. Створення програмних алгоритмів для розв'язування математичних задач забезпечує синтез абстрактного теоретичного мислення з практичними технологічними навичками, формує розуміння структур даних і логічних операцій. Критичне оцінювання цифрової інформації – ключовий компонент інформаційно-цифрової компетентності – розвивається через аналіз достовірності математичних даних з інтернет-джерел, верифікацію результатів онлайн-калькуляторів, зіставлення альтернативних методів розв'язування задач. Старшокласники набувають досвіду відповідального й усвідомленого використання цифрових математичних ресурсів, що включає дотримання авторських прав, принципів академічної доброчесності та безпеки в цифровому середовищі.

Математика, завдяки своїй логічній структурі та систематичності, є ефективним засобом формування компетентності навчатися впродовж життя. Як зазначають Matvieieva O., Ovcharenko N. та ін., «розвиток компетентності навчатися впродовж життя ... передбачає набуття знань, умінь і звичок, які забезпечують готовність до подальшого навчання, соціалізації та особистісного зростання» [6].

Структурними компонентами цієї компетентності в контексті математичної освіти є: планування власної навчальної діяльності; рефлексія процесу та результатів навчання; самооцінювання математичних досягнень; пошук і використання додаткових джерел математичної інформації.

Метакогнітивні навички розвиваються через рефлексію власного процесу розв'язування задач, аналіз помилок і планування стратегій навчання. Старшокласники оволодівають умінням ставити навчальні цілі, контролювати власний прогрес та коригувати підходи до опанування математичного матеріалу. Здатність до самостійного пошуку інформації формується через дослідницькі завдання, роботу з різноманітними джерелами математичних знань, участь у проєктній діяльності. Учні набувають досвіду пошуку

необхідної математичної інформації, критичного оцінювання її достовірності та систематизації знань. Колаборативні навички розвиваються в процесі групових математичних проєктів, предметних дискусій і взаємонавчання. Старшокласники навчаються обмінюватися знаннями, конструктивно взаємодіяти під час спільного розв'язування математичних проблем, продуктивно долати розбіжності в підходах до виконання завдань.

Ініціативність і підприємливість на уроках математики формується через розв'язування творчих і дослідницьких завдань, участь у проєктній діяльності. Як зазначають дослідники, «викладання математики з елементами підприємливості дозволяє учням генерувати ідеї, планувати діяльність та самостійно долати труднощі» [14]. Ця компетентність в математичній освіті старшої школи передбачає здатність самостійно ініціювати математичні дослідження, генерувати оригінальні ідеї розв'язування проблем, планувати й реалізовувати навчальні проєкти, приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності.

Творче математичне мислення розвивається через розв'язування задач відкритого типу, пошук альтернативних методів, конструювання власних математичних задач. Старшокласники оволодівають умінням розглядати проблеми з множинних перспектив, генерувати нестандартні підходи до розв'язання, що становить креативний компонент підприємливості. Проєктна діяльність математичного спрямування створює простір для реалізації учнівських ініціатив. Створення математичних моделей реальних процесів, дослідження історії математичних відкриттів, розробка навчально-методичних матеріалів формують здатність до самостійної постановки проблем, планування дослідницької діяльності та презентації результатів – ключових складових підприємницького мислення. Підприємницькі навички розвиваються через економіко-математичні проєкти, аналіз бізнес-моделей, моделювання інвестиційних стратегій і фінансових ситуацій. Старшокласники набувають досвіду кількісного оцінювання ризиків, прийняття математично обґрунтованих

рішень в умовах невизначеності, оптимізації використання ресурсів – умінь, що є основою підприємницької компетентності в сучасному світі.

Екологічна грамотність і здорове життя як компетентність формується засобами математики через розв'язування задач з екологічним контекстом, аналіз статистичних даних про стан довкілля, моделювання природних і антропогенних процесів. Як зауважують Лаврик В. І. та Боголюбов В. М., методами математичного моделювання в екологічній освіті забезпечується здатність аналізувати екологічні проблеми й приймати обґрунтовані рішення [35].

Математичне моделювання екологічних процесів використовує функціональний апарат для опису динаміки популяцій, процесів забруднення довкілля, кліматичних змін. Старшокласники оволодівають умінням прогнозувати екологічні наслідки людської діяльності, кількісно оцінювати ефективність природоохоронних заходів, що формує аналітичний компонент екологічної свідомості. Статистичний аналіз екологічних даних розвиває здатність до критичного сприйняття екологічної інформації, виявлення тенденцій і закономірностей у стані довкілля. Робота з реальними даними моніторингу якості повітря, водних ресурсів, біорізноманіття поєднує математичні компетентності з формуванням екологічно відповідальної позиції. Оптимізаційні задачі екологічного змісту навчають математично обґрунтовувати баланс між економічними й екологічними інтересами, знаходити оптимальні рішення в умовах обмежених ресурсів. Моделювання раціонального споживання ресурсів, підвищення енергоефективності, організації переробки відходів формує розуміння математичних засад концепції сталого розвитку та особистої відповідальності за стан довкілля.

Компетентнісний підхід у математичній освіті старшої школи передбачає кардинальну зміну цілей, змісту та методів навчання. Основна увага має приділятися не стільки засвоєнню готових знань, скільки формуванню здатності застосовувати ці знання для розв'язання реальних проблем. Це вимагає використання активних методів навчання, зокрема прикладних задач,

які дозволяють поєднати теоретичні знання з практичними потребами та забезпечити комплексне формування всіх ключових компетентностей.

Математична освіта в старшій школі має стати не лише засобом передачі математичних знань, але й потужним інструментом особистісного розвитку учнів, формування їхньої готовності до життя в сучасному світі. Саме такий підхід відповідає вимогам часу та забезпечує реалізацію основних цілей Нової української школи.

fizmat@sspi.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
доброчесності

1.2. Прикладні задачі як дидактичний засіб навчання математики

Сучасна математична освіта потребує переосмислення підходів до навчання, зокрема, посилення зв'язку теоретичних знань з практичним життям. Одним із ефективних засобів реалізації цього завдання є використання прикладних математичних задач, які демонструють учням практичну цінність математичних знань і сприяють формуванню вміння застосовувати їх у реальних ситуаціях. У контексті реформування освіти України та впровадження компетентнісного підходу роль прикладних задач значно зростає, оскільки вони стають інструментом формування ключових компетентностей учнів.

У сучасній українській педагогічній науці та методиці навчання математики поняття прикладної задачі розглядається як важливий інструмент формування математичної компетентності учнів, розвитку їх здатності застосовувати набуті знання в реальних або наближених до реальних ситуаціях. Прикладна математична задача є особливим типом навчальних завдань, що відрізняється від суто абстрактних математичних задач своїм змістом і спрямованістю на практичне застосування. У науковій літературі існують різні підходи до визначення цього поняття.

Під *прикладною задачею* розуміють математичну задачу, яка виникає з конкретного життєвого, побутового, технічного чи соціального контексту та потребує формулювання математичної моделі, її розв'язування та інтерпретації результатів [25]. За визначенням Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швеця В.О., *прикладна задача* — це задача, що виникає за межами математики, але розв'язується з використанням математичного апарату. [50] Такі підходи підкреслюють міждисциплінарний характер прикладних задач і необхідність перекладу реальної ситуації на мову математики. У шкільній практиці також уживаються близькі терміни: «задачі практичного змісту» та «прикладні задачі», які акцентують відповідно на побутовому та міжпредметному аспектах застосування математики [55].

Вітчизняні дослідники виділяють два основні підходи до використання прикладних задач. Діяльнісний підхід зосереджується на оволодінні учнями

повним циклом математичного моделювання — від аналізу реальної ситуації до побудови моделі, її дослідження та інтерпретації розв'язку [20]. Сюжетний підхід надає більшої ваги контексту та мотиваційному потенціалу задачі, акцентуючи на її фабулі, яка наближена до життєвих ситуацій учнів [29]. Прикладні задачі спонукають думати, знаходити різні методи для розв'язання, сприяють розвитку мислення та інтуїції та допомагають знайти їх практичне значення в повсякденному житті. [33].

У міжнародному контексті концепція прикладних задач тісно пов'язана з поняттям математичної грамотності, визначеної у програмах PISA як здатність формулювати, застосовувати та інтерпретувати математику у різних особистих, суспільних, професійних та наукових контекстах [9]. У рамках оцінювання PISA особлива увага приділяється завданням із реального життя, які потребують математичного моделювання та дозволяють перевірити здатність учня переносити знання на нові ситуації [10]. Подібні принципи реалізовано в стандартах NCTM (США), де застосування математики та розв'язування задач реального змісту розглядаються як ключовий компонент навчального процесу [8].

Узагальнюючи ці підходи, можна сформулювати таке визначення: *прикладна математична задача* – це навчальне завдання, яке містить опис реальної або модельованої ситуації з практики людської діяльності, яке вимагає застосування математичних методів для її аналізу та розв'язання, з подальшою інтерпретацією результатів у контексті вихідної ситуації.

Необхідно зазначити, що процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання:

- *створення математичної моделі* (формалізований опис ситуації мовою математики (рівняння, нерівності, функції, геометричні фігури тощо);
- *дослідження математичної моделі* (застосування математичних методів і алгоритмів для знаходження відповіді);

- *інтерпретація розв'язків* (повернення до вихідного контексту, аналіз отриманого розв'язку з точки зору його практичної доцільності та реалістичності). [54]

Важливою ознакою прикладної задачі є її *прикладна спрямованість*, яка виявляється в орієнтації цілей, змісту та методів навчання математики на встановлення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків із практикою, а також у формуванні в учнів знань, умінь і навичок математичної діяльності, що мають безпосереднє застосування в повсякденному житті та майбутній професійній діяльності. [55] Це відрізняє справжні прикладні задачі від традиційних текстових задач, які часто містять лише формальний життєвий контекст.

Специфіка прикладних задач полягає також у тому, що вони часто не мають єдиного правильного розв'язку, а результат залежить від обраної моделі та зроблених припущень. Це наближає навчальну діяльність до реальної наукової та практичної роботи, де однозначні відповіді є радше винятком, ніж правилом.

Класифікація прикладних задач

Різноманітність прикладних математичних задач зумовлює необхідність їх систематизації за різними критеріями. Науково обґрунтована класифікація допомагає вчителю свідомо добирати задачі відповідно до дидактичних цілей, рівня підготовки учнів та специфіки навчального матеріалу.

Прикладні задачі можна класифікувати *за галузями знань і сферами людської діяльності*, в яких виникають ситуації, що потребують математичного моделювання.

Таблиця 2. Класифікація прикладних задач за сферою застосування

Назва	Зміст	Приклади
Фізичні задачі	описують механічний рух, теплові процеси, електричні явища, оптику тощо	розрахунок швидкості руху тіла при рівноприскореному русі, визначення сили струму в електричному колі, аналіз траєкторії польоту снаряда.
Економічні задачі	включають задачі на відсотки (банківські вклади, кредити,	визначення найвигіднішого варіанту кредитування,

	інфляція), оптимізацію виробництва, аналіз попиту та пропозиції, розрахунок прибутку та рентабельності.	розрахунок оптимального обсягу виробництва продукції, аналіз економічної ефективності бізнес-проєкту
Екологічні задачі	відображають актуальні проблеми охорони довкілля та раціонального використання природних ресурсів. Вони можуть стосуватися моделювання зростання популяцій, розрахунку забруднення атмосфери або водойм, прогнозування екологічних наслідків господарської діяльності.	визначення часу самоочищення водойми, розрахунок концентрації шкідливих речовин у повітрі залежно від відстані від джерела викидів
Соціальні задачі	пов'язані з демографічними процесами, організацією транспорту, плануванням міської інфраструктури, соціологічними дослідженнями	аналіз статистики захворюваності, оптимізація маршрутів громадського транспорту, прогнозування чисельності населення
Технічні задачі	описують проєктування конструкцій, розрахунок параметрів механізмів, оптимізацію технологічних процесів	визначення оптимальних розмірів ємності заданого об'єму при мінімальній витраті матеріалу, розрахунок навантажень на конструкції, проєктування зубчастих передач
Медико-біологічні задачі	стосуються процесів у живих організмах, розповсюдження хвороб, дії ліків	розрахунок дозування ліків залежно від ваги пацієнта, моделювання розповсюдження епідемій, аналіз росту мікроорганізмів
Геометричні задачі прикладного характеру	пов'язані з вимірюваннями на місцевості, будівництвом, картографією	визначення висоти об'єкта за кутом піднесення, розрахунок площі земельної ділянки, визначення відстаней на карті

За *рівнем складності* прикладні задачі можна поділити на кілька категорій, які відрізняються кількістю кроків розв'язання, ступенем абстрактності та новизни ситуації.

Задачі початкового рівня (рівень розпізнавання) – це задачі, в яких математична модель фактично задана, потрібно лише розпізнати тип задачі та застосувати відомий алгоритм розв'язання. Наприклад: "Знайдіть масу залізної деталі об'ємом 200 см^3 , якщо щільність заліза $7,8 \text{ г/см}^3$ ". У такій задачі чітко вказано, які величини відомі, і достатньо підставити числа у формулу $m = \rho V$.

Задачі середнього рівня (рівень відтворення) вимагають самостійного вибору математичної моделі серед кількох відомих, можливо, поєднання кількох методів. Учень повинен проаналізувати ситуацію, визначити, які математичні знання потрібно застосувати. Приклад: "Фермер має 100 м огорожі і хоче огородити прямокутну ділянку найбільшої площі. Які розміри повинна мати ця ділянка?" Тут потрібно скласти функцію площі, врахувати обмеження на периметр і знайти максимум функції.

Задачі достатнього рівня (рівень застосування) характеризуються необхідністю побудови власної математичної моделі в нестандартній ситуації, використанням комбінації різних методів, проведенням дослідження. Учень має самостійно виділити суттєві зв'язки, зробити обґрунтовані спрощення, обрати адекватні математичні засоби. Наприклад: "Підприємство виробляє два види продукції. На виготовлення одиниці першого виду потрібно 2 год роботи верстата А і 1 год верстата Б, на виготовлення одиниці другого виду – 1 год верстата А і 3 год верстата Б. Загальний фонд робочого часу верстата А – 100 год, верстата Б – 120 год. Прибуток від реалізації одиниці першого виду – 30 грн, другого – 40 грн. Скільки одиниць кожного виду продукції слід виготовити, щоб отримати максимальний прибуток?"

Задачі високого рівня (творчий рівень) – це задачі дослідницького характеру, які не мають однозначного розв'язку, вимагають формулювання власних припущень, побудови кількох альтернативних моделей, критичного аналізу отриманих результатів. Такі задачі наближені до реальних наукових і професійних проблем. Приклад: "Дослідіть, як зміна ставки кредиту впливає на доступність житла для молодих сімей у вашому регіоні. Розробіть рекомендації щодо оптимальної стратегії накопичення та кредитування."

За **характером математичних методів** (за способом розв'язання), що використовуються для розв'язання, прикладні задачі можна класифікувати наступним чином:

Алгебраїчні задачі розв'язуються за допомогою складання та розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь. Це найпоширеніший тип прикладних

задач у шкільному курсі математики. Приклади: задачі на рух, на суміші та сплави, на спільну роботу, на відсотки.

Функціональні задачі передбачають дослідження функціональних залежностей між величинами, побудову та аналіз графіків функцій, знаходження найбільшого і найменшого значень функцій. Наприклад: моделювання залежності прибутку від обсягу виробництва, дослідження коливань температури протягом доби, аналіз попиту залежно від ціни.

Задачі на оптимізацію становлять важливий клас прикладних задач, де потрібно знайти найкращий розв'язок за певним критерієм (максимум прибутку, мінімум витрат, найкоротший час тощо). Розв'язуються методами дослідження функцій на екстремум, застосуванням похідної, методами лінійного програмування.

Геометричні задачі використовують властивості геометричних фігур, формули для обчислення довжин, площ, об'ємів, тригонометричні співвідношення. Приклади: геодезичні задачі, задачі на побудову та проєктування.

Задачі з теорії ймовірностей і математичної статистики включають обчислення ймовірностей подій, статистичну обробку даних, аналіз та інтерпретацію статистичної інформації. Приклади: оцінка ризиків, прогнозування на основі статистичних даних, аналіз результатів опитувань.

Комбінаторні задачі пов'язані з підрахунком кількості способів здійснення певної дії, розміщенням об'єктів, плануванням. Наприклад: складання розкладу, оптимізація маршрутів, планування турнірів.

Задачі на прогресії описують процеси рівномірного або прискореного зростання: накопичення за складними відсотками, зростання популяцій, розповсюдження інформації.

Окремої уваги заслуговує класифікація прикладних задач **за типом математичної діяльності**, яку виконує учень у процесі розв'язування. Ця класифікація має важливе методичне значення, оскільки допомагає вчителю

цілеспрямовано формувати різні аспекти математичної компетентності. Представимо цю класифікацію у вигляді таблиці (табл. 3).

Таблиця 3. Класифікація прикладних задач за характером математичної діяльності

Тип задачі	Характеристика	Приклади математичних дій	Приклад ситуації
Обчислювальні задачі	Задачі на визначення числових значень величин, що зустрічаються в практичній діяльності	Підстановка в формули, виконання арифметичних операцій, перетворення одиниць вимірювання	Розрахунок вартості ремонту приміщення, визначення маси конструкції, обчислення площі земельної ділянки
Задачі на складання розрахункових таблиць	Систематизація обчислень для серії значень параметрів	Організація даних, виконання повторюваних обчислень, виявлення закономірностей	Таблиця залежності вартості товару від знижки, таблиця амортизації кредиту, розрахунок заробітної плати
Задачі на графічне представлення даних	Візуалізація числової інформації та функціональних залежностей	Побудова графіків функцій, полігонів частот, гістограм, секторних діаграм	Побудова графіка зміни температури протягом доби, візуалізація структури витрат сімейного бюджету
Задачі на застосування емпіричних залежностей	Використання та обґрунтування формул, встановлених дослідним шляхом	Інтерпретація формул, підстановка значень, перевірка меж застосовності	Використання формули Герона для розрахунку площі, застосування закону Ома, формула Торрічеллі
Задачі на виведення формул	Встановлення аналітичних залежностей між величинами на основі аналізу практичної ситуації	Виявлення зв'язків між змінними, складання рівнянь, узагальнення	Виведення формули витрати матеріалу залежно від розмірів виробу, формули залежності прибутку від ціни
Задачі на математичне моделювання	Побудова математичної моделі реального процесу або явища	Формалізація ситуації, вибір змінних, встановлення співвідношень, спрощення	Моделювання руху тіла під дією сили тяжіння, модель попиту та пропозиції, модель розповсюдження інфекції
Оптимізаційні задачі	Знаходження найкращого розв'язку за заданим критерієм серед множини допустимих варіантів	Дослідження функції на екстремум, застосування похідної, аналіз обмежень	Визначення оптимальних розмірів упаковки, максимізація прибутку, мінімізація витрат палива
Задачі на прогнозування	Передбачення майбутніх значень величин на основі аналізу тенденцій	Екстраполяція, побудова трендів, апроксимація даних	Прогноз чисельності населення, передбачення обсягів продажу, оцінка майбутньої вартості активів
Задачі на інтерпретацію та аналіз даних	Критичне осмислення представленої інформації, виявлення закономірностей	Читання графіків і таблиць, порівняння даних, формулювання висновків	Аналіз статистики захворюваності, інтерпретація результатів соціологічного опитування, аналіз фінансової звітності
Імовірнісно-	Робота з випадковими	Обчислення	Оцінка ризику інвестицій,

Тип задачі	Характеристика	Приклади математичних дій	Приклад ситуації
статистичні задачі	величинами, оцінка ймовірностей, статистична обробка даних	ймовірностей, визначення статистичних характеристик, перевірка гіпотез	розрахунок ймовірності виграшу, статистичний контроль якості продукції
Задачі на верифікацію моделей	Перевірка адекватності побудованої математичної моделі реальності	Порівняння модельних і реальних даних, оцінка похибок, аналіз меж застосовності	Перевірка точності формули наближеного обчислення, оцінка адекватності економічної моделі
Дослідницькі задачі	Самостійне вивчення математичних закономірностей у реальних ситуаціях	Формулювання гіпотез, планування експерименту, аналіз результатів, узагальнення	Дослідження залежності витрат палива від швидкості руху, вивчення факторів впливу на врожайність
Задачі на прийняття рішень	Вибір оптимальної стратегії дій за наявності альтернатив	Порівняльний аналіз варіантів, застосування критеріїв вибору, обґрунтування рішення	Вибір найвигіднішого кредиту, визначення оптимальної інвестиційної стратегії, вибір тарифного плану

Така класифікація дозволяє системно підійти до формування різних аспектів математичної компетентності учнів: обчислювальні задачі розвивають технічні навички та вміння працювати з даними, задачі на моделювання та дослідження формують здатність до абстрагування та формалізації, оптимізаційні та прогностичні задачі розвивають аналітичне мислення та здатність до передбачення, задачі на інтерпретацію та прийняття рішень формують критичне мислення та практичну мудрість, імовірісно-статистичні задачі розвивають стохастичне мислення, необхідне для роботи в умовах невизначеності.

Важливо наголосити, що ці класифікації не є жорсткими: кожна задача може належати одночасно до кількох класів за різними критеріями, що відображає багатогранність зв'язків математики з практикою. Така багатовимірна класифікація дозволяє систематизувати різноманітні прикладні задачі та свідомо підходити до їх добору в навчальному процесі.

Функції прикладних задач у навчальному процесі

Прикладні математичні задачі виконують численні дидактичні функції в процесі навчання математики, які тісно взаємопов'язані та доповнюють одна

одну. Розуміння цих функцій допомагає вчителю цілеспрямовано використовувати прикладні задачі для досягнення різноманітних навчальних цілей. У контексті компетентнісного підходу до освіти можна виділити чотири ключові функції прикладних задач: мотиваційну, компетентнісну, розвивальну та інтеграційну. [48; 49; 24].

Мотиваційна функція прикладних задач полягає в підвищенні інтересу учнів до вивчення математики через демонстрацію її практичної значущості та особистісної релевантності. Це одна з найважливіших функцій, оскільки мотивація є рушійною силою навчальної діяльності та передумовою глибокого засвоєння знань.

Психологічні дослідження (А.К. Маркова, Г.І. Шукіна, Л.С. Виготський) показують, що засвоєння стає ефективнішим, коли учень розуміє особистісну значущість того, що вивчається. Прикладні задачі створюють особистісний сенс навчання, оскільки стосуються реальних життєвих ситуацій, з якими учні можуть зіткнутися або вже стикалися: планування бюджету, вибір тарифів, оцінка ризиків, розрахунки при ремонті чи будівництві.

Мотивуючий ефект посилюється, коли прикладні задачі відображають актуальні проблеми сучасності, близькі досвіду учнів: економічні питання (інвестування, підприємництво), екологічні виклики (зміна клімату, забруднення), питання здоров'я (пандемії, здоровий спосіб життя), технологічні інновації (штучний інтелект, цифрові технології) тощо. Задачі, пов'язані з професійною діяльністю, яка цікавить учня, також мають високий мотиваційний потенціал і сприяють професійному самовизначенню.

Важливим аспектом мотиваційної функції є формування позитивного емоційного ставлення до математики. Успішне розв'язання прикладної задачі, особливо коли результат можна побачити або відчувати на практиці, викликає почуття задоволення, впевненості у своїх силах, академічної самоефективності. Ці позитивні емоції асоціюються з математичною діяльністю і підвищують загальну мотивацію до вивчення предмета.

Прикладні задачі також сприяють розвитку внутрішньої пізнавальної мотивації – бажання зрозуміти, дослідити, пізнати нове заради самого процесу пізнання. Цікава реальна ситуація пробуджує допитливість, стимулює пошук додаткової інформації, спонукає до самостійного вивчення суміжних питань. Наприклад, задача про оптимальну форму бджолиних стільників може викликати інтерес до вивчення властивостей правильних багатокутників і принципу оптимальності в природі, що виходить за межі формальної програми.

Компетентнісна функція прикладних задач полягає у формуванні здатності застосовувати математичні знання, уміння та навички в нових, нестандартних ситуаціях, що виходять за межі типових навчальних завдань. Це відповідає сутності компетентності як інтегрованої характеристики особистості, що включає не лише знання, але й уміння їх мобілізувати та застосовувати в конкретних життєвих і професійних контекстах.

Формування ключових компетентностей реалізується через систематичну роботу з прикладними задачами, які вимагають:

- *трансферу знань* – перенесення засвоєних математичних методів у нові предметні області. Учень повинен розпізнати, що задача про зростання популяції бактерій і задача про нарахування складних відсотків мають однакову математичну структуру (показникова функція), незважаючи на різні контексти;
- *адаптації алгоритмів* – пристосування загальних методів розв'язування до специфіки конкретної ситуації. Стандартний алгоритм розв'язування квадратного рівняння потрібно адаптувати до задачі з реальними обмеженнями (наприклад, розв'язок має бути додатним і цілим);
- *самостійного вибору методів* – визначення, які математичні інструменти доцільно застосувати в конкретній ситуації. На відміну від типових задач, де метод часто визначається темою уроку, прикладні задачі вимагають самостійного аналізу та вибору стратегії.

Розвиток функціональної математичної грамотності – здатності розуміти роль математики в світі, висловлювати обґрунтовані судження та використовувати математику для задоволення потреб свідомого громадянина –

є ключовим аспектом компетентнісної функції. Прикладні задачі формують такі компоненти функціональної грамотності:

- *уміння інтерпретувати математичну інформацію* (графіки, таблиці, діаграми) в засобах масової інформації, рекламі, фінансових документах.
- *здатність критично оцінювати* числові дані та статистичні твердження, виявляти маніпуляції і викривлення інформації.
- *навички обґрунтованого прийняття рішень* на основі математичного аналізу альтернатив (вибір кредиту, тарифного плану, інвестиційної стратегії).
- *уміння використовувати цифрові інструменти* для розв'язання практичних задач (електронні таблиці, онлайн-калькулятори, спеціалізоване програмне забезпечення).

Формування ключових компетентностей, визначених Державним стандартом освіти, відбувається через прикладні задачі комплексно:

- Математична компетентність – безпосередньо через застосування математичних методів до розв'язання практичних проблем.
- Цифрова компетентність – через використання комп'ютерних технологій для обробки даних, моделювання, візуалізації результатів.
- Підприємливість та фінансова грамотність – через розв'язування економічних задач, планування бюджету, аналіз інвестицій.
- Екологічна грамотність – через задачі екологічного змісту, розуміння глобальних екологічних проблем і способів їх вирішення.

Підготовка до професійної діяльності реалізується через розв'язування задач, пов'язаних з різними професіями. Учні отримують уявлення про те, як математика застосовується в інженерії, економіці, медицині, інформаційних технологіях, будівництві, що сприяє усвідомленому професійному самовизначенню та формує готовність до використання математичних методів у майбутній професії.

Розвивальна функція прикладних задач полягає у формуванні та розвитку інтелектуальних умінь, мислиннєвих операцій, пізнавальних здібностей учнів. Процес розв'язування прикладних задач якісно відрізняється від розв'язування

суто математичних задач і вимагає більш різноманітних і складних розумових дій, що сприяє когнітивному розвитку особистості.

Розвиток критичного мислення є пріоритетним напрямом розвивальної функції. підкритичним мисленням ми розуміємо окремий тип мислення, який обумовлює цілеспрямовану продуктивну розумову діяльність, що характеризується здатністю людини чітко виділяти проблему, яку необхідно розв'язати; самостійно знаходити, обробляти й аналізувати інформацію; логічно вибудовувати свої думки та обґрунтовувати їх, мислити мобільно, прагнути до пошуку оптимальних рішень, уміти відстоювати свою власну позицію, бути відкритим до сприймання інших поглядів (рис.2). [57]

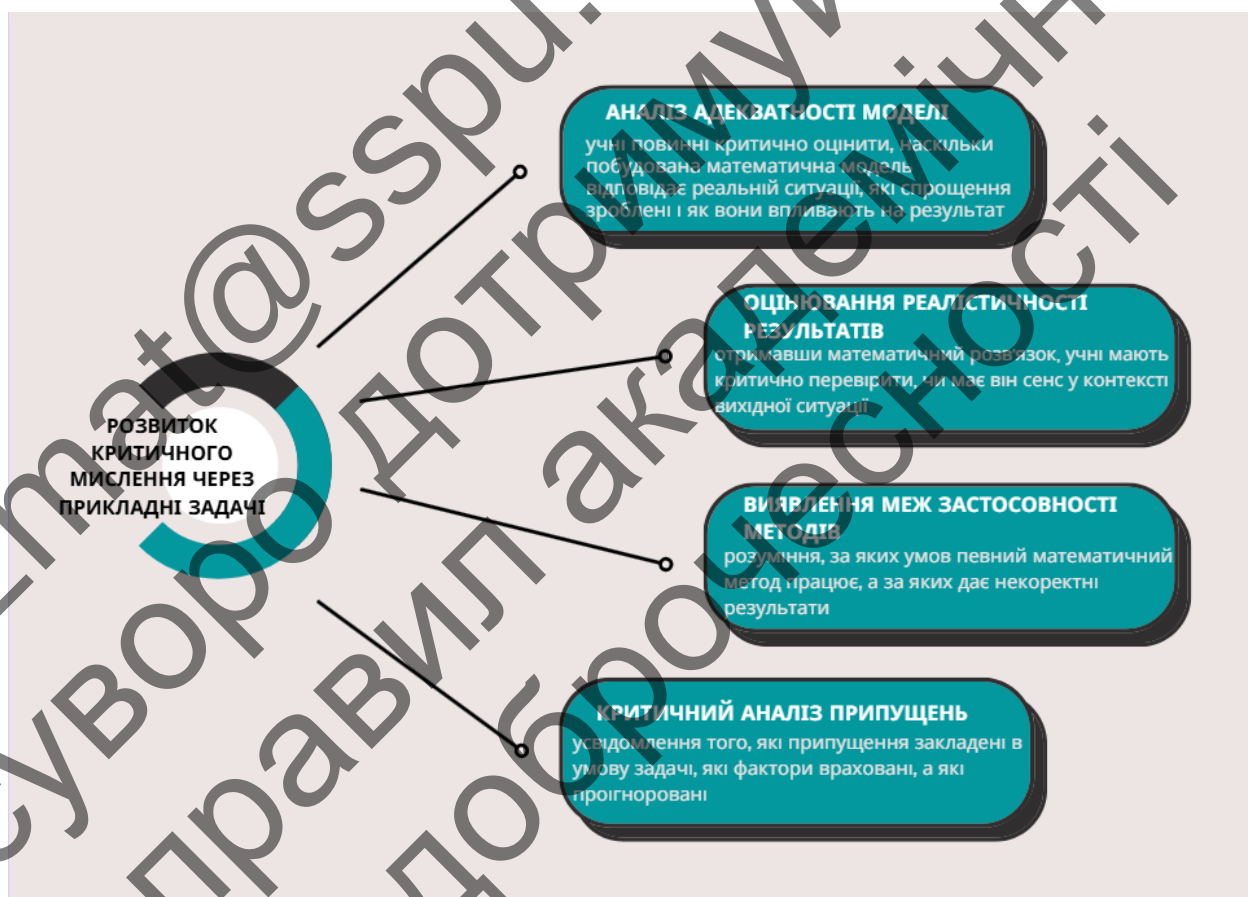


Рис. 2. Розвиток критичного мислення через прикладні задачі [59]

Розвиток творчого мислення стимулюється відкритим характером багатьох прикладних задач. На відміну від типових шкільних задач з єдиною правильною відповіддю, прикладні задачі часто допускають множинність підходів до розв'язання (одну й ту саму практичну проблему можна розв'язати різними математичними методами); варіативність розв'язків (залежно від

обраної моделі та зроблених припущень можна отримати різні результати, кожен з яких має право на існування); необхідність інновацій (нестандартні ситуації вимагають творчого підходу, пошуку оригінальних рішень, комбінування відомих методів у новий спосіб).

Формування системного мислення забезпечується через розгляд об'єктів і явищ у взаємозв'язку. Багато прикладних задач описують складні системи з багатьма взаємодіючими компонентами (економічні системи, екосистеми, технічні комплекси), що вимагає холістичного бачення (розуміння системи як цілісності, а не простої суми частин); виявлення причинно-наслідкових зв'язків (розуміння, як зміна одного параметра впливає на інші елементи системи); прогнозування системних ефектів (передбачення наслідків втручання в систему, можливих побічних ефектів).

Розвиток вміння моделювати є ключовим аспектом розвивальної функції (рис. 3).



Рис. 3. Математичне моделювання як ключовий аспект розвивальної функції прикладних задач [58]

Систематична робота з прикладними задачами формує вміння будувати моделі різної складності, що є важливою загальноінтелектуальною компетентністю, затребуваною в науковій і професійній діяльності.

Формування дослідницьких умінь відбувається через виконання завдань дослідницького характеру: "Дослідіть, як зміна параметра А впливає на величину Б", "Визначте оптимальні умови для...", "Порівняйте ефективність різних варіантів...". Учні вчаться формулювати дослідницькі питання і гіпотези, планувати дослідження – визначати, які дані потрібні, як їх отримати, аналізувати результати – виявляти закономірності, тенденції, винятки, формулювати висновки – узагальнювати результати, оцінювати підтвердження або спростування гіпотез.

Інтеграційна функція прикладних задач полягає у встановленні та усвідомленні учнями різноманітних зв'язків: між математикою та іншими науками, між різними розділами математики, між теорією та практикою, між навчальною діяльністю та реальним життям. Ця функція має особливе значення в контексті сучасних освітніх тенденцій, які наголошують на необхідності міжпредметної інтеграції та формування цілісної картини світу.

Забезпечення міжпредметних зв'язків є центральним аспектом інтеграційної функції. Прикладні задачі природно поєднують математику з іншими дисциплінами. Такі міжпредметні задачі допомагають учням побачити єдність наукового знання, усвідомити, що різні науки вивчають різні аспекти єдиної реальності і використовують спільні методи пізнання; зрозуміти універсальність математики; поглибити розуміння обох дисциплін; підвищити мотивацію до вивчення різних предметів.

Встановлення внутрішньопредметних зв'язків забезпечується тим, що розв'язування однієї прикладної задачі часто потребує комплексного застосування знань з різних розділів математики. Наприклад, задача оптимізації може вимагати складання функції (алгебра), дослідження її за допомогою похідної (математичний аналіз), геометричної інтерпретації результату (геометрія) і статистичної перевірки моделі (теорія ймовірностей). Це сприяє

систематизації знань (учні бачать, як різні теми курсу пов'язані між собою), формуванню цілісного уявлення про математику (математика постає не як набір окремих розділів, а як єдина наука), розвитку здатності до синтезу (вміння поєднувати знання з різних тем для розв'язання комплексної проблеми).

Інтеграція теорії та практики відбувається через демонстрацію застосування теоретичних знань для розв'язання практичних проблем. Учні усвідомлюють, що абстрактні математичні поняття мають конкретне практичне значення (похідна описує швидкість зміни процесів, інтеграл – накопичення величин, вектори – фізичні величини, що мають напрям); теорія є інструментом пізнання і перетворення реальності (математичні теореми та методи дозволяють розв'язувати реальні проблеми, передбачати явища, оптимізувати процеси); практика стимулює розвиток теорії (багато математичних понять виникли з потреб практики).

Формування цілісної картини світу забезпечується через розгляд різноманітних аспектів реальності за допомогою єдиного математичного підходу. Учні бачать, що математичні закономірності універсальні (показниковий ріст описує і розмноження бактерій, і нарахування відсотків, і радіоактивний розпад); світ є системним і взаємопов'язаним (зміни в одній сфері (наприклад, економічній) впливають на інші (соціальну, екологічну)); наука дає могутні інструменти розуміння світу (математичне моделювання дозволяє передбачати майбутнє, аналізувати складні процеси, приймати обґрунтовані рішення).

Розвиток метапредметних компетентностей відбувається через формування універсальних способів діяльності, які застосовуються не лише в математиці, але й в інших предметах та житті:

- Аналіз інформації (виділення суттєвого, структурування, узагальнення);
- Моделювання (побудова спрощених уявлень складної реальності для її дослідження);
- Прогнозування (передбачення розвитку ситуацій на основі виявлених закономірностей);

- Прийняття рішень (вибір оптимального варіанта дій на основі раціонального аналізу);
- Аргументація (обґрунтування власної позиції за допомогою логічних міркувань і фактів);
- Презентація результатів (представлення інформації в різних формах (текст, таблиці, графіки, діаграми)).

Інтеграційна функція також проявляється в мотивації вивчення інших предметів. Учні, розв'язуючи прикладні задачі, часто відчують потребу в додаткових знаннях з інших галузей, що стимулює їх до поглибленого вивчення відповідних дисциплін і формує внутрішню мотивацію до всебічної освіти.

Отже, ці функції прикладних задач – мотиваційна, компетентнісна, розвивальна та інтеграційна – утворюють єдину систему, що забезпечує всебічний розвиток особистості учня і формування готовності до успішної життєдіяльності в сучасному суспільстві. Ефективність реалізації цих функцій залежить від систематичного та методично продуманого використання прикладних задач на всіх етапах навчання математики.

Вимоги до прикладних задач для старшокласників

Ефективність використання прикладних задач у навчальному процесі значною мірою залежить від того, наскільки вони відповідають певним дидактичним, психологічним та методичним вимогам. Для старшокласників, які перебувають на етапі формування абстрактного мислення та професійного самовизначення, ці вимоги мають свою специфіку. Візьмемо за основу методичні вимоги до прикладних задач, описані Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. в [55] та дещо розширимо їх.

1) Достовірність та реалістичність

Прикладні задачі повинні описувати реальні або максимально наближені до реальності ситуації. Дані, використані в задачі (числові значення величин, співвідношення, закономірності), мають відповідати дійсності або є реалістичними. Реалістичність контексту передбачає, що описана ситуація є типовою для реального життя і може дійсно виникнути на практиці. Штучні,

надумані сюжети, які лише формально містять життєвий контекст, але насправді далекі від реальності, не виконують своїх функцій і можуть викликати у учнів скептичне ставлення до "практичності" математики.

2) Доступність та відповідність віковим особливостям учнів

Прикладні задачі для старшокласників повинні відповідати рівню їх математичної підготовки та загального розвитку. Математичні методи, необхідні для розв'язання, мають бути відомими учням або такими, що можуть бути засвоєні в зоні найближчого розвитку з допомогою вчителя. Контекстна доступність означає, що ситуація, описана в задачі, має бути зрозумілою для учнів. Якщо задача використовує поняття з інших галузей знань (фізика, економіка, біологія), ці поняття повинні бути або вже відомими учням, або доступно поясненими в умові задачі. Занадто спеціалізовані, вузькопрофесійні задачі, які вимагають глибоких знань у певній галузі, не підходять для загальноосвітньої школи.

Прикладні задачі повинні враховувати психологічні особливості старшокласників (розвинене абстрактне мислення, здатність до теоретичних узагальнень, критичне ставлення до інформації, формування життєвих планів і професійних інтересів), бути достатньо складними і нешаблонними, щоб викликати інтелектуальний інтерес; містити можливість для самостійного дослідження та прийняття рішень; бути пов'язаними з актуальними для старшокласників проблемами та їх майбутньою діяльністю.

3) Актуальність та сучасність

Прикладні задачі повинні відображати сучасний стан науки, техніки, економіки, соціального життя. Задачі про застарілі технології, архаїчні економічні реалії або віджилі соціальні ситуації не викликають інтересу у сучасних учнів і не сприяють формуванню адекватного уявлення про роль математики в сучасному світі. Актуальність тематики означає, що задачі стосуються проблем, які є значущими для сучасного суспільства: екологічні виклики, цифрові технології, фінансова грамотність, здоров'я, інформаційна безпека, глобалізація, інновації тощо. Задачі, пов'язані з такими темами, не

лише навчають математики, але й сприяють формуванню громадянської позиції, відповідального ставлення до глобальних проблем.

Для старшокласників особливо актуальні задачі, що стосуються підготовки до самостійного життя: фінансового планування, вибору освітньої траєкторії, економічних розрахунків, пов'язаних з майбутньою професією. Такі задачі мають практичну цінність і допомагають у дорослішанні та адаптації до дорослого життя.

4) Дидактична цілеспрямованість

Кожна прикладна задача повинна мати чітку дидактичну мету: формування певних понять, засвоєння методів розв'язування, розвиток певних умінь, застосування теорії до практики. Задача не повинна бути включеною в навчальний процес лише заради "практичності" без зв'язку з програмовим матеріалом. Методична доцільність означає, що задача органічно вписується в логіку вивчення теми, сприяє досягненню навчальних цілей уроку або теми, узгоджується з етапом навчання (введення нового матеріалу, закріплення, застосування, узагальнення, контроль).

Прикладні задачі можуть використовуватися для мотивації вивчення нового матеріалу (створення проблемної ситуації, яка вимагає нових знань), для ілюстрації теоретичного матеріалу (демонстрація застосування вивчених понять і методів), для закріплення та застосування знань, для узагальнення та систематизації (комплексне застосування знань з різних тем), для контролю та оцінювання навчальних досягнень.

5) Коректність математичної моделі

Математична модель, яка використовується або будується в процесі розв'язування прикладної задачі, повинна бути науково коректною та адекватною описуваній ситуації. Спрощення, які робляться при побудові моделі, мають бути обґрунтованими і не спотворювати суті явища.

Для старшокласників важливо не лише розв'язати задачу, але й усвідомити межі застосовності моделі, зрозуміти, які фактори враховані, а які знехтувані, яким чином спрощення впливають на точність результату. Це формує критичне

мислення та наукове розуміння процесу моделювання. Обов'язковою вимогою до прикладних задач є несуперечливість даних - усі числові дані, одиниці вимірювання, співвідношення мають бути узгодженими між собою. Помилки в даних не лише ускладнюють розв'язування, але й підривають довіру до математичного моделювання.

6) Варіативність та дослідницький потенціал

Прикладні задачі для старшокласників бажано формулювати так, щоб вони допускали можливість дослідження, а не лише отримання однозначної відповіді на поставлене запитання. Запитання типу "Дослідіть залежність...", "Порівняйте різні варіанти...", "За яких умов...", "Яке рішення буде оптимальним..." стимулюють дослідницьку діяльність. А можливість різних підходів до розв'язання, різних інтерпретацій результату (відкритість задач) сприяє розвитку творчого мислення. Задачі, які мають кілька альтернативних розв'язків або вимагають прийняття рішення за певними критеріями, наближені до реальних життєвих і професійних ситуацій. Можливість ускладнення або модифікації задачі дозволяє диференціювати навчання: сильніші учні можуть розглянути більш складний варіант, додаткові умови, альтернативні моделі. Це забезпечує індивідуальний підхід і підтримує високий рівень мотивації всіх учнів.

7) Раціональна складність

Прикладні задачі не повинні бути ні занадто простими, ні надмірно складними. Оптимальна складність – це така, яка вимагає від учнів інтелектуальних зусиль, але є подоланною при мобілізації наявних знань і умінь, можливо з деякою допомогою вчителя. Для старшокласників прийнятна багатокрокова структура розв'язування, необхідність комбінування різних методів, проведення дослідження. Однак громіздкі обчислення, які не несуть навантаження в плані розуміння суті методу, а лише забирають час, краще мінімізувати або дозволити використання калькулятора, комп'ютера. Технічна складність (обчислення) та концептуальна складність (розуміння ситуації, побудова моделі, інтерпретація результату) повинні бути збалансовані.

Прикладна задача цінна насамперед своїм концептуальним змістом, а не обчислювальною складністю.

8) Методична забезпеченість

Використання прикладних задач має бути методично продуманим. Для складних задач бажано передбачити систему навідних запитань, підказок, які допомагають учням самостійно просуватися до розв'язку. Особливо важливими є запитання, які спрямовують на аналіз ситуації, виділення даних і шуканих величин, встановлення зв'язків між ними. Супровідна інформація (довідкові дані, пояснення термінів, зображення, графіки, таблиці) має бути представлена в зручній і зрозумілій формі. Якщо для розв'язання задачі потрібні спеціальні знання з інших предметів, які учні могли забути або не вивчали, необхідні короткі пояснення або посилання на джерела інформації. Обговорення розв'язку прикладної задачі повинно включати не лише перевірку правильності обчислень, але й аналіз адекватності моделі, реалістичності результату, можливих альтернативних підходів, узагальнення методу на інші ситуації.

9) Культурна та етична прийнятність

Зміст прикладних задач не повинен суперечити етичним нормам, принципам гуманізму, загальнолюдським цінностям. Неприйнятні задачі, які містять дискримінацію за будь-якою ознакою (стать, національність, релігія, соціальний статус), пропагують насильство, нездоровий спосіб життя, неекологічну поведінку, безвідповідальне ставлення до ресурсів. Прикладні задачі можуть і повинні нести позитивний виховний потенціал: формувати відповідальне ставлення до здоров'я, довкілля, фінансів; виховувати повагу до праці, чесність, економність; сприяти усвідомленню глобальних проблем людства та необхідності їх розв'язання. Культурна відповідність означає врахування культурного контексту, в якому живуть учні. Задачі про реалії, які є абсолютно чужими для учнів (екзотичні країни, незрозумілі соціальні практики), можуть бути менш ефективними, ніж задачі про близьке та зрозуміле середовище. Водночас прикладні задачі можуть і збагачувати культурний кругозір, знайомити з різними культурами та традиціями.

10) Інтеграція традиційних та цифрових підходів

У сучасних умовах прикладні задачі повинні враховувати можливості цифрових технологій. Деякі задачі доцільно розв'язувати з використанням комп'ютерних програм (електронні таблиці, системи комп'ютерної математики, спеціалізоване програмне забезпечення), що відповідає реальній практиці застосування математики в професійній діяльності.

Однак базові навички розв'язування без комп'ютера також важливі для розуміння суті методів. Оптимальним є підхід, коли учні спочатку розв'язують задачу традиційним способом на простих прикладах, усвідомлюють алгоритм, а потім застосовують цифрові інструменти для розв'язання більш складних або об'ємних задач.

Використання інтернет-ресурсів для пошуку додаткової інформації, необхідної для розв'язання прикладної задачі, формує інформаційну компетентність і відповідає реаліям сучасного навчання та професійної діяльності.

Проте, варто розмежовувати справжні прикладні задачі та *квазіприкладні задачі*, які широко представлені в шкільних підручниках. Автентичні прикладні задачі часто характеризуються значною когнітивною складністю: вони оперують нецілими, ірраціональними чи надто великими числовими даними, потребують залучення спеціалізованих знань із суміжних дисциплін, містять надлишкову або недостатню інформацію, що ускладнює їх сприйняття учнями. Квазіприкладні задачі, натомість, створюють дидактичну імітацію реальності: вони зберігають зовнішні атрибути практичної ситуації, проте оперують ідеалізованими числовими даними, спрощеними умовами, елімінують випадкові фактори та непередбачувані змінні. Така дидактична редукція є методично виправданою на етапі формування базових умінь математичного моделювання. Квазіприкладні задачі виконують функцію навчальних scaffolds – тимчасових опор, які полегшують перехід від абстрактних математичних задач до автентичних прикладних проблем. Вони дозволяють учням сконцентруватися на освоєнні алгоритму розв'язування, усвідомленні логіки

математичного моделювання без когнітивного перевантаження, спричиненого складністю реальних даних і контекстів. [45]

fizmat@sspi.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
добросовісності

1.3. Потенціал прикладних задач у формуванні ключових компетентностей

Прикладні задачі посідають особливе місце в сучасній освітній парадигмі, оскільки виступають потужним інструментом формування ключових компетентностей учнів. На відміну від традиційних академічних завдань, прикладні задачі моделюють реальні життєві ситуації, що вимагають інтеграції знань з різних предметних галузей та активізації комплексу когнітивних і соціальних навичок. Саме через розв'язування таких задач відбувається трансформація теоретичних знань у практичні вміння, що є сутністю компетентнісного підходу в освіті. Проаналізуємо можливості прикладних задач для розвитку кожної ключової компетентності.

Особливо ефективно через прикладні задачі розвивається математична компетентність, оскільки учні бачать конкретне застосування математичних концепцій у реальному житті. Розв'язування задач на оптимізацію сімейного бюджету, розрахунок відсотків за кредитами, планування ремонту приміщення чи аналіз статистичних даних про споживання ресурсів формує не лише обчислювальні навички, а й розуміння практичної цінності математики. Учні усвідомлюють, що математичні моделі допомагають приймати обґрунтовані рішення в побутових і професійних ситуаціях, що значно підвищує їхню мотивацію до вивчення предмета.

Компетентності у природничих науках і технологіях формуються через прикладні задачі екологічного, технічного та дослідницького характеру. Аналіз енергоефективності будівель, розрахунок карбонового сліду, проектування систем очищення води чи моделювання фізичних процесів у виробництві дозволяють учням застосовувати закони фізики, хімії та біології для розв'язання актуальних проблем сучасності. Такі задачі сприяють формуванню наукового мислення, здатності до експериментування та критичного аналізу інформації, що є основою природничо-наукової грамотності.

Інформаційно-цифрова компетентність розвивається через прикладні задачі, що передбачають роботу з цифровими інструментами, аналіз великих масивів даних, створення візуалізацій та автоматизацію процесів. Завдання на

обробку статистичних даних у електронних таблицях, програмування алгоритмів для розв'язання практичних проблем, використання геоінформаційних систем для просторового аналізу формують навички роботи з сучасними технологіями. Учні вчаться не лише користуватися готовими програмами, а й створювати власні цифрові рішення для конкретних прикладних завдань.

Уміння вчитися впродовж життя формується через специфіку прикладних задач, які часто вимагають самостійного пошуку інформації, освоєння нових методів і підходів. Зустрічаючись із нестандартними ситуаціями, учні розвивають здатність аналізувати власні прогалини в знаннях, визначати потрібні ресурси для навчання та самостійно опановувати нові концепції. Рефлексія над процесом розв'язування прикладних задач допомагає усвідомити власні стратегії навчання та вдосконалити їх.

Соціальна та громадянська компетентності розвиваються через прикладні задачі, що стосуються суспільних проблем: аналіз демографічних тенденцій, економічних показників регіону, екологічних ризиків, планування місцевих проектів розвитку. Такі завдання формують розуміння соціальних процесів, усвідомлення громадянської відповідальності та здатність приймати рішення, що враховують інтереси різних груп суспільства. Учні вчаться бачити математичні закономірності в соціальних явищах і використовувати їх для обґрунтування позицій у суспільних дискусіях.

Підприємливість та фінансова грамотність особливо ефективно формуються через прикладні задачі економічного змісту. Розрахунок рентабельності бізнес-проектів, аналіз ризиків інвестицій, планування особистих фінансів, оптимізація витрат виробництва розвивають економічне мислення та здатність до підприємницьких ініціатив. Учні опановують фінансові інструменти та методи економічного аналізу, що є необхідними для успішної самореалізації в ринковому суспільстві.

Культурна компетентність може здаватися віддаленою від прикладних задач, однак історико-культурний контекст багатьох практичних завдань сприяє

її розвитку. Задачі на аналіз архітектурних пропорцій історичних будівель, дослідження орнаментів і візерунків народного мистецтва, моделювання історичних подій через математичні моделі збагачують культурний досвід учнів і демонструють зв'язок математики з мистецтвом і культурною спадщиною.

Прикладні задачі за своєю природою є міжпредметними, оскільки реальні життєві ситуації не вкладаються в межі однієї навчальної дисципліни. Інтеграція знань з різних предметних галузей відбувається природно і органічно, коли учні розв'язують задачі, що моделюють справжні проблеми. Така інтеграція сприяє формуванню цілісної картини світу та розумінню взаємозв'язків між різними сферами знань.

Математика та фізика інтегруються в прикладних задачах на моделювання руху, аналіз механічних систем, розрахунок енергетичних характеристик. Зв'язок математики з хімією реалізується через задачі на розрахунок концентрацій розчинів, моделювання хімічних реакцій, аналіз стехіометричних співвідношень у виробничих процесах. Промислові задачі на оптимізацію хімічного виробництва, розрахунок виходу продукту, аналіз економічної ефективності технологічних процесів демонструють практичне застосування математичних методів у хімічній галузі. Біологія та математика об'єднуються в задачах на моделювання популяційної динаміки, аналіз генетичних закономірностей, розрахунок біометричних показників, дослідження екосистем. Задачі на прогнозування розповсюдження епідемій, розрахунок оптимальних режимів харчування, аналіз впливу факторів середовища на організми вимагають застосування статистичних методів, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь. Географія інтегрується з математикою через задачі на картографічні проекції, розрахунок відстаней і площ, аналіз кліматичних даних, демографічну статистику, економічну географію. Використання геоінформаційних систем для просторового аналізу, розрахунок щільності населення, аналіз транспортних потоків, оптимізація розміщення об'єктів інфраструктури демонструють взаємозв'язок географічних і математичних

знань. Економіка та математика природно поєднуються в задачах на фінансовий аналіз, розрахунок економічних показників, моделювання ринкових процесів, оптимізацію виробництва. Завдання на розрахунок рентабельності, аналіз беззбитковості, прогнозування попиту, портфельний аналіз інвестицій вимагають володіння економічною термінологією та математичними методами одночасно. Інформатика тісно пов'язана з математикою через алгоритмізацію та програмування розв'язків прикладних задач. Створення комп'ютерних моделей фізичних процесів, обробка статистичних даних, візуалізація математичних функцій, автоматизація обчислень вимагають інтеграції математичних знань і навичок програмування. Прикладні задачі на обробку зображень, аналіз текстів, машинне навчання демонструють сучасні застосування математики в інформаційних технологіях. Мистецтво та математика інтегруються через задачі на аналіз пропорцій, симетрії, перспективи, геометричних візерунків. Дослідження золотого перетину в архітектурі та живописі, аналіз математичних закономірностей в орнаментах, створення фракталів і математичних візуалізацій розвивають естетичне сприйняття математики. Учні відкривають красу математичних структур і їхнє втілення в мистецтві, що сприяє гармонійному поєднанню раціонального та емоційного аспектів навчання. Історія збагачує прикладні задачі контекстом розвитку наукових ідей і технологій. Задачі на основі історичних подій, технічних винаходів, економічних процесів минулого формують розуміння еволюції наукового знання. Реконструкція давніх обчислювальних методів, аналіз історичних статистичних даних, моделювання економічних криз чи демографічних змін допомагають побачити математику в історичному контексті та зрозуміти її роль у розвитку цивілізації.

Міжпредметна інтеграція через прикладні задачі не є штучною надбудовою, а відображає реальну єдність знань про світ. Учні формують здатність синтезувати інформацію з різних джерел, застосовувати знання з однієї галузі для розв'язання проблем в іншій, бачити універсальні закономірності та методи, що працюють у різних контекстах. Така інтегративна

компетентність є однією з найважливіших для успішної діяльності в сучасному складному й мінливому світі.

Прикладні задачі є потужним інструментом розвитку критичного мислення, оскільки вимагають аналізу ситуації, оцінки достовірності даних, вибору адекватних методів розв'язування та критичного осмислення отриманих результатів. На відміну від стандартних навчальних задач із заздалегідь відомим алгоритмом розв'язання, прикладні завдання часто містять надлишкову чи недостатню інформацію, суперечливі дані, неоднозначні формулювання, що максимально наближає їх до реальних життєвих ситуацій.

Аналіз умови прикладної задачі розвиває здатність до критичного читання та інтерпретації інформації. Учні вчаться відрізняти істотні факти від другорядних деталей, виявляти приховані припущення, розпізнавати упередженість або маніпуляції в поданні даних. Наприклад, аналізуючи рекламні повідомлення про кредитні продукти, учні мають критично оцінити, яка інформація приховується за привабливими формулюваннями, які додаткові витрати не враховуються в рекламованій процентній ставці, які ризики замовчуються.

Оцінка достовірності та релевантності даних є важливим компонентом критичного мислення. При розв'язуванні прикладних задач учні часто стикаються з необхідністю самостійно знайти додаткову інформацію, оцінити надійність джерел, перевірити коректність даних, виявити можливі похибки вимірювань. Така робота формує скептичне ставлення до інформації та навички її верифікації, що є критично важливим в епоху інформаційного перевантаження та поширення дезінформації.

Вибір математичної моделі для опису реальної ситуації вимагає критичного осмислення припущень і обмежень моделі. Учні усвідомлюють, що будь-яка модель є спрощенням реальності, і важливо розуміти, які аспекти ситуації вона відображає адекватно, а які ігнорує. Аналіз застосовності різних моделей для одного й того ж явища, порівняння їхніх прогнозів із реальними даними розвиває розуміння природи наукового знання та його обмеженості.

Інтерпретація результатів математичних розрахунків у контексті реальної ситуації потребує критичного мислення найвищого рівня. Учні мають оцінити правдоподібність отриманих результатів, їхню чутливість до змін вхідних параметрів, можливість практичної реалізації запропонованих рішень. Критичний аналіз обмежень розв'язку, виявлення можливих негативних наслідків реалізації оптимального за математичними критеріями рішення, врахування етичних і соціальних аспектів формує відповідальне ставлення до застосування математичних методів.

Творчі здібності розвиваються через нестандартність і відкритість багатьох прикладних задач. На відміну від типових навчальних завдань з єдиним правильним розв'язком, прикладні задачі часто допускають різні підходи та стратегії розв'язування, що стимулює творче мислення. Учні мають можливість продемонструвати оригінальність у виборі методів, винахідливість у подоланні труднощів, креативність у поданні результатів.

Дивергентне мислення, здатність генерувати багато різних ідей і підходів до розв'язання проблеми, розвивається через відкриті прикладні задачі. Завдання типу "запропонуйте різні способи оптимізації маршруту доставки товарів" або "розробіть декілька варіантів планування простору приміщення з різними пріоритетами" стимулюють пошук альтернативних рішень. Учні вчаться не зупинятися на першому знайденому варіанті, а досліджувати простір можливостей, порівнювати переваги та недоліки різних підходів.

Конструювання власних математичних моделей для опису нових ситуацій є вершиною творчої математичної діяльності. Коли учні переходять від застосування готових моделей до створення власних, вони здійснюють справжню творчість у математиці. Проектні завдання, що передбачають розробку математичних моделей для дослідження обраних явищ, стимулюють творче використання математичного апарату та розвивають здатність до наукової творчості.

Модифікація та комбінування відомих методів для розв'язання нових задач розвиває адаптивне творче мислення. Учні вчаться бачити аналогії між різними

ситуаціями, переносити методи з однієї галузі в іншу, комбінувати різні підходи для створення гібридних розв'язків. Така гнучкість мислення є основою інноваційної діяльності в будь-якій професійній сфері.

Візуалізація та презентація результатів дослідження стимулює творчість в оформленні та поданні інформації. Створення інфографіки, інтерактивних діаграм, відеопрезентацій, веб-додатків для ілюстрації результатів розв'язання прикладних задач дозволяє учням поєднати математичні знання з дизайнерськими та комунікативними навичками, що розвиває комплексну творчу компетентність.

Комунікативні навички відіграють критичну роль у сучасному житті та професійній діяльності, і прикладні задачі створюють природний контекст для їхнього розвитку. Колективне розв'язування складних прикладних завдань вимагає обміну ідеями, узгодження підходів, розподілу ролей, спільного аналізу результатів, що активізує різноманітні аспекти комунікативної компетентності.

Артикуляція математичних ідей та обґрунтування власної позиції є фундаментальною комунікативною навичкою в математиці. При груповому розв'язуванні прикладних задач учні мають пояснити товаришам свій підхід, аргументувати вибір методу, переконати в правильності інтерпретації даних. Така необхідність вербалізувати математичне мислення поглиблює розуміння самої математики, оскільки пояснення іншим вимагає чіткого усвідомлення власних дій і міркувань.

Активне слухання та розуміння чужих пояснень розвивається в процесі обговорення різних підходів до розв'язання задачі. Учні вчаться уважно слухати пропозиції товаришів, ставити уточнювальні запитання, перефразовувати почуте для перевірки розуміння, інтегрувати чужі ідеї в загальну стратегію розв'язування. Така навичка є основою продуктивної співпраці та взаємонавчання.

Конструктивна критика та відстоювання власної позиції в дискусії формують культуру математичної аргументації. Учні вчаться критикувати ідеї,

а не людей, спростовувати твердження за допомогою контрприкладів або логічних аргументів, коригувати власну позицію під впливом переконливих аргументів. Така практика формує критичне мислення та одночасно розвиває емоційний інтелект, адже вимагає чутливості до почуттів інших і контролю власних емоцій у дискусіях.

Розподіл ролей і координація спільної діяльності при роботі над складними прикладними проектами розвивають організаційні та лідерські навички. Учні навчаються планувати роботу, розподіляти завдання відповідно до сильних сторін членів команди, координувати паралельні дії, інтегрувати результати окремих підзавдань у загальне рішення. Така практика моделює реальну проектну діяльність у професійному середовищі.

Письмова комунікація розвивається через необхідність документувати процес розв'язування, оформляти звіти, готувати презентації результатів. Учні вчаться структурувати текст, використовувати математичну нотацію, супроводжувати викладення схемами та діаграмами, адаптувати стиль викладу до аудиторії. Робота над спільними документами вимагає узгодження термінології, стилю, логіки викладення, що розвиває навички колаборативного письма.

Презентація результатів перед аудиторією формує навички публічного виступу та переконливої комунікації. Захист групових проектів, презентація альтернативних рішень, демонстрація розроблених моделей вимагають структурування виступу, використання візуальних засобів, взаємодії з аудиторією, відповідей на запитання. Така практика готує учнів до професійних ситуацій презентації ідей і проектів.

Міжкультурна комунікація може розвиватися через прикладні задачі, що стосуються різних країн і культур. Порівняння економічних показників, аналіз демографічних процесів, дослідження культурних особливостей через математичну статистику розширюють культурний горизонт учнів і формують повагу до різноманітності. Міжнародні проекти з обміну даними та спільного розв'язування задач розвивають навички міжкультурної взаємодії.

Цифрова комунікація набуває особливого значення при використанні онлайн-інструментів для спільної роботи над прикладними задачами. Учні опановують платформи для відеоконференцій, хмарні сервіси для спільного редагування документів, інструменти візуалізації даних, системи контролю версій для програмного коду. Така практика готує їх до сучасних форм дистанційної співпраці, що є нормою в багатьох професійних сферах.

Емпатія та соціальна чутливість розвиваються через обговорення соціальних аспектів прикладних задач. Аналізуючи вплив математично оптимальних рішень на різні групи людей, учні вчаться враховувати інтереси та потреби інших, розуміти етичні дилеми, пов'язані із застосуванням математичних методів, балансувати між ефективністю та справедливістю. Така рефлексія формує соціально відповідальне ставлення до використання математики.

Розв'язання конфліктів і пошук компромісів є невід'ємною частиною групової роботи. Коли члени команди пропонують різні підходи до розв'язання задачі або мають конфліктні уявлення про пріоритети, виникає необхідність конструктивного вирішення розбіжностей. Учні вчаться шукати об'єктивні критерії для оцінки альтернатив, знаходити рішення, що інтегрують сильні сторони різних підходів, досягати консенсусу через діалог і взаємні поступки.

Таким чином, прикладні задачі володіють унікальним потенціалом для комплексного розвитку ключових компетентностей учнів. Вони інтегрують когнітивні, метакогнітивні, соціальні та особистісні аспекти навчання, створюючи багатовимірне освітнє середовище. Міжпредметний характер прикладних задач забезпечує формування цілісного світогляду та здатності до синтезу знань з різних галузей. Розвиток критичного мислення та творчих здібностей через нестандартні, відкриті завдання готує учнів до інноваційної діяльності та адаптації до мінливих умов. Комунікативні навички, що формуються в процесі колективного розв'язування, є основою успішної співпраці та професійної реалізації в сучасному суспільстві. Використання прикладних задач у навчанні математики є не просто методичним прийомом, а

стратегічним напрямом модернізації освіти відповідно до викликів ХХІ століття.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
добросовісності

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

2.1. Аналіз навчальних програм та підручників щодо використання прикладних задач

Одним із пріоритетних напрямів сучасної математичної освіти є формування в учнів здатності застосовувати набуті знання у практичній діяльності, пов'язувати математичні поняття з реальними життєвими ситуаціями, а також використовувати математику як інструмент для розв'язування проблем різних галузей людської діяльності. Саме тому важливого значення набуває аналіз чинних навчальних програм і підручників з математики старшої школи з огляду на представленість у них прикладних задач, які сприяють розвитку ключових і предметних компетентностей.

Навчальні програми з математики для 10–11 класів закладів загальної середньої освіти (профільний рівень) визначають орієнтацію навчального процесу не лише на засвоєння системи знань і способів дій, а й на формування здатності застосовувати їх у різних життєвих ситуаціях. У програмі наголошується на необхідності реалізації компетентнісного, діяльнісного та контекстного підходів, що передбачає використання практично зорієнтованих завдань, задач прикладного змісту, математичного моделювання, міжпредметних зв'язків. До основних очікуваних результатів навчання віднесено сформованість у випускників умінь розпізнавати й описувати реальні проблеми математичними засобами, будувати математичні моделі, інтерпретувати отримані результати з урахуванням контексту завдання.

Програма також рекомендує застосовувати завдання, пов'язані з економікою, екологією, соціальною сферою, технікою, побутом, що має забезпечити формування ключових компетентностей: математичної, підприємницької, екологічної, соціальної, інформаційно-комунікаційної. Водночас у пояснювальній записці підкреслено, що кількість прикладних задач у навчальному процесі визначається вчителем і залежить від можливостей учнів, наявного дидактичного матеріалу та структури підручників. Отже, саме

підручники стають основним носієм і джерелом таких завдань, від їх змістового наповнення значною мірою залежить реалізація компетентнісного потенціалу програми.

Аналіз змісту підручників з алгебри та початків аналізу і геометрії для 10–11 класів [15; 16; 21; 22; 30; 31; 32; 38-42] показав, що в усіх виданнях наявні прикладні задачі різного рівня складності, які охоплюють широкий спектр галузей людської діяльності. У підручниках О. Істера [30; 31; 32] системно представлено рубрику «Життєва математика», у якій подано задачі економічного, екологічного, побутового та соціального змісту. Наприклад, учням пропонуються завдання на обчислення податку на прибуток, витрат електроенергії, зниження цін, планування бюджету родини, екологічну безпеку використання транспорту, споживання води й енергії. Такі задачі безпосередньо орієнтовані на формування фінансової, екологічної та соціальної компетентностей, а також розвивають уміння аналізувати умови реальної ситуації, здійснювати вибір оптимальних рішень, інтерпретувати числові результати.

Підручники [15; 16] характеризуються наявністю великої кількості завдань, у яких реальні контексти пов'язано з побутовими, екологічними або виробничими ситуаціями. У текстах і прикладах активно використано дані, що стосуються збереження природних ресурсів, раціонального використання електроенергії, охорони здоров'я, демографічних показників. Автори підкреслюють практичне значення математики для розвитку суспільства, планування господарської діяльності, реалістичної оцінки власних можливостей. У підручнику наявні також завдання, позначені спеціальними символами, що акцентують їх прикладну спрямованість і виховний потенціал.

Підручники А. Мерзляка, Д. Номіровського, В. Полонського та М. Якіра [38-42] містять окремі приклади практичних задач, проте їх кількість суттєво менша. Переважно вони подані як окремі задачі підвищеної складності або як ілюстрації до застосування формул і теорем. Приклади пов'язані з рухом транспорту, визначенням найкоротших шляхів, витратами палива,

будівельними розрахунками. Разом з тим, у підручниках з поглибленим рівнем навчання переважають формальні вправи, що орієнтовані на тренування навичок обчислення та доведення, а не на контекстне застосування. Це зменшує потенціал таких видань для розвитку компетентнісного підходу.

Для систематизації результатів проведеного аналізу було укладено порівняльну таблицю 4, яка відображає основні характеристики прикладних задач у розглянутих підручниках.

Таблиця 4. Порівняльна таблиця щодо характеристик прикладних задач у шкільних підручниках з математики 10-11 класів

Автор(и) підручника	Орієнтовна кількість прикладних задач*	Галузі / тематика задач	Рівень складності	Основні компетентності, що розвиваються
О. Істер (Алгебра і початки аналізу, 10–11 кл.)	~80–100 (~10– 12 % усіх завдань)	Економіка, екологія, енергозбереження, соціальна сфера, здоров'я	Базовий – середній	Математична, фінансова, екологічна, громадянська
С. Бевз, В. Бевз (Алгебра і початки аналізу, %) 10 кл.)	~70–90 (~9–10 %)	Природознавство, виробництво, охорона довкілля, енергетика, статистика	Середній – поглиблений	Математична, природнична, екологічна, критичне мислення
А. Мерзляк (Алгебра, профільний і поглиблений рівень)	~30–40 (~4–5 %)	Транспорт, рух, геометричні побудови, оптимізація	Середній – високий	Математична, інформаційна, логічне мислення

*Орієнтовна кількість підрахована на основі аналізу структурних розділів і рубрик у кожному підручнику.

Як видно з таблиці, найбільш послідовно і системно прикладні задачі представлені у підручниках О. Істера [30–32], де вони виділені в окремі рубрики й мають міжпредметний та соціально значущий зміст. Підручники [15; 16] також містять велику кількість завдань практичного спрямування, проте вони розміщені нерівномірно: у деяких розділах їх багато (наприклад, при вивченні

функцій, рівнянь, статистики), а в інших майже немає. У виданнях А. Мерзляка [38-42] переважають теоретико-математичні задачі, що потребують високого рівня абстрактного мислення, тому частка завдань, безпосередньо пов'язаних з реальними ситуаціями, є меншою.

З точки зору класифікації прикладних задач за галузями знань і сферами людської діяльності, у проаналізованих підручниках переважають економічні та побутові контексти. Значну частину становлять завдання, пов'язані з фінансовими розрахунками, податками, знижками, орендою, комунальними платежами. Екологічна тематика представлена через задачі про витрати води, енергоресурсів, викиди шкідливих речовин, переробку сміття. Менше уваги приділено технічним і медичним прикладам, задачам із соціальної статистики, демографії, транспортної логістики, хоча саме ці сфери могли б забезпечити ширше поле для розвитку міжпредметних зв'язків.

За рівнем складності більшість прикладних задач належить до базового та середнього рівнів, що дозволяє охопити весь контингент учнів. Однак у підручниках бракує відкритих і дослідницьких завдань, які б вимагали від учнів самостійного формулювання моделі, збору даних, перевірки гіпотези чи створення власного математичного обґрунтування. Лише окремі автори (зокрема О. Істер) вводять проектну діяльність у вигляді коротких практичних завдань на дослідження, але вони переважно мають рекомендаційний характер і не супроводжуються чіткими критеріями оцінювання.

За характером використаних математичних методів більшість задач базується на відсоткових обчисленнях, пропорціях, рівняннях, функціональних залежностях. Менше завдань передбачає застосування статистичних методів, побудову графіків, аналіз даних, що стримує розвиток цифрової та інформаційної компетентностей учнів.

Якщо розглядати прикладні задачі з позицій типів математичної діяльності, то переважають вправи з чітко визначеним алгоритмом розв'язування. Задачі на математичне моделювання, формулювання власних припущень, критичний аналіз реальних даних зустрічаються рідко. Це вказує на

потребу оновлення методичного апарату підручників у напрямі розвитку дослідницької активності старшокласників.

Окремо варто зазначити, що підручники з геометрії містять меншу кількість прикладних задач порівняно з алгеброю. Геометричні приклади здебільшого пов'язані з вимірюваннями, будівництвом, просторовими обчисленнями (наприклад, обчислення об'єму шафи, нахилу драбини, відстані між об'єктами). Водночас потенціал геометрії для прикладних ситуацій є надзвичайно великим — це задачі з архітектури, дизайну, навігації, інженерії, що могли б стати основою для розвитку просторового мислення і технічної компетентності.

Серед основних недоліків у представленні прикладних задач можна виокремити такі:

- нерівномірність розподілу завдань прикладного змісту в межах теми або розділу;
- переважання задач репродуктивного типу над творчими та проектними;
- недостатнє використання цифрових технологій для опрацювання даних, побудови графіків і моделювання;
- обмежене коло життєвих контекстів (здебільшого економічні й побутові);
- відсутність системних позначок у підручниках, які б указували на компетентності, що формуються під час виконання завдання.

Подолання зазначених недоліків вимагає удосконалення навчально-методичного забезпечення. По-перше, доцільно збільшити частку відкритих, проектних і дослідницьких задач, які спонукали б учнів самостійно збирати та аналізувати дані, робити висновки, презентувати результати у різних формах. По-друге, важливо запровадити у підручниках систему маркування завдань за типами компетентностей (фінансова, екологічна, інформаційна тощо), що полегшить учителю добір завдань відповідно до освітніх цілей. По-третє, рекомендується активніше впроваджувати цифрові інструменти (табличні процесори, динамічні геометричні середовища, онлайн-симуляції), які дозволяють створювати інтерактивні моделі прикладних ситуацій. Нарешті, під

час укладання підручників із геометрії доцільно ширше використовувати приклади з реального життя — зокрема, із сучасних технологій, архітектури, медицини, картографії, інженерії.

У підсумку можна зробити висновок, що чинні навчальні програми з математики містять чіткі орієнтири на формування ключових компетентностей засобами прикладних задач, однак реалізація цих положень у підручниках здійснюється неоднаково. Найбільш системно і послідовно компетентнісний підхід втілено у підручниках О. Істера, де прикладні задачі охоплюють різні сфери життєдіяльності людини та забезпечують формування міжпредметних зв'язків. Видання [15; 16] характеризуються глибоким змістовим наповненням і наявністю екологічної тематики, проте потребують більшої кількості дослідницьких завдань. У підручниках А. Мерзляка практичні контексти представлені обмежено, що зменшує їхній потенціал для розвитку ключових компетентностей.

Отже, системне використання прикладних задач у навчанні математики є необхідною умовою реалізації компетентнісного підходу та формування в учнів готовності до застосування математичних знань у повсякденному житті. Подальше вдосконалення навчально-методичного забезпечення має бути спрямоване на оновлення змісту підручників, розширення спектра практичних контекстів, інтеграцію цифрових технологій і підготовку вчителів до ефективного використання прикладних задач як засобу розвитку ключових компетентностей старшокласників.

2.2. Методика організації роботи з прикладними задачами на уроках математики в старшій школі

Ефективність використання прикладних задач у навчанні математики значною мірою залежить від правильної організації роботи з ними. Методика роботи з прикладними задачами передбачає поетапну діяльність учнів, застосування різноманітних методів і прийомів, раціональний добір форм навчальної роботи та використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Процес розв'язування прикладних задач має чітку структуру, що складається з п'яти взаємопов'язаних етапів, кожен з яких виконує специфічні функції у формуванні математичної компетентності учнів (рис. 3).



Рис. 3. Етапи роботи над прикладними задачами

Мотиваційно-цільовий етап є відправною точкою роботи з прикладною задачею і спрямований на усвідомлення учнями практичної значущості математичних знань та актуалізацію їхньої пізнавальної активності. Основні завдання етапу включають: формування інтересу до задачі через демонстрацію її практичної цінності; актуалізацію особистого досвіду учнів, пов'язаного з контекстом задачі; формулювання мети розв'язування задачі та очікуваних результатів; створення емоційного налаштування на активну пізнавальну діяльність.

Ефективними прийомами на цьому етапі є: розповідь про реальні випадки, коли розв'язання подібних задач мало важливе значення; демонстрація відеоматеріалів або презентацій, що ілюструють практичне застосування математичних методів; організація обговорення питання "Де і коли може знадобитися розв'язання цієї задачі?"; встановлення міжпредметних зв'язків з фізикою, хімією, біологією, економікою, географією тощо.

На *аналітичному етапі* учні здійснюють низку розумових операцій: читання та переформулювання умови задачі своїми словами для глибшого розуміння; виділення всіх даних величин, їх одиниць вимірювання та числових значень; визначення шуканих величин та їх взаємозв'язків з відомими; виявлення надлишкової або недостатньої інформації; з'ясування, які математичні об'єкти, поняття, формули, теореми можуть бути застосовані; виокремлення реальних обмежень та допущень, притаманних конкретній ситуації.

Важливим елементом аналітичного етапу є побудова математичної моделі задачі. Залежно від характеру задачі, моделювання може передбачати: складання рівнянь або систем рівнянь; побудову функціональних залежностей; створення геометричних моделей; розробку алгоритмів або блок-схем; складання таблиць, діаграм або графіків. Для полегшення аналізу доцільно використовувати різні форми візуалізації: схематичні малюнки, що відображають фізичну сутність задачі; таблиці для систематизації даних;

координатні площини для графічної інтерпретації; діаграми для представлення співвідношень величин.

Операційно-виконавчий етап вимагає від учнів застосування теоретичних знань, володіння обчислювальними навичками та алгоритмами розв'язування різних типів математичних задач. Діяльність учнів на цьому етапі включає: вибір раціонального способу розв'язування з можливих альтернатив; виконання необхідних математичних перетворень, обчислень, побудов; застосування відповідних формул, теорем, властивостей математичних об'єктів; дотримання логічної послідовності кроків розв'язування; оформлення розв'язку згідно з математичними вимогами.

Важливо заохочувати учнів до пошуку різних способів розв'язування однієї задачі, що сприяє розвитку гнучкості математичного мислення, здатності до варіативного підходу в розв'язанні проблем. Порівняння різних методів розв'язування дозволяє виявити найбільш раціональний і ефективний підхід, розвиває критичне мислення та аналітичні здібності.

На операційно-виконавчому етапі вчитель виступає у ролі консультанта, який за необхідності надає дозовану допомогу: нагадує про відповідні формули чи теореми; вказує на помилки в обчисленнях або логіці міркувань; підказує напрямок пошуку розв'язку у разі виникнення труднощів; заохочує до самостійного подолання перешкод.

Контрольно-оцінний етап є особливо важливим для прикладних задач, оскільки математично правильний розв'язок може виявитися нереалістичним у конкретній практичній ситуації. Контроль і оцінювання включають декілька аспектів: перевірку правильності обчислень та математичних перетворень; аналіз адекватності отриманого результату реальній ситуації; оцінку відповідності результату здоровому глузду та життєвому досвіду; порівняння результату з очікуваним діапазоном значень; інтерпретацію математичного результату мовою початкової задачі.

Особливу увагу слід приділяти формулюванню відповіді. Відповідь має бути сформульована у термінах початкової задачі, містити відповідні одиниці

вимірювання, за необхідності враховувати реальні обмеження (наприклад, округлення до цілого числа об'єктів, додатність деяких величин тощо). Учні повинні навчитися аргументувати реалістичність отриманих результатів, пояснювати можливі розбіжності між математичною моделлю та реальністю.

Доцільно організовувати різні форми перевірки: самоперевірку за наданим зразком або алгоритмом; взаємоперевірку в парах з обговоренням виявлених помилок; колективне обговорення складних моментів розв'язування; використання калькуляторів або комп'ютерних програм для контролю обчислень.

Рефлексивний етап завершує роботу з прикладною задачею і сприяє формуванню метапізнавальних умінь, розвитку самостійності та відповідальності за результати навчання. На рефлексивному етапі учні відповідають на ключові питання: Що нового я дізнався під час розв'язування цієї задачі? Які математичні знання та вміння я застосував? Які труднощі виникли і як я їх подолав? Чи міг я розв'язати задачу іншим способом? Де ще можна застосувати отримані знання? Що потрібно додатково вивчити або повторити? Ефективними формами організації рефлексії є: письмова рефлексія у вигляді коротких есе або відповідей на питання; усне обговорення в колі, де кожен учень ділиться своїми враженнями; заповнення рефлексивних таблиць або схем "Знав – Дізнався – Хочу дізнатися"; створення інтелект-карт, що відображають зв'язки між різними елементами задачі; груповий аналіз ефективності різних стратегій розв'язування.

Рефлексивний етап також передбачає узагальнення отриманого досвіду та його екстраполяцію на інші ситуації. Учні обговорюють, як можна модифікувати умову задачі, що зміниться в розв'язанні, якщо змінити деякі параметри, які подібні задачі можуть зустрітися в житті. Такий підхід сприяє формуванню системного бачення математичних знань та їх практичного застосування.

Методи та прийоми роботи з прикладними задачами

Ефективність навчання розв'язуванню прикладних задач значною мірою визначається вибором адекватних методів і прийомів навчання. Методи роботи з прикладними задачами можна класифікувати за різними критеріями, наприклад, за джерелом знань, за характером пізнавальної діяльності тощо.

За джерелом знань виділяють словесні методи (розповідь про практичне застосування математики, бесіда про життєві ситуації, що моделюються в задачах, пояснення специфіки математичного моделювання реальних процесів, інструктаж щодо послідовності розв'язування прикладних задач), наочні методи (демонстрація реальних об'єктів або їх зображень, що фігурують у задачах, ілюстрація процесів і явищ за допомогою схем, діаграм, графіків, використання відеоматеріалів, що показують практичне застосування математики, спостереження за реальними процесами з подальшою математичною обробкою даних) та практичні методи (виконання вимірювань і обчислень з реальними об'єктами, проведення експериментів з математичною обробкою результатів, моделювання реальних ситуацій, створення власних прикладних задач на основі життєвого досвіду).

За характером пізнавальної діяльності особливе значення мають проблемний метод, який передбачає створення проблемних ситуацій на основі реальних життєвих колізій, формулювання проблемних питань типу "Як визначити висоту будівлі, не піднімаючись на неї?", "Яку форму має мати город, щоб за найменшого периметра огорожі отримати найбільшу площу?", частково-пошуковий метод, що включає розв'язування задач з недостатньою або надлишковою інформацією, пошук різних способів розв'язування однієї прикладної задачі, дослідження залежності розв'язку від зміни параметрів задачі, та дослідницький метод, який реалізується через виконання міні-проектів з розв'язування комплексних прикладних задач, самостійне збирання та аналіз реальних даних, формулювання гіпотез та їх перевірку на конкретних прикладах.

Серед прийомів роботи з прикладними задачами варто виділити моделювання (створення схематичних, графічних, символічних моделей

реальних ситуацій), аналогію (пошук подібних задач, перенесення способу розв'язування на нові ситуації), конкретизацію (розгляд окремих випадків загальної задачі, підстановка конкретних числових значень), узагальнення (виведення загальних закономірностей на основі розв'язування серії подібних задач), варіювання умови (зміна параметрів задачі та дослідження впливу на розв'язок), розчленування (поділ складної задачі на послідовність простіших підзадач), евристичні прийоми (робота від питання до даних, пошук допоміжних задач, введення допоміжних елементів).

Форми організації навчальної діяльності

Вибір форм організації навчальної діяльності при роботі з прикладними задачами залежить від дидактичних цілей, складності задачі, рівня підготовленості учнів та етапу роботи з задачею.

Індивідуальна форма роботи передбачає самостійне розв'язування учнем прикладної задачі і є найбільш доцільною на етапі закріплення навичок розв'язування типових прикладних задач, під час виконання диференційованих завдань відповідно до рівня підготовки учня, при проведенні контролю та оцінювання навчальних досягнень, для розвитку самостійності, відповідальності та впевненості у власних силах. Індивідуальна робота дозволяє кожному учню працювати у власному темпі, глибоко осмислювати кожен крок розв'язування, розвивати навички самоконтролю та самооцінки. Однак ця форма має обмеження у розвитку комунікативних умінь та не дозволяє учням вчитися один у одного.

Парна форма роботи передбачає співпрацю двох учнів у розв'язуванні прикладної задачі і є ефективною для взаємонавчання та взаємоконтролю учнів з різним рівнем підготовки, обговорення різних підходів до розв'язування задачі, виконання задач, що передбачають розподіл функцій (один вимірює, інший записує; один розв'язує, інший перевіряє), розвитку навичок аргументації власної позиції та прийняття критики. У парній роботі учні навчаються співпраці, вербалізації власних міркувань, критичного аналізу чужих ідей. Ця форма особливо корисна для учнів з недостатньо розвиненими

комунікативними навичками, оскільки взаємодія з одним партнером є менш стресовою, ніж виступ перед групою чи класом.

Групова форма роботи передбачає об'єднання учнів у малі групи (зазвичай по 3-5 осіб) для спільного розв'язування комплексних прикладних задач і є найбільш продуктивною при розв'язуванні багатокomпонентних задач, що вимагають розподілу обов'язків, виконанні проєктних завдань з реальними дослідженнями та збором даних, обговоренні нестандартних задач, що допускають різні підходи до розв'язання, розвитку навичок колективної взаємодії, лідерства, розподілу ролей. Групова робота сприяє формуванню вміння працювати в команді, розвиває соціальні навички, дозволяє поєднувати сильні сторони різних учнів для досягнення спільної мети.

При організації групової роботи важливо чітко визначити ролі учасників (лідер групи, який координує роботу; секретар, який фіксує ідеї та хід розв'язування; доповідач, який презентує результати; контролер, який перевіряє правильність виконання), забезпечити збалансований склад груп за рівнем підготовки та психологічною сумісністю, встановити чіткі критерії оцінювання як індивідуального внеску, так і колективного результату, передбачити час для презентації результатів роботи груп та їх обговорення.

Фронтальна форма роботи передбачає одночасну спільну діяльність усього класу під керівництвом вчителя і є доцільною на мотиваційно-цільовому етапі для створення єдиної проблемної ситуації, на аналітичному етапі при розборі складних нових типів задач, на рефлексивному етапі для узагальнення досвіду та формулювання висновків, при обговоренні різних способів розв'язування та вибору найбільш раціонального. Фронтальна робота забезпечує єдиний темп навчання, дозволяє ефективно використовувати час уроку, сприяє формуванню колективного досвіду розв'язування задач.

На практиці найбільш ефективним є поєднання різних форм організації навчальної діяльності в межах одного уроку. Наприклад, урок може починатися з фронтального обговорення проблемної ситуації, потім учні в групах аналізують умову задачі і будують модель, індивідуально виконують

обчислення, в парах здійснюють взаємоперевірку, а завершується урок фронтальною рефлексією.

Інформаційно-комунікаційні технології відкривають нові можливості для роботи з прикладними задачами, роблять навчальний процес більш наочним, інтерактивним і ефективним. Використання ІКТ особливо важливе при розв'язуванні прикладних задач, оскільки дозволяє моделювати складні реальні процеси, проводити обчислення з великими масивами даних, візуалізувати абстрактні математичні об'єкти.

Електронні таблиці (Microsoft Excel, Google Sheets) є потужним інструментом для розв'язування прикладних задач, що передбачають обробку числових даних, проведення обчислень за формулами, побудову діаграм і графіків для візуалізації залежностей, розв'язування оптимізаційних задач за допомогою вбудованих інструментів (пошук розв'язку, підбір параметра), моделювання випадкових процесів та статистичний аналіз даних. Наприклад, при розв'язуванні економічних задач на відсотки, кредити, вклади учні можуть використовувати електронні таблиці для складання графіків платежів, порівняння різних варіантів, дослідження залежності результату від вхідних параметрів.

Системи динамічної математики (GeoGebra, Desmos, Mathcad) дозволяють створювати інтерактивні моделі геометричних задач з можливістю зміни параметрів та спостереження за результатами, будувати графіки функцій та досліджувати їх властивості в контексті прикладних задач, розв'язувати рівняння та системи рівнянь графічним методом, візуалізувати геометричні інтерпретації алгебраїчних задач. Ці інструменти особливо корисні при розв'язуванні задач на оптимізацію, дослідження функцій, геометричне моделювання.

Спеціалізоване програмне забезпечення для різних предметних галузей включає програми для фізичного моделювання (PhET Interactive Simulations), що дозволяють спостерігати за фізичними процесами та проводити вимірювання, програми для хімічних розрахунків та моделювання

молекулярних структур, географічні інформаційні системи для задач з географії та екології, програми для економічного моделювання та фінансових розрахунків.

Онлайн-ресурси та освітні платформи надають доступ до баз прикладних задач з різних галузей, інтерактивних тренажерів для відпрацювання навичок розв'язування, відеоуроків з розбором складних прикладних задач, форумів для обговорення способів розв'язування та обміну досвідом.

Мультимедійні презентації використовуються для візуального супроводу пояснення нового матеріалу, демонстрації реальних об'єктів і ситуацій, що моделюються в задачах, покрокового розбору алгоритму розв'язування прикладних задач, презентації результатів учнівських проєктів та досліджень.

Мобільні додатки та калькулятори дозволяють швидко проводити складні обчислення, звільняючи час для аналізу та інтерпретації результатів, використовувати вбудовані датчики смартфонів для збору реальних даних (акселерометр, GPS, камера), доступ до довідкової інформації та формул у будь-який час.

При використанні ІКТ важливо дотримуватися певних принципів: технології мають бути засобом, а не метою навчання; використання ІКТ повинно бути методично обґрунтованим і доцільним; необхідно навчати учнів критично оцінювати результати, отримані за допомогою технологій; важливо розвивати як навички використання технологій, так і здатність до "ручного" розв'язування задач; слід забезпечувати рівний доступ усіх учнів до необхідних технологічних ресурсів.

Типові помилки при організації роботи з прикладними задачами

Незважаючи на очевидні переваги використання прикладних задач, на практиці часто виникають помилки, що знижують ефективність цього методу навчання.

Формальний підхід до прикладних задач проявляється в тому, що задачі мають лише формальну "прикладну обгортку", але по суті залишаються суто математичними, відсутнє обговорення практичного значення задачі та її зв'язку

з реальним життям, пропускається етап інтерпретації математичного результату в термінах початкової ситуації, не аналізується реалістичність отриманого розв'язку.

Надмірне ускладнення задач виражається в тому, що задачі містять занадто багато даних або складних розрахунків, що відволікає від суті, використовується незнайома учням термінологія без належних пояснень, рівень складності не відповідає підготовленості учнів, відсутня диференціація за рівнем складності.

Недостатня підготовка вчителя до роботи з прикладними задачами проявляється у відсутності глибокого розуміння реального контексту задачі, нездатності відповісти на питання учнів про практичне застосування, використанні застарілих або нереалістичних даних, недостатньому володінні міжпредметним матеріалом.

Ігнорування етапів роботи з задачею виражається в тому, що пропускається мотиваційний етап, і задача "падає з неба", недостатньо часу приділяється аналізу умови та побудові моделі, одразу починається формальне розв'язування без осмислення, відсутня рефлексія та узагальнення отриманого досвіду.

Відсутність зв'язку з реальними даними проявляється у використанні вигаданих, нереалістичних числових значень, ігноруванні реальних обмежень та особливостей ситуацій, відсутності посилань на реальні джерела інформації, нездатності учнів перенести отримані навички на реальні життєві ситуації.

Методичні рекомендації щодо підвищення ефективності роботи з прикладними задачами

На основі аналізу теоретичних джерел та практичного досвіду можна сформулювати низку методичних рекомендацій для вчителів математики.

По-перше, необхідно систематично включати прикладні задачі в навчальний процес, а не обмежуватися епізодичним використанням. Бажано, щоб на кожному уроці математики розглядався хоча б один приклад практичного застосування вивченого матеріалу.

По-друге, важливо створювати власний банк прикладних задач, адаптованих до конкретних умов навчання, місцевих особливостей, інтересів учнів. Джерелами задач можуть бути підручники, методичні посібники, інтернет-ресурси, реальні життєві ситуації, засоби масової інформації, наукові публікації.

По-третє, доцільно залучати учнів до створення власних прикладних задач на основі їхнього життєвого досвіду. Це може бути окремим завданням або частиною проектної роботи. Створення власних задач сприяє глибшому розумінню зв'язку математики з реальністю, розвиває креативність та ініціативність.

По-четверте, необхідно регулярно оновлювати задачі, використовувати актуальні дані, сучасні контексти, що відповідають інтересам та життєвому досвіду сучасних учнів. Задачі про телеграми та радіоприймачі варто замінити на задачі про смартфони та соціальні мережі.

По-п'яте, важливо поєднувати різні типи прикладних задач: від простих ілюстративних до складних дослідницьких та проектних. Це забезпечить комплексний розвиток математичної компетентності учнів.

По-шосте, слід активно використовувати можливості інформаційно-комунікаційних технологій для моделювання складних процесів, візуалізації, проведення обчислень, доступу до реальних даних.

По-сьоме, необхідно організовувати обмін досвідом між вчителями щодо ефективних прикладних задач та методів роботи з ними через методичні об'єднання, семінари, професійні спільноти, онлайн-платформи.

По-восьме, доцільно встановлювати партнерські відносини з представниками різних професій, які можуть поділитися реальними задачами зі своєї сфери діяльності, виступити експертами при оцінюванні учнівських проектів, провести майстер-класи або бесіди про застосування математики в їхній професії.

Таким чином, методика організації роботи з прикладними задачами на уроках математики є комплексною системою, що включає чітку етапність

діяльності, різноманітні методи та прийоми, варіативні форми організації навчання, використання сучасних технологій та диференційований підхід. Правильна організація роботи з прикладними задачами сприяє не лише кращому засвоєнню математичного матеріалу, але й формуванню цілісної системи компетентностей, необхідних для успішної життєдіяльності в сучасному суспільстві. Вчитель, який володіє цією методикою та творчо її застосовує, здатний зробити навчання математики цікавим, змістовним і практично орієнтованим.

fizmat@sspi.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
добросовісності

Висновки

Виконане дослідження було спрямоване на теоретичне обґрунтування та розробку методичних рекомендацій щодо використання прикладних задач як засобу формування ключових компетентностей старшокласників на уроках математики. Результати роботи дозволяють сформулювати такі висновки:

1. Державний стандарт базової середньої освіти визначає низку ключових компетентностей, формування яких має відбуватися засобами всіх навчальних предметів. Математична освіта володіє унікальними можливостями для розвитку кожної з цих компетентностей завдяки своїм специфічним особливостям: логічності, абстрактності, універсальності застосування та міжпредметному характеру. Особливості старшого шкільного віку (розвинене абстрактне мислення, критичне ставлення до інформації, професійне самовизначення) створюють сприятливі умови для формування компетентностей через практично орієнтовані види діяльності.

2. Систематизовано теоретичні підходи до визначення сутності прикладних математичних задач. Наведено багатовимірну класифікацію прикладних задач за галузями застосування (економічні, екологічні, технічні, соціальні та ін.), рівнем складності (від розпізнавання до творчого рівня), характером математичних методів (алгебраїчні, функціональні, оптимізаційні та ін.) та типом математичної діяльності (обчислювальні, моделювання, дослідницькі та ін.). Виявлено ключові функції прикладних задач: мотиваційну (підвищення інтересу до вивчення математики), компетентнісну (формування здатності застосовувати знання в нестандартних ситуаціях), розвивальну (розвиток критичного та творчого мислення) та інтеграційну (встановлення міжпредметних зв'язків).

3. Обґрунтовано потенціал прикладних задач у формуванні ключових компетентностей старшокласників. Математична компетентність розвивається через усвідомлення практичної значущості математичних знань, оволодіння методами математичного моделювання та інтерпретації результатів.

Природничо-наукова компетентність формується при розв'язуванні задач з фізичним, хімічним, біологічним змістом. Інформаційно-цифрова компетентність розвивається через використання спеціалізованого програмного забезпечення, електронних таблиць, систем динамічної математики. Уміння вчитися впродовж життя формується через рефлексію процесу розв'язування, аналіз помилок, пошук альтернативних методів. Підприємливість розвивається через економіко-математичні задачі та проекти оптимізаційного характеру. Прикладні задачі також сприяють розвитку комунікативних навичок (артикуляція ідей, конструктивна критика, колективна робота) та критичного мислення (аналіз достовірності даних, оцінка адекватності моделей).

4. Аналіз чинних навчальних програм та підручників з математики для 10–11 класів виявив неоднорідність у представленні прикладних задач. Найбільш системно компетентнісний підхід реалізовано у підручниках О. Істера, де прикладні задачі виділено в окрему рубрику «Життєва математика» і охоплюють економічну, екологічну, побутову та соціальну тематику. Підручники С. Бевз, В. Бевз містять значну кількість завдань з природничим та екологічним контекстом. У підручниках А. Мерзляка прикладні задачі представлені обмежено, переважають теоретико-математичні завдання. Встановлено, що в більшості підручників домінують задачі базового та середнього рівня складності, бракує відкритих дослідницьких завдань, недостатньо використовуються можливості цифрових технологій. Обмеженим є також коло життєвих контекстів — переважають економічні та побутові ситуації, менше уваги приділено технічним, медичним, соціально-статистичним задачам.

5. Запропоновано методику організації роботи з прикладними задачами, яка включає п'ять взаємопов'язаних етапів: мотиваційно-цільовий (усвідомлення практичної значущості), аналітичний (побудова математичної моделі), операційно-виконавчий (застосування математичних методів), контрольно-оцінний (перевірка адекватності результату) та рефлексивний (узагальнення досвіду). Обґрунтовано доцільність використання різних форм

організації навчальної діяльності (індивідуальної, парної, групової, фронтальної) залежно від етапу роботи та дидактичних цілей. Визначено роль інформаційно-комунікаційних технологій як засобу моделювання складних процесів, візуалізації, проведення обчислень та доступу до реальних даних. Сформульовано методичні рекомендації щодо систематичного включення прикладних задач у навчальний процес, створення власного банку задач, залучення учнів до конструювання задач, використання актуальних даних та міжпредметної інтеграції.

6. Створено систему прикладних задач для формування ключових компетентностей старшокласників, яка охоплює різні галузі людської діяльності (економіку, екологію, технологію, соціальну сферу, природознавство) та різні рівні складності. Розроблені задачі передбачають комплексне застосування знань з різних розділів математики (алгебри, початків аналізу, геометрії, теорії ймовірностей), встановлення міжпредметних зв'язків та використання сучасних цифрових інструментів. Система задач структурована відповідно до програмового матеріалу та забезпечує поступове ускладнення — від репродуктивних завдань до творчих та дослідницьких проєктів.

Отже, виконане дослідження підтвердило, що систематичне та методично обґрунтоване використання прикладних задач є ефективним засобом формування ключових компетентностей старшокласників на уроках математики. Розроблені методичні рекомендації, система задач, розробки уроків можуть бути використані вчителями-практиками для вдосконалення навчального процесу, викладачами педагогічних університетів у підготовці майбутніх учителів математики.

Список використаних джерел

1. Akulenko I. Competence-oriented Methodological Preparation of Future Mathematics Teachers of Profile School (theoretical aspect) // *ResearchGate*. – 2018. – <https://www.researchgate.net/publication/275515549>
2. de Lange J. *Mathematical Literacy for Living from OECD-PISA Perspective* // *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*. – 2006. – Vol. 25, No 1. – P. 13–35. – <https://cir.nii.ac.jp/crid/1520290882875156736>
3. Drijvers P. *Digital technology in mathematics education* / P. Drijvers. — (Огляд/розділ). — 2013. — Режим доступу: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4503911.pdf>
4. Freudenthal H. *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2019. – 195 p.
5. <https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>
6. Matvieieva O., Ovcharenko N., Korchagina A., Kuznetsova O., Grineva V. Study of Aspects Facilitating «Lifelong Learning» Competence Development in High School Students. *Revista Românească pentru Educație Multidimensională*, 2019, 11(2), 180-197. DOI:10.18662/rrem/124.
7. Mitra A. N. *Mathematics: The Language of Science* [Електронний ресурс] // *arXiv preprint*. – 2011. – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1111.6560>
8. NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. – Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. – URL: <https://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/thesis/chap2.htm>
9. OECD. PISA 2022 Mathematics Framework. – Paris: OECD Publishing, 2022. – URL: <https://pisa2022-maths.oecd.org>
10. OECD. Take the Test: Sample Tasks from OECD's PISA Assessments. – Paris: OECD, 2009. – URL: https://www.oecd-ilibrary.org/education/take-the-test_9789264050815-en

11. Romanchuk N. Mathematical competences as a basis of prospective engineers' training in higher technical educational institutions // *Zhytomyr State University Journal*. – 2021. – <https://eprints.zu.edu.ua/34175/1/6.pdf>

12. Tarasenkova N. (Ed.). *Competentization and Mathematical Education: Learning Mathematics at Secondary and Vocational Schools*. – Budapest : SCASPEE, 2021. – 126 p. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2022/01/COMPETENTIZATION_AND_MATHEMATICAL_EDUCATION_2021.pdf

13. Tarasenkova N., Akulenko I., Hnezdilova K. Efficient Questioning in Teaching Mathematics: Teachers' Attitudes and Practices // *Revista Românească pentru Educație Multidimensională*. – 2023. – Vol. 15, No 1. – <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/739550/>

14. The Application of Entrepreneurial Elements in Mathematics Teaching: Challenges for Primary School Mathematics Teachers / *Frontiers in Psychology*. 2022. DOI:10.3389/fpsyg.2022.753561.

15. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.

16. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.

17. Бібік Н. М., Ващенко Л. С. Компетентнісний підхід у сучасній освіті : світовий досвід та українські перспективи : бібліотека з освітньої політики / під заг. ред. О. В. Овчарук. Київ : К. І. С, 2004. 112 с.

18. Бурда М. І. *Навчання математики в старшій школі на профільному рівні (методичні рекомендації)*. – Київ : Інститут педагогіки НАПН України, 2021. – <https://www.scribd.com/document/822295650>

19. Вашуленко О. П. Реалізація компетентнісного підходу у шкільному підручнику математики // *Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України*. – 2022. – <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/739438/>

20. Від прикладних задач до компетентнісно орієнтованих // Збірник тез доповідей. – Чернігів, 2020. – С. 12–15. – URL: <https://epub.chnpu.edu.ua>

21. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / А.П.Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф.Крижановський, С. Е.Єршов. Харків.: Вид-во «Ранок», 2018, 288 с.

22. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова. К: Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.

23. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду. *Вища освіта України*. 2008. № 3. С. 23–30.

24. Григор'єва К., Турка Т., Пащенко З. Theoretical and methodological basis of studying the topic «word problems of practical content» in the school course of mathematics // *ScienceRise: Pedagogical Education*. – 2023. – № 4. – URL: https://journals.urau.ua/sr_edu/article/view/294828

25. Денисенко В. М. Прикладні задачі як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках математики // *Фізико-математична освіта*. – 2018. – № 1. – URL: <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/4-1-0-796>

26. Державний стандарт базової середньої освіти (2020) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2>

27. Дмитренко К. А. Звичайні форми роботи — новий підхід: розвиваємо ключові компетентності : метод. посіб. / К. А. Дмитренко, М. В. Коновалова, О. П. Семиволос, С. В. Бекетова. — Х. : ВГ «Основа», 2018. — 119 с.

28. Закон України «Про освіту» : № 2145-VIII від 05.09.2017 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19>

29. Застосування задач прикладного та практичного змісту при вивченні курсу математики 5–6 класу. – URL: <https://naurok.com.ua/metodichka-zastosuvannya-zadach-prikladnogo-ta-praktichnogo-zmistu-pri-vivchenni-kursu-matematiki-5-6-klasu-150176.html>

30. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень) : підруч. для

10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. Київ : Генеза, 2018. 448 с.

31. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу: (профіль. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед, освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. Київ : Генеза, 2019. 416 с.

32. Істер О.С. Геометрія (проф. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. Київ : Генеза, 2018. 368 с.

33. Когтєв А. В. Прикладні задачі з математики як засіб розвитку життєво необхідних компетентностей: веб-сайт. URL: <https://vseosvita.ua/library/formuvanna-gromadanskoj-tanacionalnoi-samosvidomosti-ucniv-z-vadani-slubu-na-urokah-matematiki-108931.html>

34. Концепція «Нова українська школа» : Розпорядження КМУ № 988-р від 14.12.2016 [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/go/988-2016-p>

35. Лаврик В. І., Боголюбов В. М. Впровадження методів математичного моделювання в екологічну освіту, *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна*. 2010. № 893-5. С. 62-64.

36. Лейко С. В. Поняття "компетенція" та "компетентність": теоретичний аналіз / С. В. Лейко // Педагогічний процес: теорія і практика. - 2013. - Вип. 4. - С. 128-135

37. Матяш О. І. Розкриття компетентнісного потенціалу змісту навчальних завдань з математики // *Scientific Journal September*. — 2023. — <https://september.moippo.mk.ua/index.php/sept/article/view/345>

38. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 352 с.

39. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.В. Полонський, М.С. Якір. Х.: Гімназія, 2010. 415 с.

40. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб.

рівні в 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х.: Гімназія, 2018. 512 с.

41. Мерзляк А. Г. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х.: Гімназія, 2018. 272 с.

42. Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х., Гімназія, 2018. 240 с.

43. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (наказ МОНУ від 23.10.2017 № 1407) https://innaterletska.blogspot.com/p/blog-page_68.html

44. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2010. 240с.

45. Першина Н. О. Прикладні задачі з математики: визначення, види, призначення //Освіта і наука. – 2021. – №. 1. [Електронний ресурс] URL: <https://e-journals.udu.edu.ua/index.php/on/article/download/1169/1176>

46. Пометун О. І. Компетентнісний підхід у сучасній освіті : теорія та практика впровадження [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://vseosvita.ua/library/tezy-internet-seminaru-kompetentnisnyi-pidkhid-u-sovremennii-osviti-699923.html>

47. Пометун О. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир сучасної освіти. Рідна школа. 2005. № 1. С. 65–69.

48. Потапенко М. В. Прикладні задачі в курсі алгебри старшої школи // Матеріали науково-практичної конференції. – Суми, 2017. – С. 45–49

49. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. – Режим доступу: <https://naurok.com.ua/metodichni-materiali-prikladna-spryamovanist-shkilnogo-kursu-matematiki-197652.html>

50. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

51. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.

52. Савченко О. Ключові компетентності – інноваційний результат шкільної освіти / О. Савченко // Рідна школа. - 2011. - № 8-9. - С. 4-8. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/rsh_2011_8-9_4.

53. Сембрат А. Л., Самойленко Н. І. Компетентнісний підхід у сучасному вітчизняному та зарубіжному освітньому просторі // *Педагогічні науки: зб. наук. праць*. – 2016. – Вип. LXIX, т. 2. – С. 134–137.

54. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.

55. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. – Режим доступу: <https://naurok.com.ua/metodichni-materiali-prikladna-spryamovanist-shkilnogo-kursu-matematiki-197652.html>

56. Фуштей О. В. Формування професійної компетентності майбутніх учителів фізики засобами мультимедіа : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.04 / Вінницький державний педагогічний ун-т ім. Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2012. 288 с.

57. Чкана Я., Мартиненко О. (2023). Критичне мислення як важлива складова математичної компетентності майбутніх учителів математики. *Освіта. Інноватика. Практика*, 11(5). С. 102–107.

58. Чкана Я.О. Математичне моделювання як інструмент розвитку критичного мислення учнів в умовах НУШ. [Modern aspects of science and education : collective monograph / Compiled by V. Shpak; Chairman of the Editorial Board S. Tabachnikov. Sherman Oaks, California : GS Publishing Services, 2025. С. 150-173.](#)

59. Чкана Я.О., Мартиненко О.В. Розв'язування математичних задач: критичне та математичне мислення. Проблеми та інновації в математичній, цифровій, природничій і професійній освіті: збірник матеріалів XVII-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет конференції, м. Кропивницький, 20 – 27 червня 2024 року. Кропивницький: ІНФОРМАЦІЙНИЙ ВІДДІЛ ЦДУ ім. В. Винниченка, 2024. С. 103-105.

60. Шишов С. Е., Агапов І. Г. Компетентнісний підхід до освіти: примха чи необхідність? *Стандарти і моніторинг в освіті*. 2002, березень-квітень. С. 58–62.

ДОДАТКИ

Додаток А

Банк прикладних задач з алгебри (10–11 класи)

1. Сімейний бюджет

Клас: 10

Тема: Відсоткові розрахунки. Прості відсотки.

Умова: Місячний дохід родини становить 28 000 грн. На харчування витрачають 35 %, на комунальні послуги — 20 %, на транспорт — 10 %. Обчисліть суму заощаджень родини після всіх витрат.

Розвиток ключових компетентностей: формує фінансову грамотність, уміння аналізувати сімейний бюджет і планувати витрати.

2. Економія електроенергії

Клас: 10

Тема: Пропорції та відсоткові зміни.

Умова: У квартирі встановлено 8 ламп розжарювання по 60 Вт, які працюють у середньому по 5 годин щодня. Якщо замінити їх на LED-лампи потужністю 10 Вт, скільки кВт·год і гривень можна заощадити за місяць (30 днів), якщо 1 кВт·год коштує 2,64 грн?

Розвиток ключових компетентностей: розвиває екологічну та підприємницьку компетентності, формує відповідальне ставлення до ресурсів.

3. Банківський депозит

Клас: 10

Тема: Складні відсотки.

Умова: Громадянин вклав 20 000 грн під 10 % річних із капіталізацією відсотків. Яку суму він отримає через 3 роки?

Розвиток ключових компетентностей: розвиває фінансову грамотність, уміння користуватися відсотковими розрахунками у реальному житті.

4. Ціна пального

Клас: 10

Тема: Пропорційні залежності.

Умова: Автомобіль витрачає 8 л бензину на 100 км. Обчисліть вартість поїздки з Києва до Львова (540 км), якщо бензин коштує 58 грн за літр.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває фінансову та математичну компетентності, вчить застосовувати пропорції у побуті.

5. Зростання населення міста

Клас: 11

Тема: Показникові функції.

Умова: Населення міста становить 120 000 осіб і щороку зростає на 2 %. Складіть модель зміни населення і визначте його кількість через 5 років.

Розвиток ключових компетентностей: Формує уміння будувати математичні моделі та робити прогнози, розвиває цифрову грамотність.

6. Амортизація техніки

Клас: 11

Тема: Експоненційна функція.

Умова: Ціна нового обладнання — 150 000 грн. Щорічно воно знецінюється на 12 %. Визначте залишкову вартість через 4 роки.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває фінансову компетентність, уміння працювати з реальними економічними моделями.

7. Аналіз тарифів мобільного зв'язку

Клас: 10

Тема: Лінійна функція.

Умова: Оператор А стягує 50 грн абонплати + 2 грн за хвилину розмови. Оператор Б — без абонплати, але 3 грн за хвилину. При якій тривалості розмов вигідніше користуватися оператором А?

Розвиток ключових компетентностей: розвиває інформаційно-комунікаційну компетентність і критичне мислення.

8. Витрати води

Клас: 10

Тема: Пропорції, рівняння.

Умова: Витрата води у домі становить 250 л на людину щодня. Обчисліть споживання води родиною з 4 осіб за місяць і витрати коштів, якщо 1 м³ коштує 32 грн.

Розвиток ключових компетентностей: формує екологічну компетентність, відповідальність за природні ресурси.

9. Онлайн-покупка

Клас: 10

Тема: Відсоткові знижки.

Умова: Товар коштує 1 200 грн. Магазин надає знижку 15 % і безкоштовну доставку при покупці понад 1 000 грн. Визначте суму до сплати та економію.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває фінансову грамотність і споживчу культуру.

10. Ріст кількості користувачів мобільного додатку

Клас: 11

Тема: Показникові функції.

Умова: Кількість користувачів нового додатку збільшується щомісяця на 25 %. Якщо спочатку їх було 8 000, скільки буде через пів року?

Розвиток ключових компетентностей: розвиває цифрову грамотність і аналітичне мислення.

11. Оптимальний розмір упаковки

Клас: 11

Тема: Похідна та екстремуми.

Умова: Виробник хоче виготовити циліндричну банку об'ємом 500 см³, використавши мінімум матеріалу. Знайдіть висоту та радіус, які мінімізують площу поверхні.

Розвиток ключових компетентностей: формує дослідницьку та технологічну компетентності, застосування похідної до оптимізації.

12. Статистичне дослідження шкільної їдальні

Клас: 11

Тема: Елементи статистики.

Умова: Учні провели опитування 100 школярів щодо вибору страв у їдальні. Побудуйте діаграму, знайдіть середні значення та моду.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває соціальну та цифрову компетентності, вчить працювати з даними.

13. Виробничі витрати

Клас: 11

Тема: Квадратична функція.

Умова: Витрати підприємства задаються формулою $C(x)=3x^2-60x+800$. Знайдіть обсяг виробництва, за якого витрати мінімальні.

Розвиток ключових компетентностей: формує підприємницьке мислення, уміння аналізувати моделі ефективності.

14. Оренда офісу

Клас: 10

Тема: Арифметична прогресія.

Умова: Щомісячна орендна плата становить 12 000 грн і щороку збільшується на 600 грн. Обчисліть плату за п'ятий рік.

Розвиток ключових компетентностей: Розвиває фінансову компетентність, формує розуміння прогресій у реальних умовах.

15. Прогноз погоди

Клас: 10

Тема: Функції, графічне моделювання.

Умова: Температура протягом доби змінюється за законом $T(t)=10+8\sin\frac{\pi t}{12}$. Визначте час найвищої та найнижчої температури.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває природничу та математичну компетентності, уміння інтерпретувати графіки реальних процесів.

Банк прикладних задач з геометрії (10–11 класи)

1. Висота дерева за довжиною тіні

Клас: 10

Тема: Подібність трикутників.

Умова: Висота стовпа становить 3 м, а його тінь — 2,4 м. Поруч дерево має тінь 8 м. Визначте висоту дерева.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває природничу й екологічну компетентності, уміння застосовувати подібність у практичних вимірюваннях.

2. Кут нахилу драбини

Клас: 10

Тема: Тригонометричні функції гострого кута.

Умова: Драбина довжиною 4 м спирається на стіну на висоті 3,2 м. Знайдіть кут нахилу драбини до землі.

Розвиток ключових компетентностей: формує математичну і технологічну компетентності, уміння застосовувати тригонометрію у побуті.

3. Проект сходів

Клас: 10

Тема: Тригонометрія прямокутного трикутника.

Умова: Необхідно спроектувати сходи, що ведуть на поверх висотою 2,8 м. Оптимальний кут нахилу — 35° . Обчисліть довжину сходового маршу.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває інженерно-технологічне мислення, просторову уяву, навички прикладного розрахунку.

4. Архітектура будинку

Клас: 11

Тема: Геометричні тіла. Об'єм і площа поверхні призми.

Умова: Будинок має форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами $8 \times 6 \times 5$ м. Обчисліть площу зовнішніх стін для фарбування (без урахування покрівлі).

Розвиток ключових компетентностей: розвиває технологічну та підприємницьку компетентності, уміння застосовувати геометричні обчислення у побуті.

5. Площа земельної ділянки

Клас: 10

Тема: Координати точки на площині.

Умова: Земельна ділянка має форму чотирикутника з вершинами $A(1;2)$, $B(6;2)$, $C(5;6)$, $D(2;7)$. Обчисліть її площу методом координат.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває громадянську та математичну компетентності, застосування геометрії в геодезії.

6. Об'єм водонапірної вежі

Клас: 11

Тема: Тіла обертання. Циліндр і конус.

Умова: Вежа складається з циліндричної частини радіусом 2 м і висотою 6 м, зверху — конічний дах висотою 1,5 м. Знайдіть об'єм резервуара.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває екологічну й математичну компетентності, показує практичне застосування тіл обертання.

7. Вимірювання висоти будівлі за допомогою кута підйому

Клас: 11

Тема: Тригонометричні функції довільного кута.

Умова: З точки на відстані 50 м від будівлі кут підйому до її вершини становить 32° . Визначте висоту будівлі.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває математичну та природничу компетентності, демонструє приклад геодезичних вимірювань.

8. Енергозберігаючі вікна

Клас: 10

Тема: Площа багатокутників.

Умова: Вікно має форму прямокутника $1,5 \times 1,2$ м і трикутного верхнього сегмента з основою 1,2 м та висотою 0,6 м. Знайдіть площу скла для виготовлення.

Розвиток ключових компетентностей: формує екологічну та технологічну компетентності, поєднання математики й дизайну.

9. Планування кімнати

Клас: 10

Тема: Площа складної фігури.

Умова: Кімната має форму прямокутника 4×5 м з нішою 1×1 м. Обчисліть площу підлоги для замовлення покриття, якщо 1 м^2 коштує 580 грн.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває фінансову, математичну та просторову компетентності.

10. Розрахунок матеріалів для даху

Клас: 11

Тема: Теорема косинусів.

Умова: Дах будинку утворює рівнобедрений трикутник з основою 8 м і кутом при основі 35° . Обчисліть довжину ската та площу даху.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває технологічну компетентність і навички прикладного обчислення.

11. Освітлення міського парку

Клас: 11

Тема: Геометричне місце точок.

Умова: Три ліхтарі розміщено у вершинах трикутника зі сторонами 60, 80 і 100 м. Знайдіть координати точки, рівновіддаленої від усіх трьох ліхтарів, де встановлять фонтан.

Розвиток ключових компетентностей: формує просторову уяву, аналітичне мислення, цифрову компетентність.

12. Розмітка футбольного поля

Клас: 10

Тема: Довжина кола, дуга.

Умова: Радіус центрального кола футбольного поля — 9,15 м. Обчисліть довжину розмітки цього кола.

Розвиток ключових компетентностей: Розвиває громадянську та математичну компетентності, уміння застосовувати формули в реальному середовищі.

13. Навігація дрона

Клас: 11

Тема: Відстань між точками у просторі.

Умова: Дрон вилетів із точки $(2;4;1)$ до точки $(7;10;4)$. Знайдіть відстань, яку він пролетів.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває цифрову та технологічну компетентності, знайомить із координатами у просторі.

14. Опора моста

Клас: 11

Тема: Трикутники. Закони синусів і косинусів.

Умова: Ферма мосту утворює трикутник зі сторонами 6 м, 8 м і 10 м. Визначте кути трикутника.

Розвиток ключових компетентностей: розвиває інженерну, математичну та технологічну компетентності.

15. Визначення висоти телевежі методом відбиття

Клас: 11

Тема: Тригонометрія, прикладне моделювання.

Умова: На відстані 300 м від телевежі розташовано ставок. Кут між прямою до вершини вежі та відбиттям у воді становить 30° . Обчисліть висоту телевежі.

Розвиток ключових компетентностей: формує природничо-наукову, математичну й дослідницьку компетентності.

Додаток Б

РОЗРОБКИ УРОКІВ

Тема: **Похідна у економіці (оптимізація прибутку та витрат)**

Клас: **10 (профільний рівень)**

Тип уроку: **урок застосування знань, умінь та навичок**

Мета уроку: **1) навчальна:**

сформувати вміння застосовувати похідну для розв'язування економічних задач;

навчити знаходити екстремуми функцій у контексті оптимізації прибутку та витрат;

розвинути навички математичного моделювання економічних процесів;

2) розвивальна:

розвивати аналітичне та критичне мислення;

формувати вміння інтерпретувати математичні результати в реальному контексті;

розвивати навички прийняття обґрунтованих рішень;

3) виховна:

виховувати фінансову грамотність та підприємницьку культуру;

формувати відповідальне ставлення до економічних рішень;

показати практичну значущість математики в житті.

Обладнання та ресурси: комп'ютер/проектор, оздатований матеріал з задачами, калькулятори, доступ до Excel/Google Sheets (за можливості), графіки функцій прибутку.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент (2 хв)

Привітання, перевірка готовності до уроку, оголошення теми та мети.

Мотивація: *"Уявіть, що ви власник кав'ярні. Щодня ви продаєте каву, але помічаєте: якщо ціна занадто висока - клієнтів мало, якщо занадто низька - не покриваєте витрати. Як знайти ідеальну ціну? Математика дає точну відповідь!"*

II. Актуалізація опорних знань (5 хв)

Бесіда з питаннями:

Сформулювати означення похідної функції, її фізичний зміст?

Як знайти критичні точки функції?

Як визначити, чи є критична точка максимумом чи мінімумом?

Які економічні поняття ви знаєте?

Експрес-вправа: Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ та критичні точки.

Відповідь: $f'(x) = 6x - 12$; $x = 2$ (критична точка)

III. Вивчення нового матеріалу (10 хв)

Економічні функції та їх похідні

1. Основні поняття:

Дохід $R(x)$ - гроші, отримані від продажу x одиниць товару

Витрати $C(x)$ - витрати на виробництво x одиниць товару

Прибуток $P(x) = R(x) - C(x)$ - різниця між доходом і витратами

2. Граничні показники:

Граничний дохід $R'(x)$ - додатковий дохід від продажу ще однієї одиниці

Граничні витрати $C'(x)$ - додаткові витрати на виробництво ще однієї одиниці

Граничний прибуток $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

3. Умова максимального прибутку: прибуток максимальний, коли $P'(x) = 0$, тобто коли $R'(x) = C'(x)$.

Економічна інтерпретація: прибуток максимальний, коли граничний дохід дорівнює граничним витратам.

IV. Розв'язування прикладних задач (20 хв)

Задача 1 (базовий рівень). Оптимальна ціна на товар: Магазин продає футболки. Дослідження показало, що при ціні p грн. за футболку, кількість проданих футболок за день становить $q = 120 - 2p$ штук. Витрати на придбання однієї футболки складають 20 грн. Якою має бути ціна футболки, щоб прибуток магазину був максимальним?

Розв'язання (колективно з учителем):

Дохід: $R(p) = p \cdot q = p(120 - 2p) = 120p - 2p^2$.

Витрати: $C(p) = 20 \cdot q = 20(120 - 2p) = 2400 - 40p$.

Прибуток:

$P(p) = R(p) - C(p) = 120p - 2p^2 - (2400 - 40p) = -2p^2 + 160p - 2400$.

Знаходимо похідну: $P'(p) = -4p + 160$.

Прирівнюємо до нуля: $-4p + 160 = 0$, $p = 40$ (грн).

Перевіряємо, що це точка максимуму: $P''(p) = -4 < 0$ (максимум).

Обчислюємо максимальний прибуток:

$P(40) = -2(40)^2 + 160(40) - 2400 = 800$ грн.

Відповідь: Оптимальна ціна 40 грн, максимальний прибуток 800 грн/день.

Обговорення: Чому ціна 40 грн оптимальна? Що буде, якщо встановити ціну 50 грн або 30 грн?

Задача 2 (середній рівень). Виробнича фірма: Невелика фірма виробляє сувеніри. Витрати на виробництво x сувенірів за тиждень описуються функцією: $C(x) = 0,01x^2 + 5x + 500$ (грн). Кожен сувенір продається за ціною 25

грн. Скільки сувенірів потрібно виробляти за тиждень для максимального прибутку? Який буде максимальний прибуток?

Розв'язання (робота в парах, потім обговорення):

Дохід: $R(x) = 25x$.

Прибуток: $P(x) = 25x - (0,01x^2 + 5x + 500) = -0,01x^2 + 20x - 500$.

Похідна: $P'(x) = -0,02x + 20$.

Критична точка: $-0,02x + 20 = 0$, $x = 1000$ (сувенірів).

Перевірка: $P''(x) = -0,02 < 0$ (максимум).

Максимальний прибуток:

$P(1000) = -0,01(1000)^2 + 20(1000) - 500 = 9500$ грн.

Відповідь: 1000 сувенірів, прибуток 9500 грн/тиждень.

Задача 3 (високий рівень). Стартап із доставки їжі: Студенти відкрили бізнес з доставки ланчів. Після аналізу даних за місяць встановили, що при ціні p грн за ланч кількість замовлень на день знаходиться за формулою $q(p) = 200 - 4p$; фіксовані витрати (оренда, зарплата) складають 1200 грн/день, а змінні витрати на один ланч 30 грн. Знайти функцію прибутку; визначити оптимальну ціну; розрахувати, при якій мінімальній кількості замовлень бізнес не буде збитковим; проаналізувати, чи вигідно знизити ціну до 40 грн для залучення клієнтів

Розв'язання (самостійна робота з подальшим обговоренням):

Дохід: $R(p) = p \cdot q(p) = p(200 - 4p) = 200p - 4p^2$.

Витрати: $C(p) = 1200 + 30q(p) = 1200 + 30(200 - 4p) = 7200 - 120p$.

Прибуток: $P(p) = 200p - 4p^2 - (7200 - 120p) = -4p^2 + 320p - 7200$.

Оптимальна ціна: $P'(p) = -8p + 320 = 0$, $p = 40$ грн.

Максимальний прибуток:

$P(40) = -4(40)^2 + 320(40) - 7200 = -6400 + 12800 - 7200 = -800$ грн.

Звернути увагу учнів, що від'ємний прибуток означає збиток.

Точка беззбитковості:

$P(p) = 0 \Rightarrow -4p^2 + 320p - 7200 = 0$, $p^2 - 80p + 1800 = 0$,

$p_1 = 30$ грн, $p_2 = 60$ грн.

Отже, бізнес не буде збитковим при ціні від 30 до 60 грн.

Кількість замовлень при $p = 40$:

$q(40) = 200 - 4(40) = 40$ замовлень/день

Висновки для обговорення:

За поточної моделі бізнес збитковий (навіть при оптимальній ціні!)

Потрібно або знизити фіксовані витрати, або збільшити попит

При ціні 40 грн бізнес усе одно в мінусі (-800 грн/день)

Питання для дискусії:

Які рішення можуть прийняти власники?

Як змінити модель, щоб вийти на прибуток?

V. Узагальнення та систематизація (5 хв)

Інтерактивна вправа "Економічний експрес"

Учням пропонується швидко відповісти:

Що означає $R'(x) = 100$? (Продаж ще однієї одиниці додасть 100 грн доходу)

Коли прибуток максимальний? (Коли $P'(x) = 0$ і $P''(x) < 0$)

Що означає $P'(x) > 0$? (Прибуток зростає, варто збільшувати виробництво)

Чому важливо знати граничні витрати? (Допомагає приймати рішення про розширення виробництва)

Висновки:

- 1) Похідна - потужний інструмент для бізнес-аналітики
- 2) Математична оптимізація допомагає приймати обґрунтовані економічні рішення
- 3) Критичне мислення важливе: математична модель може показати, що бізнес нерентабельний
- 4) Граничні показники дають інформацію про доцільність збільшення виробництва

VI. Домашнє завдання

Задача (базовий рівень). Кафе продає тістечка. При ціні p грн за штуку продається $q = 80 - 2p$ тістечок на день. Собівартість одного тістечка 10 грн. Знайти оптимальну ціну та максимальний прибуток.

Задача (достатній рівень). Фірма виробляє x одиниць товару за тиждень. Витрати: $C(x) = 0,02x^2 + 10x + 800$ грн. Ціна одиниці товару 50 грн. Знайти оптимальний обсяг виробництва та прибуток.

Проект (високий рівень). Розробіть власну бізнес-ідею (продаж товару або послуги). Створіть математичну модель прибутку, знайдіть оптимальні параметри. Підготуйте презентацію на 3-5 слайдів із обґрунтуванням рішень.

Додаткове завдання (за бажанням). Знайдіть в інтернеті інформацію про реальні приклади використання математичної оптимізації у відомих компаніях (Amazon, Uber, Glovo тощо).

Тема: Тригонометрія в будівництві та навігації

Клас: 10

Тип уроку: урок комплексного застосування знань, умінь та навичок

Мета уроку: 1) навчальна:

сформувані вміння застосовувати тригонометричні функції для розв'язування практичних задач будівництва та навігації;

навчити використовувати теореми синусів та косинусів у реальних ситуаціях;

розвинути навички побудови математичних моделей просторових об'єктів;

2) розвивальна:

розвивати просторове мислення та уяву;

формувати вміння переводити реальні проблеми в математичні моделі;

розвивати навички роботи з вимірювальними інструментами та картами;

3) виховна:

виховувати усвідомлення значущості математики в технічних професіях;

формувати культуру безпеки при будівельних роботах;

розвивати відповідальність за точність розрахунків.

Обладнання та ресурси: проектор/інтерактивна дошка, моделі будівельних конструкцій (дах, драбина), кутомір (транспортир), рулетка, смартфони з додатками (компас, калькулятор), роздатковий матеріал з планами будівель, карти місцевості, навігаційні схеми, презентація з фотографіями реальних об'єктів.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент (2 хв)

Привітання, перевірка готовності.

Мотивація: *"Як будівельники визначають висоту хмарочоса, не піднімаючись на дах? Як штурмани кораблів знаходять шлях серед океану? Як архітектори розраховують кут нахилу даху, щоб сніг не затримувався? Сьогодні ви дізнаєтесь, що всі ці професіонали використовують тригонометрію щодня!"*

Демонстрація: Показати фото будівництва мосту/хмарочоса, GPS-навігації, похилої Пізанської вежі.

II. Актуалізація опорних знань (5 хв)

Блиц-опитування "Тригонометричний марафон":

Що таке синус кута? (відношення протилежного катета до гіпотенузи)

Чому дорівнює $\cos 60^\circ$? (0,5)

Що таке тангенс? (відношення синуса до косинуса)

Теорема синусів? ($a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$)

Теорема косинусів? ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$)

Практична вправа: У прямокутному трикутнику один катет 6 м, кут між ним і гіпотенузою 30° . Знайти гіпотенузу.

Розв'язання: $\sin 30^\circ = 6/c \rightarrow c = 6/0,5 = 12$ м

III. Вивчення нового матеріалу (8 хв)

Блок 1. Тригонометрія в будівництві

1. Визначення висоти об'єктів

Коли неможливо виміряти висоту безпосередньо, використовують наступний метод

стаємо на відстані d від об'єкта;

вимірюємо кут піднесення α до вершини об'єкту

висота: $h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$

Схема на дошці:



2. Розрахунок дахів

Кут нахилу даху залежить від:

Кліматичних умов (сніг, дощ, вітер)

Типу покрівельного матеріалу

Естетики

Формули:

Кут нахилу: $\operatorname{tg} \alpha = h/b$ (h - висота конька, b - половина ширини будинку)

Довжина ската: $L = h/\sin \alpha$ або $L = b/\cos \alpha$

Рекомендовані кути:

Для снігових регіонів: $45-60^\circ$ (сніг не затримується)

Для вітряних регіонів: $25-35^\circ$ (менший вітровий тиск)

Плоскі дахи: $5-15^\circ$ (для стоку води)

3. Безпека драбин

За правилами безпеки драбина повинна утворювати з землею кут $65-75^\circ$

Менше 65° - нестійка (може відхилитись назад)

Більше 75° - небезпечна (може впасти вперед)

Розрахунок: якщо висота h , то відстань від стіни: $d = h/\operatorname{tg} \alpha$

Блок 2: Тригонометрія в навігації

1. Азимут та пеленг

Азимут – кут між напрямком на північ і напрямком руху (за годинниковою стрілкою від 0° до 360°).

Основні напрямки:

Північ: 0° (360°)

Схід: 90°

Південь: 180°

Захід: 270°

2. Розрахунок відстаней на місцевості

Метод трикутника:

Вимірюємо відстань AB (базис)

Вимірюємо кути до об'єкта C з точок A і B

Використовуємо теорему синусів для знаходження відстані до C

3. GPS та тригонометрія

GPS-приймач використовує:

Відстані до 3-4 супутників

Тригонометричні розрахунки для визначення координат

Метод тріангуляції

IV. Розв'язування прикладних задач (22 хв)

Задача 1 (базовий рівень). Висота будинку. Потрібно визначити висоту будинку. Геодезист стоїть на відстані 20 м від будинку і вимірює кут піднесення до верхнього краю - він становить 60° . Висота приладу над землею 1,5 м. Знайти висоту будинку.

Розв'язання (колективно):

Малюємо схему.

Висота від рівня приладу до верху: $h_1 = d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 20 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 20 \cdot \sqrt{3} \approx 20 \cdot 1,732 = 34,64$ м.

Загальна висота будинку: $H = h_1 + 1,5 = 34,64 + 1,5 = 36,14$ м.

Відповідь: Висота будинку приблизно 36 м.

Практичне застосування: Такі вимірювання використовують земельні кадастри, будівельні компанії, архітектори.

Задача 2 (середній рівень). Розрахунок даху. Будується будинок шириною 12 м. Архітектор планує двосхилий дах з кутом нахилу 40° (рекомендований для регіону з помірним снігом). Знайти: а) висоту конька даху; б) довжину одного ската; в) загальну площу покрівлі, якщо довжина будинку 15 м; г) кількість металочерепиці, якщо 1 лист = 2 м^2 , запас 10%.

Розв'язання (робота в групах по 4 особи):

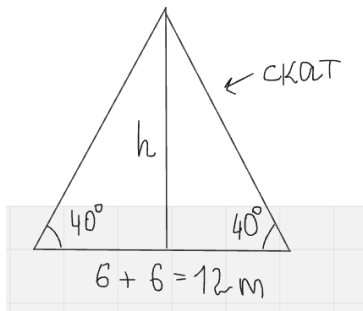
Дано:

Ширина будинку: 12 м

Кут нахилу: $\alpha = 40^\circ$

Довжина будинку: 15 м

Схема:



а) Висота конька:

Половина ширини: $b = 12/2 = 6$ м

$$\operatorname{tg} 40^\circ = h/6$$

$$h = 6 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 6 \cdot 0,839 = 5,03 \text{ м}$$

б) Довжина ската:

$$L = b/\cos 40^\circ = 6/0,766 \approx 7,83 \text{ м}$$

$$\text{Або через Піфагора: } L = \sqrt{(6^2 + 5,03^2)} = \sqrt{(36 + 25,3)} \approx 7,83 \text{ м.}$$

в) Площа покрівлі:

$$\text{Площа одного ската: } S_1 = 7,83 \cdot 15 = 117,45 \text{ м}^2$$

$$\text{Два скати: } S = 2 \cdot 117,45 = 234,9 \approx 235 \text{ м}^2$$

г) Кількість листів металочерепиці:

$$\text{З запасом 10\%: } S' = 235 \cdot 1,1 = 258,5 \text{ м}^2$$

$$\text{Кількість листів: } 258,5 / 2 = 129,25 \approx \mathbf{130 \text{ листів}}$$

Відповідь:

Висота конька: 5 м

Довжина ската: 7,8 м

Площа покрівлі: 235 м²

Потрібно 130 листів металочерепиці

Економічні розрахунки (додаткове обговорення): Якщо лист коштує 300 грн: $130 \cdot 300 = 39\,000$ грн (тільки матеріал)

Задача 3 (високий рівень). Навігаційна задача. Група туристів планує похід. Від табору *A* вони йдуть 5 км на північний схід (азимут 45°), потім 3 км на південь (азимут 180°). Знайти: а) координати фінальної точки *C* відносно табору *A* (скільки км на схід і на північ); б) відстань від *A* до *C*; в) азимут зворотного шляху від *C* до *A*; г) якщо швидкість руху 4 км/год, скільки часу займе пряме повернення?

Розв'язання (самостійна робота з подальшою перевіркою).

Система координат: *A* - початок, вісь *x* - схід, вісь *y* – північ.

а) Координати після першого переходу (точка *B*):

На північний схід під 45°:

$$x_1 = 5 \cdot \cos 45^\circ = 5 \cdot (\sqrt{2}/2) \approx 3,54 \text{ км (на схід)}$$

$$y_1 = 5 \cdot \sin 45^\circ = 5 \cdot (\sqrt{2}/2) \approx 3,54 \text{ км (на північ)}$$

Координати після другого переходу (точка *C*):

На південь 3 км (тільки по осі y змінюється):

$x_c = 3,54$ км (на схід від A)

$y_c = 3,54 - 3 = 0,54$ км (на північ від A)

б) Пряма відстань AC :

$$AC = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \sqrt{3,54^2 + 0,54^2} = \sqrt{12,82} \approx 3,58 \text{ км}$$

в) Азимут зворотного напрямку від C до A :

$$\operatorname{tg} \beta = x_c / y_c = 3,54 / 0,54 \approx 6,56$$

$$\beta = \operatorname{arctg}(6,56) \approx 81,3^\circ$$

Але це кут від північного напрямку. Точка A знаходиться на захід і трохи на південь від C .

Азимут від C до A : $270^\circ - (90^\circ - 81,3^\circ) = 270^\circ - 8,7^\circ \approx 261^\circ$ (захід-південний-захід)

Або простіше: кут від осі y (північ) $= \operatorname{arctg}(3,54/0,54) \approx 81,3^\circ$, але в західному напрямку.

$$\text{Азимут} = 360^\circ - 81,3^\circ = 278,7^\circ \approx 279^\circ \text{ (майже західний напрямок)}$$

г) Час повернення:

$$\text{Час} = 3,58 \text{ км} / 4 \text{ км/год} \approx 0,9 \text{ год} \approx 54 \text{ хвилини}$$

Відповідь:

Фінальна позиція: 3,5 км на схід, 0,5 км на північ

Пряма відстань: 3,6 км

Азимут повернення: 279° (майже на захід)

Час повернення: 54 хв

Практичний висновок: Прямий шлях коротший (3,6 км замість 8 км обхідним) і швидший!

Задача 4 (додаткова, інженерна). Безпека драбини. Електрик повинен дістатись до щитка на висоті 6,5 м. Драбина має довжину 7 м. Знайти: а) на якій відстані від стіни встановити драбину для оптимального кута 70° ? б) чи безпечний кут 80° ? На якій відстані тоді ставити драбину? в) який діапазон відстаней забезпечує безпечний кут $65-75^\circ$?

Розв'язання:

а) Для кута 70° :

$$\cos 70^\circ = d/7$$

$$d = 7 \cdot \cos 70^\circ \approx 7 \cdot 0,342 = 2,39 \text{ м}$$

$$\text{Перевірка висоти: } h = 7 \cdot \sin 70^\circ \approx 7 \cdot 0,940 = 6,58 \text{ м (достатньо)}$$

б) Для кута 80° :

$$d = 7 \cdot \cos 80^\circ \approx 7 \cdot 0,174 = 1,22 \text{ м}$$

Це менше 2 м від стіни - **небезпечно!** (драбина може впасти вперед)

в) Безпечний діапазон ($65-75^\circ$):

Для 65° : $d_1 = 7 \cdot \cos 65^\circ \approx 2,96$ м

Для 75° : $d_2 = 7 \cdot \cos 75^\circ \approx 1,81$ м

Безпечний діапазон: від 1,8 м до 3,0 м від стіни

Відповідь:

Оптимально: 2,4 м від стіни

80° небезпечний

Безпечно: 1,8-3,0 м

V. Практична робота (5 хв)

Міні-дослідження "Вимірювання висоти школи"

Обладнання: смартфон з додатком-кутоміром (або транспортер з ниткою), рулетка.

Завдання:

Виміряти відстань від точки спостереження до школи

Виміряти кут піднесення до краю даху

Розрахувати висоту школи

Порівняти з реальною висотою (якщо відома)

Інструкція безпеки: Не відходити за територію школи, працювати в групах по 3-4 особи.

VI. Узагальнення та систематизація (3 хв)

Інтелектуальна гра "Професійний виклик"

Клас ділиться на 3 команди: "Будівельники", "Навігатори", "Архітектори"

Запитання:

Яка професія використовує тригонометрію для розрахунку мостів?
(Інженер-будівельник)

Як називається прилад для вимірювання кутів на місцевості? (Теодоліт)

Чому не роблять дахи з кутом 90° ? (Сніг, дощ будуть накопичуватись)

Яка система навігації використовує тригонометрію? (GPS, ГЛОНАСС)

Назвіть українські споруди, де використовувалась тригонометрія (Мости в Києві, хмарочоси, стадіони)

Ключові висновки:

✓ Тригонометрія - основа будівництва та навігації

✓ Точність розрахунків = безпека людей

✓ Математика допомагає економити матеріали

✓ Сучасні технології (GPS) базуються на класичній математиці

VII. Домашнє завдання (2 хв)

Задача 1 (рівень стандарт). Драбина довжиною 5 м прислонена до стіни під кутом 65° до землі. На якій висоті вона торкається стіни?

Задача 2. Дах будинку має кут нахилу 35° . Ширина будинку 10 м. Знайти висоту конька.

Задача 3 (достатній рівень). Турист пройшов 4 км на схід, потім 3 км на північ. Знайти пряму відстань від старту до фінішу та азимут зворотного шляху.

Задача 4. Розрахувати площу матеріалу для двосхилого даху будинку 8×12 м з кутом нахилу 50° (з запасом 15%).

Проект "Моя будівля" (високий рівень). Спроектуйте дах для будинку вашої мрії:

- Оберіть розміри будинку (ширина, довжина)
- Обґрунтуйте кут нахилу (клімат вашого регіону)
- Розрахуйте всі параметри (висота, довжина скатів, площа)
- Підрахуйте вартість матеріалів (знайдіть реальні ціни)
- Створіть презентацію на 5 слайдів з малюнками

Творче завдання (за бажанням). Використовуючи Google Maps, виміряйте відстань між двома об'єктами у вашому місті. Перевірте розрахунок за допомогою координат і тригонометрії. Підготуйте короткий звіт.

VIII. Рефлексія (2 хв)

Методика "Будівельна сходинка"

На дошці малюнок сходів із 5 сходинок:

5. ☐ Можу навчити іншого
4. ☐ Можу застосувати самостійно
3. ☐ Розумію з підказками
2. ☐ Є питання
1. ☐ Потребую допомоги

Учні показують, на якій сходинці вони зараз (піднімають відповідну кількість пальців або клеять стікери).

Швидке опитування:

Що найбільше здивувало на уроці?

Де ще можна застосувати тригонометрію?

Яка професія вас зацікавила?

Тема: **Інтеграл у фізиці та економіці**

Клас: **11**

Тип уроку: **урок інтегрованого застосування знань**

Мета уроку: **1) навчальна:**

сформувані вміння застосовувати визначений інтеграл для розв'язування фізичних та економічних задач;

навчити обчислювати переміщення, роботу, споживання ресурсів через інтеграл;

розвинути навички інтерпретації інтеграла як площі під графіком функції;

2) розвивальна:

розвивати аналітичне мислення та вміння бачити зв'язки між різними науками;

формувати навички моделювання реальних процесів;

розвивати екологічну свідомість через аналіз споживання ресурсів;

3) виховна:

виховувати відповідальне ставлення до енергоресурсів;

формувати розуміння важливості математики в екології та економіці;

розвивати критичне мислення щодо економічних процесів.

Обладнання та ресурси: проектор/інтерактивна дошка, графіки функцій швидкості, потужності, виробництва, калькулятори (звичайні або графічні), роздатковий матеріал з задачами, доступ до онлайн-калькуляторів інтегралів (WolframAlpha, Symbolab), рахунки за електроенергію (зразки для демонстрації), презентація з анімацією руху тіла.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент (2 хв)

Привітання, перевірка готовності.

Мотивація: *"Скільки електроенергії споживає ваша оселя за місяць? Як розрахувати відстань, яку проїхав автомобіль, якщо його швидкість весь час змінювалась? Як визначити загальний прибуток компанії, коли прибуток щодня різний? Відповідь на всі ці питання дає ІНТЕГРАЛ!"*

Демонстрація: Показати графік споживання електроенергії за добу, графік швидкості автомобіля.

II. Актуалізація опорних знань (5 хв)

Фронтальне опитування:

Що таке первісна функції? (Функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$)

Що таке невизначений інтеграл? (Сукупність усіх первісних)

Формула Ньютона-Лейбніца.

Геометричний зміст визначеного інтеграла?

Експрес-вправи:

Обчисліть інтеграли:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$$\int_0^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^2 = 8$$

Фізичні величини (повторення з фізики):

Швидкість $v(t)$ - похідна від переміщення $s(t)$

Переміщення $s = \int v(t) dt$

Потужність $P(t)$ - швидкість виконання роботи

Робота $A = \int P(t) dt$

III. Вивчення нового матеріалу (10 хв)

Блок 1. Інтеграл у фізиці

1. Переміщення при нерівномірному русі. Якщо швидкість тіла

змінюється за законом $v(t)$, то переміщення за час від t_1 до t_2 : $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Інтерпретація: площа під графіком швидкості = пройдений шлях.

Приклад: $v(t) = 10t$ м/с (рівноприскорений рух), за 5 секунд:

$$s = \int_0^5 10t dt = 5t^2 \Big|_0^5 = 125 \text{ м.}$$

2. Робота змінної сили. Якщо сила $F(x)$ змінюється при переміщенні від x_1

до x_2 , то $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$.

Приклад: Розтягування пружини $F(x) = kx$ (закон Гука), робота при

розтягуванні на відстань L : $A = \int_0^L kx dx = \left(\frac{kx^2}{2} \right) \Big|_0^L = \frac{kL^2}{2}$.

3. Споживання енергії. Потужність $P(t)$ змінюється з часом, споживана

енергія за період $[t_1, t_2]$: $E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$.

Приклад: Електроприлад працює з потужністю

$P(t) = 1000 + 200 \sin(\pi t/12)$ Вт.

За 6 годин: $E = \int_0^6 \left(1000 + 200 \sin \frac{\pi t}{12} \right) dt$ кВт·год.

Блок 2. Інтеграл в економіці

1. Загальний прибуток/дохід. Якщо граничний прибуток $P'(x) = f(x)$, то

загальний прибуток від виробництва x_1 до x_2 одиниць: $P = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$.

Приклад: Граничний прибуток $f(x) = 50 - 0,1x$ грн/од. Прибуток від виробництва перших 100 одиниць:

$$P = \int_0^{100} (50 - 0,1x) dx = (50x - 0,05x^2) \Big|_0^{100} = 4500 \text{ грн.}$$

2. Споживання ресурсів. Швидкість споживання $r(t)$, загальне споживання за період $[0, T]$: $R = \int_0^T r(t) dt$.

Приклад: Фабрика споживає воду зі швидкістю $r(t) = 100 + 20t$ м³/год. За 8-годинну зміну: $R = \int_0^8 (100 + 20t) dt = 1440 \text{ м}^3$.

3. Вартість проекту у часі. Якщо вартість інвестиції змінюється $c(t)$, загальна вартість проекту: $C = \int_0^T c(t) dt$.

IV. Розв'язування прикладних задач (22 хв)

Задача 1 (базовий рівень). Рух автомобіля. Автомобіль рушає з місця, його швидкість змінюється за законом $v(t) = 5t$ м/с (перші 6 секунд). Знайти: а) переміщення автомобіля за 6 секунд; б) середню швидкість руху.

Розв'язання (колективно з учителем):

а) Переміщення: $s = \int_0^6 5t dt = \left(\frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^6 = 90 \text{ м.}$

б) Середня швидкість: $\bar{v} = s/t = 90/6 = 15 \text{ м/с.}$

Перевірка: за формулою $\bar{v} = (v_0 + v)/2 = (0 + 30)/2 = 15 \text{ м/с.}$

Графічна інтерпретація: площа трикутника під графіком $v(t)$: $S = (1/2) \cdot \text{основа} \cdot \text{висота} = (1/2) \cdot 6 \cdot 30 = 90 \text{ м}$

Відповідь: 90 м, середня швидкість 15 м/с.

Обговорення: Чому середня швидкість не дорівнює швидкості при $t=3$?

Задача 2 (середній рівень). Споживання електроенергії. Сім'я встановила лічильник, який показує потужність споживання електроенергії протягом доби. Виявилось, що споживання змінюється за законом:

$$P(t) = 0,5 + 0,8 \sin(\pi t/12) \text{ кВт,}$$

де t – час доби ($0 \leq t \leq 24$ години). Знайти: а) споживання електроенергії за добу; б) вартість електроенергії, якщо 1 кВт·год коштує 2,68 грн; в) у який час доби споживання мінімальне та максимальне; г) скільки можна заощадити за місяць, якщо зменшити споживання на 10%?

Розв'язання (робота в парах):

а) Споживання за добу:

$$E = \int_0^{24} \left(0,5 + 0,8 \sin \frac{\pi t}{12} \right) dt = \left(0,5t - 0,8 \cdot \frac{12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} \right) \Big|_0^{24} = 12 \text{ кВт} \cdot \text{год.}$$

б) Вартість:

Вартість = $12 \cdot 2,68 = 32,16$ грн/добу

За місяць (30 днів): $32,16 \cdot 30 = 964,8$ грн ≈ 965 грн

в) Екстремуми функції $P(t)$:

$$P'(t) = 0,8 \cdot (\pi/12) \cdot \cos(\pi t/12) = 0$$

$$\pi t/12 = \pi/2 \text{ або } \pi t/12 = 3\pi/2$$

$$t = 6 \text{ год або } t = 18 \text{ год}$$

Перевіряємо:

$$P(6) = 0,5 + 0,8 \cdot \sin(\pi/2) = 0,5 + 0,8 = 1,3 \text{ кВт (максимум - ранок)}$$

$$P(18) = 0,5 + 0,8 \cdot \sin(3\pi/2) = 0,5 - 0,8 = -0,3 \text{ кВт...}$$

Помилка в моделі! Потужність не може бути від'ємною.

Коригуємо модель: $P(t) = 0,8 + 0,5 \sin(\pi t/12)$ кВт (зміщуємо вгору)

Тоді:

$$P(6) = 0,8 + 0,5 = 1,3 \text{ кВт (максимум - ранок/вечір)}$$

$$P(18) = 0,8 - 0,5 = 0,3 \text{ кВт (мінімум - ніч)}$$

г) Економія при зменшенні на 10%:

Нове споживання: $12 \cdot 0,9 = 10,8$ кВт·год/добу

Економія за добу: $(12 - 10,8) \cdot 2,68 = 3,22$ грн

Економія за місяць: $3,22 \cdot 30 = 96,6$ грн ≈ 97 грн

Відповідь:

Споживання: 12 кВт·год/добу

Вартість: 965 грн/місяць

Максимум о 6 годині, мінімум о 18 годині

Економія: 97 грн/місяць

Екологічне обговорення:

Як зменшити споживання? (LED-лампи, енергоефективна техніка)

Чому важливо економити електроенергію? (екологія, бюджет сім'ї)

Задача 3 (високий рівень). Виробництво та екологія. Завод виробляє продукцію. Швидкість виробництва залежить від часу за законом

$$v(t) = 100 + 50 \sin(\pi t/6) \text{ одиниць/год}$$

(t – години зміни, $0 \leq t \leq 12$). При цьому викиди CO_2 в атмосферу залежать від інтенсивності виробництва $e(t) = 0,02v(t)$ кг/год. Собівартість однієї одиниці продукції: 50 грн, ціна продажу складає 80 грн, штраф за перевищення ліміту викидів (720 кг CO_2 /зміну) становить 1000 грн за кожен кг понад норму.

Знайти: а) кількість виробленої продукції за зміну; б) загальні викиди CO_2 за зміну; в) чи перевищує завод ліміт викидів; г) прибуток заводу за зміну (з

урахуванням можливих штрафів); д) запропонувати рішення для зменшення викидів.

Розв'язання (самостійна робота в групах, потім презентація):

а) Виробництво за зміну:

$$Q = \int_0^{12} \left(100 + 50 \sin \frac{\pi t}{6} \right) dt = \left(100t - 50 \cdot \frac{6}{\pi} \cos \frac{\pi t}{6} \right) \Big|_0^{12} = 1200 \text{ одиниць}$$

б) Викиди CO₂:

$$E = \int_0^{12} 0,02v(t)dt = 0,02 \cdot \int_0^{12} \left(100 + 50 \sin \frac{\pi t}{6} \right) dt = 0,02 \cdot 1200 = 24 \text{ кг CO}_2$$

в) Перевищення ліміту?

Ліміт 720 кг/зміну, а фактичні викиди 24 кг/зміну, тобто викиди в межах норми! (24 << 720).

Примітка: У моделі занадто малі викиди. Реалістичніше було б $e(t) = 0,6v(t)$ кг/год, тоді викиди = 720 кг, точно на межі.

г) Прибуток:

Дохід: $1200 \cdot 80 = 96\,000$ грн

Витрати: $1200 \cdot 50 = 60\,000$ грн

Штрафів немає (викиди в нормі)

Прибуток = $96\,000 - 60\,000 = 36\,000$ грн/зміну

д) Рішення для зменшення викидів (дискусія):

Встановити фільтри очищення (інвестиції)

Оптимізувати режим роботи (уникати піків виробництва)

Перейти на екологічніше обладнання

Компенсувати викиди (посадка дерев, зелені проекти)

Купувати "зелені" сертифікати

Економічний аналіз: Якщо фільтри коштують 500 000 грн і знижують викиди на 30%, окупованість:

Без фільтрів: викиди були б вищі → штрафи

Період окупності залежить від обсягу виробництва

Відповідь:

Виробництво: 1200 одиниць

Викиди: 24 кг CO₂ (в нормі)

Прибуток: 36 000 грн/зміну

Обговорення:

Чи має завод підвищувати виробництво?

Баланс між прибутком і екологією

Соціальна відповідальність бізнесу

Задача 4 (додаткова, інвестиційна). Дисконтовані грошові потоки.

Стартап отримує дохід, який зростає у часі за законом

$$R(t) = 10000 + 5000t \text{ грн/місяць } (t - \text{місяці від запуску, } 0 \leq t \leq 12).$$

Але через інфляцію майбутні гроші мають меншу цінність. З урахуванням дисконтування (ставка 10% річних = 0,833% на місяць) поточна вартість дорівнює $R(t) \cdot e^{-0.00833t}$. Знайти: а) номінальний дохід за рік (без дисконтування); б) реальну (дисконтовану) вартість доходу за рік; в) різницю між номінальним і реальним доходом.

Розв'язання (для сильних учнів):

а) Номінальний дохід:

$$D_{nom} = \int_0^{12} (10000 + 5000t) dt = \left(10000t + 2500t^2 \right) \Big|_0^{12} = 480\,000 \text{ грн}$$

б) Дисконтований дохід:

$$D_{real} = \int_0^{12} (10000 + 5000t) e^{-0.00833t} dt \text{ [наближено (метод трапецій або онлайн-}$$

калькулятор)] $\approx 455\,000$ грн

в) Втрати через інфляцію:

$$\text{Різниця} = 480\,000 - 455\,000 = 25\,000 \text{ грн (5,2\%)}$$

Висновок для інвесторів: Реальна вартість грошей у майбутньому менша через інфляцію. Це важливо враховувати при плануванні інвестицій!

V. Узагальнення та систематизація (4 хв)

Інтерактивна вправа "Інтеграл у житті"

На дошці три колонки: **ФІЗИКА** | **ЕКОНОМІКА** | **ЕКОЛОГІЯ**

Учні називають приклади застосування інтеграла в кожній сфері:

Фізика:

Переміщення при змінній швидкості

Робота змінної сили

Споживання енергії

Імпульс сили

Електричний заряд при змінному струмі

Економіка:

Загальний прибуток/дохід

Вартість проекту

Споживання ресурсів

Дисконтовані грошові потоки

Попит і пропозиція

Екологія:

Викиди забруднень

Споживання води/енергії

Накопичення відходів
Відновлення популяцій
Карбоновий слід

Ключові висновки:

- ✓ Інтеграл = НАКОПИЧЕННЯ (швидкість $\rightarrow$ шлях, потужність $\rightarrow$ енергія, дохід $\rightarrow$ прибуток)
- ✓ Інтеграл дозволяє прогнозувати та планувати
- ✓ Математика допомагає приймати екологічні та економічні рішення
- ✓ Площа під графіком має фізичний/економічний зміст

VI. Домашнє завдання (2 хв)

Задача 1 (рівень стандарт). Швидкість руху тіла $v(t) = 4t + 2$ м/с. Знайти переміщення за проміжок часу від 0 до 5 секунд.

Задача 2. Потужність обігрівача $P = 1,5$ кВт (постійна). Скільки електроенергії він спожив за 6 годин роботи? Розрахувати вартість (тариф 2,68 грн/кВт·год).

Задача 3 (достатній рівень). Фірма отримує дохід зі швидкістю $R'(t) = 200 - 0,5t^2$ грн/день. Знайти загальний дохід за перші 10 днів місяця.

Задача 4. Завод споживає газ зі швидкістю $q(t) = 50 + 10\cos(\pi t/12)$ м³/год. Обчислити споживання за добу (24 години).

Дослідницький проект "Енергоспоживання моєї родини" (високий рівень).

Записуйте покази лічильника електроенергії 2 рази на день (ранок/вечір) протягом тижня.

Побудуйте графік споживання.

Знайдіть (підберіть) функцію, що описує споживання $P(t)$.

Обчисліть загальне споживання через інтеграл.

Порівняйте з реальними показами лічильника.

Запропонуйте заходи для економії (з розрахунками).

Підготуйте презентацію на 5-7 слайдів.

Критерії оцінювання проекту:

Точність вимірювань (2 бали)

Правильність моделювання (3 бали)

Обчислення інтеграла (3 бали)

Практичні рекомендації (2 бали)

Оформлення та презентація (2 бали)

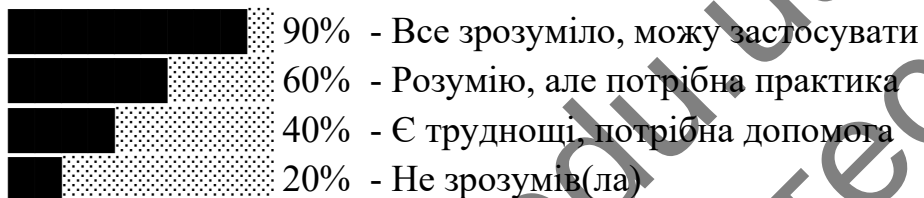
Творче завдання (за бажанням):

Знайдіть в Інтернеті цікаві приклади застосування інтеграла в несподіваних сферах (медицина, біологія, музика, спорт, архітектура). Підготуйте короткий огляд.

VII. Рефлексія (2 хв)

Методика "Інтеграл знань"

Моє розуміння теми:



Питання для обговорення:

Що здивувало найбільше?

Де ще можна застосувати інтеграл?

Яка задача була найцікавішою?

Чи змінилось ваше ставлення до споживання енергії?

Швидке опитування: "Підніміть руку, хто після сьогоднішнього уроку задумався про економію електроенергії?"

Тема: Показникові функції - моделювання росту населення, епідемії, інвестицій

Клас: 11

Тип уроку: урок застосування знань у нестандартних ситуаціях

Мета уроку: 1) навчальна:

Сформувати вміння застосовувати показникові функції для моделювання реальних процесів

Навчити розв'язувати показникові рівняння в контексті прикладних задач

Розвинути навички прогнозування та аналізу динамічних процесів

2) розвивальна:

Розвивати критичне мислення при аналізі моделей зростання

Формувати вміння інтерпретувати графіки в різних контекстах

Розвивати навички роботи з великими числами та прогнозами

3) виховна:

Формувати відповідальне ставлення до глобальних проблем (пандемії, перенаселення)

Виховувати фінансову грамотність через розуміння складних відсотків

Розвивати усвідомлення впливу людини на довкілля

Обладнання та ресурси: проєктор/інтерактивна дошка, графіки показникових функцій, калькулятори, статистичні дані (населення України/світу, COVID-19), рекламні буклети банків з відсотками, доступ до онлайн-симуляторів (інвестиційні калькулятори), презентація з інфографікою

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент (2 хв)

Мотивація: "У 2020 році весь світ стикнувся з пандемією COVID-19.

Чому за кілька тижнів кількість хворих збільшилась у тисячі разів? Чому економісти кажуть: "Почни інвестувати в 20 років, не в 40"? Чому популяція бактерій подвоюється кожні 20 хвилин? Відповідь - **ПОКАЗНИКОВЕ ЗРОСТАННЯ!**"

Демонстрація: Показати графік поширення COVID-19 (березень 2020), графік росту інвестицій за 30 років.

Емоційний захіп: "Якби ви інвестували 10 000 грн у 1990 році під 10% річних, зараз ви мали б... (рахуємо разом)"

II. Актуалізація опорних знань (5 хв)

Блиц-опитування:

Що таке показникова функція? ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$)

Властивості показникової функції при $a > 1$? (зростає, проходить через точку (0,1))

Що таке число e ? ($\approx 2,718$, основа натурального логарифму)

Формула складних відсотків? ($S = P(1 + r)^n$)

Швидкі обчислення:

$$2^5 = ? \quad (32)$$

$$(1,1)^2 = ? \quad (1,21)$$

$$10^0 = ? \quad (1)$$

$$e^{\ln 5} = ? \quad (5)$$

Повторення з біології/медицини:

Що таке епідемія? (швидке поширення хвороби)

Базове число відтворення R_0 - що це? (середня кількість людей, яких заражає один хворий)

III. Вивчення нового матеріалу (10 хв)

Блок 1. Математичні моделі зростання

1. Експоненційне зростання

Загальна формула: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ або $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, де $N(t)$ – величина в момент часу t , N_0 – початкова величина, a – коефіцієнт зростання ($a > 1$) або спадання ($0 < a < 1$), k – темп зростання ($k > 0$) або спадання ($k < 0$).

2. Моделі в різних сферах

Сфера	Модель	Параметри
Фінанси	$S = P(1 + r)^n$	r – відсоткова ставка, n – роки
Біологія	$N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$	T – період подвоєння
Епідеміологія	$I(t) = I_0 \cdot R_0^t$	R_0 – базове число відтворення
Фізика	$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$	λ – стала розпаду
Демографія	$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$	r – темп приросту населення

3. Період подвоєння - час, за який величина збільшується вдвічі:

$$N(T) = 2N_0$$

$$N_0 \cdot a^T = 2N_0$$

$$a^T = 2$$

$$T = \log_a 2 = \ln 2 / \ln a$$

Правило 70: наближена формула для відсоткового зростання: $T \approx 70/r$ (де r – відсоток зростання).

Приклад. При зростанні 7% на рік величина подвоїться за $\approx 70/7 = 10$ років.

4. Логістична модель (обмежене зростання)

У реальності ресурси обмежені, тому $N(t) = K / (1 + Ae^{-rt})$, де K – максимальна ємність (carrying capacity).

Графік: S-подібна крива (спочатку експоненційне зростання, потім уповільнення).

Блок 2: Критичне мислення про моделі

Обмеження експоненційних моделей:

Не враховують обмеженість ресурсів
Ігнорують зовнішні фактори
Працюють лише на коротких проміжках часу
У реальності зростання уповільнюється

Приклад абсурду: якби бактерія ділилась кожні 20 хв без обмежень, за добу з однієї бактерії було б 2^{72} бактерій – більше, ніж атомів у Всесвіті!

IV. Розв'язування прикладних задач (22 хв)

Задача 1 (базовий рівень). Інвестиції на майбутнє. Випускник школи хоче накопичити на квартиру. Він вклав 50 000 грн у банк під 12% річних (складні відсотки). Інфляція 8% на рік. Знайти: а) скільки грошей буде через 10 років? б) скільки буде через 10 років з урахуванням інфляції? в) через скільки років сума подвоїться? г) порівняти з варіантом "гроші під подушкою".

Розв'язання (колективно):

а) Номінальна сума через 10 років:

$$S = P(1 + r)^n$$

$$S = 50\,000 \cdot (1 + 0,12)^{10} = 50\,000 \cdot (1,12)^{10}$$

$$(1,12)^{10} \approx 3,106$$

$$S = 50\,000 \cdot 3,106 \approx 155\,300 \text{ грн}$$

б) Реальна купівельна спроможність:

$$\text{Реальна ставка: } r_{\text{real}} = (1 + 0,12)/(1 + 0,08) - 1 \approx 0,037 = 3,7\%$$

$$S_{\text{real}} = 50\,000 \cdot (1,037)^{10} \approx 50\,000 \cdot 1,438 \approx 71\,900 \text{ грн}$$

$$\text{Альтернативно: } S_{\text{real}} = 155\,300 / (1,08)^{10} \approx 155\,300 / 2,159 \approx 71\,900 \text{ грн}$$

в) Період подвоєння:

$$\text{Правило 70: } T \approx 70/12 \approx 5,8 \text{ років}$$

$$\text{Точно: } (1,12)^T = 2 \quad T = \log_{1,12}(2) = \ln(2)/\ln(1,12) = 0,693/0,113 \approx 6,1 \text{ року}$$

г) Гроші "під подушкою":

Через 10 років номінально: 50 000 грн, а реально (з урахуванням інфляції): $50\,000 / (1,08)^{10} \approx 23\,160 \text{ грн}$

Втрата купівельної спроможності: 26 840 грн (53,7%!)

Відповідь:

Номінально: 155 300 грн

Реально: 71 900 грн

Подвоєння за 6 років

"Під подушкою" втратите половину вартості!

Фінансовий урок: Інфляція "з'їдає" заощадження. Інвестувати краще, ніж зберігати готівку!

Задача 2 (середній рівень). Моделювання епідемії. У місті з населенням 100 000 осіб з'явився новий вірус. Спочатку хворіють 50 людей. Кожен хворий заражає в середньому $R_0 = 2,5$ людини (базове число відтворення).

Інкубаційний період 5 днів. Припущення: немає карантину, всі сприйнятливі до хвороби. Знайти: а) кількість хворих через 20 днів (4 цикли) б) через скільки днів захворіє половина населення? в) як зміниться ситуація, якщо R_0 знизити до 1,5 (маски, дистанція)? г) при якому R_0 епідемія не поширюється?

Розв'язання (робота в групах):

а) Модель: $I(t) = I_0 \cdot R_0^{t/T}$, де t/T – кількість інкубаційних циклів.

Через 20 днів: $n = 20/5 = 4$ цикли

$$I(4) = 50 \cdot (2,5)^4 = 50 \cdot 39,06 \approx 1953 \text{ хворих}$$

б) Половина населення (50 000 осіб):

$$50\,000 = 50 \cdot 2,5^{t/5}$$

$$t = 7,54 \cdot 5 \approx 37,7 \text{ днів} \approx 38 \text{ днів}$$

в) Якщо $R_0 = 1,5$:

$$I(4) = 50 \cdot 1,5^4 = 50 \cdot 5,06 \approx 253 \text{ хворих}$$

Порівняння: у 7,7 разів менше хворих!

$$\text{Половина населення: } 1,5^{t/5} = 1000 \Rightarrow t/5 \approx 17,1 \Rightarrow t \approx 85,5 \text{ днів}$$

Удвічі більше часу для підготовки системи охорони здоров'я!

г) Умова непоширення:

Епідемія згасає, якщо $R_0 < 1$; при $R_0 = 1$ кількість хворих стабільна; при $R_0 < 1$ кількість хворих зменшується.

Відповідь:

За 20 днів: ~2000 хворих

Половина міста за 38 днів

Зниження R_0 до 1,5 дає 85 днів - критично важливо!

$R_0 < 1$ для зупинки епідемії

Обговорення:

Чому важливі карантинні заходи?

Маски, дистанція, вакцинація - як впливають на R_0 ?

Етика: свобода vs безпека суспільства

Реальний контекст: COVID-19 мав $R_0 \approx 2,5-3,5$ без заходів, 0,8-1,2 з жорстким карантинном

Задача 3 (високий рівень). Ріст населення та ресурси. У 1950 році населення Землі становило 2,5 млрд осіб, у 2000 році - 6 млрд. Припустимо, що населення зростає експоненційно. Планета може прогодувати максимум 12 млрд людей (за оцінками ООН при сучасних технологіях). Знайти: а) темп приросту населення (середньорічний); б) прогноз населення на 2050 рік за експоненційною моделлю; в) коли населення досягне 12 млрд за цією моделлю? г) реальні дані: у 2023 році населення 8 млрд. Чому модель не працює точно? д) побудувати логістичну модель з $K = 12$ млрд.

Розв'язання (самостійна робота з елементами дослідження):

а) Темп приросту: $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$

За 50 років (1950-2000): $6 = 2,5 \cdot e^{50r}$

$r = 0,0175 = 1,75\%$ на рік

б) Прогноз на 2050 (100 років від 1950):

$P(100) = 2,5 \cdot e^{1,75 \cdot 100} = 2,5 \cdot e^{1,75} \approx 2,5 \cdot 5,75 \approx 14,4$ млрд

Δ Це перевищує ємність планети!

в) Досягнення 12 млрд:

$12 = 2,5 \cdot e^{0,0175t}$

$t = 1,569/0,0175 \approx 89,7$ років

Рік: $1950 + 90 = 2040$ рік

г) Чому модель не точна?

Реальне населення 2023 (73 роки). Прогноз: $2,5 \cdot e^{1,75 \cdot 73} \approx 9,05$ млрд

Факт: 8 млрд

Причини відхилення:

Зниження народжуваності в розвинених країнах

Урбанізація (у містах менше дітей)

Освіта жінок

Доступ до контрацепції

Економічні фактори

Темп зростання знижується: зараз $\approx 1\%$ на рік (було $1,75\%$)

д) Логістична модель: $N(t) = K / (1 + Ae^{-rt})$

$K = 12$ млрд (максимум)

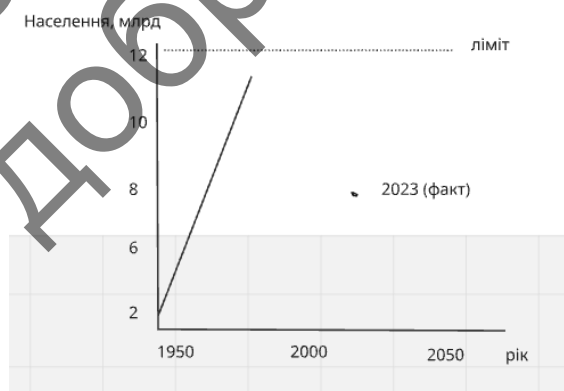
Початкові умови: $N(0) = 2,5$, тоді $A = (K - N_0)/N_0 = (12 - 2,5)/2,5 = 3,8$

Модель: $N(t) = 12 / (1 + 3,8 \cdot e^{-0,0175t})$

Прогноз на 2050 ($t = 100$): $N(100) = 12 / (1 + 3,8 \cdot e^{-1,75}) \approx 7,2$ млрд

Це ближче до реальних прогнозів ООН (9,7 млрд у 2050)!

Графік:



Відповідь:

Темп: $1,75\%$ на рік (історичний)

Експоненційний прогноз 2050: 14,4 млрд (нереальний)

Досягнення 12 млрд: 2040 за старою моделлю

Логістична модель точніша: 7-10 млрд до 2050

Глобальне обговорення:

Чи вистачить ресурсів для 10 млрд?

Сталий розвиток vs зростання споживання

Технології (вертикальні ферми, альтернативна енергетика)

Етичні питання демографічної політики

Задача 4 (додаткова). Поширення інновацій. Новий смартфон з'явився на ринку. У перший місяць продано 10 000 штук. Кожного наступного місяця продажі зростають на 15%. Ринок насичується при 5 млн користувачів (логістична модель). Знайти: а) скільки смартфонів продадуть за перший рік (експоненційна модель)? б) коли буде продано 1 млн штук? в) як змінюється швидкість поширення у логістичній моделі?

Розв'язання (стисло):

а) Продажі за рік:

Сума геометричної прогресії: $S_{12} = 10000 \cdot (1,15^{12} - 1) / (1,15 - 1) \approx 10000 \cdot 4,35 / 0,15 \approx 290\,000$ шт

б) Досягнення 1 млн:

$$1\,000\,000 = 10000 \cdot (1,15^n - 1) / 0,15$$

$$n = \log_{1,15} 16 \approx 19,5 \text{ місяців}$$

в) Логістична модель:

$$N(t) = 5\,000\,000 / (1 + 499 \cdot e^{-0,14t})$$

(початкові умови: $N(0) = 10000$)

Швидкість максимальна при $N = K/2 = 2,5$ млн (точка перегину)

Висновок: Інновації спочатку поширюються швидко (ранні послідовники), потім темп знижується (насичення ринку).

Тема: **Ймовірність у прийнятті рішень**

Клас: **11**

Тип уроку: **урок практичного застосування знань**

Мета уроку: **1) навчальна:**

Сформувати вміння застосовувати теорію ймовірностей для прийняття обґрунтованих рішень

Навчити обчислювати математичне сподівання та оцінювати ризики

Розвинути навички аналізу статистичних даних у реальних ситуаціях

2) розвивальна:

Розвивати критичне мислення при оцінці ризиків

Формувати вміння приймати рішення в умовах невизначеності

Розвивати навички інтерпретації ймовірностей у повсякденному житті

3) виховна:

Виховувати відповідальне ставлення до ризикованих рішень

Формувати критичне сприйняття реклами та пропозицій

Розвивати культуру обґрунтованого вибору

Обладнання та ресурси: проектор/інтерактивна дошка, гральні кубики, монети (для експериментів), картки з ситуаціями для прийняття рішень, калькулятори, статистичні дані (погода, транспорт, здоров'я), презентація з прикладами реклами та пропозицій, роздатковий матеріал з задачами.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент (2 хв)

Мотивація: *"Чи варто брати парасольку, якщо прогноз обіцяє дощ з ймовірністю 30%? Чи вигідно купувати лотерейний квиток? Чи потрібна страховка для подорожі? Кожен день ми приймаємо рішення в умовах невизначеності. Математика допомагає робити це розумно!"*

Демонстрація:

Прогноз погоди з відсотками

Рекламний банер "Шанс виграти 1 000 000 грн!"

Пропозиція страхової компанії

II. Актуалізація опорних знань (5 хв)

Швидке опитування:

Що таке ймовірність? (відношення сприятливих результатів до всіх можливих)

Чому дорівнює сума ймовірностей всіх подій? (1)

Ймовірність неможливої події? (0)

Формула класичної ймовірності? ($P = m/n$)

Експрес-вправи:

Задача 1. У ящику 5 червоних і 3 сині кулі. Яка ймовірність витягти червону? *Відповідь:* $5/8 = 0,625 = 62,5\%$

Задача 2. Підкидаємо дві монети. Яка ймовірність, що обидві випадуть "орлом"? *Відповідь:* $1/4 = 0,25 = 25\%$

Повторення: математичне сподівання

$M(X) = \sum x_i \cdot p_i$ (середнє значення, зважене на ймовірності)

III. Вивчення нового матеріалу (8 хв)

Блок 1. Прийняття рішень через математичне сподівання

Концепція: Очікувана вартість (Expected Value). Коли треба вибрати між кількома опціями, обираємо ту, що має найбільше математичне сподівання.

Формула: $EV = \sum (\text{Результат}_{(i)} \cdot \text{Ймовірність}_{(i)})$

Приклад: Вам пропонують гру: підкидаєте монету.

Орел: ви отримуєте 100 грн

Решка: ви платите 80 грн

Чи варто грати?

$EV = 100 \cdot 0,5 + (-80) \cdot 0,5 = 50 - 40 = +10$ грн

Так, в середньому ви виграєте 10 грн за гру!

Правило вибору рішення:

$EV > 0$: варто робити (в середньому прибуток)

$EV = 0$: байдуже (чесна гра)

$EV < 0$: не варто (в середньому збиток)

Блок 2. Типи рішень у реальному житті

1. Страхування

Чому існує страхування?

Страхова компанія розраховує ймовірності:

Аварія: 2% на рік

Виплата: 200 000 грн

Вартість полісу: 5000 грн

Для клієнта: $EV = (-200\,000) \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,98 = -4000$ грн (очікувані втрати без страховки)

Купуючи страховку за 5000 грн, ви гарантовано втрачаєте 5000, але уникаєте ризику 200 000.

Для страхової компанії: $EV = 5000 - 200\,000 \cdot 0,02 = 5000 - 4000 = +1000$ грн прибутку

2. Медичні рішення

Приклад: Вакцинація від грипу.

Ймовірність захворіти без вакцини: 10%

Вартість лікування: 2000 грн + 5 днів на лікарняному (втрата 5000 грн)

Вартість вакцини: 500 грн

Ефективність вакцини: 80% (знижує ймовірність до 2%)

Без вакцини: $EV = -7000 \cdot 0,1 = -700$ грн

З вакциною: $EV = -500 - 7000 \cdot 0,02 = -500 - 140 = -640$ грн

Вигода: $700 - 640 = 60$ грн + менше страждань!

3. Лотереї та азартні ігри

Чому казино завжди виграють?

Математичне сподівання для гравця завжди від'ємне!

Приклад - рулетка: Ставка 100 грн на червоне.

18 червоних, 18 чорних, 1 зелене (0) = 37 секторів

При виграші отримуєте 200 грн (100 ваші + 100 виграш)

$EV = 200 \cdot (18/37) + 0 \cdot (19/37) - 100 = 97,3 - 100 = -2,7$ грн

В середньому кожна ставка коштує вам 2,7 грн.

Блок 3: Когнітивні спотворення

Люди часто помиляються в оцінці ймовірностей!

Помилка гравця: "Випало 5 разів орел, зараз точно решка!"

Реальність: ймовірність завжди 50%

Ілюзія контролю: "Я відчуваю, що зараз виграю!"

Реальність: результат випадковий

Ефект доступності: "Нещодавно була авіакатастрофа, літати небезпечно!"

Реальність: літак безпечніший за авто

Ігнорування базової ймовірності: "Тест на хворобу позитивний, я точно хворий!"

Реальність: треба враховувати поширеність хвороби (теорема Байєса)

IV. Розв'язування прикладних задач (22 хв)

Задача 1 (базовий рівень). Чи брати парасольку? Прогноз погоди обіцяє дощ з ймовірністю 40%. Ви йдете на прогулянку.

Варіанти:

А: Взяти парасольку (вага 500 г, незручно носити)

Б: Не брати парасольку (ризик промокнути)

Оцінка "втрат":

Носити парасольку: -2 бали незручності

Промокнути: -10 балів дискомфорту

Знайти: Який варіант вигідніший?

Розв'язання (колективно):

Варіант А (взяти парасольку): У будь-якому випадку втрати -2 бали.

Варіант Б (не брати):

Дощу немає (60%): втрати 0

Дощ є (40%): втрати -10

$EV(B) = 0 \cdot 0,6 + (-10) \cdot 0,4 = -4$ бали

Порівняння:

Варіант А: -2 бали

Варіант Б: -4 бали

Висновок: Краще взяти парасольку!

Обговорення:

При якій ймовірності дощу рішення зміниться?

Розв'язуємо: $-2 = -10 \cdot p \rightarrow p = 0,2 = 20\%$

Якщо ймовірність дощу $> 20\%$, беріть парасольку!

Задача 2 (середній рівень). Вибір маршруту. Вам потрібно дістатися на важливу зустріч. Є два маршрути:

Маршрут А (швидкий, але ненадійний):

Зазвичай 30 хвилин (70% ймовірність)

Затор - 90 хвилин (30% ймовірність)

Маршрут Б (довгий, але стабільний):

Завжди 50 хвилин (100% ймовірність)

Спізнення на 10+ хвилин коштує вам 500 грн (штраф/втрачена угода).

Знайти: а) Математичне сподівання часу для кожного маршруту б) Який маршрут обрати, якщо у вас є 60 хвилин до зустрічі? в) Який маршрут обрати, якщо у вас є 45 хвилин?

Розв'язання (робота в парах):

а) Очікуваний час:

Маршрут А: $E(A) = 30 \cdot 0,7 + 90 \cdot 0,3 = 21 + 27 = 48$ хвилин

Маршрут Б: $E(B) = 50 \cdot 1 = 50$ хвилин

Маршрут А в середньому швидший!

б) У вас є 60 хвилин:

Маршрут А:

30 хв (70%): встигнете, втрати 0

90 хв (30%): спізнитесь на 30 хв, втрати -500 грн

$EV(A) = 0 \cdot 0,7 + (-500) \cdot 0,3 = -150$ грн

Маршрут Б: 50 хв $<$ 60 хв: завжди встигаєте $EV(B) = 0$ грн

Висновок: Обирайте Б (надійний)!

в) У вас є 45 хвилин:

Маршрут А:

30 хв (70%): встигнете, втрати 0

90 хв (30%): спізнитесь, втрати -500

$EV(A) = 0 \cdot 0,7 + (-500) \cdot 0,3 = -150$ грн

Маршрут Б: 50 хв $>$ 45 хв: гарантовано спізнитесь на 5 хв $EV(B) = 0$ грн (спізнення $<$ 10 хв, штрафу немає)

Висновок: Знову Б!

Але якби штраф був і за 5 хв (-200 грн):

$$EV(A) = -150 \text{ грн}$$

$EV(B) = -200 \text{ грн}$. Тоді краще ризикнути з А!

Відповідь:

Очікуваний час: $A = 48 \text{ хв}$, $B = 50 \text{ хв}$

З 60 хвилинами: B (надійніше)

З 45 хвилинами: залежить від розміру штрафу

Життєвий урок: Іноді надійність важливіша за швидкість. У критичних ситуаціях обирайте передбачуваність!

Задача 3 (високий рівень). Інвестиційне рішення. У вас є 100 000 грн.

Два варіанти інвестування на рік:

Варіант А: Державні облігації (безпечно)

Гарантований дохід: $+8\% = 8000 \text{ грн}$

Варіант Б: Акції стартапу (ризиковано)

Стартап успішний (30%): $+80\% = 80\,000 \text{ грн}$

Стартап помірний (50%): $+10\% = 10\,000 \text{ грн}$

Стартап банкрутує (20%): $-50\% = -50\,000 \text{ грн}$

Знайти: а) Математичне сподівання для кожного варіанта б) Дисперсію (міру ризику) для варіанта Б в) Який варіант обрати залежно від вашого ставлення до ризику? г) Стратегія диверсифікації: 50% в А, 50% в Б

Розв'язання (самостійна робота з обговоренням):

а) Математичне сподівання:

Варіант А: $E(A) = 8\,000 \text{ грн}$ (гарантовано)

Варіант Б: $E(B) = 80\,000 \cdot 0,3 + 10\,000 \cdot 0,5 + (-50\,000) \cdot 0,2$
 $E(B) = 24\,000 + 5000 - 10\,000 = 19\,000 \text{ грн}$

Варіант Б має вище очікуване сподівання!

б) Дисперсія (міра ризику):

Спочатку очікуваний дохід у відсотках для Б: $E(B\%) = 80 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 + (-50) \cdot 0,2 = 24 + 5 - 10 = 19\%$.

Дисперсія: $\sigma^2 = \sum (x_i - E)^2 \cdot p_i$

$\sigma^2 = (80 - 19)^2 \cdot 0,3 + (10 - 19)^2 \cdot 0,5 + (-50 - 19)^2 \cdot 0,2$
 $\sigma^2 = 61^2 \cdot 0,3 + (-9)^2 \cdot 0,5 + (-69)^2 \cdot 0,2$
 $\sigma^2 = 3721 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,5 + 4761 \cdot 0,2$
 $\sigma^2 = 1116,3 + 40,5 + 952,2 = 2109$

Стандартне відхилення: $\sigma = \sqrt{2109} \approx 46\%$

Для А: $\sigma = 0$ (без ризику)

в) Вибір залежно від профілю:

Консервативний інвестор (уникає ризику): Хоча $E(B) > E(A)$, величезний ризик (-50% можливий) неприйнятний. Обирає А.

Агресивний інвестор (толерантний до ризику): Готовий ризикнути заради потенційно більшого доходу. Обирає Б.

Раціональний підхід: Порівнюємо "дохід на одиницю ризику" (коефіцієнт Шарпа):

Варіант А: $8/0 \rightarrow$ нескінченність (але нуль ризику)

Варіант Б: $19/46 \approx 0,41$

г) Диверсифікація (50/50):

Інвестуємо 50 000 в А і 50 000 в Б.

Дохід від А: $50\,000 \cdot 0,08 = 4000$ грн (завжди)

Дохід від Б:

Успіх (30%): $50\,000 \cdot 0,8 = 40\,000 \rightarrow$ Разом: 44 000 грн

Помірно (50%): $50\,000 \cdot 0,1 = 5000 \rightarrow$ Разом: 9000 грн

Провал (20%): $50\,000 \cdot (-0,5) = -25\,000 \rightarrow$ Разом: -21 000 грн

Математичне сподівання портфеля:

$$E(\text{портфель}) = 44\,000 \cdot 0,3 + 9000 \cdot 0,5 + (-21\,000) \cdot 0,2$$

$$E(\text{портфель}) = 13\,200 + 4500 - 4200 = 13\,500 \text{ грн}$$

Менше, ніж 100% у Б (19 000), але й ризик менший!

Стандартне відхилення портфеля: $\sim 23\%$ (приблизно половина від Б)

Висновок: Диверсифікація знижує ризик при збереженні прийнятної дохідності!

Відповідь:

$$E(A) = 8000 \text{ грн}, E(B) = 19\,000 \text{ грн}$$

$$\sigma(B) = 46\% \text{ (високий ризик)}$$

Вибір залежить від толерантності до ризику

Диверсифікація: 13 500 грн очікуваного доходу з меншим ризиком

Інвестиційний принцип: "Не клади всі яйця в один кошик" - диверсифікація знижує ризик!

Задача 4 (додаткова). Медичний тест та теорема Баєса. Рідкісна хвороба зустрічається у 0,1% населення (1 на 1000).

Медичний тест:

Чутливість: 99% (виявляє хворобу, якщо вона є)

Специфічність: 95% (дає негативний результат, якщо хвороби немає)

Ви здали тест, результат позитивний. Яка ймовірність, що ви справді хворі?

Інтуїтивна відповідь: "99% - тест же точний!"

Правильна відповідь: Набагато менша! Застосуємо теорему Баєса.

Розв'язання:

Позначимо через:

$$H \text{ (хвороба є): } P(H) = 0,001$$

¬H (хвороби немає): $P(\neg H) = 0,999$

T+ (тест позитивний)

Нам потрібно: $P(H|T+)$ - ймовірність хвороби за умови позитивного тесту

Теорема Баєса: $P(H|T+) = P(T+|H) \cdot P(H) / P(T+)$

Знаходимо $P(T+)$: $P(T+) = P(T+|H) \cdot P(H) + P(T+|\neg H) \cdot P(\neg H)$
 $P(T+) = 0,99 \cdot 0,001 + 0,05 \cdot 0,999$

$P(T+) = 0,00099 + 0,04995 = 0,05094$

Обчислюємо: $P(H|T+) = (0,99 \cdot 0,001) / 0,05094 = 0,00099 / 0,05094 \approx$
 $\approx 0,0194 = 1,94\%$

Відповідь: Лише ~2% ймовірність, що ви хворі!

Пояснення: Хвороба настільки рідкісна, що навіть при точному тесті більшість позитивних результатів - хибнопозитивні (здорові люди, у яких тест помилився).

На 1000 людей:

1 хворий: тест виявить з ймовірністю 99% → 0,99 правдивих позитивів

999 здорових: тест помилково позитивний у 5% → 49,95 хибних позитивів

Разом ~51 позитивних тестів, з яких лише 1 справді хворий!

Життєвий урок: Не панікуйте від позитивного результату рідкісної хвороби. Потрібен повторний аналіз!

V. Практична вправа (якщо є час) (5 хв)

Гра "Монті Холл"

Правила:

Три двері: за однією - приз (автомобіль), за двома - пусто (кози)

Ви обираєте двері (наприклад, №1)

Ведучий (знає, де приз) відкриває одні пусті двері (наприклад, №3)

Ведучий пропонує: залишитися при своєму виборі або змінити на №2?

Питання: Що краще - змінити чи залишитись?

Інтуїтивна відповідь: "Однаково, 50/50"

Правильна відповідь: Краще змінити! Ймовірність виграшу подвоюється!

Пояснення:

Спочатку ймовірність обрати приз: 1/3

Ймовірність, що приз за іншими дверима: 2/3

Ведучий завжди відкриває пусті двері

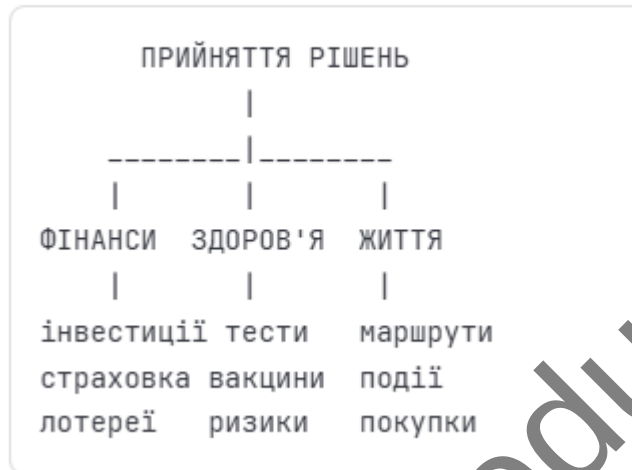
Коли ви міняєте, отримуєте ймовірність 2/3!

Експеримент у класі: Розіграйте ситуацію 10-15 разів, запишіть результати.

Стратегія "зміни" виграв ~67%, "незміни" ~33%.

VI. Узагальнення та систематизація (3 хв)

Інтелект-карта "Ймовірність у рішеннях"



Ключові принципи:

- ✓ Обчислюйте математичне сподівання - основа раціонального вибору
- ✓ Враховуйте ризик (дисперсію), не лише середнє
- ✓ Диверсифікація знижує ризик
- ✓ Базова ймовірність важлива (теорема Байеса)
- ✓ Остерігайтесь когнітивних спотворень
- ✓ Казино/лотереї математично невигідні
- ✓ Страхування - плата за спокій

Правило: Якщо $EV > 0$ і ризик прийнятний → робіть!

VII. Домашнє завдання (2 хв)

Задача 1 (рівень стандарт). Гра: ви кидаєте кубик. Якщо випадає 6, отримуєте 60 грн. Інакше платите 5 грн. Вартість входу в гру - 3 грн. Чи вигідно грати?

Задача 2. Ймовірність дощу 20%. Промокнути коштує вам -15 балів, носити парасольку -3 бали. Що обрати?

Задача 3 (достатній рівень). Два варіанти подорожі:

Автобус: завжди 3 години, вартість 200 грн

Попутка (BlaBlaCar): 2 год (60%), 4 год (40%), вартість 100 грн

Ваш час коштує 50 грн/год. Що вигідніше?

Задача 4. Страхівка телефону коштує 1000 грн/рік. Ймовірність поломки 5%, ремонт 8000 грн. Математично обґрунтуйте рішення: брати чи ні?

Дослідницький проект "Аналіз особистих ризиків" (високий рівень).

Оберіть 3 життєві ситуації, де приймали рішення (або плануєте):

Фінансові (вклад, покупка, страхівка)

Здоров'я (вакцинація, лікування)

Освіта (вибір ВНЗ, курси)

Інше

Для кожної ситуації:

Визначте всі можливі варіанти

Оцініть ймовірності результатів (обґрунтовано!)

Оцініть "вартість" кожного результату (гроші, час, задоволення)

Обчисліть математичне сподівання

Врахуйте ризик

Зробіть висновок: Яке рішення оптимальне?

Рефлексія: Чи збігається математичний висновок з інтуїтивним вибором?

Чому?

Формат: Презентація (5-7 слайдів) або есе (2-3 сторінки)

Творче завдання (за бажанням):

Проаналізуйте рекламну пропозицію (лотерея, акція, знижка) з точки зору ймовірності та математичного сподівання. Чи вигідна вона насправді?

VIII. Рефлексія (2 хв)

Методика "Рішення прийнято"

Мій рівень розуміння прийняття рішень:



✓ Можу обчислити EV і прийняти рішення



~ Розумію ідею, потрібна практика



? Є питання по формулах



X Складно, потрібна допомога

Рефлексивні питання:

Чи змінилось ваше ставлення до лотерей після уроку?

Чи будете обчислювати математичне сподівання перед важливими рішеннями?

Яка задача була найскладнішою? Найцікавішою?

Назвіть одне когнітивне спотворення, яке помічали в собі

Швидке голосування: "Хто тепер інакше ставиться до азартних ігор/страховок/інвестицій?" (підняти руку)