

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Бондар Карина Володимирівна

НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ
ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ШКІЛЬНОМУ
КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник

_____ Ю.В. Хворостіна,

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики та методик
їх навчання

« ____ » _____ 20__ року

Виконавець:

_____ К.В.Бондар

« ____ » _____ 20__ року

Суми 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	8
1.1. Пропедевтика теми «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики» в основній школі.....	8
1.2 Аналіз змістової лінії теорії ймовірностей у програмах шкільного курсу математики.....	13
1.3 Особливості введення основних понять і тверджень з теорії ймовірностей та математичної статистики у шкільних підручниках.....	15
1.4 Аналіз завдань ЗНО з математики на ймовірнісну і статистичну складову	20
Висновки до розділу 1.....	44
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	46
2.1. Класичне, статистичне і геометричне означення ймовірності події	46
2.2. Поняття про статистику як науку, статистичні дані, мода і медіана.....	49
2.3. Теоретичні засади впровадження матеріалу з ймовірності та статистики в шкільний курс математики.....	50
2.4. Розгляд існуючих методик розв'язування задач теорії ймовірностей і математичної статистики в школі.	54
2.5 Використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні теорії ймовірностей та статистики.....	59
2.6. Практичні напрацювання з теми дослідження.....	64
Висновки до розділу 2.....	76
ВИСНОВКИ	78
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	81

ВСТУП

Актуальність теми. В останнє десятиліття вивчення елементів теорії ймовірності та математичної статистики стало особливо цінним. Слід зазначити, що в умовах інформаційного вибуху важливою є здатність передавати й обробляти великі обсяги інформації та робити обґрунтовані висновки. Розвиток імовірнісного мислення та відповідних навичок стає актуальною вимогою сучасного та майбутнього суспільства.

Сучасне інформаційне суспільство вимагає від особистості різнобічної обізнаності та знань системного рівня. Тому для систематичного навчання необхідним стає вивчення зв'язків між предметами. Особлива увага приділяється вивченню міжпредметних зв'язків у математиці.

Теорія ймовірності і математична статистика важливі в прикладній діяльності, особливо в математичних науках.

Значну увагу науковці і педагоги приділяють проблемам, пов'язаним зі змістом і методикою навчання ймовірності в школі. Ця тема стає актуальною, тому що ймовірність і статистика стали базовими знаннями для учнів.

У повсякденному житті ми постійно стикаємося з випадковістю, а теорія ймовірності вчить нас діяти раціонально в ризикованих ситуаціях. Розвиток цієї науки впливає на формування ймовірнісно-статистичного напрямку в освіті, який вже понад століття входить до загальноосвітньої школи.

Враховуючи сучасні розробки в математиці та методиці навчання, важливо розглядати ймовірність і статистику як частину диференційованого навчання. Вивчення цих предметів дає змогу дослідити можливості ефективної реалізації поглибленої та поглибленої математичної підготовки учнів загальноосвітньої та спеціалізованої школи. Наведені вище міркування свідчать про актуальність і необхідність розв'язання поставленої проблеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

У XVII столітті Жеремі Паскаль та П'єр де Ферма внесли важливий вклад, розвиваючи теорію ймовірностей через листування про гравітаційні імовірності. У XIX столітті Андрій Марков працював над ідеями в теорії випадкових процесів, що привели до ланцюжків Маркова. Джон фон Нейман та Оскар Моргенштерн внесли вклад у теорію ігор. Андрій Колмогоров, на початку XX століття, сформулював аксіоматичний підхід, який став основою для подальших розвитків теорії ймовірностей.

У контексті методики навчання теорії ймовірностей, багато вчених і математиків працювали над розробкою підходів та методів для ефективного вивчення цієї галузі. Багато вчених, таких як Колмогоров, З.І.Слепкань, Е.С. Пирсон, Леонард Дж. Саваж, працювали над теорією ймовірностей і вносили свої допомоги в розробку освітніх матеріалів та методик.

Можливість та доцільність використання ІКТ у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики обґрунтована в роботах М. І. Жалдака, Г. О. Михаліна, С. Л. Надточій, Г. В. Лиходєєвої, Л. В. Кравцової,

Мета дослідження- полягає у виявленні науково-методичних особливостей вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики у шкільному курсі математики. Згідно з метою дослідження було визначено такі **завдання**:

- опрацювати наукову, навчальну та методичну літературу з даної теми;
- дослідити пропедевтику вивчення теорії ймовірностей в основній школі;
- зробити аналіз діючих навчальних програм та підручників з математики у контексті теми дослідження;
- дослідити завдання зовнішнього незалежного оцінювання з математики останніх років на ймовірнісну і статистичну складову;
- виявити методичні особливості навчання теорії ймовірностей і математичної статистики;

- розглянути існуючі методики розв'язування задач з теорії ймовірностей і математичної статистики в шкільному курсі математики;

- дослідити можливість використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні теорії ймовірностей та статистики

- розробити конспекти уроків з теми дослідження

Об'єкт дослідження є процес навчання математики учнів середньої школи

Предмет дослідження роботи є методичні особливості вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики у шкільному курсі математики.

Методи дослідження. Використані для вирішення поставлених завдань, охоплюють різноманітні підходи:

- теоретичні : Аналіз, систематизація та узагальнення використовувались для обробки нормативних, наукових та навчально-методичних джерел. Ці методи дозволили детально розглянути та проаналізувати методику та практику навчання математики учнів старших класів з теми теорії ймовірностей та математичної статистики.

- емпіричні: Аналіз матеріалів навчальної та педагогічної діяльності був спрямований на визначення стану справ у цій галузі та визначення перспективних напрямків використання існуючих методик викладання теми.

Наукова новизна одержаних результатів.

Вперше виконано порівняльний аналіз введення основних понять і тверджень з теорії ймовірностей і математичної статистики деяких підручників з алгебри. Також визначено відсоток задач з теми дослідження у сертифікованих роботах основної сесії ЗНО з математики за період з 2011 року по 2021 рік; обчислено середнє значення показників успішності виконання завдань з теорії ймовірностей та математичної статистики і дискримінативності їх учасниками. Узагальнено методичні особливості навчання теорії ймовірностей і математичної статистики у шкільному курсі математики. Розроблено конспекти уроків з теми дослідження.

Практичне значення одержаних результатів.

Практичне значення отриманих результатів полягає у розробці рекомендації, щодо навчання учнів розв'язувати задачі з теорії ймовірностей і математичної статистики. Матеріали можуть бути використані педагогічними працівниками під час викладання математики у шкільному курсі та у підготовці здобувачів освіти до різного рівня учнівських конкурсів.

Апробація результатів.

- Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу “ІТМ*плюс - 2022 Форум молодих дослідників”: матеріали III Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. - Суми: Вид-во СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2022. - С. 62.
- Студентська звітна конференція: Збірник праць студентів фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023. – Випуск 17.- С. 5-12.
- Студентська звітна конференція. Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023. – Випуск 17.-С.11-13.
- Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу “ІТМ*плюс - 2023 Форум молодих дослідників”: матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. - Суми: Вид-во СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2023.-С.21-22

Структура роботи.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

Повний обсяг роботи – 86 сторінок, з яких : 15 таблиць, список використаних джерел- із 52 найменувань, на 6 сторінках.

У першому розділі роботи розглянуто теоретичні основи науково-методичні особливості вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики у шкільному курсі математики, зокрема: визначено пропедевтику теми, проаналізовано змістову лінію теорії ймовірностей у програмах шкільного курсу математики, досліджено особливості введення основних понять з теорії ймовірностей та математичної статистики у шкільних підручниках

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики в школі, а саме: виділено теоретичні засади впровадження матеріалу з ймовірності та статистики в шкільний курс математики, розглянуто існуючі методики розв'язування задач теорії ймовірностей і математичної статистики в школі, з'ясовано можливість використання ІКТ при навчанні теорії ймовірностей та статистики

У висновках узагальнено й систематизовано основні результати роботи, зроблено рекомендації по використанню отриманих результатів, визначено перспективи подальших досліджень.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Пропедевтика теми «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики» в основній школі

Ймовірісно-статистичною змістовою лінією передбачається формування вмінь аналізувати випадкові фактори, оцінювати ймовірність, прогнозувати розвиток ситуації і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають імовірнісний характер. А це вимагає формування нового стилю мислення – розвиток ймовірісно-статистичного уявлення.

Висновки теорії ймовірностей знаходять застосування в побуті, науці, техніці тощо. При плануванні, наприклад, сімейного бюджету доводиться оцінювати витрати, які носять у певній мірі випадковий характер.

У відповідності до принципу наступності шкільний курс повинен не тільки знайомити учнів з теоретико-ймовірісними поняттями, задачами, але й поглиблювати і розвивати основні ідеї, змістовно-методичні лінії курсу математики.

Введення до шкільного курсу математики ймовірісно-статистичної змістової лінії вперше було зроблено в 1996 році, коли за програмами передбачалося вивчення в 11 класі елементів комбінаторики, початків теорії ймовірностей та статистики. [7, с.3] Це було викликано необхідністю розвивати один із типів мислення – ймовірісно-статистичний, який важливий для сучасної людини як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення. Як правильно зазначено, не можна було ігнорувати й ту обставину, що в багатьох розвинених країнах вже не одне десятиліття шкільні курси математики передбачають вивчення елементів комбінаторики, статистики, ймовірностей.

З 2001 року учні 9 класу отримали можливість ознайомитись з елементами прикладної математики. Підручник Г.П. Бевза для 7 – 9 класів містив таку тему. [7, с.4] В ній розглядалися:

1. Математичне моделювання
2. Наближені обчислення
3. Перші відомості про статистику

4. Відсоткові розрахунки

Проте цей розділ розглядався в кінці навчального року і часу на нього було відведено 4 години, а на практиці і того менше. З 2005 року часу на опрацювання цієї теми відводилось уже вдвічі більше. Це передбачав і перевиданий підручник Г. П. Бевз. До того ж з 2005 року початки теорії ймовірностей почали вивчати вже в 6 класі: в підручнику А. Г. Мерзляка цьому питанню присвячено один параграф («Випадкові події, Ймовірність випадкової події»). Спочатку цю тему вивчали протягом 2 уроків, але це вже був великий крок вперед, що забезпечував більш успішне вивчення математики, фізики та інших наук. З 2005 року у підручнику математики 11 класу за редакцією М. І. Шкілья половину навчального матеріалу містять «Початки теорії ймовірностей», «Елементи комбінаторики» та «Вступ до статистики.»

В 2010 – 2011 навчальному році – це тема, опрацювання якої здійснюється в 6 класі протягом 5 годин:

1. Випадкові вірогідні та неможливі події.
2. Ймовірнісні випадкові події. Графічне порівняння шансів.
3. Порівняння ймовірностей за допомогою порівняння.
4. Обчислення ймовірностей.
5. Розв'язування задач.

В 9 класі основи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики вивчають протягом 8 год. В 11 класі елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики вивчаються протягом 10 год.

Як бачимо, системи в вивченні теорії ймовірностей не простежується. Вперше з теорією ймовірностей на уроках математики учні загальноосвітньої школи зустрічаються, уже «збагатившись» негативним ставленням до математики через невміння розв'язувати задачі. А навчитись розв'язувати задачі можна тільки опанувавши теорію ймовірностей.

Елементи стохастики передбачено вивчати в школі в два етапи. На першому етапі – у 9 класі основної школи передбачено ввести поняття про статистику і способи подання даних, про гістограму розподілу значень, середнє значення та

медіану, моду. Після вивчення комбінаторики можна ввести поняття про ймовірність, сприятливі випадки, розглянути найпростіші приклади підрахунку, дати ширшу систему знань початків теорії ймовірностей і елементів статистики. Ще до введення перших понять і відомостей з початків теорії ймовірностей та елементів статистики на завершнні вивчення алгебри в 9 класі доцільно систематично проводити пропедевтику щодо вивчення елементів стохастики при вивченні звичайних дробів.

В 5-6 класах є можливість ознайомити учнів з поняттями класичної ймовірності, розв'язуючи задачі на підрахунок «шансів на виграш», а при вивченні дій над звичайними дробами можна розв'язувати найпростіші задачі на додавання та множення ймовірностей.

Програмою для класів з поглибленим вивченням математики у 8 класі в рамках вивчення теми «Множини. Елементи математичної логіки. Комбінаторика. Ймовірність» [34] передбачено ознайомити учнів з теорією ймовірності як наукою; ввести поняття випадкової події та статистичної ймовірності події, вчити обчислювати статистичну ймовірність. У 9 класі у темі «Множини. Комбінаторика. Ймовірність» передбачено розширити відомості про випадкові події і обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій. В 11 класі основною метою вивчення теми «Початки теорії ймовірностей» є сформувати в учнів уявлення про основні поняття теорії ймовірностей і виробити вміння застосовувати їх до розв'язування простих задач. Нижче, наведений зміст стохастичної лінії всього курсу шкільної математики. (табл.1.1)

Таблиця 1.1.

Зміст стохастичної лінії шкільного курсу математики

5-6 класи	
Елементи комбінаторики	Розв'язування комбінаторних задач перебором можливих варіантів.
Початки теорії ймовірностей	Достовірна, неможлива, випадкова події. Порівняння шансів настання випадкових подій на основі інтуїтивних міркувань, на класичній, статистичній засадах, за допомогою геометричних міркувань
Елементи статистики	Збір, реєстрація статистичних даних, зображення їх у вигляді таблиць, діаграм. Читання таблиць і діаграм. Проведення експериментів.
7-9 класи	
Елементи комбінаторики	Розв'язування комбінаторних задач на застосування правил множення і додавання. Трикутник Паскаля.
Початки теорії ймовірностей	Випадковий дослід, випадкова подія. Обчислення ймовірностей настання випадкових подій на класичній, статистичній засадах, за допомогою геометричних міркувань
Елементи статистики	Первинна обробка статистичних даних. Графічне зображення статистичних даних. Вибіркові

	характеристики (середнє арифметичне, мода, медіана тощо).
10-11 класи	
Елементи комбінаторики	Розміщення, перестановки, комбінації.
Початки теорії ймовірностей	Випадковий дослід і випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Операції над подіями. Ймовірності суми та добутку подій. Дискретна випадкова величина, закон її розподілу. Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості. Вибіркові характеристики. Поняття про закон великих чисел.
Елементи статистики	Вибірковий метод у статистиці. Оцінювання невідомих параметрів. Перевірка гіпотез

Важливо враховувати, що учні зіштовхуються із цим розділом математики, вже навчившись розв'язувати задачі, і тому ефективно вивчення ймовірностей передбачає не тільки подачу теорії, але й врахування попереднього досвіду учнів.

Важливою є інтеграція теорії ймовірностей в шкільний курс вже з ранніх класів, що дозволяє розвивати у дітей інтерес та розуміння важливості стохастичності в різних сферах життя. Однак, деякі недоліки в системі вивчення, такі як непослідовність у підході до різних класів, можуть впливати на засвоєння матеріалу.

Загальна мета вивчення теорії ймовірностей у шкільному курсі полягає не лише в оволодінні конкретними знаннями, а й у розвитку критичного мислення та умінь приймати рішення в умовах невизначеності. Цей напрямок вивчення математики важливий для загального культурного та професійного становлення сучасної людини.

1.2 Аналіз змістової лінії теорії ймовірностей у програмах шкільного курсу математики

З 1996 року Міністерством освіти і науки України були внесені питання вивчення елементів теорії ймовірностей у шкільний курс математики. Основна мета вивчення елементів теорії ймовірностей полягає у формуванні розуміння випадковості та детермінованості, допомогти в усвідомленні того, що закони суспільства та природи мають ймовірнісний характер, що багато реальних явищ і процесів описуються ймовірнісними моделями. Проаналізуємо діючі навчальні програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів щодо очікуваних результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів та змісту навчального матеріалу з теорії ймовірностей.

У навчальній програмі [38] одним із загальних завдань шкільної математичної освіти формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач, обґрунтовувати твердження, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації. У цій програмі з основними поняттями теорії ймовірностей учні ознайомлюються аж у дев'ятому класі при вивченні теми «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики», на вивчення якої відводиться 8 годин. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів є: наводити приклади випадкових подій; пояснювати, що таке частота випадкової події, ймовірність випадкової події; розв'язувати задачі, що передбачають знаходження ймовірності випадкової події та обчислення частоти випадкової події. Отже, частота та ймовірність випадкової події є основним змістом навчального матеріалу з теорії ймовірностей.

У навчальній програмі [34] зазначається, що вивчення на формальній основі елементів теорії ймовірностей було розпочато в шостому класі. Також зауважується, що навчальний матеріал, пов'язаний з початками теорії ймовірностей, зазвичай є складним для сприймання і тому дуже важливим є розгляд достатньої кількості прикладів, а також історичних відомостей із становлення теорії ймовірностей, в яких належну увагу слід приділити коректному формулюванню опису окремих результатів і, як наслідок, – правильному обчисленню загальної кількості результатів і кількості сприятливих подій. З елементами теорії ймовірностей учні ознайомлюються у дев'ятому класі при вивченні теми «Елементи прикладної математики», на вивчення якої відводиться 25 годин. Ймовірнісний зміст навчального матеріалу включає: випадкова подія; ймовірність випадкової події; статистичне і класичне означення ймовірності; обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики. Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів передбачає, що учень пояснює поняття: випадкова подія, ймовірність випадкової події, частота; формулює означення поняття ймовірність випадкової події; розв'язує вправи, що передбачають: використання знаходження ймовірності випадкової події.

Автори навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівня стандарту [35] при формулюванні завдань наскрізної лінії «Здоров'я і безпека» зазначають, що варто звернути увагу на проблеми, пов'язані із ризиками для життя і здоров'я при вивченні основ теорії ймовірностей та математичної статистики. Вивчення елементів теорії ймовірностей у цій програмі передбачається у темі «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики», на вивчення якої відводиться 10 годин. До очікуваних результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів належать: розуміє що таке класичне визначення поняття ймовірності; обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами; застосовує ймовірнісні характеристики навколишніх явищ для прийняття рішень.

Програма [36] призначена для організації навчання математики на поглибленому рівні. У ній передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання, аналізує випадкові величини та знаходить їх найпростіші характеристики, розуміє значення головних статистичних показників, обирає оптимальні рішення. Тема «Елементи теорії ймовірностей» вивчається в одинадцятому класі протягом 36 годин. До змісту навчального матеріалу належать: біном Ньютона та трикутник Паскаля; аксіоми теорії ймовірностей; операції над подіями; основні наслідки з аксіом теорії ймовірностей; незалежні події; умовна ймовірність; випадкова величина та її математичне сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків); геометрична ймовірність.

Програма [37] призначена для організації навчання математики на профільному рівні. Ця програма відрізняється від програми поглибленого рівня тим, що на вивчення одинадятикласниками теми «Елементи теорії ймовірностей» відводиться 30 годин і до змісту навчального матеріалу не входить лише геометрична ймовірність.

1.3 Особливості введення основних понять і тверджень з теорії ймовірностей та математичної статистики у шкільних підручниках.

Підручник при вивченні математики є важливою складовою навчального процесу з кількох ключових причин. В першу чергу, він виступає як основний засіб передачі матеріалу для учня. Його структурований зміст допомагає організувати та послідовно представити математичні концепції, сприяючи логічному розумінню матеріалу.

Підручник має забезпечувати доступні пояснення складних тем, що полегшує учням розуміння концепцій, що вивчаються. Він має слугувати надійним джерелом інформації, яке може використовувати учень як основу для подальших вивчень. Завдання та вправи, розміщені в підручнику, мають бути спрямовані на закріплення та практику отриманих знань, так як відіграють важливу роль у розвитку математичних навичок та вмінь учнів.

Сучасні підручники можуть містити інтерактивні та додаткові онлайн-ресурси, розширюючи можливості вивчення та роблячи його більш цікавим для учнів. Підручник дозволяє вчителям та учням індивідуалізувати процес вивчення, враховуючи різні темпи та стилі навчання.

Для проведення порівняльного аналізу нами було обрано такі підручники основної школи: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 9 клас алгебра[27], Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. 9 клас алгебра[2], Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк 9 клас алгебра [46].

Підручники розроблені згідно діючої навчальної програми. Усі підручники написані зрозуміло, теоретичний матеріал викладено лаконічно та доступно для вивчення. Завдання розміщені від простого до складного. Кількість завдань є надлишковою, що дає можливість вчителю обирати. (табл.1.2.)

Таблиця 1.2

Аналіз підручників з алгебри 9 клас

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 9 клас алгебра	Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. 9 клас алгебра	Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк 9 клас алгебра
<p>Скількима способами можна вибрати у вашому класі старосту та його заступника?</p> <p>Скількима способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?</p> <p>Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини.</p> <p>Галузь математики, яка займається розв'язуванням подібних задач, називають комбінаторикою.</p>	<p>Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих правил</p>	<p>Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розміщення елементів деякої, зазвичай скінченної, множини відповідно до заданих правил</p>

<i>Коментар: поняття комбінаторика подається через запитання</i>	<i>Коментар: чітко вводиться поняття комбінаторика</i>	
Якщо множина А складається з m елементів, а множина В — з k елементів, причому ці множини не мають спільних елементів, то вибір «а або b», де $a \in A$, $b \in B$, можна здійснити $m + k$ способами.	Якщо елемент деякої множини А можна вибрати m способами, а елемент множини В — n способами, то елемент із множини А або ж із множини В можна вибрати $m + n$ способами.	Якщо деякий об'єкт А можна вибрати з даної сукупності об'єктів n способами, а об'єкт В можна вибрати m способами, то вибрати або об'єкт А, або об'єкт В можна $n + m$ способами.
<i>Коментар: в першому підручнику наголошується на тому, що «множини не мають спільних елементів». В другому і третьому означення подані однаково</i>		
Якщо елемент а можна вибрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір пари «а і b» у вказаному порядку можна здійснити mk способами	Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий n способами, то таку пару можна вибрати mn способами.	Якщо деякий об'єкт А можна вибрати з даної сукупності об'єктів n способами й після кожного такого вибору об'єкт В можна вибрати m способами, то вибрати пару (А, В) у вказаному порядку можна $n \cdot m$ способами.
<i>Коментар: в першому та третьому підручнику автори акцентують увагу учнів на тому, що вибір пари об'єктів іде у вказаному порядку.</i>		
Результат спостереження, досліду, експерименту називають подією . Випадковою подією називають такий результат спостереження або експерименту, який при дотриманні даного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися.	Подія -наслідок випробування. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають випадковою .	Явище, про яке можна сказати, що воно відбудеться чи не відбудеться за певних умов, називається випадковою подією або (коротко) подією .
<i>Коментар: найбільш широко розкриті поняття «подія», «випадкова подія» подано у підручнику А.Г.Мерзляка. У підручнику Н.А. Тарасенкової ці два визначення об'єднані в одне. Підручник Г.П.Бевза подано найстиліше.</i>		
Якщо випробування може закінчитися одним з n рівноможливих результатів, з яких m приводять до настання події А, то ймовірністю	Ймовірність випадкової події А визначається за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$	Ймовірністю події А називається відношення числа m сприятливих для А подій до числа n усіх рівноможливих у даному випробуванні подій:

події А називають відношення $\frac{m}{n}$ Ймовірність події А можна обчислити за формулою: $P(A) = \frac{m}{n}$		$P(A) = \frac{m}{n}$
<i>Коментар: чітко виведене означення ймовірності події та представлена формула</i>	<i>Коментар: чіткого означення немає, виведена тільки формула</i>	<i>Коментар: чітко виведене означення ймовірності події та представлена формула</i>
Статистика (від латин. status — стан) — це наука про отримання, обробку й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.	Науку, в якій досліджуються кількісні характеристики масових явищ, називають математичною статистикою (від латинського слова status — стан, становище).	Статистика — наука, що збирає, обробляє й аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища та події навколишнього світу.

Коментар: означення подано однаково

Для проведення аналізу підручників старшої школи, нами було обрані такі: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 11 клас математика [28], Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. 11 клас математика [3], Є. П. Нелін 11 клас алгебра [39] (табл. 1.3.)

Таблиця 1.3

Аналіз підручників з алгебри 11 клас

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 11 клас математика	Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. 11 клас математика	Є. П. Нелін 11 клас алгебра
Скількима способами учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету? Скількима способами можна вибрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількима способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу? Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Розділ математики, який вивчає способи розв'язування	Існують задачі, у яких треба визначити, скільки різних підмножин або впорядкованих підмножин можна утворити з елементів даної множини. Їх називають комбінаторними задачами. А розділ математики про розв'язування комбінаторних задач називають комбінаторикою .	Комбінаторика — розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов.

подібних задач, називають комбінаторикою		
<i>Коментар: поняття комбінаторика подається через запитання</i>		<i>Коментар: чітко вводиться визначення комбінаторика</i>
Підґрунтям для розв'язування більшості комбінаторних задач є два правила: правило суми та правило добутку. Розглянемо такий <i>приклад</i> . Туриста зацікавили 5 маршрутів по Херсонщині та 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.	Якщо елемент деякої множини А можна вибрати m способами, а елемент множини В — n способами, то елемент з множини А або з множини В можна вибрати $m + n$ способами	Якщо елемент А можна вибрати m способами, а елемент В — n способами (при цьому вибір елемента А виключає одночасний вибір і елемента В), то А або В можна вибрати $(m+n)$ способами
<i>Коментар: в першому підручнику чіткого визначення і формули немає, все подається через приклади. В другому і третьому, означення подані однаково</i>		
Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k елементів позначають символом A , використовуючи першу літеру французького слова arrangement - розміщення.	Упорядковану n -елементну підмножину m -елементної множини називають розміщенням з m елементів по n	Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану множину a k елементів, складену з елементів заданої n -елементної множини
<i>Коментар: в другому та третьому підручнику визначення і формули подані майже однаково, лаконічно та зрозуміло. В першому через приклад.</i>		

Порівнюючи обрані підручники з математики для 9-го та 11-го класів, можна зробити такі **висновки**. Усі підручники відзначаються лаконічним та доступним викладом теоретичного матеріалу. Це створює сприятливі умови для розуміння основних концепцій математики. Однак варто відзначити, що глибина пояснень може відрізнятися від одного підручника до іншого. Кожен підручник має структурований зміст та послідовний розподіл матеріалу.

Завдання в них розміщені від простого до складного, що дозволяє вчителю гнучко обирати завдання для уроків та учням систематично розвивати свої навички. Відзначається наявність надлишкової кількості завдань у всіх підручниках, що є позитивною особливістю. Це дозволяє вчителю вибирати завдання відповідно до педагогічних завдань та особливостей класу.

Виділяється те, що всі підручники надають інформацію про комбінаторику, а також вводять поняття ймовірності. Проте, може відмічатися різна глибина пояснень та підходи до конкретних прикладів.

В означенні ймовірності помітно різні підходи. Підручник А. Г. Мерзляк надає чітке визначення та формулу, в той час як підручник Г. П. Бевз зводиться тільки до формули, без чіткого означення.

Визначення статистики подано у всіх підручниках відповідно до наукових термінів. Вони акцентують увагу на обробці та аналізі кількісних даних.

Підбір підручника може залежати від педагогічних уподобань вчителя та вимог учнів. Важливо зазначити, що перед вибором підручника, потрібно проаналізувати, як підручник враховує індивідуальні особливості класу та вміння учнів.

1.4 Аналіз завдань ЗНО з математики на ймовірнісну і статистичну складову

Найважливішим завданням сучасних закладів освіти є боротьба за якість освіти. Якість знань це одна із провідних задач, яка включає в себе навчання і виховання здобувачів освіти та являє собою систему показників знань, умінь та навичок. Якість освіти вимірюється різними формами контролю.

Види контролю знань класифікуються залежно від способу здобуття інформації, засобів, які використовуються під час контролю і самоконтролю, способу організації, форми організації, навчальної мети та місця застосування в процесі навчання, що відбувається на його всіх етапах.

Головною з форм підсумкового контролю засвоєння курсу математики середньої школи в нашій країні є зовнішнє незалежне оцінювання, за результатами якого здійснюється зарахування до закладів вищої освіти. Також ці результати можуть бути враховані в якості державної підсумкової атестації з дисципліни.

Ми провели аналіз сертифікаційних робіт ЗНО за темою «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики» за 10 років (2011р.-2021 р). Та виявили наступні результати.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2011 року**[41], який наведений в табл 1.4.

Таблиця 1.4

Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань			Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором	На відповідність	З короткою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	6	1	1	22,86
	Рівняння і нерівності	4	–	3	20
	Функції	4	1	1	17,14
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	5,71
Геометрія	Планіметрія	6	1	1	20
	Стереометрія	4	1	1	14,29
Усього		25	3	7	100

На дану тему виводиться лише 2 задачі (1 з вибором однієї відповіді, 1 з короткою відповіддю), за які учні можуть отримати 2 бали.

Приклади завдань та результати проходження подані нижче.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді (1 бал).

Це завдання перевіряє вміння аналізувати статистичні дані, які задано таблицею та знаходити середнє арифметичне декількох чисел.

20. О шостій годині ранку визначено температуру на десяти метеостанціях. Отримані дані відображено в таблиці.

Температура (у градусах)	1	3	4	x
Кількість метеостанцій	2	3	4	1

Визначте x , якщо середнє арифметичне всіх цих даних дорівнює $3,5^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$

Правильна відповідь Г. За відповідями учнів маємо наступні результати:

A-16.51% ; Б-31.96%;В-20.36%;Г-23.51%; Д-7.09%; Не виконали завдання-0,57%.Рівень складності - (P-value) -23.51; дискримінація (D-index) – 37.71; кореляція (Rit)-0,38.

З аналізу результатів бачимо, що лише 23.51% учнів справились із завданням, і 76.49 % завдання не виконали, що свідчить про те, що учні були не підготовані з даної теми.

Завдання з короткою відповіддю.(2 бали)

Завдання перевіряє вміння розв'язувати задачі на найпростіші випадки підрахунку ймовірностей

31. У відділі працює певна кількість чоловіків і жінок. Для анкетування навмання вибрали одного із співробітників. Ймовірність того, що це чоловік, дорівнює $\frac{2}{7}$. Знайдіть відношення кількості жінок до кількості чоловіків, які працюють у цьому відділі.

Правильна відповідь **2,5**. За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -81,98%; 2 бали- 18,02%. Рівень складності - (P-value) -18,02; дискримінація (D-index) – 53,99; кореляція (Rit)-0,6.

З результатів видно, що в учнів виникли складнощі з вирішенням даного завдання та тільки 18% впорались і отримали 2 бали.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2012 року**[41], який наведений в табл 1.5.

Таблиця 1.5

Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань			Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором однієї відповіді	На відповідність	З короткою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	2	21,88
	Рівняння і нерівності	3	1	2	18,75

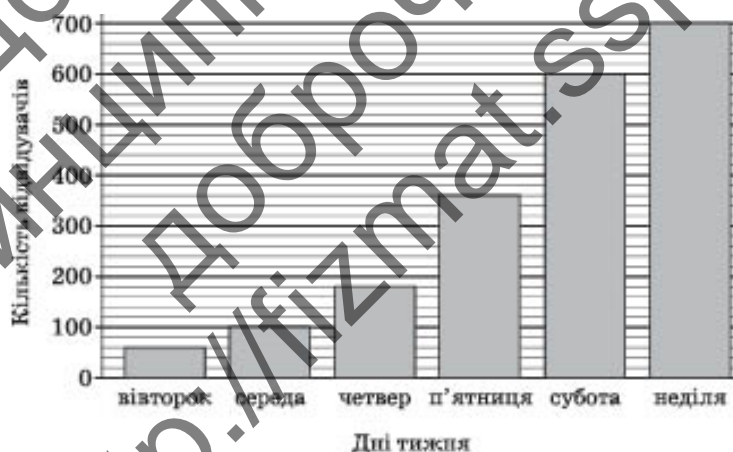
	Функції	4	1	1	18,75
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	—	1	6,25
Геометрія	Планіметрія	5	—	1	18,75
	Стереометрія	3	1	1	15,62
Усього		20	4	8	100

Тенденція завдань продовжується і в цьому році, на тему: « Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики» виділено 2 завдання, за які учні можуть отримати 3 бали.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді (1 бал)

У даному завданні перевіряється вміння аналізувати статистичну інформацію, подану у вигляді діаграми.

Завдання 3. На діаграмі відображено кількість відвідувачів Музею Води протягом одного робочого тижня (з вівторка до неділі). У який день тижня кількість відвідувачів була вдвічі більшою, ніж у попередній?



А	Б	В	Г	Д
середа	четвер	п'ятниця	субота	неділя

Правильна відповідь **В**. За відповідями учнів маємо наступні результати:

A-10.32 % ; Б-15.6%;В-45.6%;Г-22.1%; Д-6.08%; Не виконали завдання-0,3%.Рівень складності - (P-value) -45.6; дискримінація (D-index) – 37.71; кореляція (Rit)-0,38.

З аналізу результатів бачимо, що майже половина учнів, а саме 45.6% учнів виконали завдання вірно і отримали 1 бал.

Завдання з відкритою формою з короткою відповіддю.(2 бали)

Перевіряється вміння учнів розв'язувати прості комбінаторні задачі.

Завдання 26. Скільки існує різних дробів $\frac{m}{n}$, якщо m набуває значень 1; 2 або 4, а n набуває значень 5; 7; 11; 13 або 17?

Правильна відповідь 15.

За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -75,3%; 2 бали-24.7%. Рівень складності - (P-value) -24.7; дискримінація (D-index) – 58.3; кореляція (Rit)-0.5. З результату аналізу прослідковуємо, що лише четверта частина учнів змогла вирішити дане завдання, що вказує на не компетентність більшості учнів в комбінаторних задачах.

Кількісний розподіл завдань за формами сертифікаційної роботи **2013 року**, [41] наведений в табл 1.6. За ним можна побачити, що на тему « Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики» відводиться 2 завдання: завдання з вибором однієї правильної відповіді за яке можна отримати 1 бал та завдання з відкритою формою з короткою відповіддю за 2 бали.

Таблиця 1.6

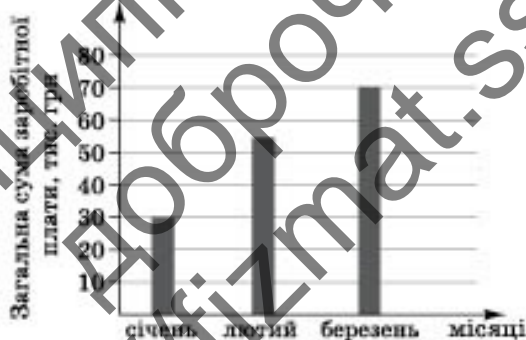
Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань			Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором однієї відповіді	На відповідність	З короткою відповіддю	
	Числа і вирази	4	1	2	21,88

Алгебра і початки аналізу	Рівняння і нерівності	3	1	2	18,75
	Функції	4	1	1	18,75
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	—	1	6,25
Геометрія	Планіметрія	5	—	1	18,75
	Стереометрія	3	1	1	15,62
Усього		20	4	8	100

Завдання з вибором однієї правильної відповіді (1 бал)

Завдання 10. Перевіряється вміння розуміти табличну, текстову та графічну форми подання статистичної інформації.

На діаграмі відображено нараховану фірмою загальну суму заробітної плати усім своїм працівникам у січні, лютому та березні 2011 року. У січні на фірмі працювали 15 співробітників, у лютому – 18, а в березні – 25.



Як змінилася *середня* нарахована заробітна плата в цій фірмі в березні порівняно з січнем

А	Б	В	Г	Д
зменшилась більше ніж на 1000 грн	зменшилась менше ніж на 1000 грн	не змінилась	збільшилась менше ніж на 1000 грн	збільшилась більше ніж на 1000 грн

Правильна відповідь Г.

За відповідями учнів маємо наступні результати: А-2,1 % ; Б-35,29%; В-2,63%; Г-46,1%; Д-13,88%; Не виконали завдання- 0,15%.Рівень складності - (P-value) -46.1; дискримінація (D-index) – 58.3; кореляція (Rit)-0,45.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2014 року**, [41] який наведений в табл 1.7. бачимо, що розподіл змінився в порівнянні з минулими роками, а саме додали завдання на встановлення відповідності, але прибрали з відкритою формою з короткою відповіддю.

Таблиця 1.7

Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань			Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором однієї правильної відповіді	На встановлення відповідності	Відкрита форма з короткою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	2	20,59
	Рівняння і нерівності	4	–	3	20,59
	Функції	4	1	2	20,59
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	1	–	5,88
Геометрія	Планіметрія	3	1	2	17,65
	Стереометрія	4	–	1	14,7
Усього		20	4	10	100

Завдання з вибором однієї правильної відповіді(1 бал)

В даному випадку перевіряється вміння вирішувати комбінаторні задачі з практичним змістом, правилом добутку.

Завдання 6. Студент на першому курсі повинен вибрати одну з трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п'яти спортивних секцій,

щовідвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибор студентом іноземної мови та спортивної секції?

А	Б	В	Г	Д
5	8	10	15	28

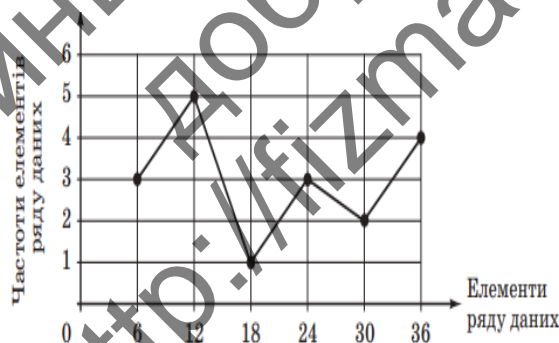
Правильна відповідь Г. За відповідями учнів маємо наступні результати: А-1,87 % ; Б-45,39%;В-2,93%;Г-45,31%; Д-3,37%; Не виконали завдання-0,11%.Рівень складності - (P-value) -45,31; дискримінація (D-index) – 62,23; кореляція (Rit)-0,45.

З цим завданням впоралась майже половина учнів та здобула свій бал. Також майже половина вибрали варіант Б, припустившись помилки в розрахунках. Не виконали завдання зовсім лише 0.11 % з усіх складаючих.

Завдання на встановлення відповідності (4 бали)

Дозволяє перевірити вміння визначати характеристики ряду даних, таких як, моду, медіану і розмах за полігоном частот, зображеним на рисунку.

Завдання 24. На рисунку зображено полігон частот певного ряду даних, на якому по осі абсцис відмічені елементи цього ряду, а по осі ординат – їхні частоти. Установіть відповідність між характеристикою (1–4) цього ряду даних та її числовим значенням (А–Д).



Характеристика ряду даних	Числове значення характеристики
1 кількість елементів	А 12
2 розмах	Б 18
3 мода	В 21
4 медіана	Г 30
	Д 36

Правильна відповідь: 1-Б,2-Г,3-А,4-В.

За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -35,04% ; 1 бал-26.17%; 2 бали-20,42%; 3 бали-11,73%; 4 бали-6,64%; Рівень складності - (P-value) -32,19 ; дискримінація (D-index) – 45,88; кореляція (Rit)-0,53.

За цими даними можемо зробити висновок, що учні не були підготовлені до завдання на визначення характеристики ряду даних, в результаті чого втратили 4 бали.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи базового рівня **2015 року**, [41] який наведений в табл 1.8. бачимо, що розподіл знову змінився в порівнянні з минулими роками, так як в цьому році залишили тільки одне завдання з теми : «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики», а саме завдання з вибором однієї правильної відповіді

Таблиця 1.8

Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань			Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором однієї правильної відповіді	На встановлення відповідності	З короткою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	2	23,33
	Рівняння і нерівності	5	–	1	20
	Функції	4	1	1	20
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	–	3,33
Геометрія	Планіметрія	3	1	1	16,67
	Стереометрія	3	1	1	16,67
Усього		20	4	6	100

Завдання з вибором однієї правильної відповіді(1 бал)

Це завдання перевіряє вміння знаходити ймовірність події.

Завдання 9. Випущено партію з 300 лотерейних білетів. Імовірність того, що навмання вибраний білет із цієї партії буде виграшним, дорівнює 0,2. Визначте кількість білетів *без виграшу* серед цих 300 білетів.

А	Б	В	Г	Д
6	60	294	150	240

Правильна відповідь Д. За відповідями учнів маємо наступні результати: А-4,87 % ; Б-15,23%;В-23,92%;Г-15,77%; Д-40,02%; Не виконали завдання-0,18%.Рівень складності (P-value) -40,02; дискримінація (D-index) – 64,88; кореляція (Rit)-0,51.

Переглянувши аналіз видно, що 40% учнів в 2015 році були готові до завдання на знаходження ймовірності події і не втратили один бал.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2016 року**, [41] який наведений в табл. 1.9. бачимо, що виділено 2 завдання з обраної нами теми:3 вибором однієї правильної відповіді, 1 відкрита форма завдання з короткою відповіддю. За які учні мали змогу отримати 3 бали.

Таблиця 1.9

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	5	1	1	–	7
	Рівняння і нерівності	4	–	1	1	6

	Функції	4	1	1	1	7
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	–	2
Геометрія	Планіметрія	3	1	2	–	6
	Стереометрія	3	1	–	1	5
Разом		20	4	6	3	33

Завдання з вибором однієї правильної відповіді(1 бал)

Завдання перевіряє вміння аналізувати статистичну інформацію, наведену у вигляді графіків або діаграм.

Завдання 7. На рисунку жирними точками позначено річні мінімуми площі поверхні арктичного льоду, що спостерігалися в період з 2004 р. по 2014 р. (для наочності точки з'єднано відрізками). По горизонталі відмічено роки, а по вертикалі – площу поверхні льоду (у млн км²). Користуючись наведеною інформацією, визначте із вказаного періоду рік, у якому величина річного мінімуму площі поверхні льоду змінилась *найбільше* порівняно з попереднім роком.



А	Б	В	Г	Д
2006 р.	2007 р.	2009 р.	2012 р.	2013 р.

Правильна відповідь Д.

За відповідями учнів маємо наступні результати: А-6,44%;Б-9,10%;В-2,06%;Г-24,5%; Д-57,71%; Не виконали завдання- 0,20%.Рівень складності - (P-value) -57,71; дискримінація (D-index) – 53,11; кореляція (Rit)-0,37.

Більша половина учнів відповіла вірно, і отримала 1 бал за дане завдання.

Завдання з відкритою формою з короткою відповіддю.(2 бали)

В даному завданні перевіряється вміння розв'язувати комбінаторні задачі з практичним змістом, використовуючи комбінаторні формули.

Завдання 30. У чайному кіоску в наявності є лише розфасований у коробки по 100 г листовий чорний чай 7 видів, серед яких є вид «чорна перлина». Покупець вирішив придбати в цьому кіоску для подарункового набору три коробки чорного чаю трьох різних видів, серед яких обов'язково повинен бути вид «чорна перлина». Скільки всього в покупця є варіантів такого придбання трьох коробок чаю для набору з наявних у кіоску?

Відповідь: 15

За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -83,95%; 2 бали-16,05%. Рівень складності - (P-value) -16,05; дискримінація (D-index) – 34,88; кореляція (Rit)-0,36.

Отже, 2 бали отримали тільки 16% учнів, що свідчить про повну неготовність вступників 2016 року до завдань даного типу.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2017 року**, [41] який наведений в табл.1.10.,можемо прослідкувати, що кількість та вид завдань не змінилась в порівнянні з 2016 роком.

Таблиця 1.10

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	5	1	1	–	7
	Рівняння і нерівності	4	–	1	1	6

	Функції	4	1	1	1	7
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	–	2
Геометрія	Планіметрія	3	1	2	–	6
	Стереометрія	3	1	–	1	5
Разом		20	4	6	3	33

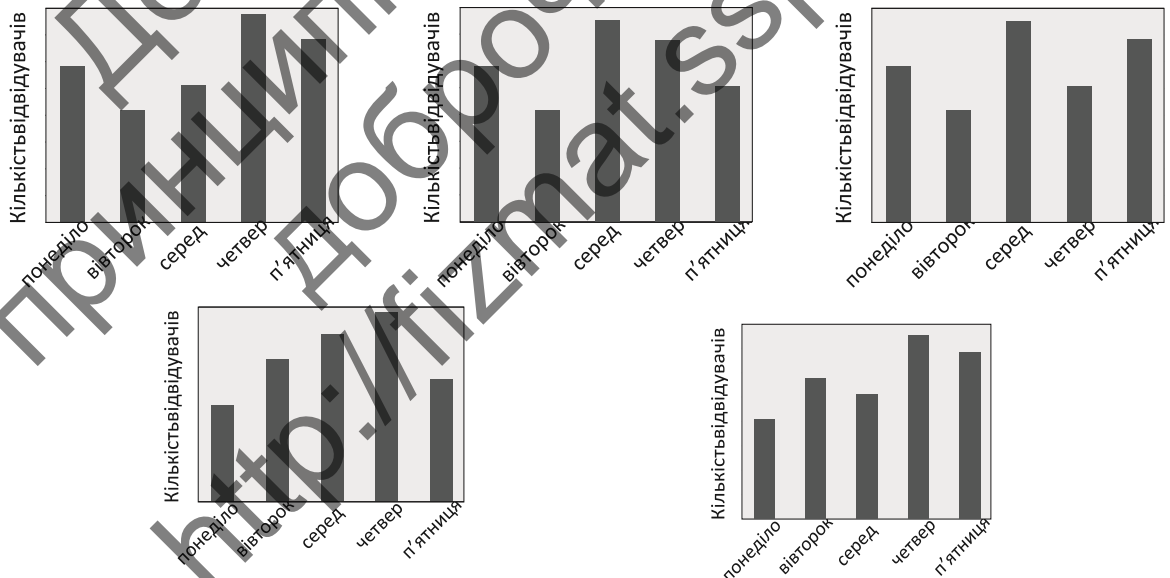
Завдання з вибором однієї правильної відповіді(1 бал)

Перевіряється вміння аналізувати інформацію, яка подана в графічній, табличній і текстовій формі.

Завдання 4. У таблиці наведено дані про кількість глядачів, які відвідали кінотеатр протягом п'яти днів тижня.

День тижня	понеділок	вівторок	серeda	четвер	п'ятниця
Кількість відвідувачів	82	116	102	140	130

На діаграмах немає шкали (градації) кількості глядачів. Визначте, на якій



діаграмі правильно відображено дані, наведені в таблиці.

Правильна відповідь Г. За відповідями учнів маємо наступні результати: А-0,7%;Б-0,4%;В-0,5%;Г-97,1%; Д-1,2%; Не виконали завдання- 0,1%.Рівень складності - (P-value) -97,1; дискримінація (D-index) – 8,7; кореляція (Rit)-0,2.

Завдання з відкритою формою з короткою відповіддю.(2 бали).

Завдання перевіряє знання означення ймовірності події, уміння обчислювати ймовірність випадкових подій, розв'язувати нерівності першого ступеню, раціональні.

Завдання 29. У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми й розміру. Якого *найменшого значення* може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

Правильна відповідь: 10.

За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -85,8%; 2 бали-14,2%. Рівень складності - (P-value) -14,2; дискримінація (D-index) – 44,8; кореляція (Rit)-0,6. Аналіз результатів свідчить про те, що більша частина учнів, не вміє обчислювати ймовірність випадкових подій.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2018 року**, [41] який наведений в табл. 1.11.

Таблиця 1.11

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	5	1	1	–	7
	Рівняння і нерівності	4	–	1	1	6
	Функції	4	1	1	1	7
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	–	2

Геометрія	Планіметрія	3	1	2	–	6
	Стереометрія	3	1	–	1	5
Разом		20	4	6	3	33

Бачимо що на ЗНО 2018 року було виведено 2 задачі з даної теми: завдання з вибором однієї правильної відповіді та завдання з відкритою формою з короткою відповіддю.

За ці завдання учні мали змогу отримати 3 бали. Приклади завдань та результати проходження подані нижче.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді(1 бал).

Дане завдання перевіряє вміння учня обчислювати та аналізувати вибіркові характеристики рядів даних(середнє значення).

Завдання 12

Учень з понеділка до п'ятниці записував час (у хвиликах), який він витрачав на дорогу до школи та зі школи (див. таблицю).

Дорога \ Дні	понеділок	вівторок	середа	четвер	п'ятниця
до школи	19	20	21	17	23
зі школи	28	22	20	25	30

На скільки хвилин у середньому дорога зі школи триваліша за дорогу до школи?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

Правильна відповідь Г. За відповідями учнів маємо наступні результати:

А-3,1% ; Б-5,7%;В-6%;Г-78,8%; Д-6,1%; Не виконали завдання-0,3%.Рівень складності - (P-value) -78,8; дискримінація (D-index) – 43,6; кореляція (Rit)-0,3.

З аналізу результатів бачимо, що 78,8% учнів справились із завданням, і лише 0.3 % завдання не виконали, що свідчить про те, що учні вміють аналізувати дані такого типу та знаходити середнє значення.

Завдання з відкритою формою з короткою відповіддю.(2 бали)

Завдання 29

В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них 3 фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії свого класу для сайту школи?

Правильна відповідь **840**. За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -87,8%; 2 бали- 12,2%. Рівень складності - (P-value) -12,2; дискримінація (D-index) – 39,7; кореляція (Rit)-0,5.

Це завдання перевіряє знання означень комбінаторики, комбінаторні правила знаходження добутку і суми, а також уміння розв'язувати складні задачі комбінаторного характеру.

За результатами видно, що тільки 12,2% набрали 2 бали, інші 87,8% або не дійшли до вірної відповіді, або нажаль зовсім не виконували це завдання.

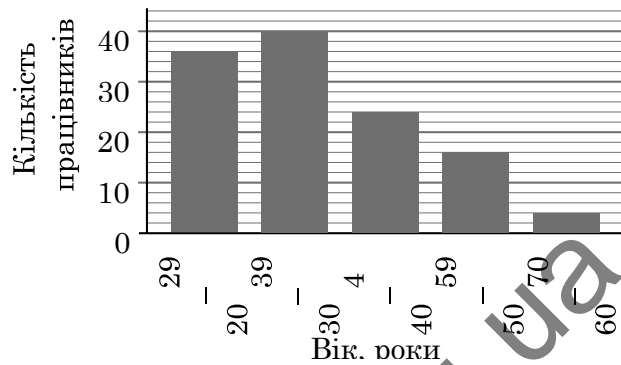
За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2019 року**, який наведений в табл.

Також можемо прослідкувати, що з теми «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики.» було також виведено лише 2 завдання: завдання з вибором однієї правильної відповіді та завдання з відкритою формою з короткою відповіддю.

За ці завдання учні мали змогу отримати 3 бали. Приклади завдань та результати проходження подані нижче .

Завдання № 11 (з вибором однієї правильної відповіді) за яке учні мали змогу отримати 1 бал перевіряє вміння проводити аналіз аналітичної, графічної, текстової форм подання статистичних даних.

На діаграмі відображено розподіл кількості працівників фірми за віком. Скільки всього працівників працює на цій фірмі?



А	Б	В	Г	Д
40	96	120	144	110

Правильна відповідь **В**. За відповідями учнів маємо наступні результати: А-5,7% ; Б-3%;В-79,6%;Г-2,6%; Д-8,7%; Не виконали завдання- 0,3%.Рівень складності - (P-value) -79,6; дискримінація (D-index) – 44,2; кореляція (Rit)-0,4. 79,6% учнів відповіли вірно і отримали бали, 20% дали не вірну відповідь, 0,3% не виконали завдання зовсім.

Завдання №29 (відкритою формою з короткою відповіддю) дає змогу перевірити вміння розв'язувати нескладні задачі комбінаторного типу, а також знання правила добутку.

У фінал пісенного конкурсу вийшло 4 солісти та 3 гурти. Порядковий номер виступу фіналістів визначають жеребкуванням. Скільки всього є варіантів послідовностей виступів фіналістів, якщо спочатку виступатимуть гурти, а після них – солісти? Уважайте, що кожен фіналіст виступатиме у фіналі лише один раз.

Правильна відповідь **144**. За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -86,1%; 2 бали- 13,9%. Рівень складності - (P-value) -13,9; дискримінація (D-index) – 41,5; кореляція (Rit)-0,5.

За результатами лише 13,9% змогли вирішити задачу, що свідчить про не вміння учнів розв'язувати задачі даного типу.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2020 року**, [41] який наведений в табл.1.12, прослідковується зміна розподілу.

На дану тему виводиться вже 3 задачі (1 з вибором однієї відповіді, 2 з відкритою короткою), за які учні можуть отримати 3 бали.

Таблиця 1.12

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	5	1	1	–	7
	Рівняння і нерівності	4	–	1	1	6
	Функції	4	1	1	1	7
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	2	–	3
Геометрія	Планіметрія	3	1	2	–	6
	Стереометрія	3	1	1	1	6
Разом		20	4	8	3	35

Перше завдання з теми (№8), з вибором однієї правильної відповіді перевіряє вміння розв'язувати легкі комбінаторні задачі за правилом множення.

На вершину гори ведуть 5 доріг. Скільки всього є варіантів вибору маршруту підйому на вершину гори однією дорогою, а спуску – іншою?

А	Б	В	Г	Д
5	9	10	20	25

Правильна відповідь Г. За відповідями учнів маємо наступні результати:

А-9,1% ; Б-10,4%; В-15,2 %; Г-45,3%; Д-19,7%; Не виконали завдання-0,3%. Рівень складності - (P-value) -45,3; дискримінація (D-index) – 59,4; кореляція (Rit)-0,4.

Після аналізу результатів можемо сказати, що лише 45,3% учнів змогли впоратись з даною задачею, решта допустила помилки.

Друге завдання з теми (№29), з відкритою короткою відповіддю, прослідковує вміння давати аналіз та обчислювати вибіркові характеристики рядів даних (середнє значення)

У першому рядку таблиці наведено значення температури повітря, яку вимірювали на метеостанції через кожні 3 години впродовж доби. У другому рядку зазначено частоту фіксувань відповідного значення температури впродовж доби. За даними метеостанції визначте середню температуру (у °C) протягом цієї доби .

Температура, °C	12	15	17	18
Частота фіксувань	1	4	2	1

Правильна відповідь **15,5**. За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -52,0%; 2 бали- 48%. Рівень складності - (P-value) -48; дискримінація (D-index) – 77,9; кореляція (Rit)-0,5.

Нажаль, знову, лише 48% змогли вирішити задачу і отримали 2 бали , що свідчить про нерозуміння учнів, як обчислити середнє значення.

Третє завдання (№31), перевіряє здатність учнів обчислювати ймовірність випадкової події, значення та вміння застосування правила добутку та заходження ймовірності

Для участі в роботі студентської ради з кожної з двох груп навмання вибирають по 1 студенту. Серед 24 студентів першої групи проживають у гуртожитку 6 студентів, а серед 28 студентів другої групи – 14 студентів. Яка ймовірність того, що обидва вибрані для роботи в раді студенти будуть з тих, хто проживає в гуртожитку?

Правильна відповідь **0,125**. За відповідями учнів маємо наступні результати: 0 балів -87,4%; 2 бали- 12,6%. Рівень складності - (P-value) -12,6; дискримінація (D-index) – 43; кореляція (Rit)-0,6.

Після отримання результатів спостерігаємо, що лише 12.6% учнів впорались із завданням. Інші 87,4% або допустили помилки в розрахунках, або ж не розуміють, як обчислювати ймовірність випадкової події.

За кількісним розподілом завдань за формами сертифікаційної роботи **2021 року**, [41] який наведений в табл.1.13., прослідковується знову зміна розподілу. Повернення до минулої моделі виведення тем завдань на ЗНО з даної теми (1 з вибором однієї відповіді, 1 з відкритою короткою), за які учні можуть отримати 2 бали.

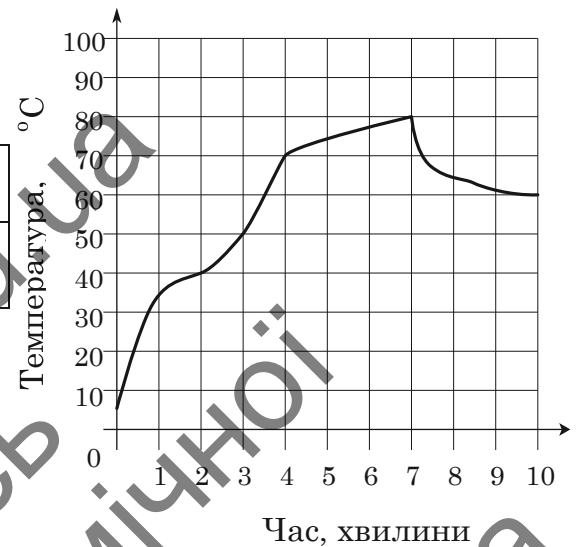
Таблиця 1.13

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	2	1	8
	Рівняння і нерівності	3		2	1	6
	Функції	3	1	1	1	6
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	2	–	3
Геометрія	Планіметрія	3	1	1	–	5
	Стереометрія	2	1	1	2	6
Разом		16	4	9	5	34

Завдання з вибором однієї правильної відповіді(1 бал)

Завдання спрямоване на перевірку вміння аналізувати дані, подані графіком або таблицею.

А	Б	В	Г
7	4	3	2



На графіку відображено зміну робочої температури двигуна легкового автомобіля протягом 10 хвилин з моменту його запуску. Визначте за графіком кількість хвилин, протягом яких робоча температура двигуна була не більшою за 50 °C.

Правильна відповідь **В**. За відповідями учнів маємо наступні результати: А-1,7% ; Б-2,1%;В-85,3%;Г-10,3%; Не виконали завдання- 0,3%.Рівень складності - (P-value) -85,3; дискримінація (D-index) – 29,3; кореляція (Rit)-0,2. Більшість учнів, а саме 76,7% впорались із завданням.

Завдання з відкритою формою з короткою відповіддю(№25).(2 бали)

Перевіряє здатність учнів обчислювати ймовірність випадкової події, значення та вміння застосування правила добутку та заходження ймовірності.

У першому класі 15 дівчаток, з яких лише одна на ім'я Дарина, і 11 хлопчиків. На першому уроці вчителька навмання формує пари дітей, які сидітимуть за однією партою. Першою вона вибирає пару для Дарини. Яка ймовірність того, що Дарина сидітиме за однією партою з дівчинкою?

Правильна відповідь **0,56**. За відповідями учнів маємо наступні результати:

0 балів -84,3%; 2 бали- 15,7%. Рівень складності - (P-value) -15,7; дискримінація (D-index) – 52,4; кореляція (Rit)-0,7. З результату аналізу прослідковуємо, що мінімальна кількість учнів впоралась, лише 2,5%.

Проаналізувавши результати складання ЗНО, та звіти надані українським центром оцінювання якості освіти можемо зробити висновки, щодо складності завдання, спираючись на 2 показники [44]:

1) P-value (складність текстового завдання) -показник успішності виконання цього завдання учасниками тестування. Визначають як відношення (у відсотках) кількості балів, набраних усіма учасниками за виконання цього завдання, до максимальної кількості балів, яку вони могли б отримати за його виконання. У таблиці наведено інтервали значень складності та характеристику тестового завдання.

Інтервал значення P-value	Характеристика завдання
> 80 %	дуже легке
60 – 79 %	легке
40 – 59 %	оптимальне
21 – 39 %	складне
≤ 20 %	дуже складне

2) D-index(дискримінативність) - здатність тестового завдання відділяти учасників тестування з різним рівнем навчальних досягнень. Дискримінативність завдання визначають як різницю складності завдання для сильної та слабкої (добре і погано підготовленої) груп учасників тестування. У таблиці наведено характеристику дискримінативності тестового завдання.

Інтервал значення D-index	Характеристика дискримінативності завдання
41 – 100 %	дуже хороша
31 – 40 %	хороша
21 – 30 %	середня
≤ 20 %	низька

В табл. 1.14 та табл.1.15. наведені результати порівняння складності завдань.

Таблиця 1.14

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Рік	P-value	D-index
2011	23,51	37,71
2012	45,6	37,71
2013	35,6	46,7
2014	45,31	62,23
2015	40,02	64,88
2016	57,71	53,11
2017	97,01	8,7
2018	78,8	43,6
2019	79,6	44,2
2020	45,3	59,4
2021	85,3	29,3
Середнє значення	57,6	44,3

Таблиця 1.15

Завдання з відкритою формою з короткою відповіддю

Рік	P-value	D-index
2011	18,02	53,99
2012	24,7	58,3
2013	13,2	40,7
2016	16,05	34,88
2017	14,02	44,8
2018	12,2	39,7
2019	13,9	41,5
2020	48	77,9
2021	15,7	52,4
Середнє значення	19,5	49,4

Бачимо, що в завданні з вибором однієї правильної відповіді середній показник складності -57,6%, а D-index-44,3%, що свідчить про те що складність завдань оптимальна, а рівень підготовки учнів до завдань такого типу дуже хороша.

В завданнях з відкритою формою з короткою відповіддю, показник P 19,5, а D-index-49,4, що свідчить про те що завдання дуже складні, а підготовка учні на високому рівні.

Результати аналізу результатів ЗНО протягом останніх 10 років свідчать про певні тенденції та виклики у розумінні ймовірності та статистичної частини математичних завдань. Незважаючи на загальний успіх учнів у завданнях із виробом однієї правильної відповіді, виявляється, що із складовими, пов'язаними із ймовірністю та статистикою, деякий відсоток учнів виявляє певні труднощі.

Зокрема, велика увага приділяється завданням з відкритою короткою відповіддю та відповідності. Результати показують, що учні можуть допускати помилки у відповідях на ці типи завдань, або навіть уникати їх виконання, що може бути індикатором невідповідності чи неадекватного розуміння певних концепцій.

Важливо врахувати, що успіх у розділах ймовірності та статистики може залежати від якості підготовки вчителя та відповідності підручника вимогам навчальної програми. Також, ці труднощі можуть свідчити про потребу удосконалення методик викладання та додаткової підготовки учнів у цих конкретних аспектах математики.

Причинами такої підготовки з цієї теми можуть бути :

- учні можуть не повністю розуміти основні поняття комбінаторики, такі як перестановки, комбінації, факторіали тощо.
- недостатня кількість часу, відведеного для вивчення теми: ймовірність є складною темою, і вона може вимагати значної кількості часу, щоб зрозуміти її повністю.

- не достатність практичного досвіду розв'язання задач з комбінаторики, що може вплинути на їхню ефективність при виконанні завдань ЗНО.

- сама ситуація ЗНО може викликати стрес та тривожність, що може вплинути на концентрацію та виконання завдань, особливо якщо тема є складною для учня.

- недостатні знання математики: для розуміння теорії ймовірності потрібні певні математичні знання, такі як комбінаторика, алгебра, геометрія та статистика.

- недостатнє викладання: викладачі можуть не мати достатньої підготовки, щоб ефективно викладати теорію ймовірностей.

- відсутність мотивації: деякі учні можуть не бачити користі в тому, щоб вивчати теорію ймовірності.

- відсутність практики.

Отже, вчителям потрібно приділяти більшу увагу на підготовку учнів до ЗНО з теми «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики», так як учні втрачають 3 бали не виконуючи завдання.

Висновки до розділу 1

Ймовірісно-статистична лінія вивчення математики в шкільних програмах є необхідною. Ця галузь математики допомагає учням розвивати широкий спектр навичок та компетенцій, які мають важливе значення як у навчанні, так і в реальному житті.

Вивчення ймовірісно-статистичної лінії дозволяє учням розвивати навички критичного мислення та аналізу інформації. Здатність визначати ймовірність подій та аналізувати статистичні дані розвиває логічне мислення та допомагає учням ухвалювати обґрунтовані рішення в різних ситуаціях.

Вивчення цієї теми математики допомагає учням розуміти ймовірісні та статистичні аспекти реального світу. Вони можуть застосовувати ці знання в

повсякденних ситуаціях, роблячи обґрунтовані висновки на основі зібраних даних та оцінюючи ризики в прийнятті рішень.

Під час аналізу підручників з математики для учнів основної школи та їх порівняльного вивчення, було виявлено декілька ключових аспектів, які визначають їхню важливість у процесі вивчення математики. Підручники виступають не тільки джерелом інформації, але і інструментом для розвитку математичних навичок та формування критичного мислення.

Завдання, розміщені у підручниках, грають важливу роль у вивченні математики. Вони повинні бути різнорівневими, починаючи від простих і закінчуючи більш складними, щоб кожен учень мав можливість підвищувати рівень власної компетенції.

Проте, результати аналізу ЗНО показують, що учні зустрічають труднощі з вирішенням завдань, які вимагають застосування ймовірнісно-статистичних знань, особливо у завданнях з відкритими короткими відповідями. Це може свідчити про те, що існує необхідність удосконалення методик викладання цих розділів математики та більш ефективної підготовки учнів до розв'язання різновидів завдань на їхню тему.

Вивчення ймовірності та статистики у шкільних програмах та за підручниками стає все більш актуальним завданням у світлі сучасних вимог до освіти. Так це як, сприяє формуванню математичної грамотності серед учнів. Усвідомлення концепцій ймовірності та статистики дозволяє їм ефективно працювати з кількісною інформацією, розпізнавати шаблони та розуміти логіку застосування математики в різних контекстах.

Отже, вивчення ймовірності та статистики у школі є необхідним і важливим етапом у формуванні математичної грамотності та розвитку комплексу навичок, які забезпечують учням успішну адаптацію в сучасному інформаційному суспільстві.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Класичне, статистичне і геометричне означення ймовірності події

Тема "Класичне, статистичне і геометричне означення ймовірності події" в розділі теорії ймовірностей грає ключову роль у введенні учнів у основні концепції та методи цього розділу математики.

Формування ключових концепцій у теорії ймовірностей передбачає, що перші два уроки в 11 класі будуть приділені розгляду основних термінів. Націлюючися на вивчення теорії ймовірностей, пропонується відвести цей час для ознайомлення з такими поняттями, як стохастичний експеримент, подія, випадкова подія, масові випадкові події, сумісні події, однаково можливі події, вірогідні та неможливі події, елементарні події, і класичне визначення ймовірності. [16]

На наступних заняттях рекомендується детальніше розглянути статистичне визначення ймовірності, закон великих чисел, геометричне визначення ймовірності, умовну ймовірність, теореми додавання і множення ймовірностей, незалежні події та випробування, і впровадити схему Бернуллі. Необхідно відзначити, що до базових понять теорії ймовірностей входять "стохастичний експеримент" і "подія".

Під час першого уроку слід навести конкретні приклади для усвідомлення термінів випадкової події та масових випадкових подій, переконати учнів, що існують закономірності у масових випадкових подіях, які вивчає теорія ймовірностей. [50,с.512] Також важливо відзначити, що математика, яку вони вивчали до цього моменту, характеризувалася визначеністю та однозначністю результатів, тоді як теорія ймовірностей дозволяє враховувати неоднозначність та багатозначність результатів у математичних розрахунках.

Основною концепцією є визначення ймовірності події як числової характеристики, яка відображає можливість виникнення випадкової події.

Найдоцільніше розглянути класичне визначення ймовірності, спрямоване на елементарні події, які формують повну гру несумісних та рівноможливих випадків. У цьому контексті, важливо вводити класичне визначення ймовірності через конкретні експерименти, такі як підкидання гральних кубиків чи монеток. Андрій Миколайович Колмогоров, використовуючи приклад підкидання двох гральних кубиків і фіксації суми очок, розглядає поняття рівноможливих випадків та ймовірності, де ймовірність визначається як співвідношення сприятливих випадків до загальної кількості рівноможливих. [46] Важливо відзначити, що математика не розглядає питання про те, які саме випадки можна вважати рівноможливими.

Наприклад, при киданні кубиків фізичні умови падіння будь-якою гранню здаються однаковими, а різні комбінації верхніх граней кубиків вважаються однаково правдоподібними. Ці припущення підтверджуються експериментами. Отже, математична теорія ймовірностей зосереджується на обчисленні ймовірностей різних подій за умови певних припущень, а саме, які випадки вважаються рівноможливими.

Загалом, важливо враховувати, що при застосуванні класичного визначення ймовірності у дослідах, умови вважаються ідеальними, наприклад, гральний кубик повинен мати ідеальну форму, а монета виготовлена з однакового за щільністю матеріалу.

Необхідно вирішити задачі більш складної природи, де кількість можливих несумісних подій, утворюючи повну групу, і кількість сприятливих для розгляду подій, визначаються за допомогою комбінаторних формул. Такі завдання повинні бути структуровані з урахуванням рівня розуміння учнів.

Під час вивчення класичного визначення ймовірності рекомендується пояснити учням широко вживані в реальному житті поняття "практично неможливої" і "практично вірогідної" подій. [50, с.513] Це відноситься до подій, ймовірність яких практично дорівнює 0 або 1 відповідно. Оскільки висновок про

ймовірність відбуття події можна зробити лише з урахуванням конкретних умов її відбуття чи ні, приводяться приклади: якщо ймовірність запізнення потягу становить 0,01, то це практично неможлива подія. Однак, якщо ймовірність того, що парашут не розкриється під час стрибка парашутиста, теж дорівнює 0,01, то цю подію вважати практично неможливою не можна.

Перед введенням статистичного визначення ймовірності, корисно підкреслити, що класичне визначення ймовірності має обмежений обсяг застосування, особливо за умов теоретично ідеальних ситуацій. У реальних експериментах часто неможливо розрізнити події, які теоретично вважаються однаково можливими. У таких випадках використовується статистичне визначення ймовірності. Спочатку важливо розглянути концепцію статистичної частоти події, яка визначається як відношення кількості разів, коли подія відбулася (позначено як m), до загальної кількості випробувань (позначено як n). Наприклад, тут n може представляти загальну кількість пострілів, виконаних стрільцем, а m - кількість разів, коли він попав у ціль.

Перш ніж вивчати геометричне визначення ймовірності, корисно роз'яснити учням, чому воно введене та яку роль воно відіграє. Важливо звернути увагу на обмеженість класичного визначення ймовірності, яке застосовується лише до випробувань зі скінченною кількістю можливих результатів. Для ситуацій з нескінченною кількістю можливих наслідків вводиться геометричне визначення ймовірності. Це поняття може бути ефективно пояснене за допомогою простих прикладів.[16]

Після розгляду прикладів, зокрема на практичний зміст, слід зауважити, що геометричний підхід до ймовірності події не залежить від розмірності геометричного простору. Ключовою є однаковість форми та розмірності простору усіх елементарних подій і підпростору, що включає події, ймовірність яких нас цікавить. При визначенні геометричної ймовірності важливо, щоб структура цих просторів була ідентичною.

Обмежений час, який відводиться для вивчення теорії ймовірностей у загальноосвітній школі, ускладнює можливість розв'язання розширеної кількості

задач з використанням статистичних та геометричних визначень ймовірності. З метою закріплення цих концепцій доводиться обмежуватися лише вирішенням окремих задач на уроці та залишати самостійне розв'язування схожих завдань для учнів поза класом. Такий підхід визначається необхідністю ефективно використовувати обмежений час для належного освоєння теорії ймовірностей.

2.2. Поняття про статистику як науку, статистичні дані, мода і медіана.

На першому уроці слід ввести учнів у світ статистики, розглядаючи її як павука, який влітає різноманітні дані за допомогою своїх методів. Важливо враховувати, що терміни "статистичні дані", "статистичний звіт", "за даними статистики" вже відомі учням завдяки засобам масової інформації, таким як преса, радіо та телебачення. Ці терміни є невід'ємною частиною повсякденного життя та використовуються фахівцями у різних галузях. [50,с.542]

За словником, статистика «вивчає кількісний бік суспільних явищ і процесів у нерозривному зв'язку з їхнім якісним змістом». Щоб донести цю ідею до учнів простіше, можна сказати, що статистика - це наука, яка збирає, обробляє та вивчає різноманітні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами та подіями в суспільстві. Доцільно на першому уроці дати коротку історичну довідку з даної теми.

На другому уроці рекомендовано розглянути різні методи обробки даних, впроваджуючи поняття ранжування, варіантів, варіювання, частот варіантів, дискретного варіаційного ряду, статистичної таблиці, частот значень ознаки та визначення статистичних розподілів за допомогою графічних методів, таких як діаграми, графіки, гістограми та полігони. З огляду на значну кількість нових термінів та концепцій, які вводяться на цьому етапі, важливо готувати детальні таблиці для конкретних прикладів та демонстрації різноманітних графічних представлень, таких як гістограми та полігони.

Важливим є наголос на тому, що створення статистичних таблиць включає два етапи. Перше, створюється макет таблиці, а на другому етапі ця таблиця заповнюється статистичними даними.

У статистиці, середнє є абстрактною величиною, яка узагальнює рівень варіювання певної ознаки в якісно-однорідній групі. Вона відображає компенсацію коливань індивідуальних значень ознаки, які виникають внаслідок впливу різних чинників. У статистиці існують різні види середніх, серед яких основні включають середнє арифметичне, середнє гармонічне, середнє геометричне і середнє квадратичне.

Програма передбачає ознайомлення учнів із поняттям середнього арифметичного, яке є одним з основних показників для вимірювання центральної тенденції в групі даних.[28]

Хоча програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів не включає в себе обчислення середнього, моди і медіани для інтервальних рядів розподілу, зацікавлених учнів можна ознайомити з відповідними формулами та концепціями. Це може допомогти їм розширити свої знання і зрозуміти, як використовувати ці поняття для аналізу інтервальних рядів. Таке додаткове вивчення може бути корисним для розвитку їхніх навичок в області статистики та аналізу даних.

Перший досвід показує, що учні легко розуміють поняття моди, медіани і середніх значень. Однак виявляється, що їх обчислення може бути складнішим при розв'язанні конкретних задач. Тому важливим є виважений підхід до вибору вправ, серед яких мають бути доступні для учнів прикладні завдання. Такий диференційований підхід дозволяє забезпечити розуміння та засвоєння матеріалу на різних рівнях складності, а також розвиває навички вирішення практичних завдань учнями.

2.3. Теоретичні засади впровадження матеріалу з ймовірності та статистики в шкільний курс математики

Мета вивчення стохастики, як сформульовано Б.В. Гнеденком, полягає у розширенні поглибленого курсу математики та підвищенні його потенціалу з точки зору розвитку і практичного застосування, а також у формуванні стохастичного мислення. [20] У сучасній шкільній математичній освіті основні цілі вивчення теорії ймовірностей і вступу до статистики включають:

1. Забезпечення осмисленого та міцного засвоєння знань, навичок та умінь, які є важливими у повсякденному житті, майбутній професійній діяльності, і які дозволяють вивчати інші предмети. Також, набуті навички допомагають моделювати випадкові явища під час досліджень природи та суспільства.

2. Розвиток статистичного мислення учнів, математичної інтуїції і культури, а також формування самостійності, ініціативності, творчості та адаптабельності до змін.

3. Створення наукового світогляду, виховання поваги до національної культури і традицій України, а також формування позитивних рис характеру, доброзичливості, толерантності, сміливості, обґрунтованості суджень, а також розвиток економічного, екологічного та трудового виховання, а також професійної орієнтації.

Ймовірно-статистична змістовно-методична лінія повинна ґрунтуватися на таких принципах:

- Лінія має бути системною, логічно впорядкованою та послідовною, щоб забезпечити ефективне засвоєння матеріалу від базового до більш складного.
- Матеріал повинен бути представлений в контексті реальних ситуацій та завдань, що дозволяє учням легше розуміти і застосовувати концепції.
- Використанні інтерактивних методів та завдань, які стимулюють активну участь учнів у власному навчанні та розвитку критичного мислення.
- Підкресленні прикладного застосування ймовірно-статистичних понять у різних галузях, щоб надати учням конкретний контекст та мотивацію для вивчення.
- Зосередженні на розвитку учнівських навичок моделювання випадкових подій та використання математичних моделей для аналізу статистичних даних.
- Розробкі матеріалу, який може бути адаптований до різних рівнів здібностей учнів, надаючи можливість для індивідуалізованого навчання.

- Врахуванні зв'язку із загальноосвітнім контекстом, щоб забезпечити узгодженість імовірно-статистичного матеріалу з іншими темами шкільного курсу.
- Постійному оновленні змісту та методик відповідно до сучасних тенденцій у вивченні математики та врахування нових методів навчання.
- Використанні сучасних технологій для покращення навчання та забезпечення доступу до інтерактивних засобів вивчення.
- Забезпеченні навчання конкретними навичками та інструментами, які можуть бути застосовані у реальних життєвих ситуаціях та подальшій професійній діяльності.

Лінія, спрямована на зміст та методіку, включає в себе імовірнісний та статистичний компоненти, які взаємодіють гармонійно. Ця взаємодія забезпечує системність у розумінні ролі емпіричних і теоретичних методів у вивченні явищ навколишнього світу та їх імовірнісної структури.

Сучасний етап вивчення основ теорії ймовірностей та вступу до статистики відзначається різноманітними викликами і протиріччями. Ці аспекти включають не лише концептуальні труднощі у розумінні абстрактних понять, але і використання сучасних програмних засобів для обробки та аналізу даних. Деякі здобувачі освіти можуть мати труднощі у розумінні абстрактних концепцій теорії ймовірностей, таких як події, ймовірність, умовна ймовірність тощо.

Крім того, практичні аспекти застосування теоретичних знань у реальних сценаріях можуть кидати виклики, адже учням часто доводиться опановувати нові методи та техніки в контексті великих обсягів інформації та швидкозмінюваних тенденцій. [25 с.55-56] Також, учням може бути важко визначити, як використовувати свої знання для вирішення реальних проблем. Важливо також враховувати зв'язок цих дисциплін із сучасними областями, такими як машинне навчання, що може додати складнощі у вивченні. Таким чином, сучасний підхід до навчання теорії ймовірностей і статистики ставить перед студентами ряд викликів, які вимагають глибокого розуміння та гнучкості у вирішенні завдань.

Для глибшого і правильного усвідомлення основних концепцій теорії ймовірності необхідно, щоб учні мали чітке розуміння початкових фундаментальних понять, а також установлювали постійний зв'язок між теорією та її практичним застосуванням.

Процес формування стохастичних уявлень, знань і вмінь учнів, обдарованих математичними здібностями, включає наступні етапи: ознайомлення з найпростішими стохастичними ситуаціями; накопичення систематизованих уявлень про явища стохастичної природи; створення науково-технічної основи для стохастичних уявлень.

При вивченні основ теорії ймовірностей та вступу до математичної статистики, так само, як і при опануванні будь-якої іншої змістовної лінії алгебри чи початкового аналізу, виникають немалі труднощі у використанні теоретичних концепцій для розв'язання конкретних практичних та прикладних завдань.

При розробці методик формування імовірнісно-статистичного мислення учнів у процесі розв'язання завдань з початкових розділів теорії ймовірностей і математичної статистики важливо визначити, що однією з ключових проблем є відібрання відповідних видів задач для кожної теми. Ці завдання повинні бути належним чином обрані з точки зору ефективного формування стохастичного мислення, розвитку відповідних умінь і, водночас, бути доступними для учнів. Для активізації учнів і підвищення їх зацікавленості в навчанні з теми теорії ймовірностей і статистики, слід враховувати кілька важливих принципів при виборі задач: практична застосовність, інтерактивність, різноманітність, групова робота, зв'язок з реальністю, використання візуальних засобів.

Система контролю, що включає в собі поточний та тематичний підходи, а також індивідуальні завдання, диференційовані за рівнями, дозволяє ефективно перевіряти та закріплювати здобуті знання, навички і уміння з теорії ймовірностей та вступу до статистики.

Індивідуалізація самостійних та домашніх завдань, з обов'язковою подальшою перевіркою, сприяє формуванню навичок самостійної роботи.

Індивідуальний практикум з розв'язання стохастичних задач сприяє вдосконаленню умінь використовувати вже вивчені концепції та методи в шкільному навчанні.[32]

Важливість вибору стилю викладання для введення в теорію ймовірностей та статистику в класах важко переоцінити. При вирішенні цього завдання необхідно знаходити збалансований підхід, який би враховував різноманітні потреби учнів.

По-перше, важливо дотримуватися строгості в поданні матеріалу, особливо з урахуванням високої абстракції теорії ймовірностей. Забезпечення чіткого та логічного розгортання концепцій сприяє формуванню глибокого розуміння.

По-друге, доступність є ключовою для привертання уваги. Застосування ілюстративних прикладів, візуалізація складних концепцій та використання життєвих ситуацій можуть значно полегшити засвоєння матеріалу.

По-третє, прикладна спрямованість є ключовою для зацікавлення студентів, оскільки вона дозволяє їм бачити конкретність та застосування теоретичних знань у реальному світі. Включення практичних завдань та використання сучасних прикладів із сфери їхньої професійної діяльності може стимулювати інтерес.

Варто пам'ятати, що розробка програм також повинна враховувати індивідуальні особливості учнів та їхніх педагогічних потреб, забезпечуючи гнучкість та адаптивність методів навчання. Такий підхід дозволяє досягти необхідного компромісу між строгістю, доступністю та практичною використовуваністю, сприяючи ефективному засвоєнню матеріалу.

2.4. Розгляд існуючих методик розв'язування задач теорії ймовірностей і математичної статистики в школі.

У шкільному навчанні ймовірності та математичній статистиці завдання полягає не лише в тому, щоб донести до учнів основні поняття цих наук, а й у розвитку навичок критичного мислення, аналітичного підходу до розв'язання задач, навичок роботи з ними. Головна мета – не лише передача знань, а й

глибоке розуміння того, як розуміти навколишній світ за допомогою математичних методів.

У цьому контексті важливо розглянути різні техніки, які можуть варіюватися від традиційних до інноваційних. Традиційні методи можуть базуватися на класичних підходах до викладання математики, включаючи роботу з підручниками, педагогічну освіту та практику. З іншого боку, інноваційні методи можуть використовувати ігри, візуалізацію даних, обчислення та групові проекти.

При вивченні існуючих методик важливо враховувати різні стилі навчання, індивідуальні особливості та рівень вихованості учнів. Використання практичних прикладів, ігор і життєвих ситуацій може надати учням досвід навчання та інтерес до вивчення математики.

Тому врахування існуючих методик є ключовим кроком у пошуку оптимального підходу до вивчення ймовірності та математичної статистики в школі, враховуючи не лише важливість передачі знань, а й розвиток необхідних навичок, вони знадобляться в майбутньому.

Розглянемо деякі загальні методики, які можуть використовуватися в шкільному контексті.

✓ Практичні приклади: Застосування реальних прикладів і задач, які вже відомі учням, сприяє кращому розумінню абстрактних концепцій. Наприклад, розв'язання ймовірнісних задач, пов'язаних із кидком гральних кубиків чи витягуванням кульок із склянки.

Задача 1. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть дві одиниці?

Розв'язання.

Нехай подія A полягає в тому, що випадуть дві одиниці. Ймовірність, що 1 випаде в кожному з кидків рівна $1/6$, оскільки в кубіку 6 граней. Ймовірність випадання двох одиниць рівна добутку ймовірностей.

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Задача 2. В урні 5 чорних і 6 білих кульки. Випадково виймають 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед них є 3 білі кульки.

Розв'язання.

Число всіх можливих подій в даній задачі це кількість способів, за якими можна вибрати 5 кульки із $(6+5)=11$. Обчислюємо через формулу сполучень без повторень

$$n = C_{11}^5 = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 462$$

Число сприятливих подій рівне добутку:

$$m = C_6^3 \cdot C_5^2$$

де $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$ кількість способів, за якими можна вибрати 3 білих кульки з 6; $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ - кількість способів, за якими можна вибрати 5-3=2 чорних кульки з 5.

Ймовірність події А, при якій виймають 3 кульки білого кольору рівна частці: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20 \cdot 10}{462} \approx 0.4329$

✓ Використання ігор: Застосування настільних ігор, де ймовірнісні події відображаються через правила гри, може полегшити вивчення теорії ймовірностей

✓ Емпіричний підхід: Збір даних та їх аналіз для вивчення статистичних закономірностей учнівського середовища. Наприклад, підрахунок частоти випадкових подій на основі результатів класного опитування. Даний підхід можна застосовувати за такою схемою:

1. Визначте питання або події, що мають стати об'єктом дослідження. Наприклад, це може бути питання про вибір учнів щодо певного улюбленого предмету, хобі, музичного смаку.

2. Проведіть опитування серед учнів класу, де кожен учень надає свої відповіді на поставлені питання. Важливо забезпечити анонімність, щоб збір даних був об'єктивним.

3. Зберіть всі анкети та систематизуйте дані. При цьому кількість випадкових подій (наприклад, кількість учнів, які обрали певний предмет) стає об'єктом подальшого аналізу.

4. Визначте кількість разів, коли певна подія сталася (наприклад, кількість учнів, які вибрали математику), і поділіть це на загальну кількість випробувань (кількість учнів в класі). Отриманий результат є частотою події.

5. Виведіть результати у вигляді діаграм чи таблиць, щоб всі могли краще визначити розподіл відповідей та зрозуміти частоту кожної події.

6. Розгляньте отримані дані разом з учнями. Порівняйте частоти різних відповідей та дайте їм можливість робити висновки щодо уподобань чи тенденцій у класі.

Цей підхід до вивчення ймовірності та статистики через класне опитування дозволяє учням практично застосовувати отримані знання, аналізуючи реальні дані та розуміючи, як робити висновки на основі отриманих результатів.

✓ Візуалізація: Використання графіків, діаграм та інших візуальних засобів для подання ймовірностей і статистичних даних.

✓ Групова робота: Використання групових проектів та завдань для спільного вирішення задач, що стосуються ймовірностей та статистики.

Наприклад, запропонувати учням проект «Експериментальне дослідження кидків кубика», який об'єднає в собі відразу 2 загальні методики, які використовуються: практичні приклади та групова робота.

✓ Застосування реальних ситуацій: Вирішення задач, пов'язаних із реальними ситуаціями, такими як вивчення ймовірності погодних явищ, на основі зібраних даних.

Задача. Учні вивчають ймовірність опадів у своєму регіоні на основі зібраних метеорологічних даних

Етапи вирішення задачі:

1. Збір даних: учні обирають певний період (наприклад, місяць) та збирають метеорологічні дані про кількість опадів щодня.

2. Аналіз даних: учні аналізують зібрані дані, розраховують середню кількість опадів, медіану та інші статистичні параметри.

3. Візуалізація даних: застосовуючи графіки (лінійні графіки, стовпчасті діаграми), візуалізують розподіл опадів протягом вибраного періоду.

4. Ймовірнісний аналіз: вивчають ймовірність виникнення різних метеорологічних умов, таких як дощ, сніг, град, тощо, засновуючись на зібраних даних.

5. Прогноз: використовуючи зібрані дані та набуті знання з ймовірності, учні роблять прогноз погоди на наступний місяць, обґрунтовуючи його статистичною ймовірністю.

6. Представлення результатів: учні створюють презентації, де вони демонструють графіки, викладають статистичні показники, розповідають про свій прогноз та обґрунтування на ймовірнісних підходах.

Цей підхід дозволяє застосовувати здобуті знання з ймовірності до реальних ситуацій, покращуючи їхні аналітичні та візуалізаційні навички, а також розвиваючи вміння робити інформовані прогнози на основі даних.

У сучасній шкільній освіті ймовірнісне обчислення та математична статистика є важливою та цікавою станцією, яка не лише сприяє засвоєнню теоретичних понять, а й розвиває практичні навички та критичне мислення. Застосування та використання методів різних уроків і завдань дозволяє організувати структурований та захоплюючий процес навчання, щоб учні отримали глибоке розуміння матеріалу та застосували його в реальних ситуаціях.

Однією з найважливіших переваг використання ймовірнісних методів є їх здатність реалістично моделювати та аналізувати різноманітні життєві ситуації. Наприклад, завдання, пов'язані з уподобаннями споживачів чи погодними умовами, дозволяють учням застосувати свої теоретичні знання до конкретних сценаріїв, сприяючи їхньому практичному розвитку та розумінню важливості математики в повсякденному житті.

Зокрема, вивчення математичної статистики в школі дає учням можливість не тільки збирати та обробляти дані, а й аналізувати їх і робити обґрунтовані

висновки. Групові проекти, що включають аналіз реальних даних і визначення статистичних параметрів, допомагають розвивати командні навички, співпрацю та обмін інформацією.

Важливим елементом успішного навчання ймовірності та математичної статистики є використання інноваційних методів, таких як візуалізація даних, ігри та практичні ситуації. Це не тільки робить уроки цікавими, а й сприяє кращому розумінню абстрактних понять на конкретних прикладах. [52]

Загалом, існуючі в школі методи розв'язування задач із ймовірності та математичної статистики надають простір для творчості, дозволяючи учням застосовувати та вирішувати свої знання в різних контекстах.

2.5 Використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні теорії ймовірностей та статистики

На сучасному етапі розвитку суспільства інформаційні технології стали невід'ємною частиною життя людини. Прихід сучасних мультимедійних технологій дозволив поставити на потік виготовлення комп'ютерних навчальних інтегрованих середовищ, які через їх освоєння дозволяє дитині в індивідуальному темпі, наочно, з великою мотивацією освоювати ту або іншу предметну галузь.

Сучасні мультимедійні технології надають можливості інтеграції таких важливих передумов для організації навчально-виховного процесу, як мотивація, наочність, індивідуалізація навчальної діяльності, а також організації ефективного моніторингу навчальної діяльності з боку вчителя.

Основним завданням педагогів стає не лише передача готових знань, а викладання методів пошуку, зберігання, вибору, обробки та використання інформації. У сучасному суспільстві, самоосвіта є ключем до освіти та фундаментом для розвитку особистості. Завдяки інформаційним технологіям ці завдання можна успішно вирішувати.

Інформаційні технології широко використовуються в навчальному процесі, служачи засобом доступу до інформації та індивідуалізації навчання. Вони застосовуються для ознайомлення учнів з новим матеріалом, закріплення

та повторення вивченого. Щодо математичних уроків, вони відрізняються від інших своєю специфікою, де важливо не лише теорію, але й багато практики з використанням зошита і ручки.

Сучасні діти позитивно ставляться до використання комп'ютерів і володіють певними навичками в їхньому використанні, що сприяє їхньому навчанню. Наявність розгалуженого асортименту навчального програмного забезпечення дозволяє вчителям вибирати необхідний матеріал для уроків, позакласних та виховних заходів. Завдяки інформаційним технологіям та Інтернету, учні мають можливість спільно працювати над проектами та здобувати доступ до різноманітних джерел інформації, як в країні, так і за її межами.

Інформаційні технології можна використовувати для перегляду презентацій, відео, надання цікавих фактів, проте активне розв'язання завдань на папері залишається ключовим елементом успішності. При цьому, для підтримки інтересу до математики, різноманітності інформації та забезпечення яскравості уроків, використання інформаційних технологій виявляється необхідним, приділяючи увагу мірі та доцільності їхнього застосування.

Проведення уроку з використанням інформаційних технологій дозволяє педагогу перекласти частину своєї роботи на комп'ютер, що робить процес навчання більш цікавим й інтенсивним. Зауважимо, що комп'ютер не замінює вчителя, а тільки доповнює його. Підбір навчальних комп'ютерних програм залежить насамперед від поточного навчального матеріалу й рівня підготовки учнів. Наявність різних програмно-педагогічних розробок надає повну волю творчо працюючому вчителю й дозволяє використати його з різними навчальними програмами й методичними посібниками. [10]

ІКТ можуть бути корисними при навчанні теорії ймовірності та математичної статистики в школі на декількох рівнях.

По-перше, використання візуальних допоміжних засобів може допомогти учням зрозуміти абстрактні концепції ймовірності та статистики. Наприклад, використання інтерактивних діаграм, графіків та анімацій може допомогти

учням побачити, як різні параметри впливають на розподіл ймовірностей та статистичні характеристики.

Деякі з найпоширеніших візуальних лабораторій, які використовують для вивчення теорії ймовірностей:

1. Desmos: безкоштовна веб-платформа для математичної візуалізації, яка надає можливість створювати графіки, таблиці, діаграми та інші типи візуалізацій. Desmos має безкоштовну версію для вчителів та учнів, яка дозволяє створювати

2. GeoGebra: безкоштовна платформа для математичного моделювання, яка дозволяє створювати графіки, таблиці, діаграми, інтерактивні вправи та інші типи візуалізацій. GeoGebra надає безкоштовну версію для вчителів та учнів, яка дозволяла

3. StatCrunch: безкоштовний веб-сервіс для статистичного аналізу, який дозволяє створювати графіки, діаграми та інші типи візуалізацій для статистичних даних. Стат

4. Wolfram Alpha: безкоштовний сервіс для обчислення та візуалізації математичних об'єктів, таких як графіки, таблиц

По-друге, програмне забезпечення, таке як Excel може бути використане для обчислення та візуалізації даних. Це може допомогти учням зрозуміти, як застосовувати теоретичні концепції для аналізу реальних даних.

Excel - потужна електронна таблиця, яку можна використовувати для вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики в школі. Ось деякі способи використання Excel для вивчення цих тем:

1. Створення таблиць даних: Учні можуть створювати таблиці для виконання різноманітних вправ та аналізувати їх, використовуючи вбудовані функції Excel для обчислення середнього значення, медіани, дисперсії, стандартного відхилення та інших статистичних характеристик.

2. Створення графіків: Excel дозволяє створювати різноманітні графіки, які можуть допомогти візуалізувати дані та зрозуміти статистичні залежності між різними змінними. Учні можуть створювати гістограми, діаграми

розсіювання, лінійні графіки та інші типи графіків, щоб проілюструвати різноманітні статистичні концепції, такі як розподіл ймовірностей, кореляція та регресія.

3. Виконання статистичних розрахунків: Excel має вбудовані функції для виконання різноманітних статистичних розрахунків, таких як розрахунок середнього значення, медіани, дисперсії, стандартного відхилення, кореляції, регресії та інших статистичних характеристик.

По-третє, використання інтерактивних задач та ігор може зробити навчання цих тем більш захоплюючим та допомогти учням зберегти інтерес до предмета. [7]

Існує багато інтерактивних задач та ігор, які можна використовувати при вивченні теорії ймовірності та математичної статистики. Ось декілька прикладів:

1. Ігри на кидання кубиків:

Учні можуть грати в ігри, які базуються на киданні кубиків, такі як "Шанс", "Монополія" або "Колесо фортуни". Це допоможе їм зрозуміти концепції ймовірності та ймовірність різних результатів при киданні кубика.

2. Ігри на кидання монетки:

Учні можуть грати в ігри, які базуються на киданні монетки, такі як "Орел і решка". Це може допомогти їм зрозуміти концепції ймовірності та дискретних розподілів.

3. Ігри на випадковий вибір:

Учні можуть грати в ігри, які базуються на випадковому виборі, такі як "Колесо фортуни" або "Рулетка". Це може допомогти їм зрозуміти концепції ймовірності та неперервних розподілів.

4. Ігри на прийняття рішень:

Учні можуть грати в ігри, які базуються на прийнятті рішень, такі як "Уявіть себе мільйонером" або "Хто хоче стати мільйонером?". Це може допомогти їм зрозуміти концепції очікуваної вартості та ризику.

5. Ігри на аналіз даних:

Учні можуть грати в ігри, які базуються на аналізі даних, такі як "Король статистики". Це може допомогти їм зрозуміти, як застосовувати теоретичні концепції для аналізу реальних даних.

По-четверте, використання відеоуроків та онлайн-ресурсів може допомогти учням засвоїти матеріал у своєму власному темпі та дозволити їм повторювати матеріал за потреби.

Існує багато відеоуроків та онлайн-ресурсів, які можна використовувати при вивченні теорії ймовірності та математичної статистики. Ось декілька прикладів:

1. Khan Academy: на сайті є безкоштовні відеоуроки з різних тем, включаючи ймовірність та статистику. Уроки включають в себе як теоретичні пояснення, так і практичні завдання.

2. Coursera: сайт з онлайн-курсами з теорії ймовірності та статистики від провідних університетів світу. Курси можуть бути безкоштовними або платними.

3. edX: на цьому сайті є безкоштовні онлайн-курси з різних тем, включаючи теорію ймовірності та статистику. Курси викладають провідні університети світу.

4. Stat Trek: цей сайт містить безкоштовні уроки з теорії ймовірності та статистики, а також інтерактивні калькулятори та інструменти для аналізу даних.

5. Статистика прискорених курсів: на каналі YouTube є серія коротких відеоуроків з основ теорії ймовірності та статистики.

6. Math Antics: на каналі YouTube є серія відеоуроків, включаючи теми з теорії ймовірності та статистики, призначені для учнів середньої школи.

7. TED-Ed: на каналі YouTube є короткі анімаційні відео, які допомагають зрозуміти теорію ймовірності та статистики.

Ці ресурси можуть бути корисними для учнів та викладачів при вивченні теорії ймовірності та математичної статистики.

Комп'ютер природно вписується в життя школи і є ще одним з ефективних технічних засобів, за допомогою якого можна значно урізноманітнити процес

навчання. Кожне заняття викликає в дітей емоційний підйом, навіть невстигаючі учні охоче працюють з комп'ютером. З іншого боку, цей метод навчання дуже привабливий і для вчителів: допомагає їм краще оцінити здібності й знання дитини, зрозуміти його, шукати нові, нетрадиційні форми й методи навчання.

В цілому, використання ІКТ може допомогти покращити якість навчання теорії ймовірності та математичної статистики в школі, зробити матеріал більш доступним та цікавим для учнів і сприяти їх подальшому розвитку.

2.6. Практичні напрацювання з теми дослідження

Урок 1

Тема: Розв'язування задач з теорії ймовірностей

Мета: Розвивати в учнів навички вирішення нестандартних завдань з визначення ймовірності подій, ґрунтуючись на класичному визначенні ймовірності. Навчати їх застосовувати отримані знання на практиці, сприяючи розвитку логічного мислення. Формувати усвідомлення негативного ставлення до асоціальних явищ, зокрема до азартних ігор, і показувати, що гральний бізнес не є ефективним шляхом для збагачення.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань.

Обладнання: мультимедійний проектор, ноутбук.

Хід уроку

I. Організаційний етап

Привітання з класом. Перевірка домашнього завдання.

II. Мотивація навчальної діяльності

У житті кожен із нас змушений приймати важливі рішення, іноді вирішальним стає вибір правильної відповіді під час зовнішнього незалежного оцінювання. Однак, ще більш відповідальною місією є обрати відповідний вищий навчальний заклад, професію та спеціальність. Це важливий етап, і ймовірність успіху можна розрахувати, використовуючи теорію ймовірностей. Треба зробити цей вибір ретельно, оцінюючи свої можливості та ризики, щоб уникнути помилок і прийняти оптимальне рішення для свого майбутнього.

III. Актуалізація опорних знань

Опитування:

- а). Що вивчає Теорія ймовірностей?
- б). Які є основні поняття теорії ймовірностей? Приклади.
- в). Назвіть основні види подій? Приклади.
- г) Випадкова подія це? Її позначення?
- д). Дайте класичне означення ймовірності.

Розв'язування задач ЗНО з коментуванням:

- а) У квадрат зі стороною 5 км вписано круг. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка квадрата опиниться в середині круга?
- б) Петро і Павло кидають жовтий і синій гральні кубики і кожного разу підраховують суму очок, що випала. Вони домовилися, що у випадку, коли в черговій спробі в сумі випаде 8 очок, виграє Петро, а коли в сумі випаде 7 очок – виграє Павло. Чи є ця гра справедливою?

IV. Отримання нових знань і вмінь.

Історична довідка: Теорія ймовірностей, що стала самостійною наукою в середині XVII століття, виникла на тлі широкого поширення азартних ігор, результат яких був абсолютно випадковим. Серед цих ігор були ігри в кості, «орла» і карткові ігри. Сучасну аналогію можна порівняти з ймовірністю з геометрією, яка стосується землеустрою. Сьогодні теорія ймовірностей має велике значення, як і геометрія, але вже у зв'язку з розв'язуванням задач і задач, пов'язаних з обчисленням ймовірностей. Вирішення проблем цієї науки часто призводить до фактів, які можуть бути дивовижними на перший погляд, але є науково правдивими. Сьогодні на уроці ми будемо працювати над такими цікавими завданнями.

Зараз ми подивимось епізод з фільму „Двадцять одне”, та вирішимо проблему поставлену в ньому хитрим професором Мітом, коли він вибирав команду з найталановитіших молодих математиків для участі в азартних іграх у казино Лас-Вегасу

Перегляд першого епізоду фільму, де анонсується перша складна задача, відома як Задача Монті Холла. Аналіз відео та обговорення.

Тож, класичне формулювання задачі звучить так: Припустимо, що гравцеві пропонують прийняти участь у відомому американському телешоу "Let's Make a Deal", яке веде Монті Холл. Гравець повинен обрати одну з трьох дверей. За двома дверима приховані самокати, а за третьою — головний приз, автомобіль. Ведучий знає, де знаходяться ці призи. Після того, як гравець обирає двері, ведучий відкриває одну з залишених дверей, за якою виявляється самокат, і запропонує гравцеві змінити свій вибір.

Постановка проблемного запитання: „**Чи варто гравцю погодитися з професором Мітом? Чи краще зберегти свій перший вибір?**”

Розв'язання проблеми через дискусію з учнями.

Коментар вчителя: Зазвичай учні розсуджують так: після того, як ведучий відкрив одну з дверей і показав самокат, у гравця залишається вибрати між двома іншими дверима. Машина може знаходитися за однією з них, тому ймовірність вгадати становить $\frac{1}{2}$. Відтак, чи змінювати свій вибір чи ні, не має значення. Однак теорія ймовірностей вказує на те, що змінюючи своє рішення, гравець може збільшити свої шанси на виграш.

Щоб розглянути це знову, давайте повернемося на крок назад. Коли ми вибрали початкову двері, ми поділили всі двері на три частини: ті, які ми обрали, і дві решту. Ймовірність того, що за обраними дверима є автомобіль, становить $\frac{1}{3}$; отже, ймовірність того, що автомобіль знаходиться за однією з двох залишених дверей, становить $\frac{2}{3}$. Коли ведучий показує, що за однією з цих дверей – самокат, виявляється, що ці $\frac{2}{3}$ ймовірності залишаються за іншою дверима. Таким чином, вибір гравця сводиться до двох дверей, за однією з яких (початково обраною) автомобіль знаходиться з ймовірністю $\frac{1}{3}$, а за іншою - з ймовірністю $\frac{2}{3}$.

Під час перегляду другого епізоду фільму в заключний момент прозвучали слова професора Міта: "Завдяки простим математичним розрахункам він здобув собі новенький автомобіль!

Постановка другого проблемного завдання. **Чи є твердження професора вірним?**

Дискусія. Висловлення учнів, що зміна свого вибору не анулює того факту, що з самого початку гравець може обрати двері, за якими знаходиться автомобіль, і зміна вибору призводить до втрати головного призу, вказує на те, що професор не правий, стверджуючи, що студент виграв новий автомобіль.

Застосування учнями знань і способів дії

1. Розв'язання задачі „Парадокс: хлопчик та дівчинка”

Цей парадокс був представлений математиком Мартіном Гарднером і сформульований наступним чином: "Містер Сміт має двох дітей, принаймні одне з яких - хлопчик. Яка ймовірність того, що і другий також хлопчик?". Хоча на перший погляд завдання здається простим, при ретельному аналізі виявляються цікаві обставини: правильна відповідь залежатиме від підходу до розрахунку ймовірності статі іншої дитини.

Учні пропонують декілька варіантів розв'язку:

А) Варіант 1. Розглянемо всі можливі комбінації в сім'ях з 2 дітьми:

- Дівчинка - Дівчинка
- Дівчинка - Хлопчик
- Хлопчик - Дівчинка
- Хлопчик - Хлопчик

Варіант *дівчинка- дівчинка* ми не можемо використовувати за умовою завдання. Тому для родини містера Сміта може бути три рівноймовірні сценарії, що означає, що ймовірність того, що інша дитина також буде хлопчиком, становить $\frac{1}{3}$. Саме таку відповідь Гарднер вказав спочатку.

Б) Варіант 2. Припустимо, що ми зустріли містера Сміта на вулиці, коли він прогулюється зі своїм сином. Яка ймовірність того, що друга дитина також є хлопчиком? Оскільки стать другої дитини ніяк не залежить від статі першої, ймовірність цього (і правильна відповідь) є $\frac{1}{2}$.

Коментар вчителя:

Чому це відбувається, коли нічого не змінилося? Все залежить від того, як ми підходимо до обчислення ймовірності. У першому випадку ми розглядали всі можливі варіанти для родини Сміта. У другому випадку ми розглядали всі сім'ї, в яких обов'язково є один хлопчик. Підрахунок ймовірності статі другої дитини

проводився за умови (в теорії ймовірностей це відомо як "умовна ймовірність"), що призвело до відмінного від першого результату.

VI. Підведення підсумків уроку:

На перший погляд завдання, які ми розв'язували на уроці, здаються досить простими. Однак при їх вирішенні можна отримати результати, які неможливо передбачити заздалегідь, але ці результати науково підтверджені. Важливо відзначити, що великі виграші в картковій грі не принесли головному героєві фільму ніякої матеріальної вигоди. Його участь в азартних іграх призвела до тюремного ув'язнення. Рекомендую учням переглянути фільм «Двадцять один» повністю.

VII. Рефлексія.

Як ви вважаєте, чи потрібно саме так використовувати свої здібності?

Урок 2

Тема: Елементи математичної статистики

Мета: закріпити та поглиби отримані раніше знання про основні елементи математичної статистики, розвинути вміння розв'язувати задачі з урахуванням математичної статистики, виховувати інтерес до вивчення математики.

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

Привітання. Перевірка присутніх на уроці

II. Актуалізація опорних знань

Учні вже ознайомилися з основними концепціями статистики, такими як статистика, статистичне спостереження, вибірка, генеральна сукупність, обсяг генеральної сукупності та обсяг вибірки, а також чисельні характеристики вибірки, такі як середнє значення, мода і медіана. Вони також вивчили різні методи подання даних, такі як діаграма (стовпчаста та гістограма) та кругова

діаграма. Тому можна провести бесіду, під час якої визначити, які аспекти вони краще усвоїли і на що слід акцентувати увагу.

III. Вивчення нового матеріалу

Означення статистики

- Чи є вигідним орендувати простір великий розмір для проведення концерту?

- Який обсяг друкування книги вважати оптимальним?

- Чи однакова ймовірність народження хлопчика чи дівчинки?

Статистика стане корисним інструментом у відповіді на ці та інші питання.

Математична статистика вивчає методи збирання, обробки та інтерпретації різноманітних даних.

Розглянемо на прикладі основні елементи мат. статистики

Вибірка

№1 Опитавши 19 дітей, що прийшли на підготовку до ЗНО, скільки часу вони витратили на шлях до аудиторії, отримали наступні результати: 5, 15, 40, 70, 10, 30, 60, 15, 40, 90, 40, 30, 10, 40, 60, 30, 60, 30, і 15 хв

- Після отримання відповідей на питання ми отримуємо послідовність чисел, яку називаємо вибіркою.

- При упорядкуванні цієї числової послідовності за зростанням отримуємо варіаційний ряд (або ранжований ряд, коли говоримо про розташування випадкових величин).

- Кількість елементів у вибірці називається об'ємом вибірки.

- Кожен окремий елемент вибірки називається її варіантом.

Питання: Чи завжди можна дослідити множину всіх об'єктів, що потребують дослідження? (Висловлення особистого погляду учнів)

Генеральна сукупність – це сукупність усіх об'єктів, що підлягають дослідженню.

Характеристики варіаційних рядів

Середнє значення вибірки \bar{x} – це середнє арифметичне усіх її варіант:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Середнє значення для нашої вибірки:

$$\bar{x} = \frac{5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 30 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 70 + 90}{19} \approx 36,3$$

Медіана вибірки Me

$$\{5, 10, 10, 15, 15, 15, 30, 30, 30, \mathbf{30}, 40, 40, 40, 40, 60, 60, 60, 70, 90\}$$

9 елементів
9 елементів

Медіана вибірки Me – це число, що ділить відповідний варіаційний ряд навпіл

Як розрахувати медіану вибірки, коли у варіаційному ряді є парна кількість елементів?

$$\{3, 15, 27, \mathbf{42, 44}, 44, 87, 88\}$$

В цьому випадку, медіаною вибірки вважається середнєарифметичне 2-х чисел, що розташовані посередині цього варіаційного ряду:

$$Me = \frac{42 + 44}{2} = 43$$

Як визначити медіану вибірки, коли елементами варіаційного ряду є не числа і ряд має парну кількість елементів?

(У такому випадку медіаною вибірки є будь-який з двох елементів, розташованих посередині. Наприклад, якщо у нас є ряд оцінок за шкалою ECTS: F, E, E, E, E, C, C, B, B, A, то медіаною цієї вибірки буде оцінка E або C.)

Мода вибірки Mo

➤ Як ви вважаєте, як комфортніше подати інформацію варіаційного ряду? Чи можна зробити статистичну таблицю?

5	10	15	30	40	60	70	90
1	2	3	4	4	3	1	1

Що є модою цього ряду?

$$M_{O_1} = 30 \text{ хв}$$

$$M_{O_2} = 40 \text{ хв}$$

Розмах вибірки R – це різниця між найбільшим і найменшим значенням вибірки.

5	10	15	30	40	60	70	90
1	2	3	4	4	3	1	1

Обчисліть розмах вибірки

$$R = 90 - 5 = 85$$

Досліджуючи популярність артиста, ми опитали всіх присутніх на його концерті. Однак, чи можна вважати отримані висновки об'єктивними? (Такі висновки можуть бути необ'єктивними, оскільки ті, хто прийшли на концерт, могли зробити це через вже існуюче симпатії до артиста.)

Отже, для об'єктивних висновків нам необхідна репрезентативна вибірка, оскільки збір даних повинен враховувати не лише масовість, а й різноманітність особливостей. Репрезентативна вибірка характеризується тим, що в ній представлені всі основні ознаки генеральної сукупності у відповідних пропорціях та частотах.

Статистична та математична ймовірності

Якою є математична ймовірність народження хлопчика?

$$P = \frac{1}{2} = 0,5$$

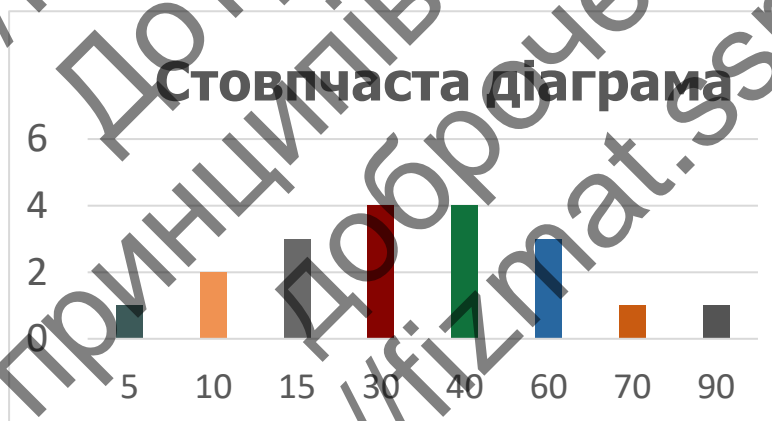
Розглядаючи таблицю народжуваності в Києві за 2005 рік, можна зазначити, що статистична ймовірність відрізняється від математичної. Ймовірність народжуваності хлопчиків за статистикою трошки перевищує ймовірність народжуваності дівчаток і слабо відрізняється від відомого числа в демографії, яке складає 0,518.

Місяць	Загальна кількість	Хлопчики	Частота народжуваності	Дівчатка	Частота народжуваності
1	1396	711	0,509312	685	0,490688
2	1254	659	0,525518	595	0,474482
3	1361	702	0,515797	659	0,484203
4	1301	664	0,510377	637	0,489623
5	1440	758	0,526389	682	0,473611
6	1462	762	0,5121204	700	0,478796
7	1587	811	0,511027	776	0,488973
8	1617	849	0,525046	768	0,474954
9	1321	699	0,529145	622	0,470855
10	1528	771	0,504581	757	0,495419
11	1465	748	0,51058	717	0,48942
12	1332	698	0,524024	634	0,475976
Усього	17064	8832	0,517581	8232	0,482419

Методи подання даних

Щоб зробити інформацію про вибірку більш зрозумілою, можна використовувати графічні засоби. Давайте розглянемо на прикладі нашої задачі найпоширеніші методи візуалізації даних:

1. Стовпчаста діаграма



2. Полігон частот



3. Секторна діаграма



Розв'язування задач

Задача №1

Нехай заробітна плата в області знаходиться від 3 000 – 250 000 грн (3k; 3.2k; 4k; 7,5k; 10k; 3k; 3,3k; 250 000k; 4.5k). Знайдіть середню заробітну плату.

Знаходимо середнє значення вибірки, тоді середня зарплатня жителя області приблизно 32 000 грн:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3k + 3,2k + 4k + 7,5k + 10k + 3,3k + 250k + 4,5k}{9} \approx 32k$$

Знаходимо медіану варіаційного ряду, тоді середня плата пересічного жителя області приблизно 4 000 грн:

{3k; 3k; 3.2k; 3,3k; 4k; 4.5k; 7,5k; 10k; 250k; }

Задача №2

На свята до нового року ви купили цукерок: 2 кг по 980 грн, 4 кг по 450 грн і 8 кг по 350 грн. За якою середньою ціною Ви купили всі цукерки?

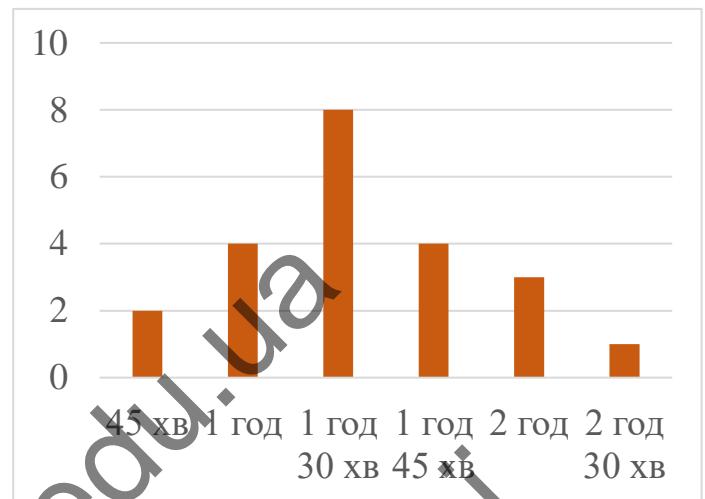
Середнє значення вибірки:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 980 + 4 \cdot 450 + 8 \cdot 350}{14} \approx 469 \text{ грн}$$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

Приклад 1.

Серед учнів та учениць 10 класу провели опитування щодо часу, який вони щодня проводять на свіжому повітрі. Графічні результати опитування представлені на діаграмі, зображеній на рисунку.



Скористаємося цією інформацією для визначення розмаху, середнього значення та моди даної вибірки.

Розв'язання:

Розмах:

$$R = 150 - 45 = 105$$

Середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 45 + 4 \cdot 60 + 8 \cdot 90 + 4 \cdot 105 + 3 \cdot 120 + 1 \cdot 150}{22} = \frac{1980}{22} = 90 \text{ хв}$$

Мода:

$$M_0 = 1 \text{ год } 30 \text{ хв}$$

Приклад №2

У чемпіонаті України з футболу 2017-2018 рр. команда «Шахтар», що стала чемпіоном України, зіграла 32 матчі, у яких двічі забила 5 голів, 3 рази – 4 голи, 9 разів – 3 голи, 8 разів – 2 голи, 6 разів – один гол і в 4 матчах не забила жодного гола. Обчисліть середню кількість м'ячів, яку команда «Шахтар» забивала в одному матчі.

Розв'язання:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0}{32} = \frac{71}{32} \approx 2,2$$

Відповідь: $\approx 2,2$ м'яча за гру

Приклад 3.

Телефонна компанія прагне з'ясувати, скільки телефонних дзвінків здійснює кожна особа протягом доби. Дані щодо 100 осіб відображені на



діаграмі. Проведемо обчислення для визначення розмаху, середнього значення, медіани та моди цієї вибірки.

Розв'язок:

$$R = 11 - 0 = 11$$

$$\bar{x}$$

$$= \frac{14 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 14 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 3 \cdot 10}{100}$$

$$=$$

$$= \frac{10 + 30 + 40 + 60 + 90 + 98 + 64 + 72 + 30 + 11}{100} = \frac{505}{100} = 5,05$$

$$M_o = 6$$

$$M_e = 5$$

Відповідь: $R = 11$; $M_o = 6$; $M_e = 5$;

V. Підведення підсумків уроку

Що є варіаційним рядом?

Що є об'ємом вибірки?

Що є середнім значенням вибірки?

Що є медіаною вибірки?

Що є модою вибірки?

Висновки до розділу 2

Вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики є важливою складовою математичної освіти. У сучасних вчителів математики вже є значний набір потужних комп'ютерних інструментів. Проте питання методичного супроводу та особливостей їх застосування залишається актуальним через постійне оновлення програмного забезпечення, вдосконалення комп'ютерного інструментарію та розширення можливостей інформаційних систем. Методичні вказівки до даної теми допомагають учням краще розуміти та застосовувати концепції в їх практичній діяльності. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) на уроках навчання може значно покращити процес засвоєння матеріалу.

Використання ситуацій реального світу при вивченні теорії ймовірностей та статистики дозволяє учням бачити математику в контексті їхнього повсякденного життя. Завдання, пов'язані з погодою, споживчими вподобаннями чи експериментами з кубиками, не лише викликають інтерес до предмету, а й допомагають учням застосувати отримані знання на практиці.

Використання візуальних методів, таких як графіки та діаграми, допомагає учням розвивати навички візуалізації та аналізу даних. Ці інструменти не тільки полегшують вивчення складних понять, але й дозволяють краще розуміти та порівнювати результати, що важливо для отримання обґрунтованих висновків.

Групові проекти та завдання сприяють розвитку комунікації та навичок роботи в команді. Вони дозволяють учням обмінюватися ідеями, співпрацювати над аналізом даних і разом вирішувати проблеми. Це важливо не тільки для успішного вивчення предмету, а й для розвитку навичок командної роботи, що стане в нагоді в подальшому навчанні та роботі.

Вивчення ймовірності та статистики в школі дає учням не лише теоретичні знання, а й практичні інструменти для розв'язання реальних проблем. Здатність застосовувати математичні методи для аналізу даних, прийняття рішень і роботи з ймовірностями стає важливою компетенцією в сучасному світі. Вивчення

ймовірності та математичної статистики сприяє розвитку критичного мислення учнів. Вони навчаються оцінювати інформацію, робити обґрунтовані висновки та визначати невизначеності та ризики, що є важливими навичками в сучасному інформаційному суспільстві.

Тому вивчення ймовірності та математичної статистики в школі є важливим і цікавим етапом у розвитку математичної грамотності та розвитку ключових навичок, які згодом стануть у нагоді учням. Надаючи практичні інструменти для аналізу даних і прийняття обґрунтованих рішень, ці методології готують студентів до викликів сучасного світу, де математика відіграє значну роль у різних сферах життя.

<http://fizmat.ssru.edu.ua>
Дотримуйтесь
принципів академічності
Доброї чесності
<http://fizmat.ssru.edu.ua>

ВИСНОВКИ

У ході нашого дослідження, опрацювання наукової, навчальної та методичної літератури з теорії ймовірностей і математичної статистики виявилось важливим етапом. Систематизація отриманих знань в результаті аналізу статей, монографій та підручників надала глибоке і всеосяжне уявлення про стан сучасних досліджень у цій науковій галузі. Літературний огляд дозволив виявити еволюцію підходів до вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, починаючи від класичних концепцій до сучасних тенденцій. На основі цього огляду вдалося визначити ключові аспекти, які потребують уваги в контексті педагогічного процесу в школі.

Окрім того, опрацювання літератури дозволило визначити прогалини у сучасних методиках викладання та виявити необхідність удосконалення навчальних програм та підручників. Це відкриває можливості для подальших досліджень та розвитку нових підходів до викладання теорії ймовірностей та математичної статистики в системі освіти.

Аналіз методик викладання теорії ймовірностей в основній школі виявив важливі етапи, які формують теоретичні знання учнів та готують їх до вивчення цієї складної галузі математики. На підставі цього аналізу стає очевидним, що вироблення ефективних методів введення учнів у теорію ймовірностей має ключове значення для успішного засвоєння матеріалу та розвитку їх математичної компетентності. Цей аналіз підкреслив необхідність створення ефективних методик, які враховують індивідуальні особливості учнів, стимулюють їх інтерес та активність у вивченні теорії ймовірностей. Розробка таких методик є ключовим елементом вдосконалення процесу навчання математики в основній школі та сприяє формуванню високої математичної грамотності серед учнів.

Аналіз діючих навчальних програм та підручників з математики, зокрема теорії ймовірностей та математичної статистики, виявив ряд проблем та

наголосив на необхідності проведення оновлення змісту та методичної обґрунтованості.

Відзначається, що в певних програмах та підручниках недостатньо акцентується увага на практичних застосуваннях ймовірнісних та статистичних концепцій. Також, важливо забезпечити більшу доступність додаткових ресурсів, наприклад, онлайн-матеріалів, які можуть допомогти учням глибше розуміти складні математичні концепції. Це розширює можливості самостійного навчання та дозволяє краще враховувати різноманітні стилі навчання учнів.

Дослідження завдань зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики виявилось ключовим етапом у визначенні акцентів та особливостей, які враховуються при оцінці математичної підготовки учнів. Визначено, що ймовірнісно-статистичні завдання є невід'ємною частиною екзаменаційних тестів з математики. Це свідчить про визнання важливості розуміння ймовірності та статистики як ключових аспектів математичного освітнього стандарту. Учасники ЗНО повинні демонструвати здатність застосовувати теорію ймовірностей та основи статистики для вирішення реальних проблем, що відображає не лише їхні теоретичні знання, але й практичні навички використання цих концепцій.

Виявлення методичних особливостей навчання є ключовим етапом в оптимізації процесу передачі знань та вмінь учням. Результати нашого дослідження наголошують на необхідності індивідуального підходу до навчання теми, а саме теорії ймовірностей та математичної статистики.

Перш за все, виявлені особливості наголошують на різних темпах та стилях навчання учнів. Додатково, дослідження підкреслює важливість врахування різних ступенів підготовленості учнів та їхніх індивідуальних особливостей. Деякі учні можуть виявляти більшу зацікавленість у візуальних аспектах математики, тоді як інші можуть бути більш схильні до абстрактного мислення. Врахування цих різниць дозволяє вчителям створювати належні умови для кожного учня та підвищує ефективність навчання.

Також, виявлення методичних особливостей вказує на важливість використання різноманітних педагогічних підходів. Це може включати в себе використання інтерактивних методів, групової роботи, використання візуальних засобів та інших педагогічних інструментів. Застосування різноманітних методів не лише робить процес навчання більш захоплюючим, але і дозволяє учням краще засвоювати складний матеріал.

Дослідження можливостей використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в навчанні визначило ряд переваг та можливостей, які сприяють створенню сучасних та ефективних методів викладання. Також, ІКТ можуть полегшити співпрацю між учнями та вчителями, створюючи віртуальні простори для обміну інформацією та дискусій. Це розширює можливості колективного навчання та сприяє взаємодії між учасниками освітнього процесу.

Проведені нами дослідження підтверджують важливість включення теорії ймовірностей та математичної статистики в шкільний курс математики. Ці дві теми виявляються не лише ключовими для розвитку математичних навичок учнів, але й сприяють формуванню їхньої здатності застосовувати математичні концепції у реальному житті. Висвітлюючи ці аспекти, дослідження вказує на важливість і актуальність вивчення цих тем у шкільному курсі математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К. : ЦУЛ, 2002. – 448 с
2. Бевз Г.П. , Бевз В.Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Освіта, 2017. – 271 с.
3. Бевз Г.П. , Бевз В.Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Освіта, 2019. – 272 с.
4. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. – К.: ВД «Професіонал», 2007. – 560 с.
5. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. - К.:ВД «Професіонал», 2007. - 560 с.
6. Бондар К.В. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу “ІТМ*плюс - 2022 Форум молодих дослідників”: матеріали III Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. - Суми: Вид-во СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2022. - С. 62.
7. Бондар К.В. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу “ІТМ*плюс - 2023 Форум молодих дослідників”: матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. - Суми: Вид-во СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2023.-С.
8. Бродський Я. Вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей, статистики / Я. Бродський / Математика. – 2006. – №16. – С. 8-18
9. Бродський Я. Імовірісно-статистична змістова лінія в старшій школі / Я. Бродський, О. Павлов // Математика в школах України. – 2008. – №4. – С. 2-9.
10. Вивальнюк Л.М. Посібник для шк. та кл. з поглибл. вивченням математики / Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач, О.І. Соколенко та ін. – К.: Освіта.1998.– 301с. виконання лабораторних робіт (комп’ютерного практикуму)

з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». – К.:НТУУ «КПІ». – 2016.– С.8-9.

11. Волков Ю. І. Початки стохастики: Навчальний посібник Ю. І. Волков, Н.М. Войналович. – Кіровоград, 2008. – 168 с.

12. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник [для самот. вивч. дисц.] / А.Б.Волощенко, І.А. Джалладова - К.: КНЕУ, 2003. - 256 с.

13. Воскобойніков Ю.Є., Тимошенко І.Э. Математична статистика (з прикладами в Excel): навч. посібник. // Вирішення задач математичної статистики в табличному процесорі Excel. – Новосибірськ: НГАСУ (Сібстрін), 2006. – С. –11-12

14. Єжов С.М. Теорія ймовірностей, математична статистика і випадкові процеси: Навчальний посібник / С.М. Єжов. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2001. - 140 с

15. Єжов С.М. Теорія ймовірностей, математична статистика і випадкові процеси: Навчальний посібник. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2001. – 140 с.

16. Жалдак М. І. Стохастика. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, І. М. Біляй. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – 304 с

17. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник [для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів].– Полтава : "Довкілля-К", 2009. – 500 с.

18. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

19. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник: У 2-х ч. – Ч.І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

20. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник: У 2-х ч. – Ч.ІІ. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с
21. І.О. Мельник, Т.С. Мельник "Математика: вивчення і викладання" – 2008.-225с
22. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів
Істер О.С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень
23. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посібник. — К.: Центр учбової літератури, 2007 — 576 с.
24. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач: Навч. посібник. – Київ: Центр учбової літератури. Київ : Генеза, 2017. – 264 с.
25. Крамаренко Т. Г. Забезпечення компетентнісного підходу у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики майбутніх учителів фізики / Т. Г. Крамаренко // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць / Редрада. - Київ, 2018. - № 20(27). - С. 50- 56
26. Кушлик-Дивульська О.І , Кушлик Б.Р. Методичні вказівки до Кушлик-Дивульська О.І , Кушлик Б.Р. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт (комп'ютерного практикуму) з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» студ. Видавн.-полігр. ін.-ту/ Укл. – К.: НТУУ «КПІ». – 2016. – С. – 8-9.
27. Л.І. Карпенко, Л.В. Карпенко "Навчання математики в інформаційному суспільстві: підручник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів" – 2007.-370с
28. Лекція методика навчання математики як наука і як навчальна дисципліна в педвузі [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://refdb.ru/look/2929516-pall.html>

29. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Харків: Гімназія, 2017. – 272 с.

30. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. Для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. –Х.: Гімназія, 2019. — 208

31. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики :підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Харків : Гімназія, 2017. – 416 с.

32. Методичні вказівки для практичних, самостійних та контрольних робіт з теорії ймовірностей та математичної статистики [Електронний ресурс]//– Режим доступу: http://eprints.kname.edu.ua/11312/1/M_Укр_Теор_Вер_Статист.pdf

33. Методичні вказівки для практичних, самостійних та контрольних робіт з теорії ймовірностей та математичної статистики [Електронний ресурс]//– Режим доступу: http://eprints.kname.edu.ua/11312/1/M_Укр_Теор_Вер_Статист.pdf

34. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>

35. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi>

36. Навчальна програма з математики для Учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>

37. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]

– Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>

38. Навчальна програма з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>

39. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Ранок, 2019. – 240 с.

40. Овчинников П.П. Вища математика : підручник у 2 ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчик, В.М. Михайленко; за заг. ред. П.П. Овчинникова; пер. з рос. П.М. Юрченка. – 3-тє вид., випр. – К. : Техніка, 2003. – 600 с.: іл

41. Офіційні звіти проведення зовнішнього незалежного оцінювання з математики.. [Електронний ресурс].- Режим доступу: <https://testportal.gov.ua/ofzviti/>

42. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: навчальний посібник / за ред. Р. К. Чорнея. Київ: МАУП, 2003. 328 с.

43. Про структуру навчального року та навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/plany/list_struktura.pdf. – Назва з екрану. – Мова укр.

44. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <https://testportal.gov.ua/progmath/>

45. Проект державного стандарту базової середньої освіти. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/news/ministerstvo-osviti-i-nauki-ukrayini-proponuyedlya-gromadskogo-obgovorennya-proyekt-derzhavnogo-standartu-bazovoyi-serednoyiosviti>

46. Пушак Я. С., Лозовий Б. Л. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: навчальний посібник. Львів: УАД, 2006. 428 с

47. Свердан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. –К: Знання, 2008. – 450 с.

48. Свєрдан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. –К: Знання, 2008. – 450 с.

49. Скороход А.В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках // У світі математики. – 1997. – Т. 3, Вип. 2. – С. 24-43.

50. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів. – Київ.,2000. – 512с.

51. Тарасєнкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. – К.: УОВЦ «Оріон», 2017.– 272 с.

52. Тичинська Л. М. Теорія ймовірностей. Ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості : навчальний посібник. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 112 с.

<http://fizmat.ssru.edu.ua>
Дотримуйтесь
принципів академічності
Доброї чесності
<http://fizmat.ssru.edu.ua>