

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

**Щебетенко Антон Ігорович**

**РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ ШКОЛЯРІВ  
У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота  
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

\_\_\_\_\_ О.С. Чашечникова,  
доктор педагогічних наук, професор,  
завідувач кафедри математики, фізики  
та методик їх навчання

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 року

Виконавець:

\_\_\_\_\_ А.І. Щебетенко

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 року

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ .	7
1.1. Сутність поняття «критичне мислення» в структурі soft skills.....	7
1.2. Психологічні особливості сучасних старших підлітків у контексті дослідження .....	17
1.3. Урок розвитку критичного мислення.....	23
1.4. Прийоми розвитку критичного мислення учнів.....	27
Висновки до першого розділу.....	34
РОЗДІЛ II. РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ .....	36
2.1. Задача зі стереометрії як засіб до розвитку критичного мислення учнів..	36
2.2. Використання комп'ютерного експерименту для розвитку критичного мислення у процесі навчання стереометрії .....	46
2.3. Уроки розвитку критичного мислення «Теорема про три перпендикуляри» з комп'ютерною підтримкою, «Двогранний кут. Перпендикулярність площин» (10 клас).....	53
Висновки до другого розділу.....	77
ВИСНОВКИ.....	78
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	80

## ВСТУП

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Стрімкий розвиток цифрового суспільства, соціальні зміни, зростання обсягу інформації – всі ці чинники впливають на систему знань та вмінь, якими повинен володіти випускник Нової української школи. Він має бути здатним об'єктивно оцінювати різноманітні явища, процеси, самостійно, продуктивно мислити, генерувати оригінальні ідеї, приймати нестандартні рішення, оскільки суспільство потребує творчого, активного, конкурентоспроможного фахівця з гнучкою, мобільною соціальною поведінкою.

У Державному стандарті базової середньої освіти наскрізним в усіх ключових компетентностях є вміння критично і системно мислити [16]. У Концепції Нової української школи наголошується на наявності у випускника високого рівня критичного мислення [21], яке потрібно розвивати засобами всіх предметів, зокрема, математики, оскільки даний предмет має високий потенціал у векторі розвитку критичного мислення. Тому мета роботи учителя математики на уроці математики, зокрема стереометрії, полягає у формуванні в учнів умінь спостерігати, міркувати, аналізувати, робити аргументовані висновки і на їх основі приймати рішення, що є складовими вміннями критичного мислення.

В українській педагогічній науці ідея розвитку критичного мислення не нова, але потреба пошуку шляхів розвитку критичного мислення сучасних учнів залишається актуальною. Дану тезу підтверджує аналіз результатів проходження учнями зовнішнього незалежного оцінювання, національного мультипредметного тесту (блок математики) та міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022 (математична галузь) [35], які засвідчують, що причиною незадовільного результату часто є не відсутність програмових знань учнів з математики, а нездатність школяра самостійно проаналізувати умову завдання, осмислити її, скласти план розв'язування задачі, знайти оптимальний спосіб розв'язання, спираючись на власний досвід, тобто здійснити ту розумову діяльність, яка визначає здатність людини критично мислити.

Аналіз останніх досліджень та публікацій теми, її недостатня прикладна розробленість з урахуванням сучасних реалій зумовили вибір теми кваліфікаційної роботи «**Розвиток критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії**».

**Мета і завдання дослідження** – дослідити шляхи розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії.

Згідно з метою дослідження було визначено такі **завдання**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну, науково-методичну літературу з проблеми розвитку критичного мислення школярів в процесі навчання стереометрії.

2. Проаналізувати програму і підручники геометрії у контексті дослідження

3. Дослідити особливості використання ефективних шляхів розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії.

4. Дослідити можливості використання цифрових технологій з метою розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії.

**Об'єктом** дослідження є процес навчання стереометрії у старшій школі.

**Предметом** дослідження є шляхи розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії.

**Методи дослідження.** Для досягнення мети та реалізації поставлених завдань було використано наступні методи:

- теоретичні: вивчення, аналіз і узагальнення психолого-педагогічної, науково-методичної літератури щодо визначення науково-теоретичних засад розвитку критичного мислення учнів старших класів та з метою обґрунтування найефективніших шляхів розвитку критичного мислення на уроках стереометрії;

- емпіричні: цілеспрямоване спостереження за освітнім процесом на уроках стереометрії у старших класах, вивчення і узагальнення педагогічного досвіду для обґрунтування ефективності методичних прийомів і засобів розвитку критичного мислення школярів в процесі навчання стереометрії.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у розробці методичних розробок щодо розвитку критичного мислення школярів при розв'язуванні стереометричних задач.

Отримані результати дослідження можуть бути використані вчителями математики для спрямованості на розвиток критичного мислення у процесі навчання стереометрії старшокласників.

**Апробація результатів дослідження та публікації.** Основні положення і висновки дослідження висвітлено у публікаціях «Розвиток критичного мислення школярів у процесі вивчення стереометрії» у матеріалах Студентської звітної конференції за результатами наукових досліджень молодих науковців (Суми, СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023) [56] та «Методи розвитку критичного мислення школярів у процесі вивчення стереометрії» у матеріалах Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, НУЧК імені Т.Г. Шевченка) [57].

**Структура та обсяг магістерської роботи.** Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

У вступі визначено актуальність роботи, визначено об'єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Теоретичні засади розвитку критичного мислення» розкрито сутність поняття «критичне мислення», акцентовано роль критичного мислення в структурі soft skills, виділено компоненти критичного мислення в контексті навчання математики; описано психологічні особливості сучасних старших підлітків з позиції розвитку критичного мислення; сформульовано особливості уроку розвитку критичного мислення; виокремлено прийоми розвитку критичного мислення.

У другому розділі «Розвиток критичного мислення учнів на уроках стереометрії» розглянуто задачі зі стереометрії як засоби розвитку критичного мислення, подано їх типологію; описано особливості використання цифрових технологій при організації комп'ютерного експерименту з метою розвитку

критичного мислення; запропоновано розробку уроків з розвитку критичного мислення «Теорема про три перпендикуляри», «Двогранний кут. Перпендикулярність площин» (10 клас) .

Загальний обсяг магістерської роботи – 85 сторінок. Список використаних джерел включає 57 найменувань. У тексті міститься 87 рисунків та 3 таблиці.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей та вчителям математики закладів загальної середньої освіти.

<http://fizmat.ssru.edu.ua>  
Дотримуйтесь  
принципів академічної  
доброчесності  
<http://fizmat.ssru.edu.ua>

## РОЗДІЛ І

### ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ

#### 1.1. Сутність поняття «критичне мислення» в структурі soft skills

Входження України у світовий освітній простір вимагає модернізації системи освіти, зміни її орієнтирів на особистісний розвиток учнів та розвитку в них так званих «навичок майбутнього» або soft skills. У науковій літературі [26] можна зустріти синонімічні терміни «гнучкі навички», «м'які навички», «соціальні навички», «навички успішності», «навички XXI століття» тощо, але на думку Н. А. Тарасенкової, яку ми поділяємо, доцільно вживати англomовний термін «soft skills», оскільки складова синонімічних термінів «навичка» не відображає суті цього поняття: «у даному понятті йдеться про комплекс певних знань (чи інтуїтивних, невербалізованих передзнань), умінь, досвіду, ставлень, який як цілісність апріорі не може набути якості автоматизму (вродженого чи набутого), оскільки в численних проявах і застосуваннях нерідко передбачає розгортання цілої діяльності, її свідомого та підсвідомого (чи надсвідомого) супроводу й почасти вербалізації принаймні окремих її фрагментів» [47].

На Всесвітньому економічному форумі в 2018 році було визначено десять провідних soft skills як «комплекс неспеціалізованих, важливих для кар'єри надпрофесійних здатностей, які відповідають за успішну участь у робочому процесі, високу продуктивність і є наскрізними, тобто не пов'язані з конкретною предметною областю. Це здатність вирішувати складні проблеми, критичне мислення, креативність, навички управління людьми, навички міжособистісного спілкування, емоційний інтелект, здатність робити висновки та приймати рішення, орієнтованість на клієнта, навички ведення переговорів, здатність легко та швидко навчатися новому» (рис.1.1) [5].

## Top 10 skills of 2025



Рис.1.1. Десять провідних soft skills за даними Всесвітнього економічного форуму (2018 р.)

Узагальненням цих десяти провідних soft skills є «Four Cs» (Collaboration, Communication, Creativity, Critical thinking) – «Система 4К» (Колаборація, Комунікація, Креативність, Критичне мислення) (рис. 1.2) [1].

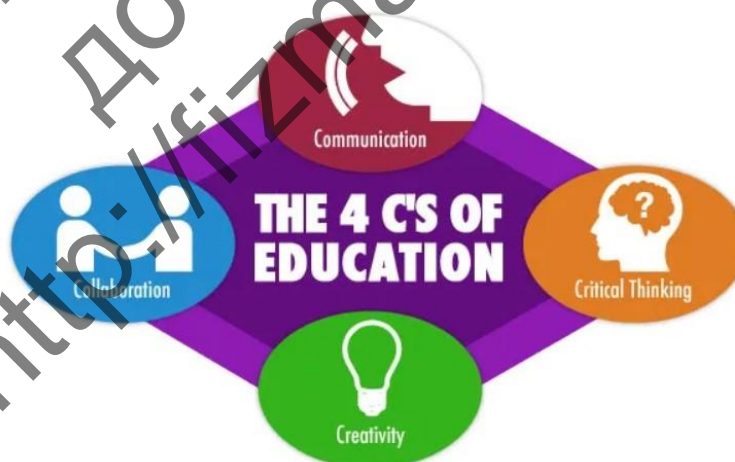


Рис.1.2. «Система 4К» (Колаборація, Комунікація, Креативність, Критичне мислення)



Важливо, що дослідники L. Lippman, R. Ryberg, K. Carney та A. Moore [3] поділяють soft skills на п'ять груп: «розумові (когнітивні) здатності (критичне мислення (цікаво для нас у контексті дослідження), навички вирішення проблем, інноваційне мислення, управління інтелектуальним навантаженням, навички самоосвіти, інформаційні навички); соціальні здатності (міжособистісні навички, групова робота, лідерство, соціальний інтелект, відповідальність,); комунікативні здатності (комунікативні навички, етика спілкування); здатності самоконтролю (здатність контролювати імпульси, спрямовувати та зосереджувати увагу, керувати емоціями та регулювати поведінку, тайм-менеджмент); здатності позитивної самооцінки (емоційний інтелект, емпатія)». Як бачимо критичне мислення називається однією з перших м'яких навичок.

Значну увагу науковців та практиків Дрозда Ю., Кочерги О., Кудряшова О. у галузі освіти привертає сьогодні проблема невідповідності результатів навчання у закладах загальної середньої освіти, які зосереджуються на традиційному навчанні та набутті випускниками hard skills, і вимогами сучасності, коли увага приділяється рівню розвитку softs kills молодого покоління.

Аналізуючи досвід роботи вчителів Косівщинського ліцею імені Лесі Українки, можемо підтвердити, що переорієнтація освіти на розвиток у дітей «м'яких» навичок є ключовим чинником успіху випускника в майбутній трудовій діяльності. Адже людина, яка вмотивована, має розвинені навички групової роботи, розвинене критичне мислення, є затребуваною на сучасному ринку праці.

Зауважимо, що навчання математики, поряд з іншими дисциплінами, має високий потенціал щодо можливості розвитку soft skills, що підтверджують дослідники Стутсік Р., Лустіна Т., Семошин І. [2; 4; 6], де аналізуються можливості проєктного навчання, технологій STEM освіти в контексті розвитку soft skills.

Ми отримали для себе проблему дослідження процесу розвитку критичного мислення школярів.

З метою з'ясування теоретичних основ предмету дослідження, звернемося до аналізу змісту понять «критичність» та «критичне мислення» за результатами аналізу психолого-педагогічної літератури.

«Критичність (від грец. *kritike* – мистецтво розбирати, судити) – процес усвідомлення власних помилок, вміння оцінювати свої думки, зважувати доказувати за і проти, висувати гіпотези і піддавати ці гіпотези всебічній перевірці» [11].

Проблемі розвитку критичного мислення присвячено наукові дослідження Л. Брунера, Д. Вертча, Л. Виготського, Дж. Дьюї, М. Коула [18]. Серед українських учених вивченню цього питання приділяють значну увагу В. Козира, Т. Воропай, О. Пометун, С. Терно, О. Тягло. Науковці мають різні погляди та підходи до проблеми розкриття змісту поняття «критичне мислення», а тому у сучасній педагогіці маємо значну кількість авторських тлумачень цього поняття. Так, наприклад, Джуді А. Браус і Девід Буд визначають критичне мислення як «розумне рефлексивне мислення, сфокусоване на вирішенні того, у що вірити і робити». Критичне мислення, на їхню думку, це «пошук здорового глузду – як розсудити об'єктивно і вчинити логічно з урахуванням як своєї точки зору, так і інших думок, вміння відмовитися від власних упереджень» [23].

Д. Халперн у монографії «Психологія критичного мислення» визначає критичне мислення, як «використання таких когнітивних навичок і стратегій, які збільшують ймовірність отримання бажаного результату, ... такий тип мислення, до якого вдаються при вирішенні завдань, формулюванні висновків, імовірної оцінки та прийнятті рішень. Критичне мислення іноді називають ще і спрямованим мисленням...» [51, с.20].

Канадський вчений Ральф Х. Джонсон стверджував, що критичне мислення – це «особливий вид розумової діяльності, що дозволяє людині винести раціональне судження щодо запропонованої їй точки зору або моделі поведінки» [13, с. 15].

Д. Клустер виділяє декілька позицій при визначенні критичного мислення (рис.1.3) [18].

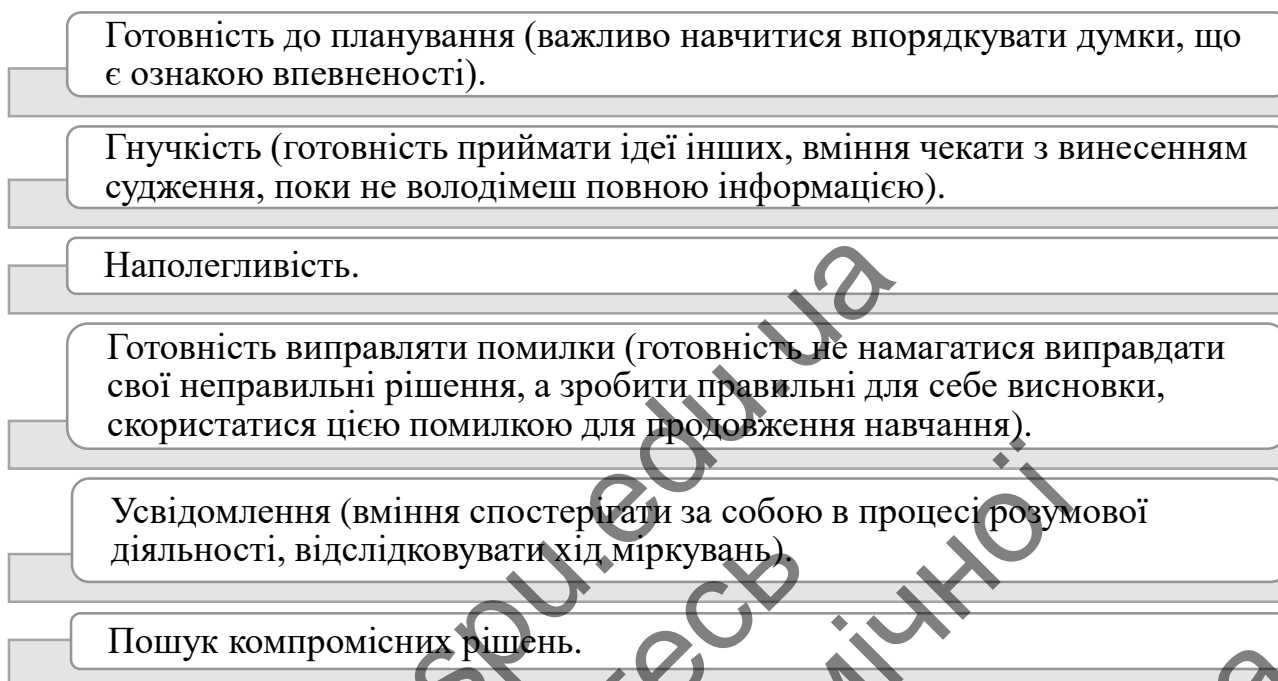


Рис. 1.3. **Визначення критичного мислення (за Д. Клустером)**

Сучасний дослідник О. Тягло визначає критичне мислення як активність розуму, спрямовану на виявлення й виправлення своїх помилок, точність тверджень і обґрунтованість міркувань. Він стверджує, що критичне мислення впливає з усвідомлення невідворотності оман і помилок у людському пізнанні. Воно є специфічним видом рефлексії, яка спирається на знання елементарної логіки й відповідних конкретних наук [48].

О. Пометун тлумачить критичне мислення як здатність людини усвідомлювати власну позицію з того чи іншого питання, вміння знаходити нові ідеї, аналізувати події і оцінювати їх, приймати ретельно обдумані, зважені рішення стосовно будь-яких думок і дій [42].

Як бачимо, у сучасній педагогіці існують різноманітні підходи до трактування поняття «критичне мислення». Результати аналізу наукової літератури дозволяють виокремити спільні сенси:

- критичне мислення оціночне та рефлексивне;

- критичне мислення відкрите, тобто таке, що не приймає догм, що розвивається шляхом накладення нової інформації на життєвий особистий досвід.

Ці сенси визначають відмінність критичного мислення від творчого, що не передбачає «оцінковості», а навпаки передбачає продукування нових ідей, які виходять за рамки життєвого досвіду, зовнішніх правил і норм. Та попри це чітко відмежувати ці два типи мислення складно. Але з певною долею упевненості можна стверджувати, що критичне мислення – це «старт» для розвитку творчого мислення, до того ж вони розвиваються в синтезі, взаємообумовлено.

Д. Халперн вважає, для того, щоб учень міг успішно розвивати критичне мислення, потрібно, щоб він розвивав якості, представлені на рис. 1.3 [51].

Критичне мислення є самостійне мислення. Ніхто не може думати критично за нас, ми робимо це виключно для самих себе. Мислення може бути критичним тільки тоді, коли носить індивідуальний характер.

Критичне мислення не повинно бути абсолютно оригінальним: ми маємо право прийняти ідею або переконання іншої людини як свої власні.

Інформація є відправним, але не кінцевим пунктом критичного мислення. Знання створює мотивування, без якої людина не може мислити критично.

Критичне мислення починається з постановки питань і з'ясування проблем, які потрібно вирішити.

**Рис.1.4. Якості, необхідні для успішного розвитку критичного мислення**

Важливо відмітити, що кожна представлена якість є необхідною для успішного розвитку критичного мислення. Так, готовність до планування

дозволить учню впорядковувати думки, які часто виникають хаотично, стримувати свою імпульсивність, складати план дій, викладати власні думки у певній послідовності. Упорядкованість думки – ознака впевненості. Учень, який не сприймає ідеї інших, не зможе стати генератором ідей. А тому гнучкість проявляється у готовності змінювати свою точку зору, розглядати нові варіанти та прагнути прояснити складні для себе питання. Аби рішення не залишилися на рівні висловлювань, а сприймалися іншими людьми, необхідно бути готовими до компромісу. Так, під час дослідження питання розміщення прямих у просторі, учні спочатку висловлюють свої думки хаотично: «перетинаються», «не перетинаються», «перпендикулярні», «паралельні». Далі створюють певну послідовність: «мають спільну точку – перетинаються», «не мають спільних точок - не перетинаються-лежать в одній площині – паралельні», «не мають спільних точок - не перетинаються – не лежать в одній площині – мимобіжні», а вже далі формулюють означення паралельних, мимобіжних прямих у просторі.

Критичне мислення, як уточнює Т. Зверова, це продуктивна й позитивна розумова діяльність, що характеризується наступними вміннями (рис. 1.5) [18].

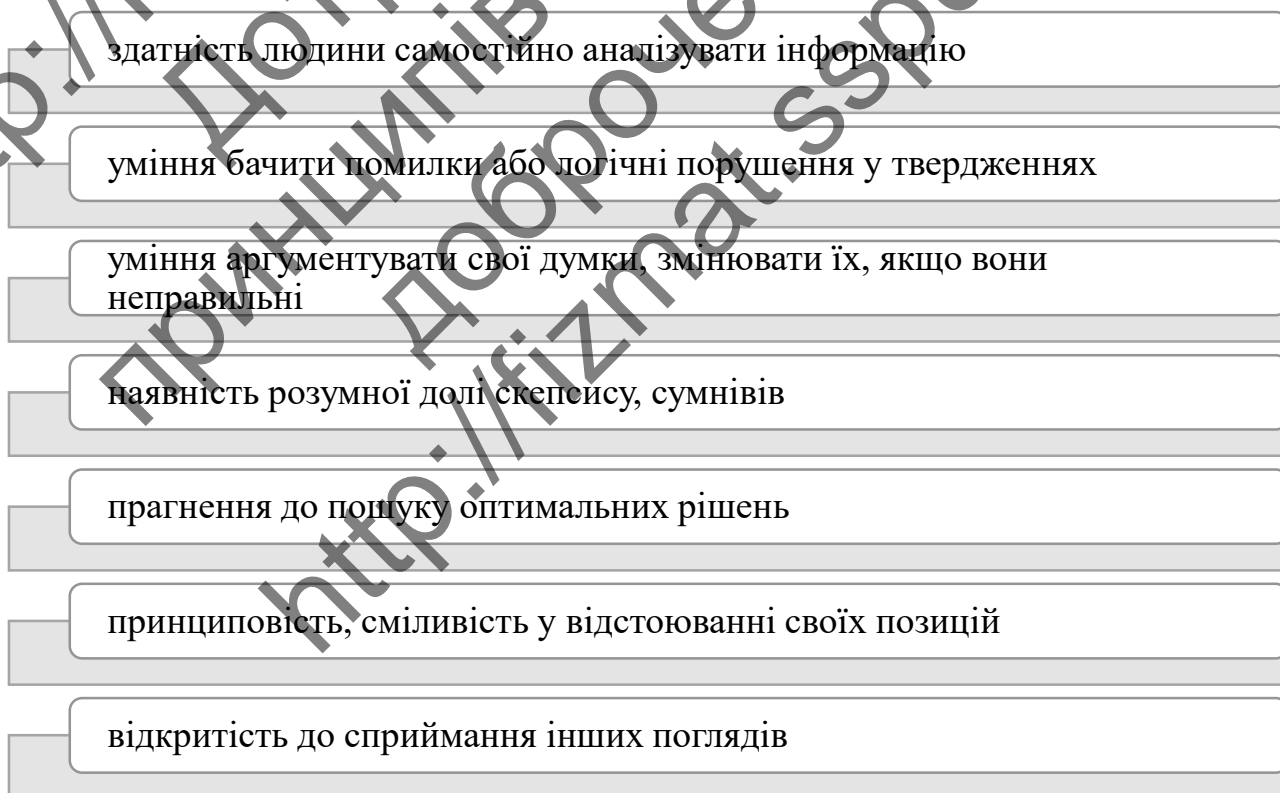


Рис. 1.5. Уміння, що характеризують критичне мислення

Перераховані вище аспекти критичного мислення дозволяють зрозуміти, якою повинна бути людина, яка критично мислить. Фактично вона не має меж, бар'єрів для власного розвитку. Її інтелектуальний розвиток постійно зростає. Для неї важливо розвиватися та самовдосконалюватися. Така людина є толерантною. Вона усвідомлює, що проблема може мати декілька рішень, кожне з яких повинно аналізуватися та оцінюватися. Здатна визнавати правильність позицій інших, навіть якщо це суперечить власним переконанням. Отож, якщо людина має навички критичного мислення, то це означає, що вона вміє долати сумніви, аналізувати інформацію, протистояти різноманітним впливам і маніпуляціям.

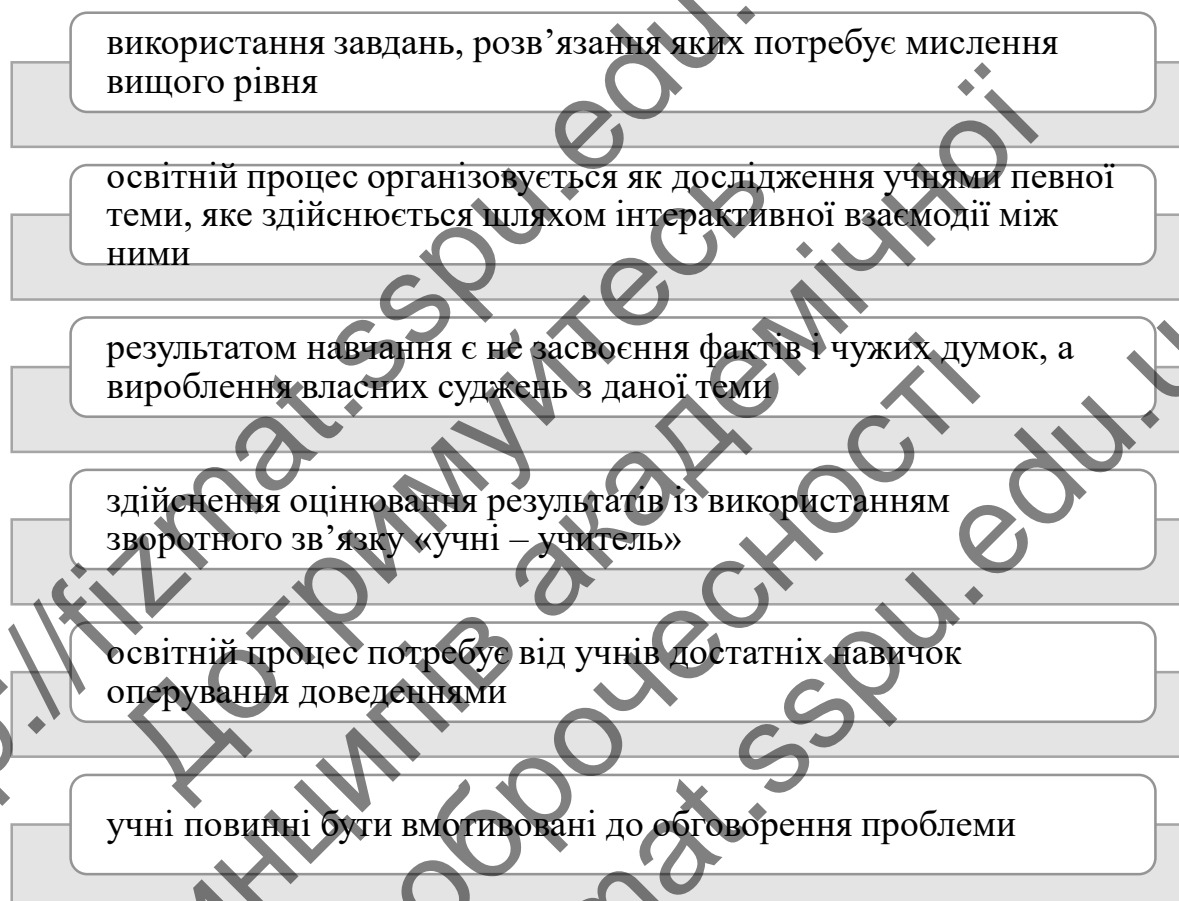
Критичне мислення можна представляти як здатність аналізувати інформацію з позиції логіки, вміння виносити обґрунтовані судження, рішення і застосовувати отримані результати як до стандартних, так і нестандартних ситуацій, питань і проблем.

Сьогодні залишається актуальним твердження видатного американського мислителя минулого століття Джона Дьюї, що фундаментальна мета сучасної освіти полягає не в наданні інформації учням, а у тому, щоб розвивати критичний спосіб мислення, навички мислення, котрі дають змогу адекватно оцінювати нові обставини й формувати стратегію подолання проблем, які у них криються [49].

Головною метою розвитку критичного мислення є розвиток інтелектуальних здібностей учня, що дозволяють йому вчитися самостійно. Для цього необхідно навчити школярів: виділяти причинно-наслідкові зв'язки; розглядати нові ідеї і знання в контексті вже наявних; відкидати непотрібну або неправильну інформацію; розуміти, як різні частини інформації пов'язані між собою; виділяти помилки в міркуваннях; робити висновок про те, чиї конкретно ціннісні орієнтації, інтереси, ідейні установки відображають текст або говорить людина; уникати категоричності у твердженнях; бути чесним у своїх міркуваннях; визначати помилкові стереотипи, що ведуть до неправильних висновків; виявляти упереджені ставлення, думку і судження; уміти відрізнити факт, який завжди можна перевірити, від припущення і особистої думки; ставити

під сумнів логічну непослідовність усній або письмовій мові; відокремлювати головне від несуттєвого в тексті або в мові і вміти акцентувати увагу на першому» [27].

Дж. Браус та Д. Вуд сформулювали особливості освітнього процесу, спрямованого на розвиток критичного мислення (рис. 1.6) [11].



**Рис. 1.6. Особливості освітнього процесу, спрямованого на розвиток критичного мислення**

О. Чашечникова вважає, що «навчання математики об'єктивно спрямоване на розвиток інтелектуальних здібностей учнів». Авторка зазначає, що «розвивальна функція математики як навчального предмета може бути реалізована лише за умови, що організацію та супровід навчально-пізнавальної творчої діяльності учня здійснює вчитель математики, який сам є творчою особистістю і має ґрунтовну математичну підготовку» [55].

Отож, освітній процес учитель має організувати так, аби учні вільно почувалися, постійно самовдосконалювалися, генерували нові, нестандартні ідеї, відстоювали власну думку, мали позитивну самооцінку. Окрім того, на рівень розвитку критичного мислення впливають емоції, а тому необхідно приділяти увагу розвитку емоційного інтелекту.

Необхідною передумовою розвитку критичного мислення є також розвиток внутрішньої мотивації до вивчення конкретної теми та предмета в цілому. Н. Модягіна звертає увагу на «необхідність учителя використати всі можливості, щоб підготувати учня до свідомого навчання, застосовуючи всеохоплюючу особистісно мисленнєву мотивацію. Вектор успіху учням задають вчителі, тому не можна нехтувати впливом математичних дисциплін на розвиток маленької людини» [31].

Результати аналізу науково-методичної літератури дозволяють виділити наступні структурні компоненти критичного мислення у контексті навчання математики (рис.1.7).

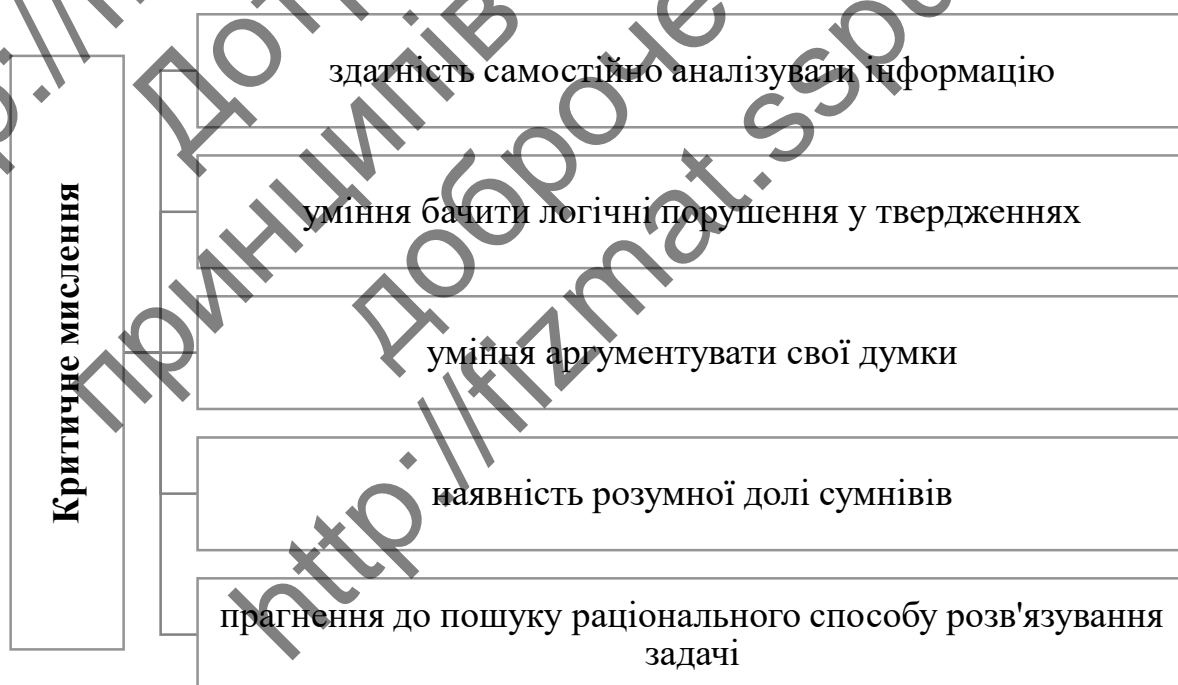


Рис. 1.7. Структурні компоненти критичного мислення



Систематизуючи та узагальнюючи усі розглянуті підходи до визначення поняття критичного мислення, будемо дотримуватися такого трактування: *критичне мислення – це система суджень, яка використовується для аналізу речей і подій з формулюванням обґрунтованих висновків і дозволяє виносити обґрунтовані оцінки, інтерпретації, а також застосовувати отримані результати до ситуацій і проблем.* Під критичним мисленням поряд із творчим мисленням розуміємо мислення вищого рівня.

## **1.2. Психологічні особливості сучасних старших підлітків у контексті дослідження**

Старший підлітковий вік - це період значних біологічних, гормональних і фізичних змін. Саме у цьому віці «яскравіше проявляються саморегуляція розуміння та його спрямованість на створення цілісного уявлення про зміст навчального матеріалу; намагаються повністю враховувати всі наявні відомості, встановлювати внутрішні взаємозв'язки, які дозволяють розглядати відомості як компоненти єдиного цілого» [54]. У підлітковому віці в структурі когнітивних процесів, зокрема, мислення, відбуваються зміни. Ці зміни пов'язані з фундаментальною децентрацією та призводять до розвитку метакогнітивних здібностей. Розберемося зі змістом цих понять.

«Децентрація – це подолання вікової пізнавальної позиції егоцентризму індивіда, формування об'єктивної здатності вставати на точку зору інших, вийти за межі власного бачення світу» [7]. Децентрації мислення старших підлітків пов'язана із звільненням від конкретної прихильності до об'єктів, даними в плані образу.

«Метакогнітивні здібності – це системні здібності, які об'єднують здатність стратегічно планувати власну діяльність, міркувати і міркувати про власні розумові процеси, аналізувати події в різних контекстах, з різних позицій за рахунок зростання ефективності обробки інформації, її системності» [7].

Отже, ці когнітивні новоутворення напряду пов'язані із розвитком критичного мислення. Тобто старший підлітковий вік є сензитивним для розвитку саме такого типу мислення.

«Одним з альтернативних шляхів розвитку мислення в старшому підлітковому віці є формування здатності знаходити проблеми і розв'язувати їх, тобто розвиток проблемного мислення і операціоналізація процесу прийняття рішень», які безпосередньо корелюють із розвитком критичного мислення. «Серед основних структур проблемного мислення називають здатності виявляти загальні проблеми і формулювати проблемне поле; знаходити нестандартні рішення для вже відомих проблем; навички включення приватних проблем в загальні, «родові» проблеми і, навпаки, навички виділення нових проблем з традиційного проблемного поля» [7].

А. А. Смирнов виділяє таку характеристику мислення як критичність, здатність знайти помилки в міркуваннях і доказах, що забезпечує умови самостійності мислення старшокласників, його цілеспрямованості і творчого характеру [44].

Мислення в залежності від того, які цінності знаходяться в його основі поділяють на два типи: догматичне і критичне (табл. 1.1).

Таблиця 1.1.

#### Типи мислення

Вид мислення	Догматичне	Критичне
Характеристика	відсутність сумнівів і критики, консерватизм (нездатність сприймати інформацію, що суперечить власним догмам), сліпа віра в авторитети	відкритість до сумнівів (пошук та усвідомлення суперечностей), самостійність та когнітивна гнучкість (пошук нової інформації, методів), пошук доказів та перевірка обґрунтованості

Так, особистість, яка мислить догматично, побачить на рисунку (рис 1.8.) лише дві прями, що перетинаються. Критично мисляча особистість вкаже і мимобіжні прями.

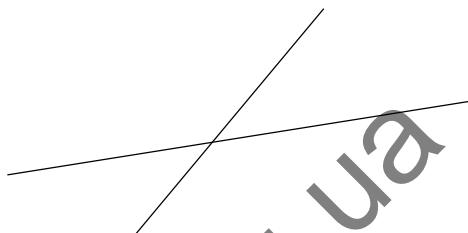


Рис. 1.8. Розміщення прямих

З критичним мисленням пов'язують когнітивну гнучкість, механізми асиміляції та акомодатії працюють добре, тобто, якщо змінилась інформація, ми готові переглянути свої знання та свої уміння. Отже, ці типи мислення мають різну ціннісну основу. Догматичне мислення спирається на цінності стабільності. Цінності критичного мислення або критично мислячої особистості – це цінності розвитку, тобто відкритості до нового, прагнення до вдосконалення, тобто цінності змін [24]. Виділимо риси особистості, що мислить догматично, критично (табл.1.2).

Таблиця 1.2.

**Порівняльна характеристика особистостей щодо переважання догматичного/критичного мислення**

Риси особистості, що мислить догматично	Риси особистості, що мислить критично
<ul style="list-style-type: none"> <li>• не має жодних сумнівів щодо того, що вона знає і робить</li> <li>• нездатна сприймати інформацію, що суперечить власним догмам</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• відкритість до сумнівів та пошук і усвідомлення суперечностей</li> <li>• готова стати на позицію, що вона робить щось не досить вдало або досконало, ніж могла б</li> </ul>

У контексті дослідження ми не можемо не звернутися до теорії поколінь з метою схарактеризувати сучасне покоління школярів.

Згідно з теорією поколінь психологічні особливості людини залежать від умов, в яких особистість виховувалася до 12 років. Засновники цієї теорії В. Штраус та Н. Хоув вважають, що покоління — це «сукупінсть людей, народжених в проміжок часу близько 20-ти років, яка розділяє єдину історичну епоху, загальні переконання, моделі поведінки, відчують себе частиною покоління» [37]. Суть цієї теорії в тому, що на світогляд людини, на її систему цінностей впливає проміжок часу, в який вона народилася.

Сучасне покоління народилося у цифровому світі. Як наслідок, «молодь має так зване кліпове мислення, тобто сприймає навколишній світ через короткі яскраві образи без урахування зв'язків між ними. Таке мислення характеризується фрагментарністю, алогічністю, повною різноманітністю інформації, що надходить, високою швидкістю перемикання між частинами, фрагментами інформації, відсутністю цілісної картини сприймання навколишнього світу» [37]. Кліпове мислення передбачає спрощення, але в той же час не сприяє глибокому розумінню. Ф. І. Гіренко наголошує, що «кліпове мислення креативне, а креативне мислення не може бути системним. Це, швидше, клаптикове мислення, фрагментарне. Чим більше в ньому пустоти, тим більше в ньому ступенів свободи, рухливості» [14].

На думку психологів, з якою не можна не погодитися, неможливо зупинити зміни когнітивних процесів особистості. Тому потрібно «навчитися з цим жити». Сучасні діти вони не гірші, вони просто інші. Тому вчителям потрібно навчитися працювати з молодим поколінням, яке має інший тип мислення.

О. В. Карапетян вважає, що формування покоління Z ще не закінчено і його характеристика постійно доповнюється новими описами [20].

Виділяють основні характеристики представників покоління Z (рис. 1.9) [40].



Рис. 1.9. Основні характеристики представників покоління Z щодо навчання математики

В контексті дослідження звернемо увагу на те, що представники покоління Z мають недостатньо розвинене критичне мислення. Тому проблема розвитку критичного мислення сучасних школярів є актуальною як ніколи. Теоретичний аналіз сучасних психолого-педагогічних ідей дозволяє говорити про потребу перегляду традиційних уявлень щодо організації навчальної діяльності школярів Z. «Традиційна освітня парадигма, для якої характерна ідея прямої (послідовної, поступової) передачі теоретичного і практичного досвіду від покоління до покоління, не здатна задовольнити освітні запити сучасного школяра. «Цифровий учень» потребує творчого, нестандартного підходу до навчальних ситуацій, адже лише такий виклад може зацікавити учня покоління Z» [15].

До покоління Z належать діти, які народжені у цифрову епоху, вони не можуть уявити своє життя без інтернету та різноманітних гаджетів. Досить часто їх світ обмежений екраном. Через великий обсяг і доступність інформації діти вибірково запам'ятовують її. Це не говорить про недостатність знання або обмежений кругозір. «Зети» при запам'ятовуванні надають перевагу тій інформації, яка буде дійсно корисною для їхнього життя або нагальних потреб. Такі діти найбільш продуктивно навчаються та виконують свої певні обов'язки в той час, коли їм зручно і потрібно. Вони не готові налагоджувати міцні зв'язки, легко змінюють обстановку та оточення, якщо їм стає некомфортно. У їхньому світі практично не існує ієрархії.

У концепції розвитку загальної середньої освіти України підкреслено, що «самоцінність знань переосмислюється таким чином, що сучасна людина має швидко адаптуватися до змінюваних обставин, самостійно набувати знань, уміти грамотно працювати з інформацією, тобто використовуючи сучасні технології, знаходити необхідну інформацію для виконання поставленого завдання, аналізувати її, узагальнювати, зіставляти, робити аргументовані висновки й на їх основі приймати рішення» [52]. Тобто молодь має мислити самостійно, критично та творчо, генеруючи нові ідеї. Тому сучасна освіта спрямована не стільки в

наданні інформації, скільки в розвитку критичного мислення молодого покоління.

Таким чином, маємо три факти, які знаходяться у протиріччі один до одного: з одного боку старший підлітковий вік є сензитивним для розвитку критичного мислення, з іншого, старші підлітки в силу оточення, в якому вони зростали, мають недостатньо розвинене критичне мислення, і в той же час, вимогою сучасності є необхідність наявності високого рівня розвитку критичного мислення у молоді.

### 1.3. Урок розвитку критичного мислення

Розвиток критичного мислення є одним з першочергових завдань нової української школи. О. Пометун зауважує, що для того, щоб «підготувати та провести урок, який розвиває критичне мислення учнів, слід пам'ятати, що критичне мислення – це неупереджене дослідження предмету або проблеми» [43]. Тому «урок варто починати з того, що учні мають з'ясувати: що вони вже про це знають; що їм слід вивчити; які запитання постають перед нами у зв'язку з темою уроку. Далі навчальний процес учитель має організовувати так, аби учні вільно виявляли факти, розглядали варіанти розв'язання проблеми, а наприкінці дійшли до підкріпленого фактами осмислення власної позиції щодо поставлених запитань. Щоб підготувати та провести урок з розвитку критичного мислення вчитель має створювати атмосферу позитивної взаємодії учнів, розумітися в тому, які форми й методи навчання ефективніші на певному етапі уроку, а ще – і це принципово важливо – самому мислити критично» [43].

Традиційно, на уроці розвитку критичного мислення виділяють три етапи, що відповідають тим компонентам навчання, які виділяли Ж. Піаже і його послідовники (рис.1.10) [43].

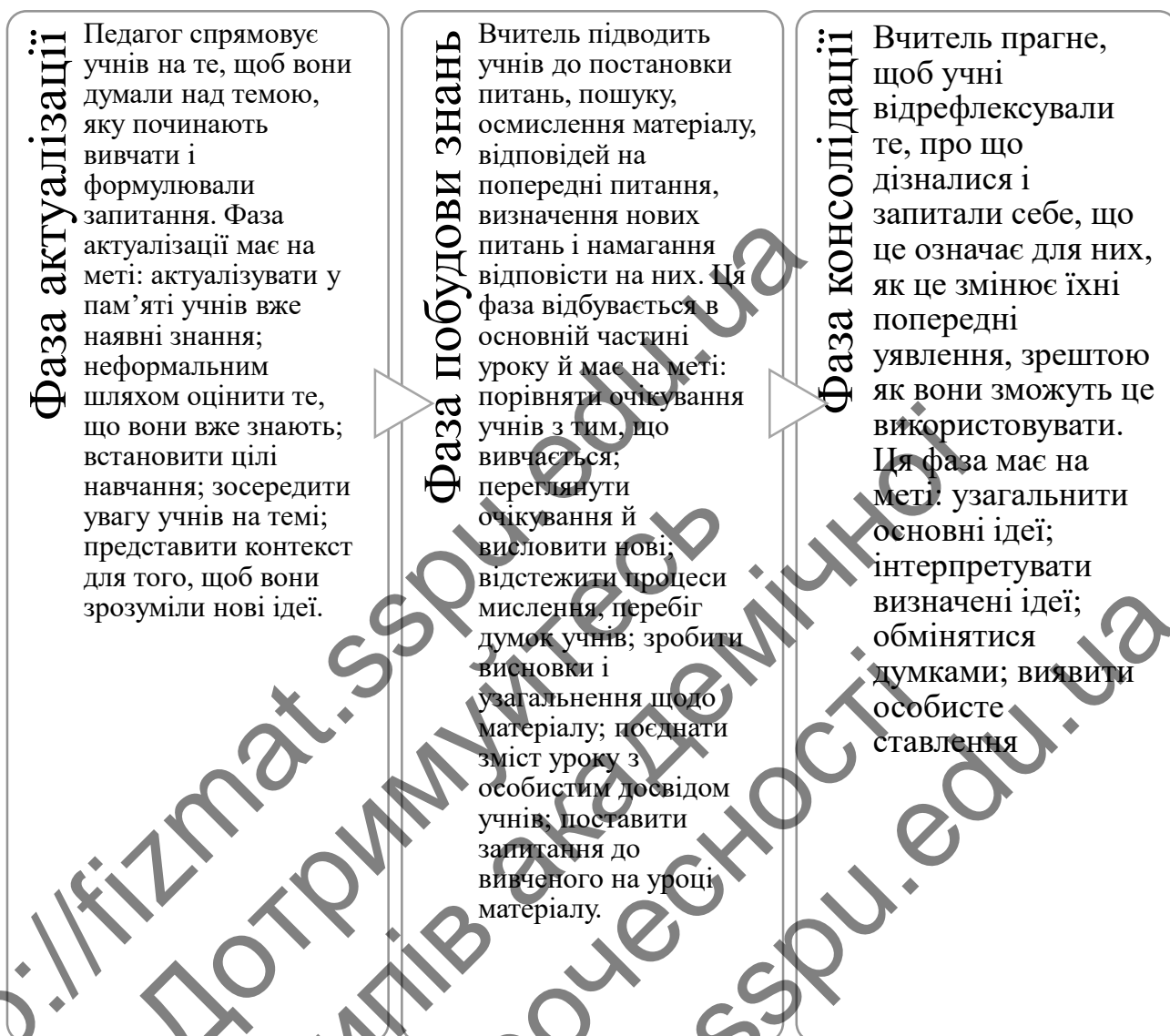


Рис. 1.10. Етапи уроку розвитку критичного мислення (за Ж. Піаже)

В українській сучасній методичній літературі щодо підготовки уроку з розвитку критичного мислення, зазначається, що такий урок має складатись із трьох етапів (рис.1.11) [43].



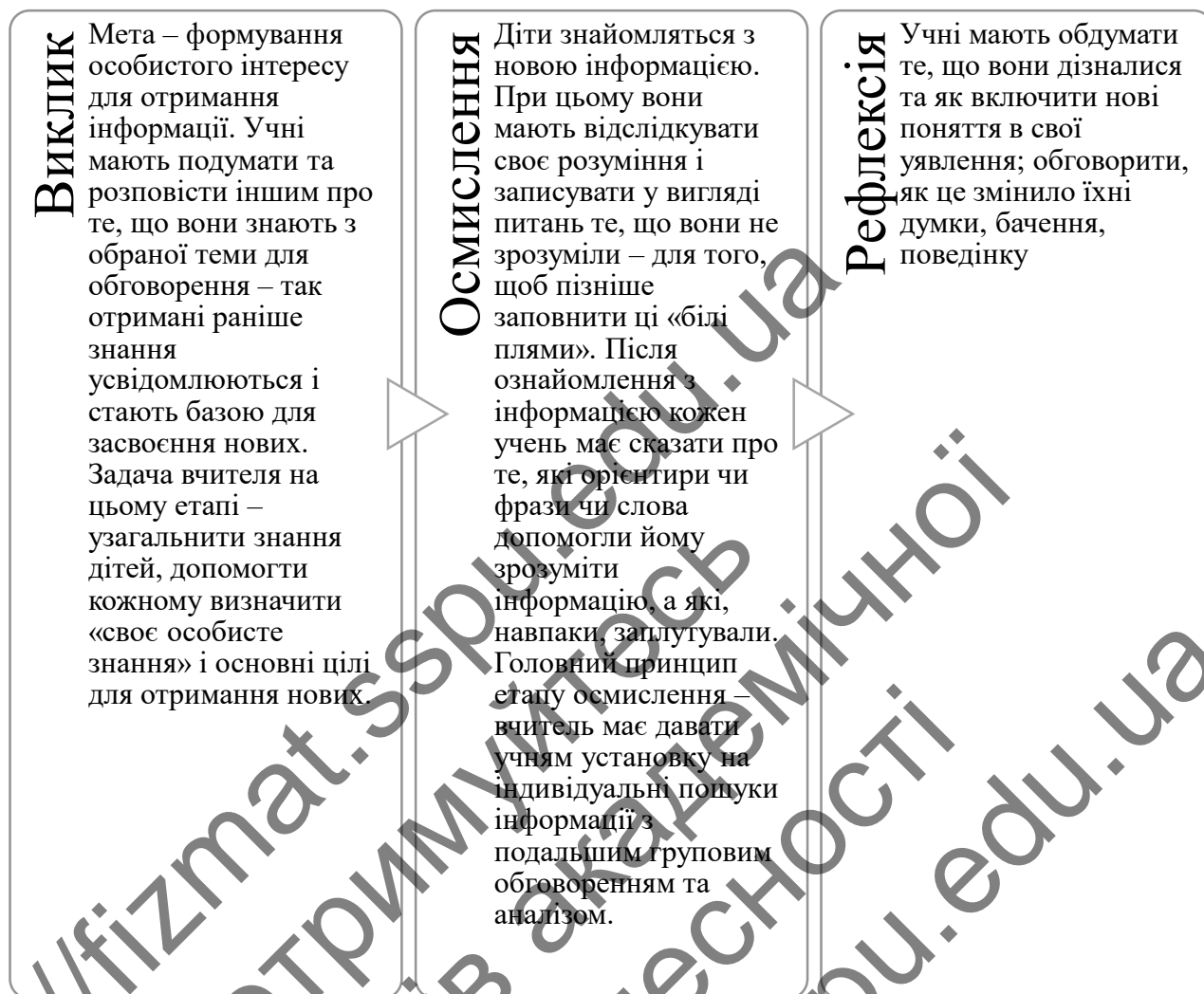


Рис.1.11. Етапи уроку розвитку критичного мислення

Автори зазначають, що методи розвитку критичного мислення варто добирати, враховуючи мету, завдання та зміст уроку. Слід також зважати на особливості застосування обраних методів (на одних етапах уроку вони більш ефективні). Найпоширеніші методи розвитку критичного мислення висвітлено на рис. 1.12.

З метою розвитку критичного мислення вчитель повинен переглянути всі етапи уроку. Наприклад, «формування мисленнєвих операцій високого рівня і відповідних ціннісних орієнтацій в учнів, довіри до результатів власних розумових зусиль, інтелектуальної мужності, відкритості до різноманіття думок тощо має стати частиною цілепокладання уроку незалежно від навчального предмету, який учні вивчають» [43]. Слід переглянути також методи навчання –

інтерактивне спілкування сприяє формуванню в учнів умінь відстоювати власні думки.

Виклик або виступ	Осмислення, або основна частина уроку	Рефлексія або підбиття підсумків
<ul style="list-style-type: none"> <li>•Кластер</li> <li>•Асоціативний куш</li> <li>•Дерево передбачень</li> <li>•Таблиця "Знаємо - Хочемо дізнатись- Дізнались"</li> <li>•Мозковий штурм</li> <li>•Робота в парах</li> <li>•Кошик ідей</li> <li>•Правильні і неправильні судження</li> <li>•Мультиголосування</li> <li>•Передбачення на основі опорних слів</li> <li>•Діаграма Венна</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Карта поняття</li> <li>• Читаємо в парах/Запитуємо (узагальнюємо) в парах</li> <li>• "Тонкі" і "товсті" запитання</li> <li>• Подвійний щоденник</li> <li>• Читання з маркуванням</li> <li>• Опорні слова</li> <li>• Т-таблиця</li> <li>• Картографування тексту</li> <li>• Концептуальна таблиця</li> <li>• Спитайте у автора</li> <li>• Робота в парах та малих групах з дидактичними завданнями</li> <li>• Ажурна пилка (мозаїка)</li> <li>• Навчаючи вчуся</li> <li>• Дискусія</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Сенкан</li> <li>• Кластер</li> <li>• Займи позицію</li> <li>• Бортовий журнал</li> <li>• Таблиця "Знаємо - Хочемо дізнатись- Дізнались"</li> <li>• Концептуальна таблиця</li> <li>• ПМЦ ("Плюс - Мінус - Цікаво")</li> <li>• Шкала думок</li> <li>• ПРЕС</li> <li>• Діаграма Венна</li> <li>• Риб'яча кістка (фіш-бон)</li> </ul>

Рис. 1.12. Найпоширеніші методи розвитку критичного мислення

Таблиця «Знаємо - Хочемо дізнатися - Дізналися» дозволяє систематизувати знання та чітко визначити, що потрібно дізнатися. Опрацьовуючи тему «Об'єм циліндра» учні знають - що таке циліндр, хочуть дізнатися – формулу об'єма циліндра, дізналися – як знаходити об'єм циліндра. Метод «Бортового журналу» дозволяє учням фіксувати свої думки, ідеї, запитання під час освітнього процесу, сприяє самоорганізації учня, розвитку критичного і творчого мислення. Під час вивчення теми «Многоранники» учні

до свого «бортового журналу» записують основні поняття цієї теми, формули площ поверхонь та задачі, які необхідно розв'язати.

#### 1.4. Прийоми розвитку критичного мислення учнів

Розглянемо декілька прийомів, які доцільно використовувати для розвитку критичного мислення.

*Приєм «Асоціації».* Методичний коментар. Асоціація спонукає до вільного і відкритого мислення, розвиває варіативність мислення учнів [3], здатність установлювати зв'язки. Його можна використовувати як на початку вивчення теми з метою актуалізації знань, так і для систематизації знань під час групової роботи. Під час вивчення теми «Піраміда» (11 клас) доцільно запропонувати учням записати асоціації з ключовим словом «піраміда» (рис. 1.13)



Рис. 1.13. Приєм «Асоціації»

*Приєм «Мозковий штурм».* Приклад проблемного завдання з теми «Конус»: «Дослідити, яка геометрична фігура утворюється в результаті перетину конуса площиною». Робота проводиться спочатку індивідуально, потім у парах, у малих групах, далі – фронтально обговорюються пропозиції (рис. 1.14).

*Методичний коментар.* Мозковий штурм — ефективний спосіб згенерувати велику кількість ідей. Даний прийом сприяє виробленню в учнів вмінь розробляти різні варіанти для реалізації плану дій, формуванню навичок всебічно аналізувати ситуації.

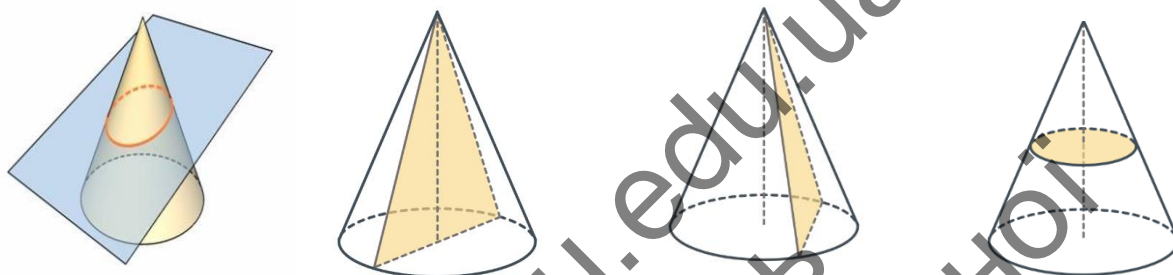


Рис. 1.14. Прийом «Мозковий штурм»

*Прийом «Кластер».* Методичний коментар. Представлення інформації у формі кластера сприяє засвоєнню її на рівні розуміння, допомагає позбавленню від стереотипів. Під час узагальнення матеріалу теми «Об'єми тіл обертання» (11 клас) можна запропонувати учням таку схему (рис. 1.15)



Рис. 1.15. Прийом «Кластер»

*Прийом «2-4 – всі разом».* «Учитель формує запитання та дає учням 1-2 хвилини часу для продумування можливих відповідей або індивідуальних розв'язань. Далі об'єднує учнів у пари і просить їх обговорити свої ідеї один з

одним, потім об'єднує учнів у четвірки, де вони обговорюють уже отримані розв'язки та дають відповідь на загал» [10].

*Прийом «Базовий аркуш».* При вивченні теми «Аксиоми стереометрії» у 10 класі можна запропонувати базовий аркуш з переліченими формулюваннями аксіом та рисунками до них (рис. 1.16), які повинен знати кожен учень. *Методичний коментар.* Даний прийом дає змогу створювати навчальне середовище, в якому теорія і практика засвоюються одночасно.

### Аксиоми стереометрії

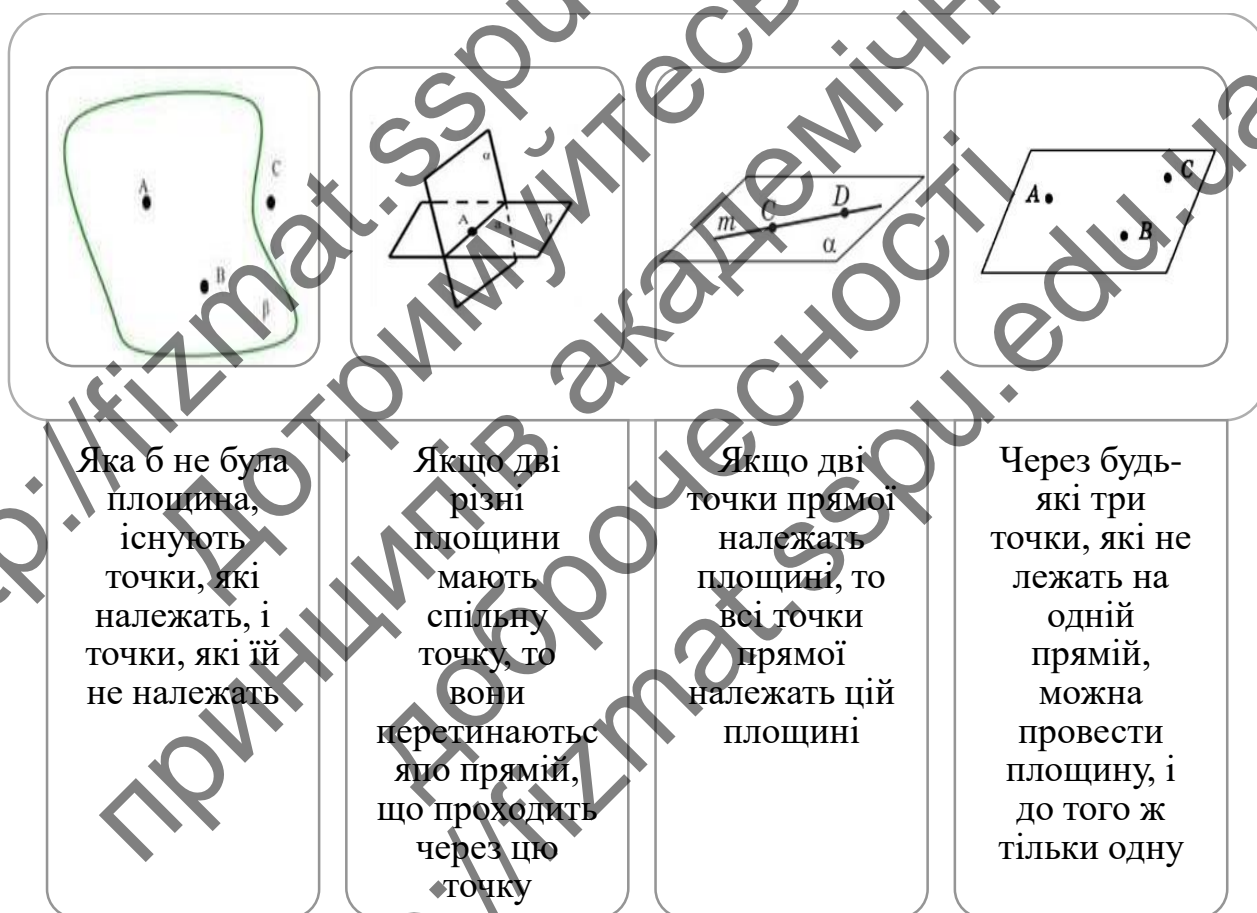


Рис. 1.16. Базовий аркуш «Аксиоми стереометрії»

*Прийом «Розв'язування задач-насток».* Розв'язування таких типів математичних задач найбільш «сприятиме розвитку критичного мислення учнів, сформує в них відповідальне, осмислене ставлення до навчання. Оволодівши знаннями та навичками критичного мислення, учні завжди

зможуть зрозуміло висловлювати свої думки, неоднозначність у формулюванні тверджень, безсистемність в обробці інформації. Вони швидко зможуть знайти раціональне зерно у інформації, що надходить, знайдуть найкоротший і правильний шлях виправлення помилок, будуть здатні розв'язувати будь-які складні проблеми» [50].

Розглянемо на конкретних прикладах види «Задач-пасток». У формалюванні твердження «Якщо висота піраміди перпендикулярна основі, то всі бічні грані перпендикулярні основі» міститься хибний висновок. Учні вислуховують відповіді однокласників і варіант учителя, порівнюють власну відповідь та відповіді інших й обирають правильну (не більше 2 бічних граней). Це забезпечує виховання звички довіряти собі не менше, ніж іншим.

Задача «Знайдіть бічні ребра піраміди, основою якої є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 28 см, а висота дорівнює 20 см, якщо вони нахилені до площини основи під однаковим кутом» не має розв'язку, оскільки не існує трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 28 см. Під час розв'язання задачі учні відразу починають працювати за певним алгоритмом, лише згодом роблять висновок, що у формулюванні задачі допущено помилку. Учні, які мислять критично, цю помилку помічають відразу.

Задачі, в яких недостатньо даних, формують в учнів уміння відшуковувати необхідну інформацію. При роботі над задачею «Висота чотирикутної піраміди дорівнює 13 см, кожне бічне ребро – 50 см. Основою піраміди є трапеція з основами 30 см і 48 см. Знайдіть висоту трапеції» учні розглядають різні підходи до її розв'язання та усвідомлюють недостатність даних.

В. А. Крутецький виділяє три рівні завдань на розвиток критичного мислення учнів (рис. 1.17) [22].

Розглянемо систему завдань при вивченні першої аксіоми стереометрії відповідно до рівнів.

Рівень 1. Про що йдеться в першій аксіомі стереометрії (якою б не була площина, існують точки, що належать їй, і точки, що не належать даній площині)?

Рівень 2. Яку аксіому планіметрії вона нагадує (якою б не була пряма, існують точки, що належать їй, і точки, що не належать даній прямий)? Чим вони відрізняються (у першій йдеться про площину, у другій – про пряму)?

Рівень 3. Яким був би результат, якби не виконувалася перша аксіома стереометрії (світ був би плоским)? Якби не виконувалася аналогічна аксіома планіметрії (світ обмежувався б однією прямою)?

У чому полягає значення цих аксіом для формування наукового світовідчуття людини (вони дозволяють вийти з одного простору до іншого, який має на один вимір більше)?

завдання третього рівня, що сприяють розвитку вміння оцінювати інформацію (починаються словами: «ви згодні з», «яка ваша думка про», «яким чином ви б довели» тощо) та формуванню творчих здібностей учнів (починаються словами: «яким чином покращити», «запропонуйте альтернативу», «спрогнозуйте наслідки» тощо)

завдання другого рівня, спрямовані на розвиток уміння аналізувати інформацію (починаються словами: «який висновок можна зробити», «як довести», «сформулюйте відмінності», «що спільного» тощо) та знаходити її застосування (починаються словами: «яким чином ви б скористалися», «який спосіб обрали б», «що можна змінити» тощо)

завдання першого рівня, спрямовані на запам'ятовування інформації (вони можуть розпочинатися словами: «чому», «як», «перерахуйте», «оберіть», «поясніть, чому» тощо) та на її розуміння (починаються словами: «порівняйте», «перепарфразуйте», «яка головна ідея» тощо)

Рис. 1.17. Завдання на розвиток критичного мислення (за В. А. Крутецьким)

При розвитку критичного мислення важливим є не стільки зміст задачі, а організація процесу її розв'язання. Головними ознаками наявності високого рівня розвитку критичного мислення учнів є вміння робити логічні висновки;

приймати обґрунтовані рішення; давати оцінку отриманій інформації й розумовому процесу; бути спрямованим на результат.

*Прийом «Спроби та помилки».* Потрібно організувати роботу над проблемою таким чином, щоб «кожен учень мав змогу висловити свою думку, висунути гіпотезу, обрати найбільш раціональний спосіб розв'язування, скласти його план, міг звернутися по допомогу до вчителя чи інших учнів, до речі, принциповим є те, щоб школярі усвідомлювали необхідність розв'язання кожної запропонованої задачі» [38].

При цьому «мислення носить індивідуальний характер; учні усвідомлюють, що від них очікується висловлення власних думок та ідей; школярі мають можливість для обміну думками; учні розуміють, що одна й та сама проблема може мати декілька розв'язань, тому вони повинні підкріпити своє рішення переконливими аргументами; школярі навчаються прислухатися до думок інших, оцінювати й аналізувати їх; у результаті спілкування учні можуть поглибити свою позицію або змінити її» [38].

*Прийом «Евристичні наставляння».* «Під час пошуку плану розв'язування важкої задачі учням пропонують систему наставлянь чи навідних запитань. Це найефективніший прийом під час розв'язування нетипових задач» [30].

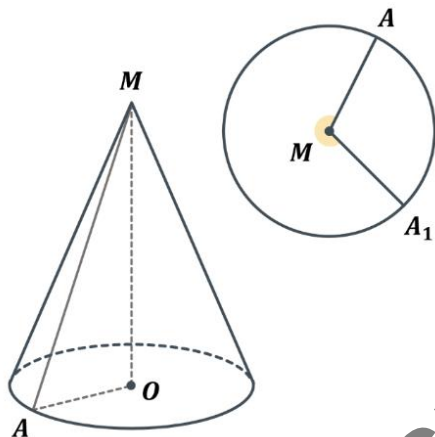
Так, під час пошуку плану розв'язання задачі «Висота конуса дорівнює 8 см, а його об'єм -  $96\pi$  см<sup>3</sup>. Обчисліть центральний кут розгортки бічної поверхні конуса» (рис. 1.20) учням можна запропонувати систему навідних запитань:

1. Яку фігуру та які її елементи необхідно накреслити, щоб наочно уявити дані задачі?
2. Яка фігура є розготкою бічної поверхні конуса?
3. Як знайти кут сектора?
4. Якими формулами, ознаками, властивостями, теоремами можна скористатися?
5. Яку рівність необхідно для цього розглянути?
6. Які невідомі елементи містять формули площі сектора і бічної поверхні конуса?



7. Як можна знайти радіус конуса? Яку формулу для цього використаємо?

8. Як знайти твірну конуса?



Дано:  $MO = 8$  см;

$V_k = 96\pi$  см<sup>3</sup>;

Знайти:  $\angle AMA_1$  —?

Рис.1.18.

Розв'язання:

$\angle AMA_1$  можна знайти використовуючи формулу площі сектора. Площа сектора дорівнює площі бічної поверхні конуса, отже:

$$S_{MAA_1} = S_{\text{б.конуса}} \quad \frac{\pi MA^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \pi \cdot AO \cdot MA$$

$$\alpha = (\pi \cdot AO \cdot MA) : \frac{\pi MA^2}{360^\circ} = \pi \cdot AO \cdot MA \cdot \frac{360^\circ}{\pi MA^2} = \frac{AO \cdot 360^\circ}{MA}$$

Отже, знайдемо радіус основи  $AO$  і твірну  $MA$ :

$$V_k = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot MO, \quad 96\pi = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot 8, \quad 96\pi = \frac{8\pi \cdot AO^2}{3},$$

$$AO^2 = \frac{96\pi \cdot 3}{8\pi} = \frac{288\pi}{8\pi} = 36 \text{ см}, \quad AO = 6 \text{ см}$$

З прямокутного  $\triangle MOA$ :

$$MA = \sqrt{MO^2 + AO^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ см}$$

Тепер, коли нам відомі радіус основи і твірна, можемо повернутися до знаходження шуканого кута:

$$\alpha = \frac{AO \cdot 360^\circ}{MA} = \frac{6 \cdot 360^\circ}{10} = 216^\circ$$

Відповідь:  $216^\circ$

## Висновки до першого розділу

За результатами вивчення психолого-педагогічної та науково-методичної літератури можна виділити місце критичного мислення у структурі soft skills, оскільки останнім часом спостерігається невідповідність результатів навчання у закладах загальної середньої освіти, які зосереджуються на традиційному навчанні та набутті випускниками hard skills, та вимогами сучасності, коли увага приділяється рівню розвитку soft skills молодого покоління. Математика, поряд з іншими дисциплінами, має високий потенціал щодо можливості розвитку soft skills.

Критичне мислення – це система суджень, яка використовується для аналізу речей і подій з формулюванням обґрунтованих висновків і дозволяє виносити обґрунтовані оцінки, інтерпретації, а також застосовувати отримані результати до ситуацій і проблем. Серед компонентів критичного мислення виділено здатність самостійно аналізувати інформацію, вміння бачити логічні порушення у твердженнях, вміння аргументувати свої думки, наявність розумної долі сумнівів, прагнення до пошуку раціонального способу розв'язування задачі.

Аналізуючи роботи щодо особливостей використання ефективних шляхів розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії, можна виділити такі шляхи:

- проведення уроків розвитку критичного мислення (із врахуванням етапів уроку розвитку критичного мислення за Ж. Піаже);
- використання найпоширеніших методів розвитку критичного мислення (робота в парах та малих групах з дидактичними завданнями, навчаючи вчуся, опорні слова, правильні і неправильні судження, таблиця «Знаємо-Хочемо дізнатися-Дізналися»);
- застосування прийомів, які доцільно використовувати для розвитку критичного мислення школярів («Асоціації», «Мозковий штурм», «Кластер», «Базовий аркуш», «Розв'язування задач-пасток», «Спроби та помилки», «Евристичні наставляння»);

– розв’язування стереометричних задач як засобу розвитку критичного мислення учнів (розпізнавати конфігурації геометричних тіл по їх зображенням та опису; порівнювати і оцінювати геометричні величини; встановлювати правильність та неправильність тверджень; знаходити помилки у формулюваннях та доведеннях, наводити контрприклад).

<http://fizmat.sspu.edu.ua>  
Дотримуйтесь  
принципів академічної  
добросовісності  
<http://fizmat.sspu.edu.ua>

## РОЗДІЛ II

### РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

#### 2.1. Задача зі стереометрії як засіб до розвитку критичного мислення учнів

При розв'язуванні стереометричних задач формуються вміння, які спрямовані на розвиток критичного мислення (рис. 2.1).

1. Розпізнати конфігурації геометричних тіл по їх зображенням та опису.
2. Порівнювати і оцінювати геометричні величини.
3. Встановлювати правильність та неправильність тверджень.
4. Знаходити помилки у формулюваннях та доведеннях.
5. Наводити контрприклад.
6. Розв'язувати задачі з неоднозначною відповіддю.

Рис. 2.1. Вміння спрямовані на розвиток критичного мислення

Наведемо систему стереометричних задач на формування кожного із зазначених вмінь.

*Тип 1. Розпізнати конфігурації геометричних тіл по їх зображенням та опису.*

1. Як у просторі розташовані прямі DE та FG (рис. 2.2)?
2. Чи перетинаються прямі DE та FG (рис. 2.3)?

3. Як у просторі розташовані ребра  $SA$  та  $BC$  правильної трикутної піраміди  $SABC$  (рис. 2.4)?

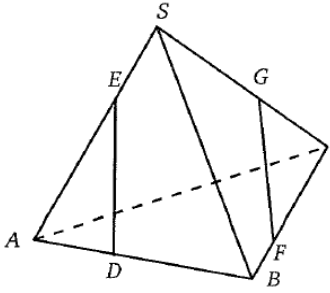


Рис. 2.2.

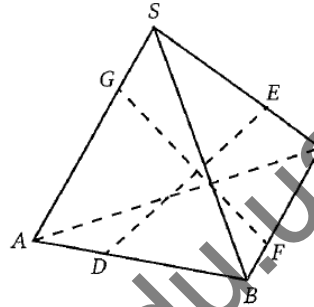


Рис. 2.3.

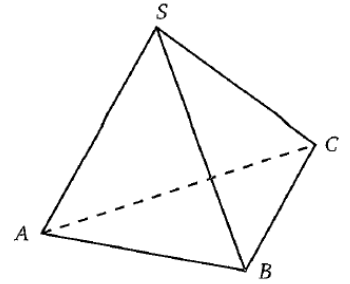


Рис. 2.4.

4. Як у просторі розташовані прямі  $EF$  та  $GH$  (рис. 2.5)?

5.  $SABCD$  – правильна чотирикутна піраміда. Як у просторі розташовані прямі  $SA$  та  $BD$  (рис. 2.6)?

Скільки спільних точок мають площини  $\alpha$  та  $\beta$  (рис. 2.7)?

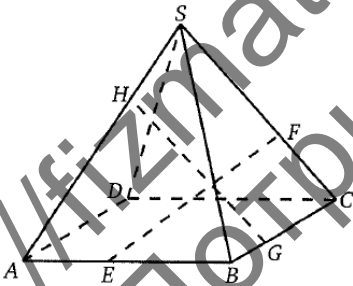


Рис. 2.5.

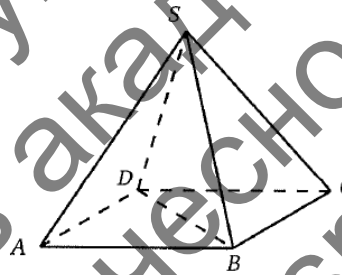


Рис. 2.6.

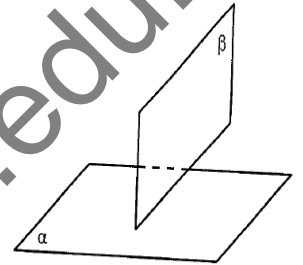


Рис. 2.7.

Як у просторі розташовані прямі  $a$  та  $b$ , що лежать відповідно у площинах  $\alpha$  та  $\beta$  (рис. 2.8)?

8. Як розташовані пряма  $A_1B_1$  та площина  $ACD_1$ , що проходять через вершини куба (рис. 2.9)?

9. Як розташовані площини  $ACB_1$  та  $FDC_1$ , що проходять через вершини правильної шестикутної призми (рис. 2.10)?

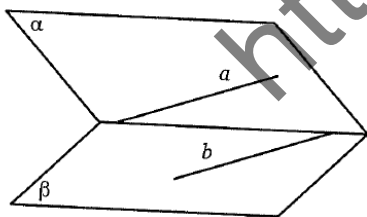


Рис. 2.8.

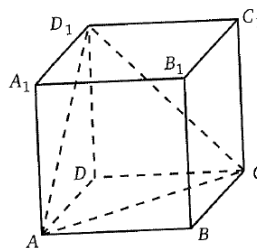


Рис. 2.9.

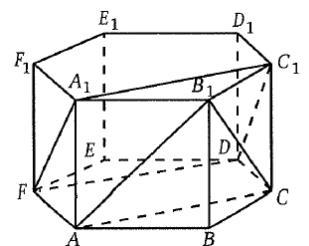


Рис. 2.10.

10. На рис. 2.11 вкажіть призми.

11. На рис. 2.12 вкажіть піраміди.

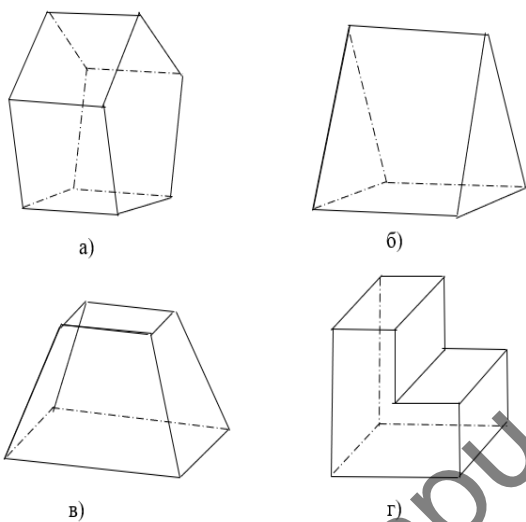


Рис. 2.11.

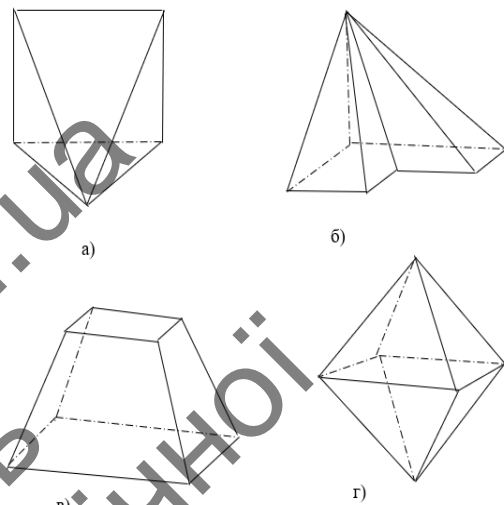


Рис. 2.12.

. На рис. 2.13 вкажіть розгортки куба.

. Вкажіть многогранник, розгортки якого зображено на рис.2.14?

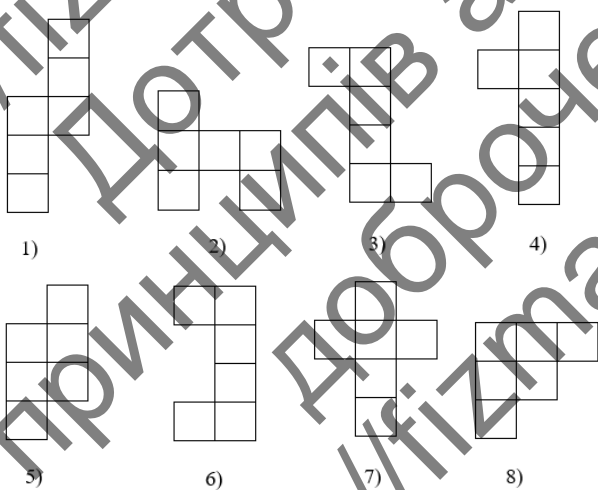


Рис. 2.13.

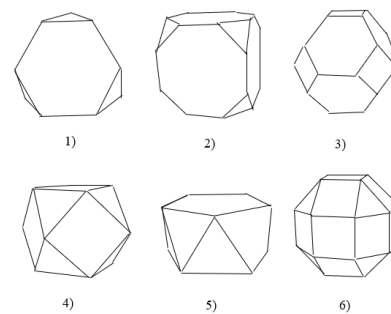
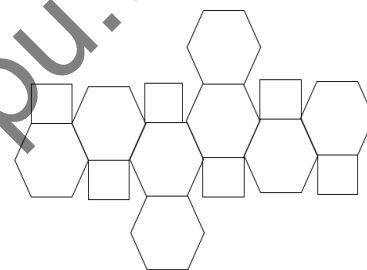


Рис. 2.14.

. Чи може переріз куба площиною бути: гострокутним трикутником; прямокутним трикутником; тупокутним трикутником?

. Чи може переріз куба площиною бути: прямокутником; паралелограмом; ромбом; рівнобедреною трапецією; прямокутною трапецією?

. Чи може переріз куба площиною бути п'ятикутником, в якого рівні: всі сторони; чотири сторони; три сторони; дві сторони?

. Чи може переріз куба площиною бути п'ятикутником, в якого рівні: всі кути; чотири кути; трикути; два кути?

Геометричні задачі на розпізнавання конфігурацій геометричних тіл по їх зображенням та опису вимагають від учнів розуміти різноманітні геометричні форми та їх розміри, що розвиває їх здатність аналізувати просторові структури та сприймати їхні особливості.

*Тип 2. Порівнювати і оцінювати геометричні величини.*

Під час розв'язання задач даного типу учні мають проаналізувати геометричну фігуру, встановити властивості, оцінити дані величини та шукані за певною характеристикою, довести точність своїх міркувань

1. Не виконуючи обчислень, оцініть, яку частину об'єму одиничного куба (рис. 2.15) складає об'єм одиничного правильного тетраедра (рис. 2.16)?

2. У фужері у формі перевернутого конуса є вода, що заповнює його повністю. Потрібно відлити половину цієї води у стакан. Яку частину висоти ц

ь 3. Товщина шкірки апельсина складає одну п'яту його радіуса. Оцініть, яку частину об'єму апельсина займає його шкірка?

г 4. Уявімо, що Земну кулю обтягнули по екватору мотузкою. Потім довжину мотузки збільшили на 3м і розташували її у вигляді кола, концентричного з екватором. Чи може в утворений проміжок між поверхнею Земної кулі і мотузки, пролізти середньостатистична людина?

о

н

у

с

а

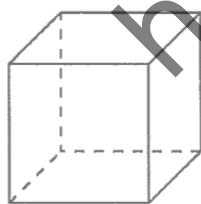


Рис. 2.15.

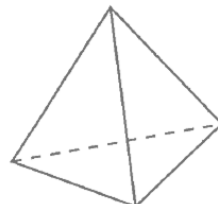


Рис. 2.16.

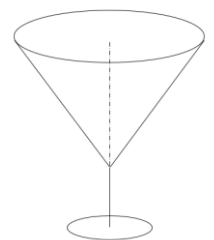


Рис. 2.17.

п

о

в

*Тип 3. Встановлювати правильність та неправильність тверджень.*

1. Будь-які дві різні точки завжди лежать в одній площині.
2. Будь-які дві різні точки завжди лежать на одній прямій.
3. Будь-які три різні точки завжди лежать в одній площині.
4. Будь-які три різні точки завжди лежать на одній прямій.
5. Пряма і площина можуть мати одну спільну точку.
6. Пряма і площина можуть не мати спільної точки.
7. Пряма і площина можуть мати три спільні точки.
8. Пряма і площина можуть мати тільки дві спільні точки.
9. Через дві точки можна провести єдину площину.
10. Через три точки, що лежать на одній прямій можна провести площину і до того ж тільки одну.
11. Якщо точка належить площині, то й пряма, яка проходить через цю точку, належить цій площині.
12. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині.
13. Якщо дві сторони трикутника належать площині, то і третя сторона трикутника належить цій площині.
14. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.
15. Є точки, що належать площині і точки, що не належать площині.
16. Через три різні точки можна провести єдину площину

Розв'язування задач на встановлення правильності та неправильності тверджень розвивають такі аспекти критичного мислення, як здатність аналізувати, встановлювати зв'язки, оцінювати достовірність інформації, уміння самостійно мислити, бачити логічні порушення у твердженнях, робити обґрунтовані висновки.



*Тип 4. Знаходити помилки у формулюваннях та доведеннях.*

Вміння знаходити помилки у формулюваннях, доведеннях та розв'язаннях розвивається при роботі з так званими «провокуючими завданнями». Провокуючі завдання – це завдання, умови яких містять згадки, вказівки, натяки або інші збудники, які підштовхують учнів до вибору хибного шляху вирішення або невірної відповіді. Учень потрапляє у заздалегідь підготовлену вчителем пастку. Дидактична мета подібних завдань в тому, що вони попереджують різного роду помилки. Провокуючі завдання розвивають критичне мислення, навчаючи аналізувати сприйняту інформацію, різнобічно її оцінювати.

Методисти Шеврин В. Чорний М., серед задач такого типу виділили:

1) задачі з помилкою у міркуваннях (яскравим прикладом таких задач є софізми, в яких провокація полягає у помилках чи «пробілах» при аналізі доведень або міркувань);

2) задачі, що провокують до використання неправильних аналогій (помилка виникає за рахунок не виправданого перенесення учнями раніше отриманого досвіду на новий об'єкт при використанні невірних аналогій);

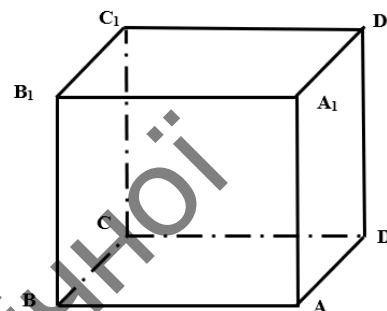
3) задачі, що містять протиріччя в умові (можуть попередити помилки учнів, які пов'язані з діями над математичними об'єктами, які не існують при заданих умовах; при їх розв'язуванні відбувається вихід за межі області застосування теореми чи властивості);

4) задачі на стереотипність дій (як приклад можна навести тестові завдання, що містять більше, ніж одну правильну відповідь, при цьому учням потрібно не обирати правильку відповідь, а аналізувати кожний із запропонованих варіантів);

5) задачі на вибір відповіді по запропонованому рисунку (якщо потрібно обрати правильну відповідь, спираючись на рисунок, то можливі «зорові» помилки; провокація полягає в тому, що якщо учень не розуміє суті означення чи теореми, то, керуючись лише одним рисунком, він може отримати неправильну відповідь).

Ці типи задач є ефективним засобом розвитку логічного, творчого і критичного мислення учнів. Вони допомагають учням усвідомлювати свої помилки, розвивати здатність знаходити нові зв'язки, виявляти суперечності в судженнях і твердженнях.

1. На рис. 2.18 зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайди помилку в записах.



I) Площини  $ABA_1$  і  $ACD$  перетинаються по прямій  $AB$ ;

II) площини  $ACD_1$  і  $A_1 C_1 B$  паралельні;

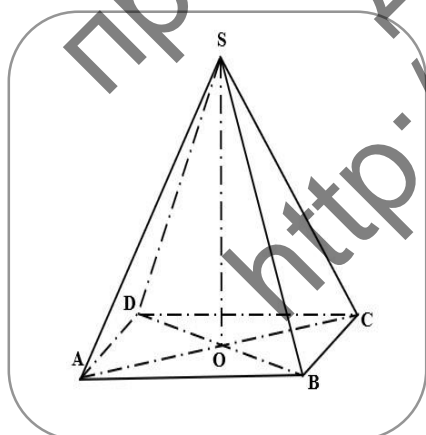
III) площини  $ACD_1$  і  $A_1 C_1 B_1$  перетинаються по прямій  $A_1 B$ ;

IV) площини  $AA_1 B$  і  $CC_1 D_1$  паралельні.

Рис. 2.18.

2. Задача-софізм з теми «Піраміда» (рис. 2.19).

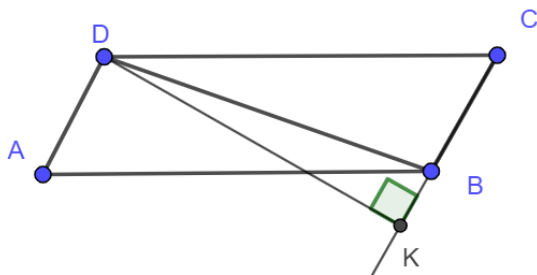
Основи піраміди - паралелограм, у якого сторони  $a$  см і  $b$  см, а одна з діагоналей  $c$  см, висота піраміди  $h$  проходить через точку перетину діагоналей. Знайдіть бічні ребра піраміди, де  $a = 3$  см,  $b = 7$  см,  $c = 6$  см,  $h = 4$  см.



Дано:  $SABCD$  - піраміда,  
паралелограм  $ABCD$  - основа  
піраміди,  $AD = a = 3$  см,  $DC = b = 7$  см,  
 $AC = c = 6$  см,  $SO = h = 4$  см  
Знайти:  $AS, DS$

Рис. 2.19. Задача-софізм

## Розв'язання



Спочатку розглянемо паралелограм  $ABCD$ , який лежить в основі піраміди. Проведемо висоту  $DK$  до продовження сторони  $BC$ .

Розглянемо  $\triangle DKB$  ( $\angle BDK = 90^\circ$ ). За теоремою Піфагора  $DB^2 = BK^2 + DK^2$ .

Розглянемо  $\triangle DKC$  ( $\angle DKC = 90^\circ$ ). За теоремою Піфагора  $DC^2 = CK^2 + DK^2$ .

Віднімемо ці рівності почленно:

$$DB^2 - DC^2 = BK^2 - CK^2, \quad DB^2 = DC^2 - (CK^2 - BK^2).$$

Оскільки  $CK - BK = CB$ , то  $CK^2 - BK^2 = CB^2$  і

$$DB^2 = DC^2 - CB^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40, \quad DB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ (см)}.$$

Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}6 = 3 \text{ (см)}, \quad BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}2\sqrt{10} = \sqrt{10} \text{ (см)}.$$

$\triangle SOA = \triangle SOC$ ,  $\triangle SOB = \triangle SOD$  як прямокутні трикутники ( $\angle SOD = \angle SOC = \angle SOB = \angle SOA = 90^\circ$ ) за двома катетами ( $SO$  - спільна,  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ ).

Розглянемо  $\triangle SOA$  ( $\angle O = 90^\circ$ ). З теореми Піфагора  $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}$ .

Розглянемо  $\triangle SOB$  ( $\angle O = 90^\circ$ ). З теореми Піфагора  $SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{26} \text{ (см)}$ .

Отже,  $SA = SC = 5 \text{ см}$ ,  $SB = SD = \sqrt{26} \text{ см}$ .

Відповідь.  $SA = SC = 5 \text{ см}$ ,  $SB = SD = \sqrt{26} \text{ см}$ .

Коментар. З того, що  $CK - BK = CB$ , не можна робити висновок, що  $CK^2 - BK^2 = CB^2$ . Насправді,  $CB^2 = (CK - BK)^2 = CK^2 - 2CK \cdot BK + BK^2$ .

Зауважимо, що робота над такою задачею розвиває таку компоненту критичного мислення як уміння бачити логічні порушення у твердженнях.

3. Задача на порівняння і аналогію:

Чи завжди дві прямі в просторі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні?

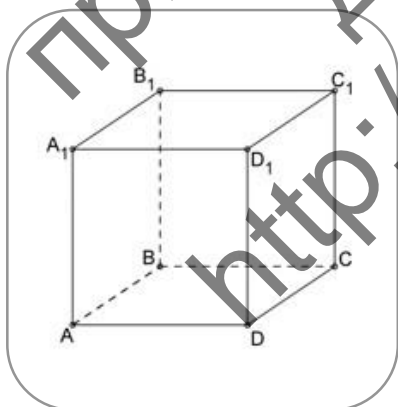
Оскільки на площині дві прямі, перпендикулярні третій прямій, паралельні, то використовуючи аналогію, учні стверджують, що і в просторі дані прямі будуть паралельні. На прикладі класної кімнати переконуємо учнів, що їх відповідь неправильна.

Розв'язування таких вправ буде корисним для усвідомлення того, що сформульовані твердження за аналогією необхідно перевіряти, доводити їх правильність чи хибність.

*Тип 5. Наводити контрприклад.*

1. Контрприклад з теми «Паралельність прямих та площин у просторі», наведений у підручнику «Геометрія 10» автора Є. П. Неліна (рис.2.20) [36]. Коментар. Якщо якесь твердження не виконується, то, для того, щоб його спростувати, достатньо навести хоча б один приклад, коли умова твердження виконується, а висновок – ні (так званий «контрприклад»). Для такого прикладу можна використати відомі геометричні фігури, зокрема многогранники.

**Задача 1.** Чи є правильним твердження: "Пряма, паралельна площині, паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині?"



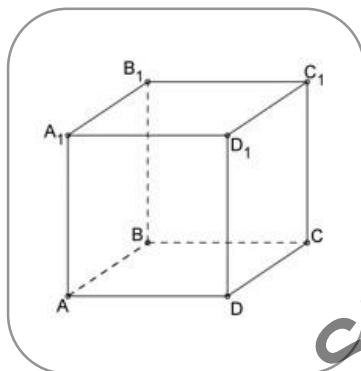
**Розв'язання**

Твердження **неправильне**, оскільки, наприклад, у кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (див. рис) пряма  $DC$  паралельна площині  $AA_1 B_1 B$ , але не паралельна прямій  $AA_1$ , яка лежить у цій площині (прямі  $DC$  і  $AA_1$  - мимобіжні).

Рис. 2.20. Контрприклад

2. Контрприклад з теми «Перпендикулярність прямих та площин у просторі», наведений у підручнику «Геометрія 10» автора Є. П. Неліна (рис. 2.21) [36].

**Задача 2.** Із планіметрії відомо, що дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. Чи є правильним це твердження у просторі?



#### Розв'язання

Ні, це твердження неправильне, якщо всі три прямі не лежать в одній площині.

Наприклад, у кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (див. рис) прямі  $AA_1$  і  $BC$  перпендикулярні до прямої  $AB$ , але не паралельні (вони мимобіжні, оскільки не лежать в одній площині).

Рис. 2.21. Контрприклад

Коментар. На запитання «Чи є правильним твердження?» відповідь може бути ствердною («Так»), тоді потрібно довести це твердження для всіх можливих випадків. Якщо відповідь «Ні», то достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження не виконується (так званий «контрприклад» для даного твердження). Цей приклад можна сконструювати самому або знайти його серед елементів відомих фігур.

*Тип 6. Розв'язувати задачі з неоднозначною відповіддю.*

Задачі з неоднозначною відповіддю можна використовувати для попередження помилок, пов'язаних із використанням припущень, що не оговорені в умові. Для попередження таких помилок необхідно розв'язувати задачі, умова яких «підштовхує» учнів лише до одного розв'язку, хоча їх насправді декілька.

При розв'язуванні задачі «Який переріз конусу, що проходить через його вершину, матиме найбільшу площу», учні досить часто дають відповідь, що осьовий, яка є правильною для гострокутного рівнобедреного трикутника, але

неповною. Якщо осьовим перерізом конуса буде тупокутний трикутник, то існує переріз, який має форму прямокутного трикутника і площа його буде найбільшою. Отож, розв'язання даної задачі потребує дослідження двох випадків.

## **2.2. Використання комп'ютерного експерименту для розвитку критичного мислення у процесі навчання стереометрії**

Стереометрія, як шкільний предмет, дозволяє організувати дослідницьку діяльність учнів, яка безпосередньо спрямована на розвиток критичного мислення здобувачів освіти. Одним з видів такої діяльності є комп'ютерний експеримент із використанням програм динамічної математики. Програми динамічної математики дозволяють виконувати не лише моделювання геометричних фігур, але й надають змогу миттєво змінювати всі залежні побудови та виміри, коли у базові параметри вносяться зміни. Розробниками програм такого типу передбачені інструменти створення математичних об'єктів та їх інтерактивні перетворення для уяочення певних характеристик математичних об'єктів, вивчення їхніх властивостей, установлення співвідношень структурних компонентів тощо.

Методисти Гнеденко А., Чашук О., Беляєв Є., Рудь В. виділяють декілька типів комп'ютерних експериментів.

1. Конструктивний комп'ютерний експеримент використовується з метою створення образу геометричної конфігурації, яка є об'єктом дослідження, а також з метою встановлення умов існування такої конфігурації.

2. Розвідувальний комп'ютерний експеримент використовується з метою підведення учнів до відкриття факту, який сформульовано в теоремі, або в умові задачі на доведення. Такий експеримент проводиться в умовах обмеженості знань про об'єкт або предмет дослідження:

1) невідомий вид метричного співвідношення, маємо лише гіпотезу про залежність однієї геометричної величини від іншої чи інших;

2) невідомий вид геометричного об'єкту, маємо лише гіпотезу про його властивості;

3) невідомий характер позиційних властивостей елементів геометричної конфігурації, маємо намір дізнатися про збереження чи умови зміни взаємного розташування одних елементів відносно інших.

3. Контрольний комп'ютерний експеримент використовується з метою вибору робочої гіпотези з декількох альтернатив, уточнення гіпотези, заперечення сформульованого твердження чи доведення його правильності.

Наш вибір зупинився на програмі динамічної математики GeoGebra, оскільки це продукт з відкритим кодом, що активно розвивається і над яким працює команда з розробників та перекладачів, зокрема, і з України. GeoGebra – це вільнопоширювальний програмний продукт, призначений для навчання математики в закладах загальної середньої освіти. Дана програма поєднує геометрію (*Geometry*), алгебру (*alGebra*), математичний аналіз і статистику. Інтерфейс програми є простим у використанні та інтуїтивно зрозумілим.

Ми вже зверталися до задач на перерізи многогранників, згадуючи про них як про ефективні засоби розвитку критичного мислення школярів. Продемонструємо можливість використання комп'ютерного експерименту саме при роботі із задачами на перерізи многогранників. Досвід показує, що учні не завжди уявляють, яку форму має переріз, як він може змінюватися залежно від розташування січної площини тощо. В ході комп'ютерного експерименту учні можуть самостійно чи за допомогою вчителя провести невелике дослідження та знайти відповіді на подібні запитання, роздивитися переріз з різних боків.

*Приклад.* Нехай маємо піраміду та побудований переріз, що проходить через точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ , які розташовано відповідно на ребрах  $SB$ ,  $SC$ ,  $AD$  (для побудови плоского перерізу використано метод слідів, рис. 2.23). Здійснюючи пересування заданих точок  $M$ ,  $N$ ,  $K$  вдовж відрізків  $SB$ ,  $SC$ ,  $AD$ , можна встановити, як зміна розміщення точок буде впливати на вид фігури, яка є перерізом піраміди (рис. 2.22–2.24).

Під час виконання дослідження доцільно буде запропонувати учням відповісти на такі запитання, спрямовані на розвиток критичного мислення:

від чого залежить вид перерізу? (від розміщення точок, через які проведено переріз)

чи завжди п'ятикутник буде перерізом піраміди? (ні, якщо одна з точок співпадає з вершиною піраміди, то перерізом може бути трикутник (рис. 2.2), чотирикутник (рис. 2.4)

як треба розмістити точки, щоб побудувати переріз було неможливо? (якщо дві точки  $M$ ,  $N$  збігаються з вершиною піраміди  $S$ , тоді через дві точки не можна однозначно провести площину перерізу).

Коментар. Задачі на перерізи многогранників вимагають від учнів розуміння та аналізу властивостей різних геометричних фігур, здатності робити висновки, приймати рішення щодо того, як змінюються перерізи в залежності від положення точок. Також потребують творчого підходу до пошуку розв'язань, логічного мислення, здатності до комунікації математичних ідей. Загалом, розв'язання задач на перерізи многогранників стимулює учнів розвивати навички критичного мислення, такі як аналіз, висновок, вирішення проблем та комунікація математичних ідей.

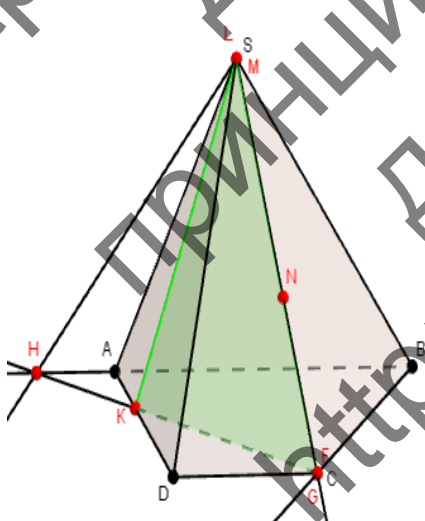


Рис. 2.22

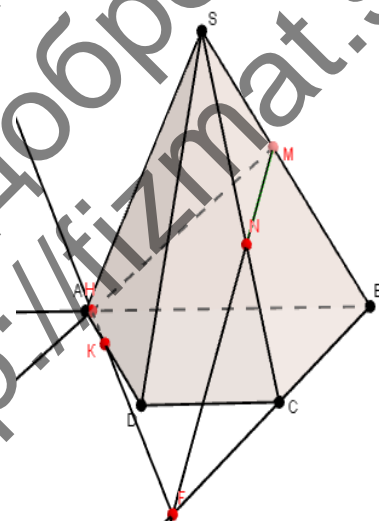


Рис. 2.23

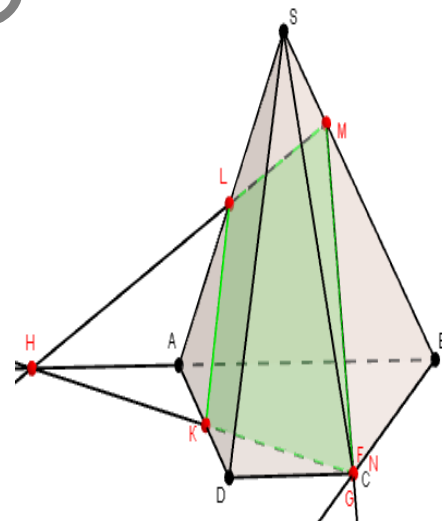


Рис. 2.24



Комп'ютерний експеримент доцільно проводити при роботі із задачами на дослідження з метою розвитку критичного мислення. Наприклад, коли невідомий вид метричного співвідношення і ми маємо лише гіпотезу про залежність однієї геометричної величини від інших.

*Задача.* У сферу радіуса 4 вписано конус. Якою має бути висота конуса, щоб його об'єм був найбільшим? [17].

При традиційному підході геометричні задачі на екстремум розв'язуються через написання формули для залежності об'єму конуса від його висоти, а потім диференціюють функцію залежності. Маємо:

$$V=13\pi(8h^2-h^3), V'=13\pi(16h-3h^2)=0, h=16/3\approx 5,33, V_{\max}\approx 79,43.$$

Результат такого розв'язання подано на рис. 2.25.

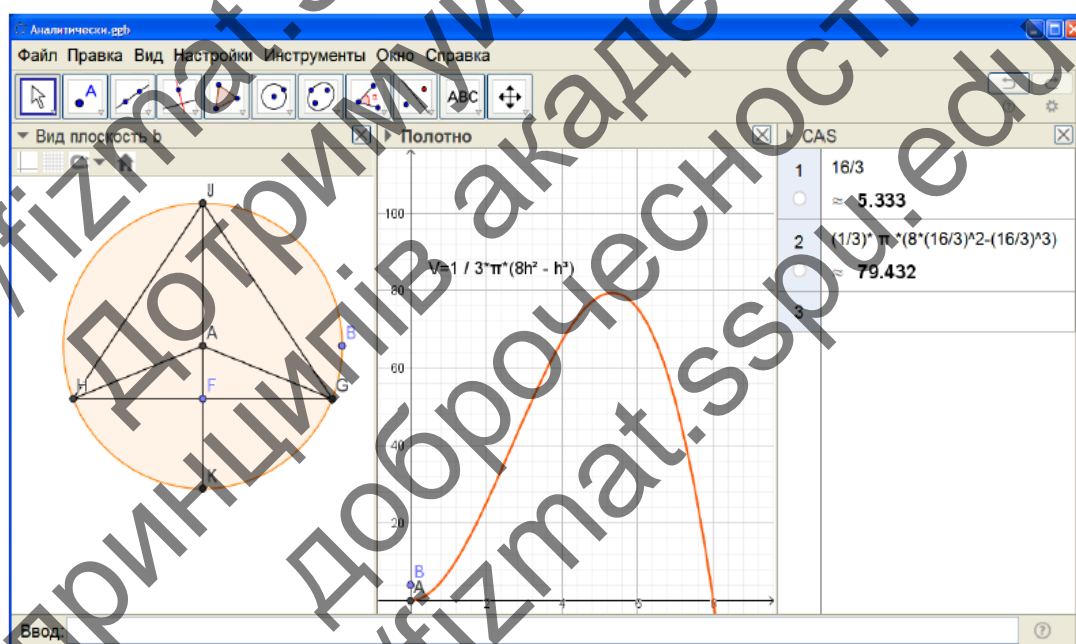


Рис. 2.25. Графік залежності об'єму конуса від його висоти, побудований аналітично

З метою розвитку критичного мислення школярів організуємо дослідження за допомогою динамічних властивостей програми GeoGebra. Побудуємо динамічну конструкцію, що зазначена в умові задачі, а саме, конус вписаний у кулю (рис. 2.26). При переміщенні базової точки – точки F, яка є

центром основи конуса, конструкція буде динамічно змінюватися. Спостерігаючи за змінами значення об'єму конуса та його висоти, критично оцінивши результати спостереження, зробимо висновок: максимальне значення об'ємконуса 79,43 досягається при значенні висоти конуса 5,33 [17].

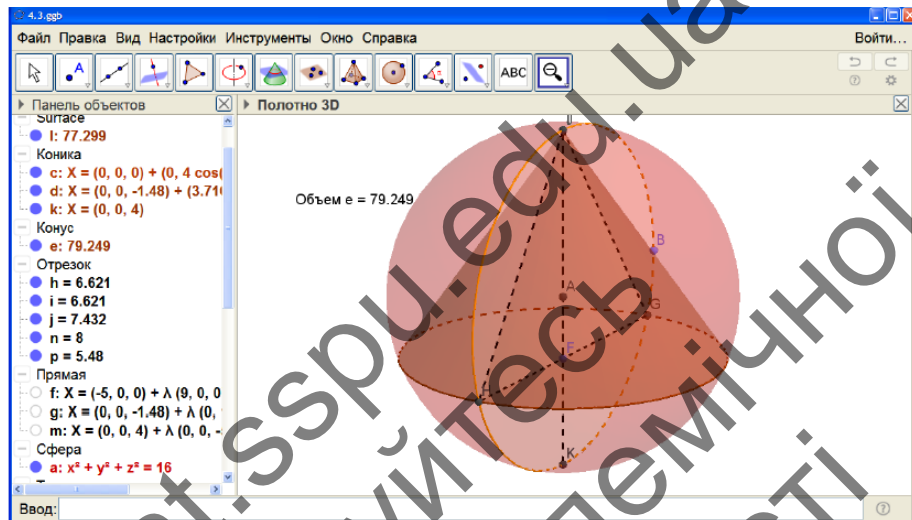


Рис.2.26. Модель для спостереження за залежністю значення об'єму конуса від його висоти

Дослідження можна організувати іншим шляхом, наприклад, побудувавши емпіричний графік залежності між висотою конуса та його об'ємом за допомогою комп'ютерного інструменту Динамічний слід (рис. 2.27).

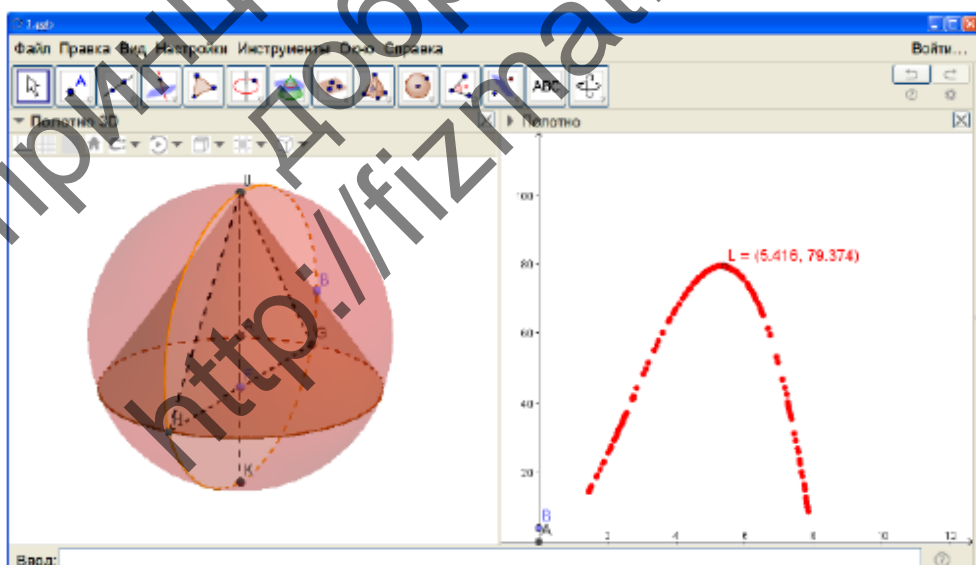


Рис.2.27. Побудова емпіричного графіка залежності між висотою конуса та його об'ємом (інструмент Динамічний слід)

Використання інструменту Динамічний слід передбачає побудову кривої, точкам якої притаманна певна властивість. Якщо задіяти цей інструмент, то під час динамічних змін вихідної конструкції обрана точка буде залишати слід, який і буде геометричним місцем точок з потрібною нам властивістю [177].

Такий слід може залишати додатково побудована точка  $L$ , абсциса якої дорівнює значенню висоти конуса, а ордината дорівнює значенню об'єму конуса. Зміна положення точки  $A$  зумовить зміну положення точки  $F$ , а побудований слід точки  $L$  і буде емпіричним графіком залежності значення об'єму конуса від його висоти (рис. 2.28). Екстремум цієї функції буде очевидним. Проаналізувавши результати такого дослідження, учні критично сприймуть графік цієї залежності, зробивши висновки про наявність екстремуму, його значення та єдиність [17].

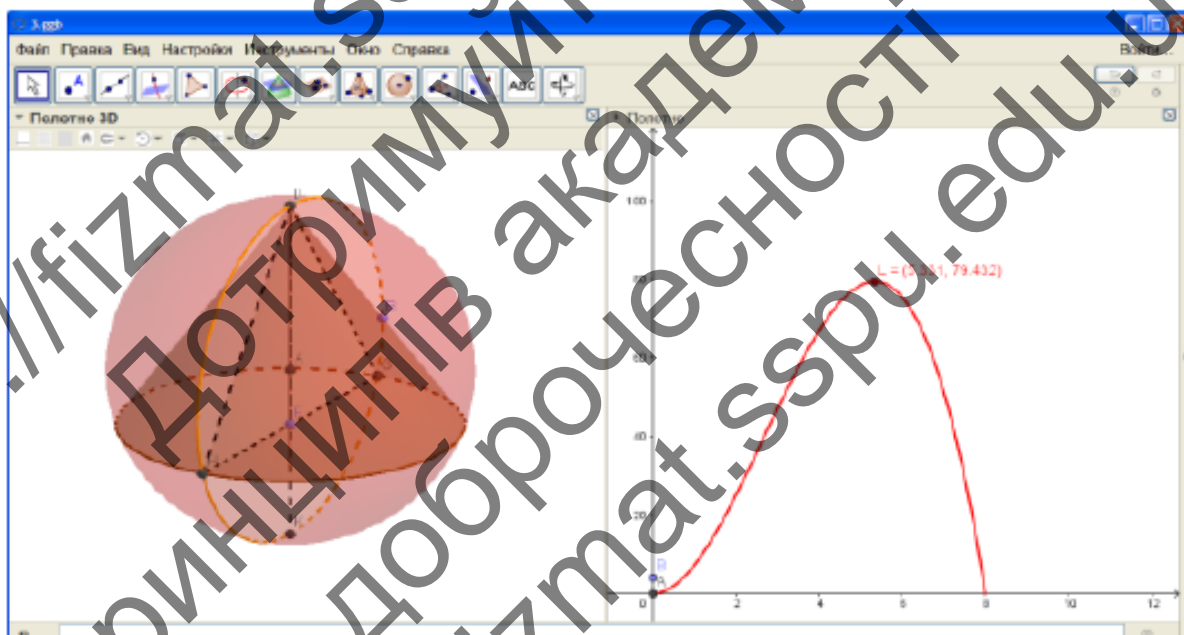


Рис.2.28. Побудова емпіричного графіка залежності між висотою конуса та його об'ємом (інструмент Локус)

При організації дослідження можна також скористатися інструментом Локус, який автоматично побудує емпіричну функцію об'єму (рис. 2.29). Різниця полягає у форматі побудови графіку залежності: після застосування інструменту Локус графік буде зображено у вигляді неперервної кривої, а після використання інструменту Динамічний слід графік буде подано як точкове зображення [17].

При організації дослідження можна також побудувати таблицю значень емпіричної функції (рис. 2.29). Створюється таблиця, до якої заносяться значення висоти конуса та його об'єму. Під час зміни положення базової точки така таблиця заповнюється відповідними наборами значень. Критичний аналіз цих значень дозволяє зрозуміти природу залежності між висотою конуса та його об'ємом, зробити висновок про екстремальне значення об'єму та відповідне йому значення висоти конуса. Від учнів вимагається наявність уміння побачити зв'язок між вхідними даними і результатом без застосування похідної, знаючи лише означення конуса та його об'єму [17].

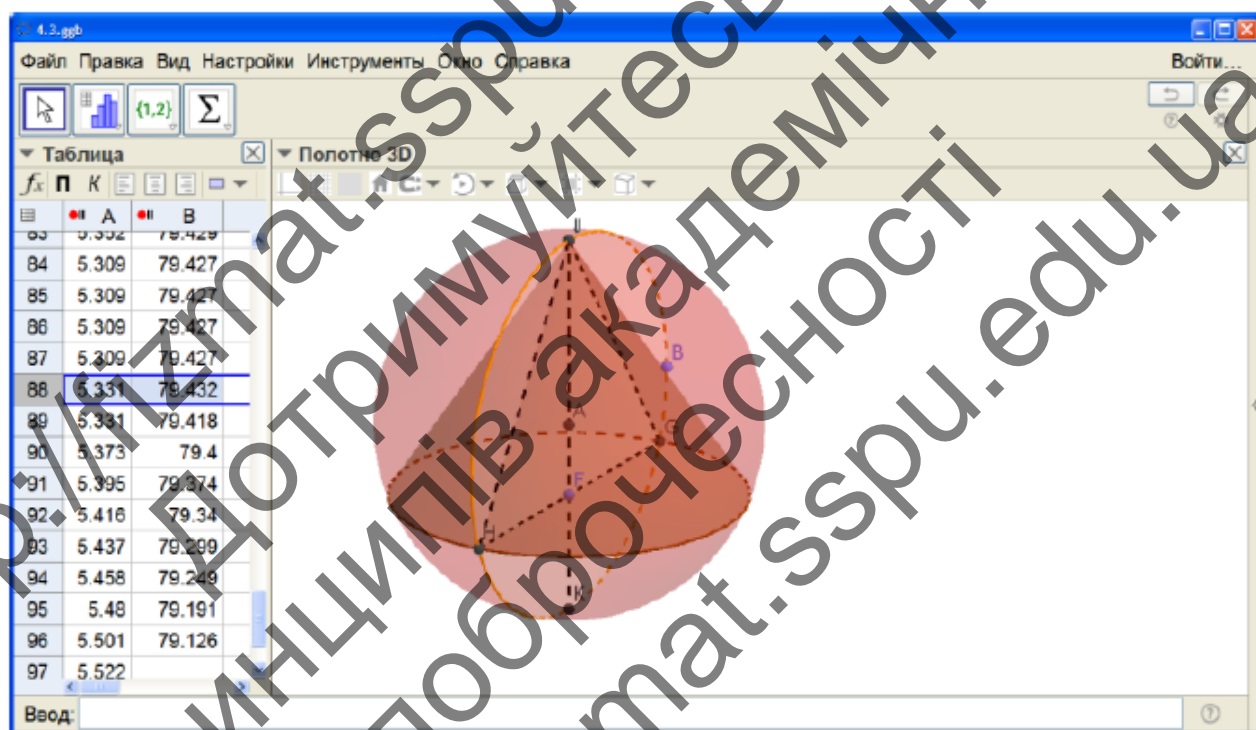


Рис.2.29. Виведенні таблиці значень емпіричної функції

Такий підхід до розв'язування геометричних задач на екстремум, на думку М. Г. Друшляк, не забезпечує в повній мірі знання математичних формул, понять чи функціональних залежностей, але є тим інструментом, який сприяє формуванню у школярів дослідницьких якостей, математичного та критичного мислення [17].

Підтвердженням цієї ідеї є те, що при організації дослідження під час комп'ютерного експерименту розвиваються такі виділені нами структурні

компоненти критичного мислення, як здатність самостійно аналізувати інформацію, вміння аргументувати свої думки, наявність розумної долі сумнівів, прагнення до пошуку раціонального способу розв'язування задачі.

### 2.3. Уроки розвитку критичного мислення «Теорема про три перпендикуляри» з комп'ютерною підтримкою, «Двогранний кут. Перпендикулярність площин» (10 клас)

Теорема про три перпендикуляри вивчається в розділі «Перпендикулярність прямих і площин», який можна умовно поділити на три блоки (рис. 2.30).

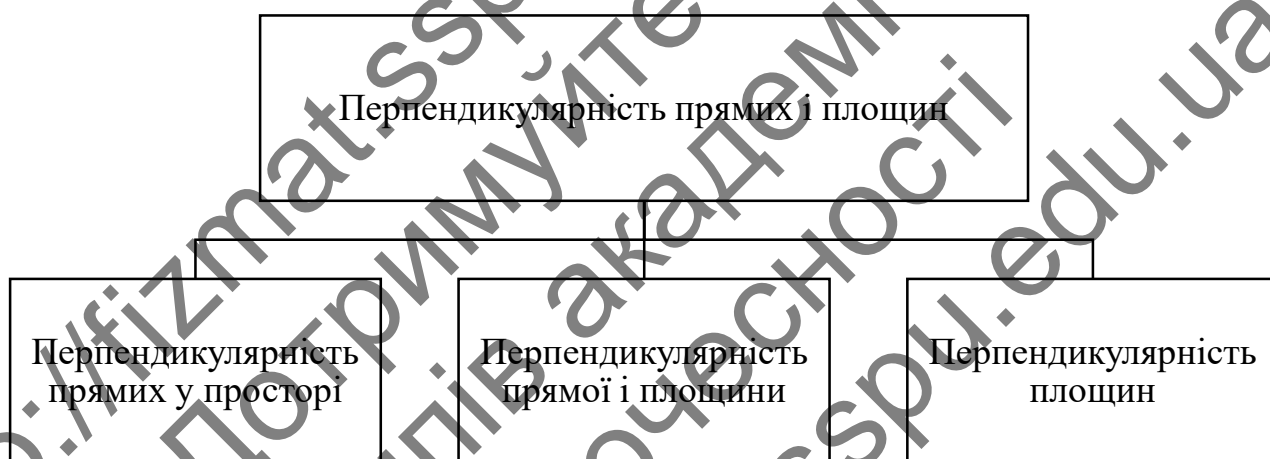


Рис. 2.30. Розділ «Перпендикулярність прямих і площин»

Методична схема вивчення навчального матеріалу наступна: по-перше, вводиться означення перпендикулярності відповідних об'єктів, по-друге, формулюється і доводиться ознака їх перпендикулярності. Для прямої і площини варто розглянути задачу на побудову перпендикулярних прямої і площини, при цьому доводяться єдиність такої площини та властивість перпендикулярної прямої і площини.

Вводячи поняття перпендикулярності прямих у просторі, потрібно актуалізувати відповідний матеріал з планіметрії і стереометрії. Відомі два підходи до означення перпендикулярних прямих (рис. 2.31).



Рис. 2.31. Означення перпендикулярних прямих

Аналіз підручників «Математика», «Геометрія» для 10 класу показав, що автори Істер О.С. [19], Нелін Є.П. [36], Бурда М.І. [12] притримуються означення (1), Мерзляк А.Г. [28], Бевз Г.П. [9] – означення (2).

Зауважимо, що означення (2) описує також прямі, які не перетинаються, зокрема мимобіжні прямі, тому не достатньо повно описує поняття «перпендикулярні прямі в просторі».

Аналогічно існує і два підходи до означення перпендикулярних прямої і площини (рис. 2.32).

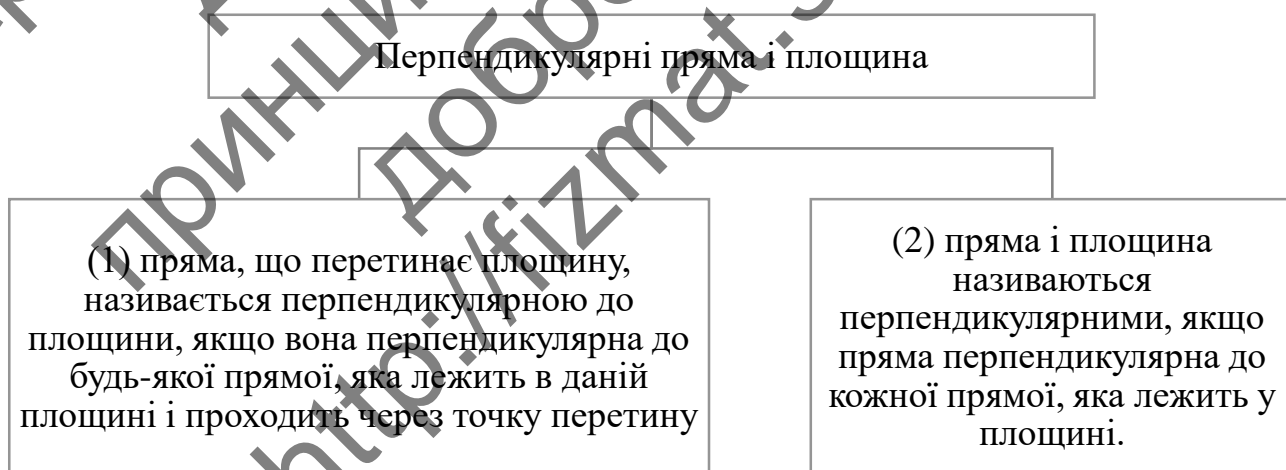


Рис. 2.32. Означення перпендикулярних прямої і площини

У підручниках «Математика», «Геометрія» для 10 класу авторів Істера О.С. [19], Бевза Г.П. [9], Бурди М.І. [12] наведено означення (1), Мерзляка А.Г. [28], Неліна Є.П. [36] – означення (2).

Перевага означення (1) в тому, що включення умови перетину прямої і площини в означення виключає необхідність доводити цей факт. Означення (2) можна запропонувати в класах з поглибленим вивченням математики, доповнивши його умовою перетину прямої і площини (умова проходження прямої площини через точку перетину прямої і площини тут не вимагається). Зауважимо, що подібне означення полегшить доведення деяких теорем, зокрема теореми про три перпендикуляри, і розв'язування задач.

Що стосується означення перпендикулярних площин, то за аналогією з означенням перпендикулярних прямих виникає бажання означити їх як такі, що перетинаються під прямим кутом. Однак у такого роду означенні використано ще неозначене на даний момент поняття «кут між площинами».

Різні автори підручників по-різному знаходять вихід з такої ситуації. Наприклад, О. С. Істер пропонує таке означення: «Дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо третя площина, перпендикулярна до лінії перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих» [19, с 170].

Далі за логікою викладу навчального матеріалу потрібно ознайомити учнів з теоремами-ознаками перпендикулярності в просторі двох прямих, прямої і площини, двох площин, при чому ці ознаки можна доводити в різний спосіб. Найчастіше при доведенні використовуються паралелограми або рівні трикутники. А при доведенні ознаки перпендикулярності прямої і площини, теореми про два перпендикуляри і теореми про три перпендикуляри, наприклад, можна використати векторний метод.

В підручнику Погорєлова О.В. «Геометрія 10-11» розглядається ознака перпендикулярності двох прямих у просторі. Автори сучасних підручників геометрії Істер О.С. [19], Бевз Г.П. [9], Бурда М.І. [12], Мерзляк А.Г. [28], Нелін Є.П. [36] не пропонують дану ознаку. На наш погляд це виправдано, бо ознака перпендикулярності двох прямих майже не використовується при розв'язуванні задач.

Важлива роль при вивченні даного розділу відводиться навчальному матеріалу, що стосується перпендикуляра і похилої до площини та теореми про три перпендикуляри, яка знаходить своє застосування при розв'язуванні задач, пов'язаних з многогранниками та тілами обертання.

Щодо теореми про три перпендикуляри, то існують два підходи до її формулювання: або розглядаються дві взаємно обернені теореми, або пропонується одна теорема про три перпендикуляри, до формулювання якої входять пряме і обернене твердження. В такому випадку при доведенні теореми варто виділити дві частини – достатність та необхідність.

Доцільно звернути увагу старшокласників на той факт, що хоча в теоремі і потрібно довести перпендикулярність двох прямих у просторі, але скористатися ознакою перпендикулярності двох прямих у просторі тут не можна. Варто використати іншу схему доведення: виконати додаткову побудову і скористатися властивістю перпендикулярних прямих і площин, ознакою та означенням перпендикулярності прямої і площини.

Схема доведення теореми про три перпендикуляри часто знаходить своє відображення в розв'язаннях задач. Тому важливо, щоб школярі вміли доводити теорему про три перпендикуляри.

### **Тема «Теорема про три перпендикуляри»**

#### **Мета уроку:**

*навчальна:*

- розкрити сутність теореми про три перпендикуляри;
- ознайомити учнів із різними методами доведення теореми про три перпендикуляри;
- сформулювати вміння застосовувати теорему про три перпендикуляри до розв'язування задач на обчислення, задач на доведення;
- навчити учнів читати рисунки і робити відповідні побудови;
- сформулювати в учнів компоненти критичного мислення: пояснювати результати, відстоювати свою точку зору, наводити аргументи, критично оцінювати отримані результати.



*розвиваюча:*

- сприяти розвитку спілкування, як метода наукового пізнання, аналітико-синтетичного мислення, змістовної пам'яті і довільної уваги;
- розвивати навички дослідницької діяльності (аналіз і узагальнення отриманих результатів);
- розвивати критичне мислення учнів.
- виховна:
- розвивати в учнів комунікативні уміння, уміння працювати в групах;
- сприяти розвитку творчої діяльності учнів, потреби до самоосвіти.

*Тип уроку:* урок засвоєння нових знань.

*Наочність і обладнання:* мультимедійна установка, комп'ютер, презентація, мобільний телефон, сканер QR-кодів, YouTube, портал Всеосвіта.

### **Хід уроку**

#### **I. Організаційний момент (3 хв).**

Привітання з учнями. Анонсування теми, мети і плану уроку.

#### **II. Узагальнення й систематизація знань учнів з теми (5 х).**

Повторення теоретичних питань з теми, а саме, перпендикулярність прямих, перпендикуляр і похила, залежність між похилими, проведеними з однієї точки, та їх проєкціями, пряма, перпендикулярна до площини, ознаку перпендикулярності прямої до площини, теорема про три перпендикуляри, теорема Піфагора, співвідношення в прямокутному трикутнику, властивість медіани рівнобедреного трикутника, проведеної до основи.

Для учнів, що мають низький та середній рівні навчальних досягнень, вчитель роздає QR-коди з опорними схемами, щоб полегшити їх процес актуалізації опорних знань з теми. Іноді їх пропонують у такому вигляді (рис. 2.33 ).

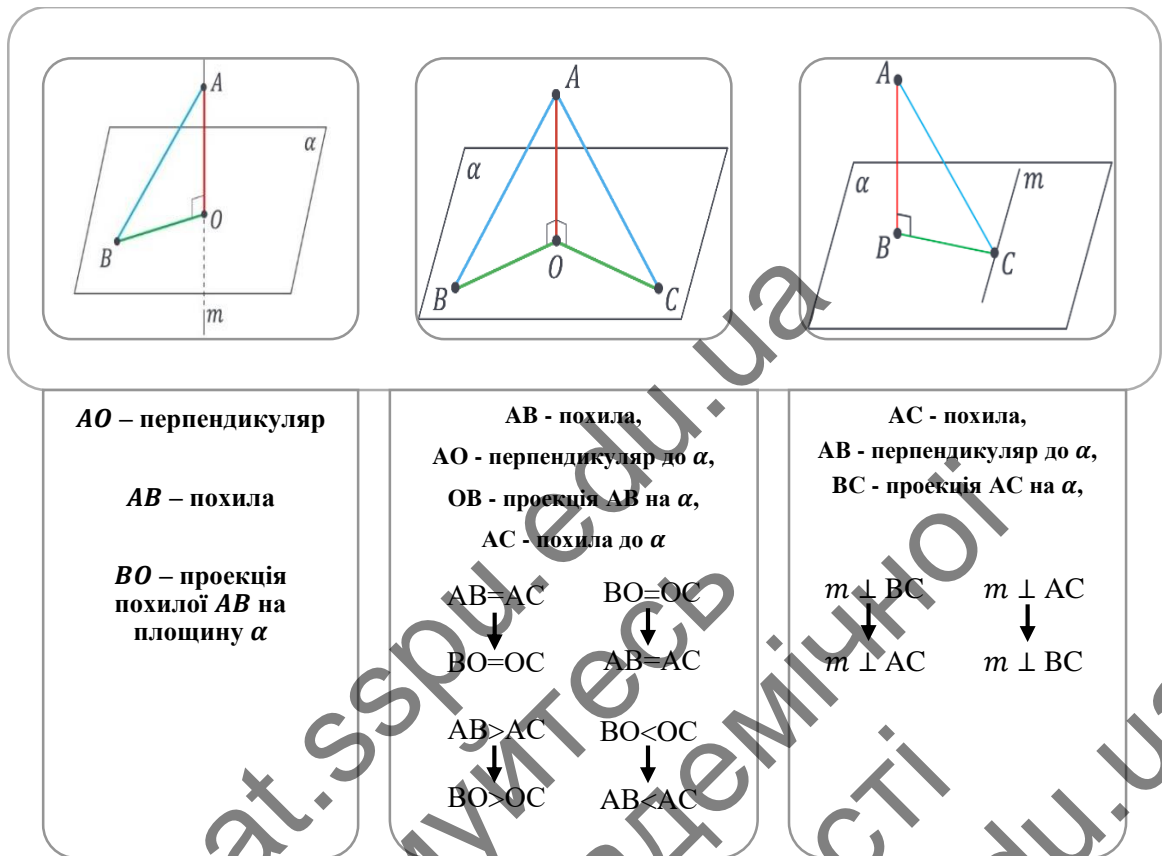


Рис. 2.33. Опорна схема з теми «Теорема про три перпендикуляри»

Вчитель задає учням запитання:

– Чи правильними є такі твердження:

1. Через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до цієї прямої.
2. Прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні між собою.
3. Якщо пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного до цієї точки, то вона є дотичною до кола.
4. Якщо площина перпендикулярна до даної площини, то вона перпендикулярна і до довільної прямої, паралельної цій площині.
5. Якщо площина і пряма перпендикулярні до однієї й тієї самої площини, то вони паралельні між собою.

В той же час, вчитель пропонує усні завдання для учнів, що мають достатній та високий рівень знань:

1. Поясніть, як можна розмістити кожна точку похилої АВ довжиною 27 км на відрізку ВО завдовжки 1 см (рис. 2.34)?

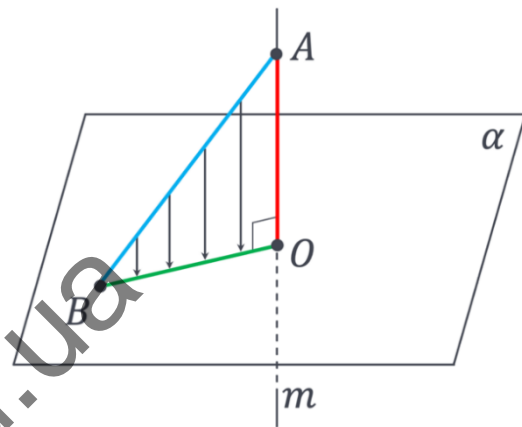


Рис. 2.34

Поясніть, як мають бути розташовані:

*Вісь обертання дверей і площина підлоги (2.35)?*

*Вісь обертання колеса велосипеда і площина колеса*



Рис. 2.35

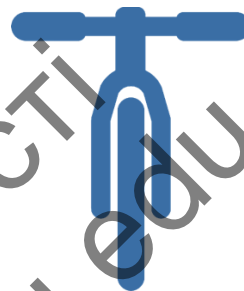
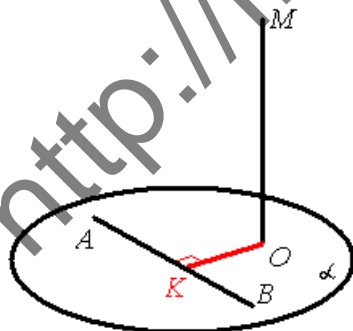


Рис. 2.36

Коментар. Під час усного опитування розвиваються такі компоненти критичного мислення як уміння бачити логічні порушення у твердженнях та наявність розумної долі сумнівів.

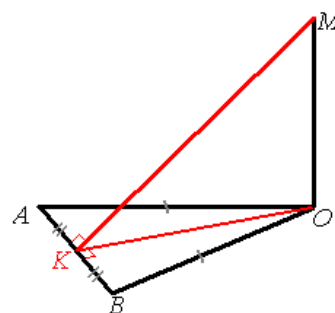
Розв'язування усних задач за готовими рисунками.

*Задача 1.* На готових рисунках побудуйте відрізок, що є відстанню від точки О до прямої АВ.



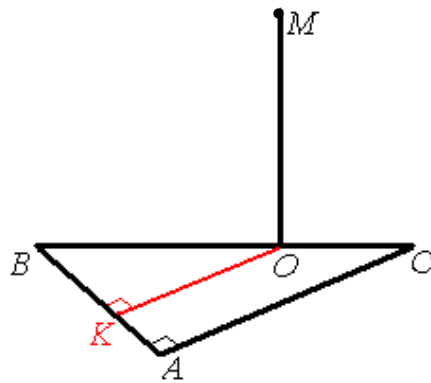
$MO \perp \alpha$

Рис. 2.37



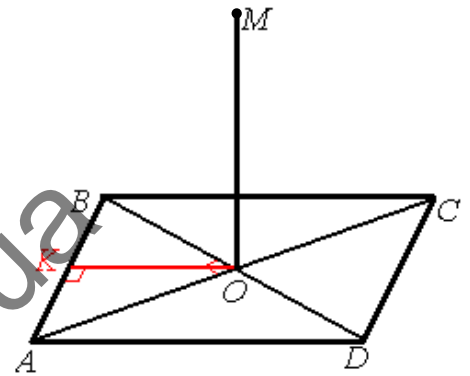
$MO \perp (AOB), AO = BO$

Рис. 2.38



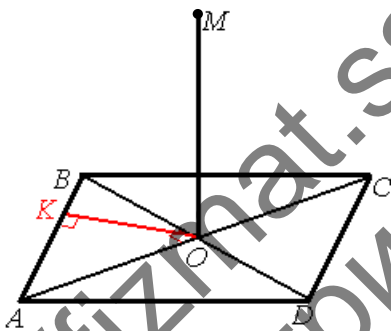
$MO \perp (ABC)$ ,  $\angle CAB = 90^\circ$

Рис. 2.39



$MO \perp (ABC)$ ,  $ABCD$  – квадрат

Рис. 2.40



$MO \perp (ABC)$ ,  $ABCD$  – ромб

Рис. 2.41

Пояснення учнів до задач за готовими рисунками можуть бути такими:

- 1) до рисунку 2.39. У трикутнику  $AOB$  за умовою задачі  $AO = OB$ , то за означенням він є рівнобедреним. За властивістю рівнобедреного трикутника медіана є висотою, тому достатньо провести медіану  $OK$  до сторони  $AB$ . Отже,  $OK \perp AB$ ;
- 2) до рисунку 2.40. За умовою задачі  $\angle CAB = 90^\circ$ , тому за означенням трикутник  $ABC$  – прямокутний. Оскільки  $AC \perp AB$  (за умовою),  $OK \perp AB$  (необхідно побудувати), то використовуючи теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої, достатньо побудувати  $OK \parallel AC$

## Задача 2.

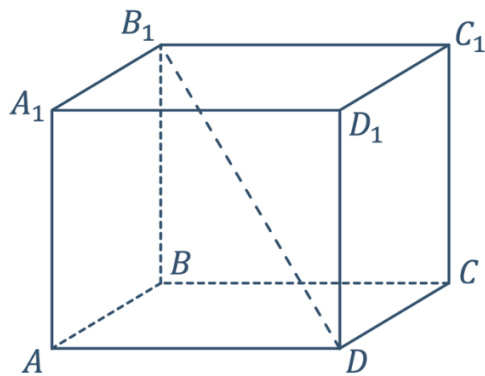


Рис. 2.42

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  -  
прямокутний паралелепіпед.  
Назвіть проекцію відрізка  $DB_1$  на  
площину:

$A_1 B_1 C_1$   
 $AA_1 B_1$   
 $ABC$   
 $CBB_1$   
 $DCC_1$

## III. Перевірка домашнього завдання (7 хв).

Вчитель задає запитання: «Враховуючи розв'язання задач за готовими рисунками, чи знайшов хтось помилку у задачі, яка була задана додому?»

Коментар. Під час перевірки домашнього завдання і цієї ситуації, яку створив вчитель та уроці, розвивається такий компонент критичного мислення як здатність самостійно аналізувати інформацію.

Один учень на дошці відтворює на дошці домашню задачу на побудову (умови на слайді, рис. 2.43).

<p>Дано: <math>M \notin (ABC)</math>, <math>MN \perp (ABC)</math>, <math>\triangle ABC</math>- рівносторонній Провести через точку <math>M</math> перпендикуляр до прямої <math>AB</math></p>	<p>Дано: <math>M \notin (ABC)</math>, <math>N \in AB</math>, <math>MN \perp (ABC)</math>, <math>\triangle ABC</math>-прямокутний Провести через точку <math>M</math> перпендикуляри до прямих <math>AC</math> і <math>BC</math></p>	<p>Дано: <math>M \notin (ABC)</math>, <math>N \in AB</math>, <math>MN \perp (ABC)</math>, <math>\triangle ABC</math>- рівнобедрений Провести через точку <math>M</math> перпендикуляр до прямої <math>BC</math></p>

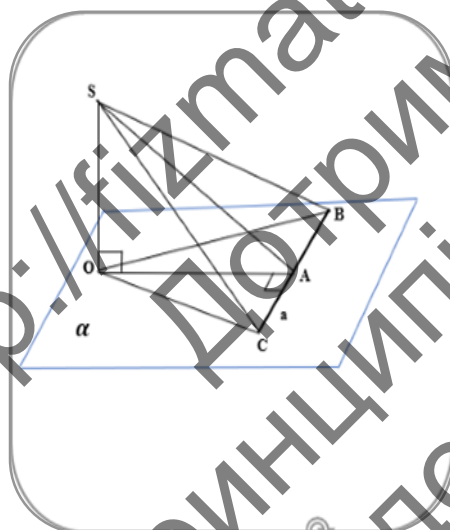
Рис. 2.43. Домашнє завдання

Ще одним завданням додому було знайти різні способи доведення теореми про три перпендикуляри. Троє учнів демонструють на дошці три способи доведення: методом від супротивного (рис. 2.44), із використанням властивостей рівнобедреного трикутника (рис. 2.45), із використанням ознаки перпендикулярності прямої і площини (рис. 2.46).

Коментар. При розгляді різних способів доведення однієї і тієї ж теореми, а саме, теореми про три перпендикуляри розвивається такий компонент критичного мислення як прагнення до пошуку раціонального способу розв'язування задачі.

### Теорема про три перпендикуляра

(доведення способом від супротивного)



Дано:  $a \subset \alpha, a \perp OA, S \notin \alpha, SO \perp \alpha, O \in \alpha$

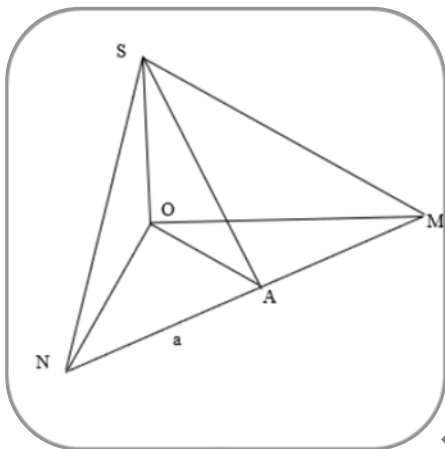
Довести:  $a \perp AS$

Доведення

1. Припустимо, що пряма  $a$  не перпендикулярна до  $AS$ .
2.  $S \notin \alpha$ , якщо  $SB \perp a$ , то  $SA > SB$ .  
(з однієї точки можна провести не більше однієї прямої, що перпендикулярна до даної).
3. До цієї суперечності нас привело припущення, що  $a$  не перпендикулярна до  $AS$ . Отже,  $a \perp AS$ .

Рис. 2.44. Доведення теореми про три перпендикуляри методом від супротивного

## Теорема про три перпендикуляра (властивості рівнобедреного трикутника)



Дано:  $a \subset \alpha, a \perp OA$

Довести:  $a \perp AS$

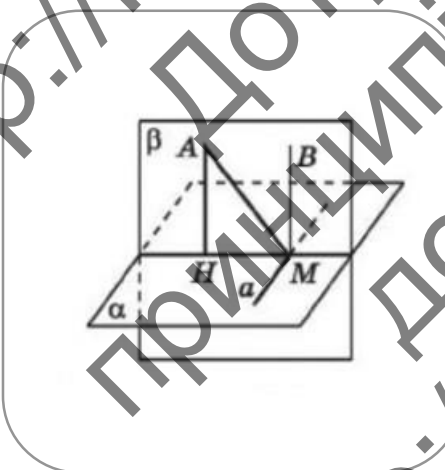
Доведення

Від точки  $A$  відкладемо рівні відрізки:  $AM = AN$ . Точки  $M$  і  $N$  з'єднаємо з точками  $O$  і  $S$ .

В трикутнику  $MON$   $OA$  є одночасно висотою і медіаною, цей трикутник рівнобедрений:  $OM = ON$ . Прямокутні трикутники  $OSM$  і  $OSN$  рівні (за двома катетами). З рівності трикутників випливає:  $SM = SN$  і  $SA$  – медіана рівнобедреного трикутника  $MSN$ . Отже,  $AS$  одночасно і висота цього трикутника. Тобто,  $SA \perp MN$ .

Рис. 2.45. Доведення теореми про три перпендикуляри із використанням властивості рівнобедреного трикутника

## Теорема про три перпендикуляра (ознака перпендикулярності прямої і площини)



Дано:  $a \subset \alpha, a \perp HM$

Довести:  $a \perp AM$

Доведення

Проведемо пряму  $BM$  паралельно прямій  $AH$ . За властивістю взаємно перпендикулярних прямої і площини  $BM \perp a$ .

Проведемо через прямі  $BM$  і  $HM$  площину  $\beta$ .

Оскільки  $a \perp BM$  і  $a \perp HM$ , то за ознакою перпендикулярності прямої і площини  $a \perp \beta$ . Тому пряма  $a$  перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині  $\beta$  і проходить через точку  $M$ , зокрема до прямої  $AM$ . Тобто,  $a \perp AM$ .

Рис. 2.46. Доведення теореми про три перпендикуляри із використанням ознаки перпендикулярності прямої і площини

### IV. Застосування знань при розв'язуванні вправ.

*Розв'язування задач за готовими рисунками.*

*Задачі №1-3.* Вчитель розділяє учнів на чотири команди, кожна група працює над задачами за готовими рисунками (рис.2.47) самостійно, а потім

результати обговорюються. Розв'язання даних задач представлено на рисунках 2.48-2.50.

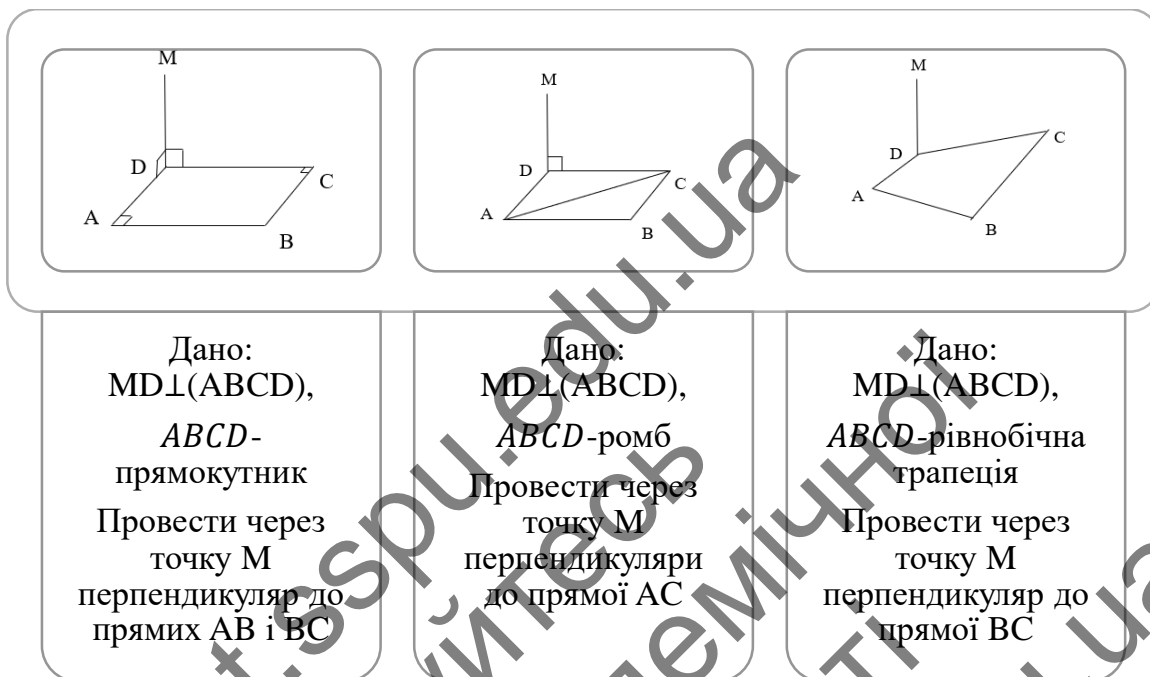


Рис. 2.47. Задачі за готовими рисунками

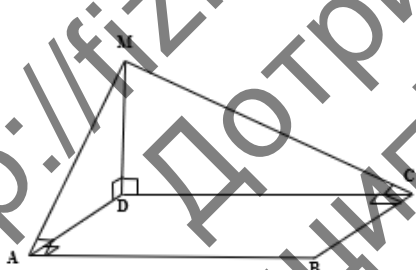


Рис. 2.48.

**Розв'язання задачі №1**

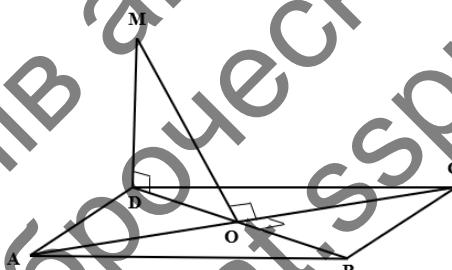


Рис. 2.49.

**Розв'язання задачі №2**

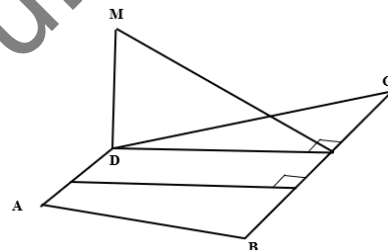


Рис. 2.50.

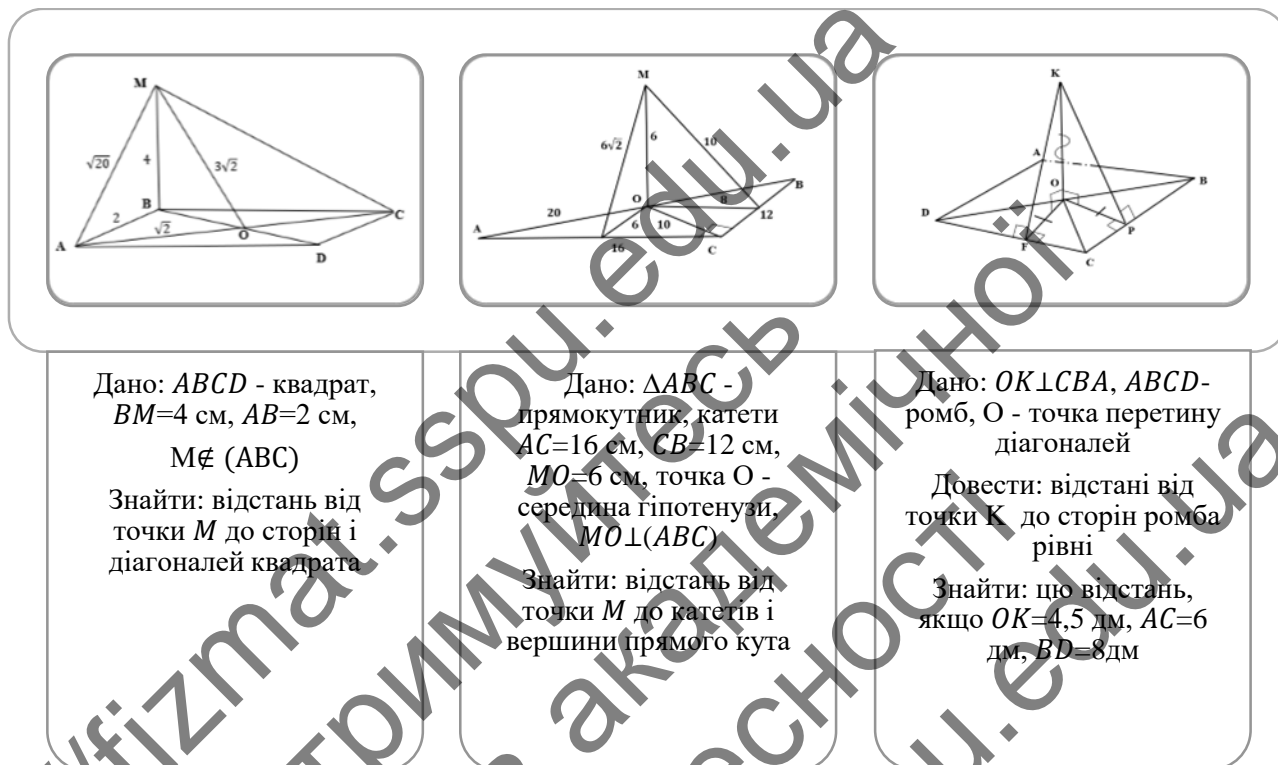
**Розв'язання задачі №3**

Коментар. Під час роботи над задачами, організованої у такий спосіб, розвиваються такі компоненти критичного мислення як здатність самостійно аналізувати інформацію, вміння бачити логічні порушення у твердженнях, вміння аргументувати свої думки, наявність розумної долі сумнівів.

*Задача №4* (рис. 2.51). Учні працюють над задачею колективно, досліджують, аналізують і самостійно записують розв'язання в зошити.



Задача №5-6 (рис.2.51). Вчитель разом з учнями аналізує умову задачі і разом складають план розв'язання. Учні з високим рівнем навчальних досягнень працюють далі над задачами самостійно. Учні з низьким та середнім рівнями навчальних досягнень працюють разом із вчителем на дошці.



Дано:  $ABCD$  - квадрат,  
 $BM=4$  см,  $AB=2$  см,  
 $M \notin (ABC)$   
 Знайти: відстань від  
 точки  $M$  до сторін і  
 діагоналей квадрата

Дано:  $\triangle ABC$  -  
 прямокутник, катети  
 $AC=16$  см,  $CB=12$  см,  
 $MO=6$  см, точка  $O$  -  
 середина гіпотенузи,  
 $MO \perp (ABC)$   
 Знайти: відстань від  
 точки  $M$  до катетів і  
 вершини прямого кута

Дано:  $OK \perp CBA$ ,  $ABCD$ -  
 ромб,  $O$  - точка перетину  
 діагоналей  
 Довести: відстані від  
 точки  $K$  до сторін ромба  
 рівні  
 Знайти: цю відстань,  
 якщо  $OK=4,5$  дм,  $AC=6$   
 дм,  $BD=8$  дм

Рис. 2.51. Умови задач №4, №5, №6

## V. Виконання тесту із використанням власних мобільних телефонів

(8 хв.)

Вчитель пропонує учням виконати тест з теми на порталі Всеосвіта за посиланням <https://vseosvita.ua/test/perpendykuliar-i-pokhylya-teorema-pro-try-perpendykuliary-420105.html?rl=1671081>, яке закодовано в QR-код. Максимум 12 балів, завдання 1-10 оцінюються в 1 бал, завдання 11 оцінюється в 2 бали.

Коментар. Під час проходження педагогічної практики учням 10-11 класів Косівщинського ліцею імені Лесі Українки Степанівської селекційної ради було запропоновано виконання даного тесту, результати якого подано у таблиці 2.1.:

Аналізуючи дані, представлені у таблиці, бачимо, що учні 10 класу, які проходили тестування відразу після вивчення теми, мають нижчий показник розвитку критичного мислення, ніж учні 11 класу, які вивчали дану тему

минулого року. Це пояснюється тим, що одинадцятикласники мають більший рівень зрілості та розвинутіший когнітивний апарат, порівняно з учнями 10 класу. Крім того, вони мають більше практичного досвіду на застосування теореми про три перпендикуляри, швидко аналізують та розуміють математичні концепції, застосовують їх в різних ситуаціях, вміють знаходити та виправляти помилки. Саме розвинене критичне мислення дозволяє краще розуміти та застосовувати теорему, швидше та ефективніше виконувати тести.

Таблиця 2.1.

### Результати проходження учнями 10-11 класів тесту

Рівні	Учні 10 класі		Учні 11 класу	
	Осіб	%	Осіб	%
Високий	2	13	4	22
Достатній	5	31	5	28
Середній	7	43	8	44
Початковий	2	13	1	6
Усього	16		18	

Наочне уявлення результатів представлено стовпчастою діаграмою (рис. 2.52):

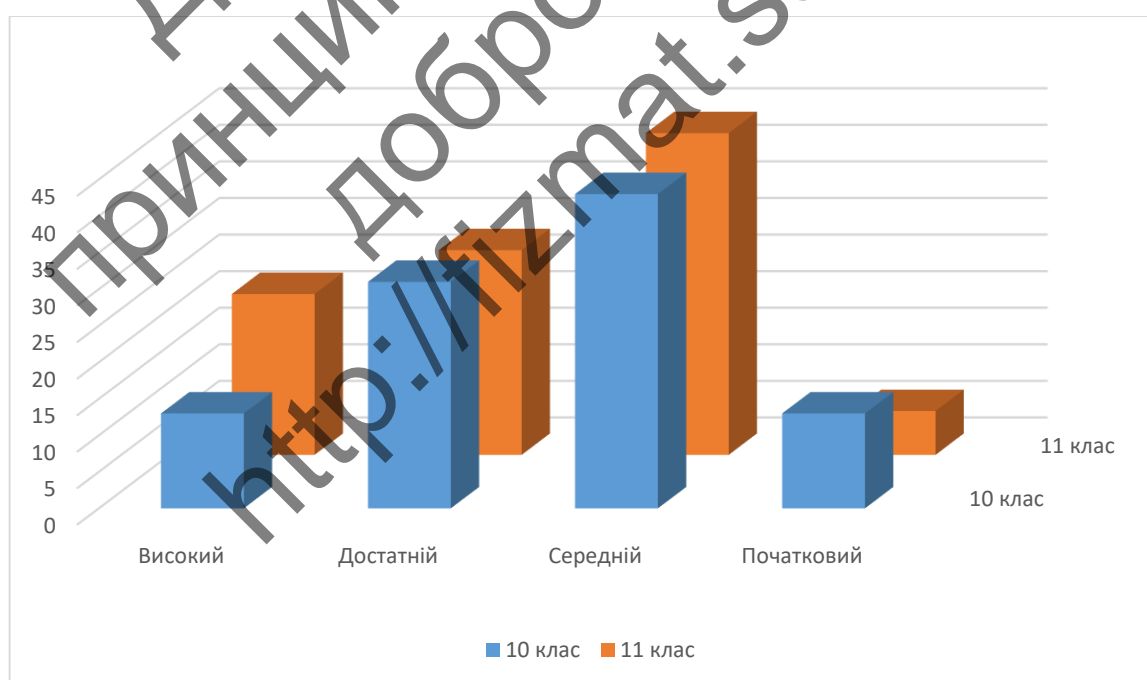


Рис. 2.52. Аналіз результатів виконання тесту

## VI. Підсумок уроку.

Вчитель пропонує елементи рефлексії наприкінці уроку, а саме, обрати слоган до теореми про три перпендикуляри (рис. 2.53).

Знання теореми про три перпендикуляри гарантує вам майбутні гонорари

Якщо ти будеш добре знати теорему про три перпендикуляри, то зможеш її практично застосувати

Будеш знати теорему про три перпендикуляри, зможеш у житті розв'язувати проблеми

Теорему про три перпендикуляри добре будеш знати, будь-які задачі зможеш розв'язати

Рис. 2.53. Слогани до теореми про три перпендикуляри

## VII. Домашнє завдання.

*Завдання 1.* Передивитися відео «Всеукраїнська школа онлайн. 10 клас. Геометрія. Теорема про три перпендикуляри, формулювання і приклади застосування» за посиланням

[https://youtu.be/E7O\\_VVaI7NM?si=OH0RSa4XKH0ZZwvD](https://youtu.be/E7O_VVaI7NM?si=OH0RSa4XKH0ZZwvD).

*Завдання 2.* Виконати вправи за готовими рисунками (рис. 2.54)

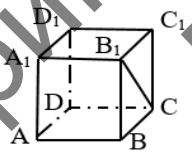
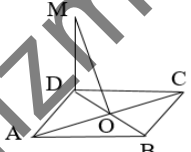
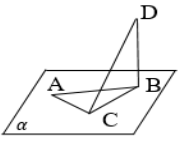
		
<p><math>ABCD A_1 B_1 C_1 D_1</math>- куб. Доведіть: <math>B_1 C \perp DC</math></p>	<p><math>ABCD</math>- ромб, <math>MD \perp ABC</math> Доведіть: <math>MO \perp AC</math></p>	<p><math>\angle A = 30^\circ, \angle ABC = 60^\circ, BD \perp \alpha</math> Доведіть: <math>DC \perp AC</math></p>

Рис. 2.54. Задачі за готовими рисунками

Завдання 3. Готуємося до ЗНО (рис. 2.55-2.57).

$ABC$  – прямокутний трикутник ( $\angle C = 90^\circ$ ,  $K$  – середина  $BC$ ). Відрізок  $AP$  перпендикулярний до площини  $ABC$ . Укажіть відстань від точки  $P$  до прямої  $CB$ .

А	Б	В	Г	Д
$PA$	$AC$	$PB$	$PC$	$PK$

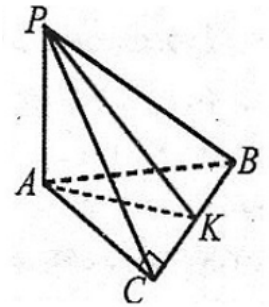


Рис. 2.55. Завдання №1 ЗНО з теми «Теорема про три перпендикуляри»

З вершини  $A$  квадрата  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $AK$  завдовжки 6 см. Знайти відстань від точки  $K$  до вершини  $C$  квадрата, якщо його сторона дорівнює  $4\sqrt{2}$  см.

А	Б	В	Г	Д
9 см	10,5 см	17 см	14 см	10 см

Рис. 2.56. Завдання №2 ЗНО з теми «Теорема про три перпендикуляри»

$AP$  перпендикуляр до площини квадрата  $ABCD$ . Побудуйте перпендикуляр, проведений із точки  $P$  до прямої  $BD$ .

Рис. 2.57. Завдання №3 ЗНО з теми «Теорема про три перпендикуляри»

**Тема «Двогранний кут. Перпендикулярність площин»**

**Мета уроку:**

*навчальна:*

- увести поняття двогранного кута, лінійного кута двогранного кута, перпендикулярності площин;
- сформулювати вміння застосовувати ознаку перпендикулярності площин;
- сформулювати в учнів компоненти критичного мислення: пояснювати результати, відстоювати свою точку зору, наводити аргументи, критично оцінювати отримані результати

*розвиваюча:*

- сприяти розвитку спілкування, як метода наукового пізнання, аналітико-синтетичного мислення, змістовної пам'яті і довільної уваги;
- розвивати навички дослідницької діяльності (аналіз і узагальнення отриманих результатів);
- розвивати критичне мислення учнів.

*виховна:*

- сприяти розвитку творчої діяльності учнів, потреби до самоосвіти.

*Тип уроку:* урок засвоєння нових знань.

*Наочність і обладнання:* мультимедійна установка, комп'ютер, презентація.

**Хід уроку**

### **I. Організаційний момент (2 хв)**

Привітання з учнями. Анонсування теми, мети і плану уроку.

### **II. Перевірка домашнього завдання (5 х)**

Трое учнів записують на дошці розв'язання домашніх задач для наступного обговорення, клас пише графічний диктант.

Графічний диктант

Визначте, чи є правильним твердження:

ут між прямою і площиною це кут між цією прямою та її проекцією на площину;

якщо пряма паралельна площині, то кут між цією прямою і площиною дорівнює  $0^\circ$ ;

якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між цією прямою і площиною дорівнює  $90^\circ$ ;

якщо пряма перетинає паралельні площини, то перетинає їх під різними кутами;

площина, що перетинає паралельні прямі, перетинає їх під однаковими кутами.

Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . (рис. 2.58) Чи є правильним, що:

кут між  $CC_1$ , і площиною  $ABC$  дорівнює  $90^\circ$ ;

ут між прямою  $B_1 D_1$  і площиною  $ABC$  дорівнює  $0^\circ$ ;

кут між прямою  $DC_1$  і площиною  $ABC$  дорівнює  $0^\circ$ ;

у

ут між прямою  $AC$  і площиною  $BB_1 D_1$  дорівнює  $90^\circ$ .

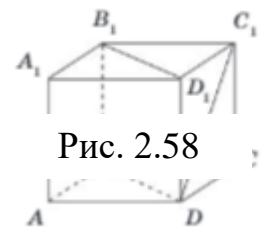


Рис. 2.58

Коментар. Завдання графічного диктанту дозволяють розвинути в учнів уміння бачити логічні порушення у твердженнях та наявність розумної долі сумнівів.

### III. Актуалізація опорних знань (3хв)

Задання до учнів:  $\angle B_1 D_1 A_1$  дорівнює  $45^\circ$ ;

1. Що називається кутом у планіметрії?
2. Які види кутів ви знаєте?
3. Що називається гострим кутом; тупим кутом; прямим кутом?
4. Скільки площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку?

### IV. Вивчення нового матеріалу (15 хв)

Учитель підкреслює, що поняття двогранного кута вводиться аналогічно поняттю кута в планіметрії, дає означення двогранного кута, розповідає, що називається ребром двогранного кута, гранями. Потім просить учнів навести приклади двогранних кутів у навколишнім середовищі.

Учитель пояснює, як вимірювати двогранний кут, що називається лінійним кутом двогранного кута, та звертає увагу на те, що при розв'язуванні задач необов'язково кожного разу будувати площину, перпендикулярну до ребра двогранного кута, і наголошує, що для одержання лінійного кута двогранного кута досить через довільну точку на прямій перетину провести в гранях двогранного кута два промені зі спільним початком, перпендикулярних до ребра.

Градусною мірою двогранного кута називають градусну міру його лінійного кута, причому градусна міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Градусна міра двогранного кута лежить у межах від  $0^\circ$  до  $180^\circ$ . Потім учитель вводить поняття кута між площинами, звертає увагу, що він не перевищує  $90^\circ$ .

### Поняття двогранного кута

Поясніть, як можна розділити будь-яку площину на дві півплощини?

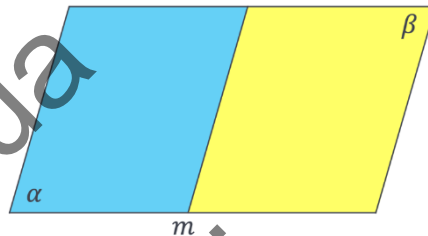


Рис. 2.59

*Будь-яка пряма, проведена у площині, ділить дану площину на дві півплощини* (рис.2.59)



Рис. 2.60

На скільки частин ділять простір дві півплощини, які обмежені однією прямою? (рис.2.60) (Дві)

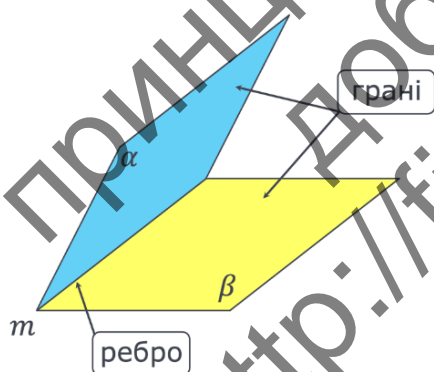


Рис. 2.61

Як знайти градусну міру двогранного кута?

**Двогранний кут** – фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, яка їх обмежує. (рис.2.61)

Позначимо на ребрі  $t$  двогранного кута довільну точку  $O$ . (рис.2.62)

Побудуємо у гранях двогранного кута прямі  $AO$  і  $BO$  перпендикулярні до ребра  $t$ .  $\angle AOB$  – лінійний кут двогранного кута.

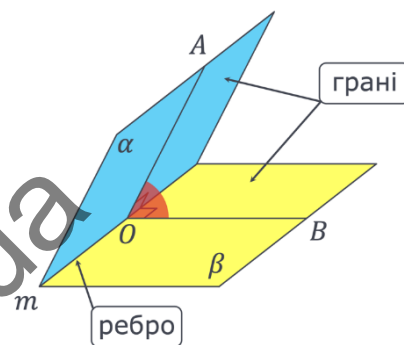


Рис. 2.62

Будь-яка площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його по лінійному куту.

$$0^\circ \leq \angle(\alpha, \beta) \leq 90^\circ$$

(Градусна міра двогранного кута дорівнює його лінійному куту і не може бути більшою за  $90^\circ$  (як і кут між прямими за аналогією з планіметрією))

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp t \\ OB \perp t \\ \alpha \cap \beta = t \end{array} \right\} \rightarrow \angle(\alpha, \beta) = \angle(ABC)$$

### Перпендикулярність площин

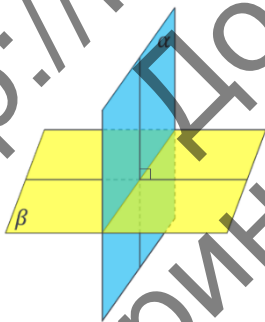


Рис. 2.63

Дві площини перпендикулярні, якщо кут між ними дорівнює  $90^\circ$  (рис.2.63)

Наведіть приклади перпендикулярних площин з реального життя.

Які моделі взаємно перпендикулярних площини ви бачите на зображенні?



Наприклад, площина дверей і площина підлоги. (рис.2.64)

Скільки площин, перпендикулярних до площини підлоги можна провести через точку, яка належить осі обертання дверей?



Рис. 2.64

Безліч. Це можна показати на прикладі обертання дверей навколо своєї осі.

Учні також повинні зробити висновок, що через точку, яка не належить даній площині, можна провести безліч площин, перпендикулярних до даної.

Коментар. У ході пояснення нового матеріалу розвивається такий компонент критичного мислення як здатність самостійно аналізувати інформацію.

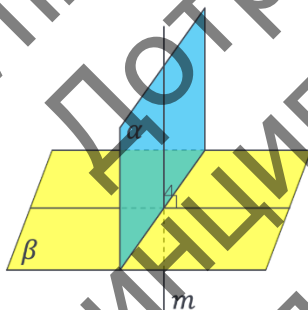


Рис. 2.65

**Теорема (ознака перпендикулярності площини)**

Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то такі площини перпендикулярні. (рис.2.65)

$$\left. \begin{array}{l} t \subset \alpha \\ t \perp \beta \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \perp \beta$$

### Приклад 1

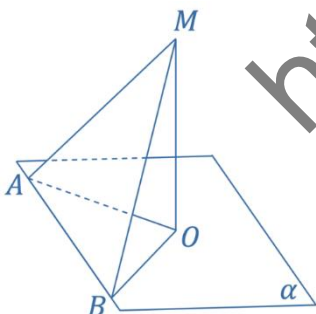


Рис. 2.66

З точки  $M$  на площину  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $MO$ , похилі  $MA$  і  $MB$  дорівнюють відповідно 4 см і 5 см, а відстань між точками  $A$  і  $B$  дорівнює 3 см. Через сторону  $AB$  проходить площина  $\alpha$ , яка утворює з площиною трикутника  $MAB$  кут  $60^\circ$ . (рис.2.66)

## Розв'язання

Р

$$MB^2 = MA^2 + AB^2$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$25 = 25$$

Л Отже,  $\triangle MAB$  – прямокутний,  $\angle MAB = 90^\circ$

я  $MA \perp AB \rightarrow OA \perp AB$  (За теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри)

є  $\left. \begin{array}{l} MA \perp AB \\ MA \perp OA \end{array} \right\} \rightarrow \angle MAO$  – лінійний кут двогранного кута, отже  $\angle MAO = 60^\circ$

о

з

$$\angle MAO = 60^\circ \rightarrow \angle AMO = 30^\circ$$

$$AO = \frac{1}{2} MA = \frac{4}{2} = 2 \text{ см}$$

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

з

$$\angle MOB = 90^\circ$$

$$BO = \sqrt{MB^2 - MO^2} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{12})^2} = \sqrt{13} \text{ см}$$

В

## V. Застосування знань при розв'язуванні вправ (15 хв)

№1

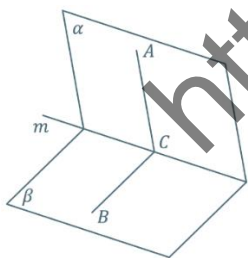


Рис. 2.67

На рисунку 2.67  $\angle(\alpha, \beta) = \angle(ACB)$ . Які з

тверджень є правильними?

**Відповідь:**

$AC \perp BC$

НІ

$AC \perp m, BC \perp m$

ТАК

$(ABC) \perp m$

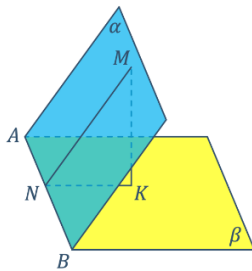
ТАК

$ABC$  - лінійний кут

НІ

двогранного кута

## №2



$\alpha, \beta = \eta$ ,  $MK \perp \beta$  і дорівнює  $a$ . (рис.2.68)

3

$$a = 14 \text{ см}, \eta = 30^\circ$$

$$a = 12 \text{ см}, \eta = 60^\circ$$

Рис. 2.68

**Розв'язання**

1)  $a = 14 \text{ см}, \eta = 30^\circ$

$$MK \perp \beta \rightarrow MK \perp NK$$

$$MN \perp AB \left( \begin{array}{l} \text{Як відстань від} \\ \text{точки до прямої} \end{array} \right) \rightarrow NK \perp AB \left( \begin{array}{l} \text{За теоремою, оберненою} \\ \text{до теореми про три} \\ \text{перпендикуляри} \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \perp AB \\ NK \perp AB \\ MN \in \alpha, NK \in \beta \end{array} \right\} \rightarrow \angle MNK \text{ — лінійний кут двогранного кута, } \angle MNK = \angle(\alpha, \beta)$$

$$\text{З } \triangle MNK (\angle K = 90^\circ):$$

$$\angle MNK = 30^\circ \rightarrow MN = 2MK = 14 \cdot 2 = 28 \text{ см}$$

2)  $a = 12 \text{ см}, \eta = 60^\circ$

$$\text{З } \triangle MNK (\angle K = 90^\circ):$$

$$\sin \angle MNK = \frac{MK}{MN} \rightarrow MN = MK : \sin 60^\circ = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 12 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ см}$$

**Відповідь:** 1) 28 см; 2)  $8\sqrt{3}$  см

## №3

Дві прямі перетинаються і перпендикулярні до граней двогранного кута. Знайдіть градусну міру кута між прямими, якщо двогранний кут дорівнює  $60^\circ$ . Виконайте побудову до завдання.

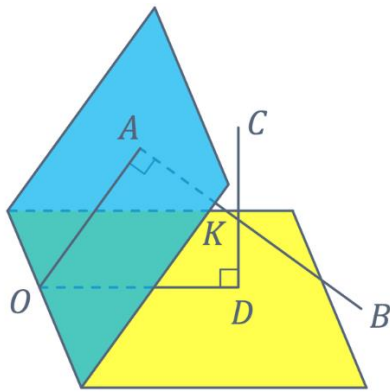


Рис. 2.69

**Розв'язання**

Нехай  $AB$  і  $CD$  – дві дані прямі.

(рис.2.69)

$\sphericalangle K$

$$\sphericalangle K = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$$

з

г

При перетині двох прямих утворюються дві пари суміжних кутів. Кут між

п

$$\sphericalangle AKC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

я **Відповідь:**  $60^\circ$

Коментар. Під час розв'язування задач розвиваються такі компоненти критичного мислення як здатність самостійно аналізувати інформацію, уміння бачити логічні порушення у твердженнях, уміння аргументувати свої думки, наявність розумної долі сумнівів.

**VI. Підсумок уроку (3 хв)**

Сьогодні на уроці ми...

Найважливішим на уроці для мене було...

Найбільше зацікавило...

Найскладнішим для мене було...

Щоб усунути прогалини в знаннях, я маю...

**VII. Домашнє завдання (2 хв)**

Опрацювати §8

О.С. Істер

Виконати № 8.5, 8.7, 8.14, 8.25

Висновок. Під час запропонованих уроків розвиваються усі компоненти критичного мислення: здатність самостійно аналізувати інформацію, уміння бачити логічні порушення у твердженнях, уміння аргументувати свої думки, наявність розумної долі сумнівів, прагнення до пошуку раціонального способу розв'язування задачі.

## Висновки до другого розділу

Досліджено можливості використання цифрових технологій з метою розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії. Зосереджено увагу на можливості організації дослідницької діяльності учнів під час проведення комп'ютерного експерименту із використанням програми динамічної математики GeoGebra.

Описано методичні особливості вивчення розділу «Перпендикулярність прямих і площин», акценти зроблено, зокрема, на різних підходах до означення ключових понять теми. Запропоновано розробки уроків з розвитку критичного мислення «Теорема про три перпендикуляри», «Двогранний кут. Перпендикулярність площин» для 10 класу. На уроках пропонується використовувати опорні схеми, щоб полегшити процес актуалізації опорних знань з теми; розв'язувати усні задачі за готовими рисунками; розглядати різні способи доведення теореми про три перпендикуляри; виконати тест з теми, створений на порталі Всеосвіта. В якості домашнього завдання пропонується передивитися відео «Всеукраїнська школа онлайн. 10 клас. Геометрія. Теорема про три перпендикуляри, формулювання і приклади застосування» та розв'язати завдання ЗНО різних років на застосування теореми про три перпендикуляри, задачі підручника.

Конспекти уроків супроводжуються методичними коментарями, які пояснюють які компоненти критичного мислення розвиваються на кожному етапі уроку, під час виконання кожного завдання.

## ВИСНОВКИ

Результати проведеного дослідження дозволяють сформулювати наступні висновки.

За результатами психолого-педагогічної та науково-методичної літератури розкрито сутність поняття «критичне мислення» та визначено його роль у структурі soft skills, як однієї із складових «Системи 4К» (Колаборація, Комунікація, Креативність, Критичне мислення). Критичне мислення – це система суджень, яка використовується для аналізу речей і подій з формулюванням обґрунтованих висновків і дозволяє виносити обґрунтовані оцінки, інтерпретації, а також застосовувати отримані результати до ситуацій і проблем. Серед компонентів критичного мислення виділяємо здатність самостійно аналізувати інформацію, вміння бачити логічні порушення у твердженнях, вміння аргументувати свої думки, наявність розумної долі сумнівів, прагнення до пошуку раціонального способу розв'язування задачі.

Досліджено особливості використання ефективних шляхів розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії. Серед таких шляхів виділяємо, по-перше, проведення уроків розвитку критичного мислення. Виділено та схарактеризовано етапи уроку розвитку критичного мислення за Ж. Піаже. По-друге, використання найпоширеніших методи розвитку критичного мислення. По-третє, застосування прийомів, які доцільно використовувати для розвитку критичного мислення школярів. По-четверте, розв'язування стереометричних задач як засобів розвитку критичного мислення учнів. Описано вміння, які спрямовані на розвиток критичного мислення і які розвиваються, при розв'язуванні зазначених задач, а саме, розпізнавати конфігурації геометричних тіл по їх зображенням та опису; порівнювати і оцінювати геометричні величини; встановлювати правильність та неправильність тверджень; знаходити помилки у формулюваннях та доведеннях, наводити контрприклад. Запропоновано систему стереометричних задач на формування кожного із зазначених вмінь.

Досліджено можливості використання цифрових технологій з метою розвитку критичного мислення школярів у процесі навчання стереометрії. Зокрема, зацентровано увагу на можливості організувати дослідницьку діяльність учнів під час проведення комп'ютерного експерименту із використанням програми динамічної математики GeoGebra. Запропоновано розробку уроку з розвитку критичного мислення «Теорема про три перпендикуляри» (10 клас).

<http://fizmat.sspu.edu.ua>  
Дотримуйтесь  
принципів академічної  
доброчесності  
<http://fizmat.sspu.edu.ua>

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. 10 Top Soft Skills for 2020: What They Are and How To Train Them (2016). Режим доступу: <https://www.game-learn.com/en/resources/blog/top-soft-skills-2020-how-to-train-them/>.
2. Cardoso-Espinosa, E.O., Cortés-Ruiz, J. A., & Zepeda-Hurtado, E. (2021). The Development of Mathematics and Soft Skills at the Graduate Level through Project-Based Learning in Times of COVID-19. TEM Journal, 10, 4, 1638-1644, <https://doi.org/10.18421/TEM104-20>.
3. Lippman, L. H., Ryberg, R., Carney, K., & Moore, A. (2015). Workforce connections: key “soft skills” that foster youth. Workforce success: toward a consensus across fields. Child Trends, Inc.
4. Semoushin, I., Tsyganova, J., & Ugarov, V. (2003). Computational and soft skills development through the project based learning. International Conference on Computational Science (ICCS 2003), 2658, 1098-1106.
5. Soft Skills: 10 навичок, які допоможуть вам роботі. Режим доступу: <https://sparkmedia.com.ua/soft-skills-navycky/>.
6. Stytsyuk, R.Y., Lustina, T.N., Sekerin, V.D., Martynova, M., Chernaysky, M.Y., & Terekhova, N.V. (2022). Impact of STEM education on soft skill development in it students through educational scrum projects. Revista Conrado, 18, 84, 183-192.
7. Авдулова Т. П. Психологія підліткового віку. К. 2018. 394 с.
8. Барболіна О. С. Розвиток критичного мислення учнів шляхом розв’язання математичних задач. Таврійський вісник освіти. 2016. № 4 (56). С. 190-196. Режим доступу: [http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE\\_FILE\\_DOWNLOAD=1&Image\\_file\\_name=PDF/Tvo\\_2016\\_4\\_38.pdf](http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Tvo_2016_4_38.pdf).
9. Бевз Г.П. Геометрія. Профільний рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова – К.: Видавничий дім «Освіта», 2018 – 272 с.: іл.
10. Бикова Ю. О. Прийоми розвитку критичного мислення на уроках



математики. Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики. 2018. Вип. 8. С. 11–15.

11. Браус Дж., Вуд Д. Инвайронментальное образование в школах: Пер. с англ. Вашингтон: NAAEE, 1994. 130 с.

12. Бурда М.І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти/ М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова – К.: УОВЦ «Оріон», 2018. – 288с.: іл.

13. Вукіна Н. В. Критичне мислення: як цьому навчати : наук.-метод. посібник / Н. В. Вукіна, Н. П. Дементієвська, І. М. Сущенко ; за наук. ред. О. І. Пометун. – Харків, 2007. – 190 с.

14. Гиренок Ф. И. Клиповое сознание. Москва: Проспект. 2016. 256 с.

15. Грицак Н., Ісаєва О. Студенти покоління Z: проблеми освіти. Проблеми підготовки сучасного вчителя. 2020. Вип. 1(21). С. 64-72.

16. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти/ Затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р.

17. Друшляк М. Г. Візуалізовані завдання як засоби формування візуально-інформаційної культури майбутніх учителів математики. Формування предметних компетентностей майбутніх вчителів фізики та математики засобами та технологіями сучасного освітнього середовища: [колективна монографія] за заг. ред. доцентів Завражної О. М., Салтикової А. І. Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2020. 237 с. С. 135-155.

18. Зверова Т. І. Задачі на дослідження з тригонометрії як засіб розвитку критичного мислення учнів. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 179–184.

19. Істер О.С. Геометрія: (профільний рівень): підручник для 10 кл. закл. заг. серед. освіти/ О.С. Істер, О.В. Єргіна – Київ: Генеза, 2018-368с.: іл.

20. Карапетян О. В. Особливості навчання представників покоління Z у вищій школі. Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. 2020. Вип. 186. С. 115-120. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2020-1-186-115-120>.

21. Концепція Нової української школи/ Ухвалена рішенням колегії МОН 27.10.2016.
22. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 432 с.
23. Курнос Л. Б. Розвиток критичного мислення учнів на уроках англійської мови. Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Tvo\\_20...](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Tvo_20...)
24. Курс лекцій «Критичне мислення для освітян». Режим доступу: [https://courses.prometheus.org.ua/courses/coursev1:CZ+CTFT101+2017\\_T3/about](https://courses.prometheus.org.ua/courses/coursev1:CZ+CTFT101+2017_T3/about)
25. Ліпман М. Чим може бути критичне мислення / Метью Ліпман // Вісник програм шкільних обмінів. – 2006. – № 27. – С. 17-2
26. Лободинська О. М., Гридчук О. Є. Формування соціальних навичок студентів: проблеми й перспективи. Освітнянські проблеми вищої школи. 2020. Вип. 3. № 3. С. 116–121.
27. Матяш О. І. Геометрична компетентність як складова математичної компетентності учнів. *Математика в рідній школі*. 2016. № 3. С. 28–32.
28. Матяш О. І. Путівник по сторінках фахових журналів вчителя математики. Вінниця, 2008. 114 с.
29. Мерзляк А.Г. Геометрія: профільний рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полянський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2018 – 240с.: іл.
30. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полянський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2018 – 256 с.: іл.
31. Методичні прийоми на етапі рефлексії [Електронний ресурс]. Режим доступу: [http://domanska.ucoz.ua/publ/metodichni\\_prijomi\\_na\\_etapi\\_refleksiji/1-1-0-5](http://domanska.ucoz.ua/publ/metodichni_prijomi_na_etapi_refleksiji/1-1-0-5).
32. Модягіна Н. Несподівані аспекти мотивації навчання математики. *Математика в рідній школі*. 2016. № 2. С. 31–35.
33. Морі Е. Soft skills та критичне мислення: які навички знадобляться

дітям у XXI столітті Електронний ресурс. Режим доступу: <https://suspilne.media/62334-soft-skills-ta-kriticne-mislenna-aki-navickiznadoblats-a-ditam-u-xxi-stolitti/>.

34. Москаленко Т. Паралельність та перпендикулярність прямих і площин / Т. Москаленко // Математика. – 2009. - №31-32 (523-524). С. 43- 46.

35. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022 / кол. авт. : Г. Бичко (осн. автор), Т. Вакуленко, Т. Лісова, М. Мазорчук, В. Терещенко, С. Раков, В. Горох та ін. ; за ред. В. Терещенка та І. Клименко; Український центр оцінювання якості освіти. Київ, 2023. 395 с.

36. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. Освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.

37. Ожиганова Е. М. Теория поколений Н. Хоува и В. Штрауса. Возможности практического применения. Бизнес-образование в экономике знаний. 2015. №1. С.94-97.

38. Палієва С. Формування критичного мислення на уроках математики. *Математика в рідній школі*. 2017. № 10. С. 15–19.

39. Погорелов О.В.. Геометрія: Стереометрія: Підруч. Для 10-11 кл .серед. шк.- 6-те вид. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.

40. Поколение Z – что это такое и какие их характерные черты?. Режим доступу : <http://kak-bog.ru/pokolenie-z-chtoeto-takoe-i-kakie-ih-harakternye-cherty>.

41. Пометун О. І. (2018) Критичне мислення як педагогічний феномен. *Український педагогічний журнал*. № 2.

42. Пометун О. І. Основи критичного мислення : навчальний посібник для учнів старших класів загальноосвітньої школи / О. І. Пометун, Л. М. Пилипчатіна, І. М. Сущенко, І. О. Баранова. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. – 216с.

43. Пометун О. І. Як розвивати критичне мислення в учнів (з прикладом уроку) [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://nus.org.ua/articles/krytychne-myslennya-2/>.

44. Розвиток пізнавальних процесів і прийняття рішень. Режим доступу:

[https://stud.com.ua/120185/psihologiya/rozvitok\\_piznavalnih\\_protseviv\\_priynyattya\\_rishen](https://stud.com.ua/120185/psihologiya/rozvitok_piznavalnih_protseviv_priynyattya_rishen).

45. Січкара Ю. Ф., Бабюк Д. О. Розвиток просторового і критичного мислення учнів у процесі вивчення піраміди за допомогою сервісу LEARNINGAPPS.ORG. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 282–286.

46. Смержевський Л.О., Смержевський Ю.Л. Стереометрія. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання. Кам'янець-Подільський: Абетка - НОВА, 2002.

47. Тарасенкова, Н. А. (2019). Формування «soft skills» у навчанні математики: до постановки проблеми. V Всеукраїнська науково-практична конференція «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодні і перспективи», 19-20 листопада 2019 р. Полтава: Аструя, 22-23.

48. Тягло А. В. Критическое мышление: Проблема мирового образования XXI века / А. В. Тягло, Т. С. Воропай. – Х. : Изд-во Ун-та внутренних дел, 1999. – 284 с.

49. Тягло О. Післямова до статей Метью Ліпмана і Марка Вайн-стейна / О. Тягло // Вісник програм шкільних обмінів. – 2006. – № 27. – С. 26-27.

50. Формування історичного світогляду учнів шляхом розвитку критичного мислення [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://gayvoroninnovacii.blogspot.com/2015/01/2.html>.

51. Халперн Д. Психологія критического мышления/ Дайана Халперн. – Санкт-Петербург: Питер, 2000. – 496 с. – («Мастера психологии»).

52. Харченко Н. В. Критичне мислення як характеристика сучасної особистості підлітка. Теоретико-методичні проблеми виховання дітей та учнівської молоді. 2016. Вип. 20 (2). С. 276-286.

53. Харченко Н. Розвиток критичного мислення. Інноваційні форми роботи для дітей і дорослих / Н. Харченко; Київ : «Видавнича група «Шкільний світ», 2018 — 120 с. (Бібліотека «Шкільного світу»).

54. Чашечникова О.С. Створення творчого середовища в умовах

диференційованого навчання математики. Монографія. – Суми: Видавництво: ПП Вінниченко М.Д., ФОП Литовченко Є.Б., 2011. – 412 с.

55. Чашечникова О.С. Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики.

56. Щебетенко А. Розвиток критичного мислення школярів у процесі вивчення стереометрії. Студентська звітна конференція за результатами наукових досліджень молодих науковців. Суми, СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2023. С. 45-46.

57. Щебетенко А. Методи розвитку критичного мислення школярів у процесі вивчення стереометрії. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання : Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (2023 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2023.