Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

**Солодкий Євген Юрійович**

# ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:
______________*Лукашова Т.Д.*,
доктор фізико-математичних наук, професор, доцент кафедри математики, фізики та методик їх навчання
«____»_____________2023 р.

Виконавець:
______________***Солодкий Є. Ю.***,
студент 461 групи
«___»______________2023 р.

Суми 2023

# ЗМІСТ

ВСТУП ........................................................................................... 3

РОЗДІЛ 1. ПРОГРАМНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ........................................................................................... 6

1.1.Пропедевтика вивчення теми «Многогранники» в 5-6 класах ............ 6

1.2.Аналіз діючих програм за темою дослідження .................................... 9

1.3. Особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках ........................................................................ 14

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ В СТАРШІЙ ШКОЛІ ........................................ 21

2.1. Методика вивчення многогранників в старшій школі ........................ 21

2.2. Формування графічних умінь учнів при вивченні многогранників .. 32

2.3. Особливості вивчення теми «Перерізи многогранників» ................. 41

2.4. Програми динамічної математики як засоби візуалізації при вивченні многогранників .......................................................................... 55

2.5. Аналіз задач зовнішнього незалежного оцінювання в контексті дослідження ........................................................................................... 62

ВИСНОВКИ ........................................................................................... 69

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .................................................... 71

ДОДАТКИ ............................................................................................. 75

Додаток А. Навчальні програми з математики ....................................... 75

Додаток Б. Система задач з теми «Перерізи многогранників» ................ 82

# ВСТУП

**Актуальність.** Тема «Многогранники» одна з основних у шкільному курсі геометрії. Центральна роль многогранників визначається, серед іншого, тим, що багато результатів стереометрії пов’язані з відповідними результатами для многогранників. Вивчення теми «Многогранники» надає широкі можливості для розвитку в учнів абстрактного мислення, просторової уяви, для розвитку поєднання просторової уяви зі строгою логікою, зокрема, при виготовленні моделей многогранників, побудові зображень та розв’язуванні задач. Многогранники є фундаментом, який відповідає різноманітним дидактичним цілям, наприклад, на многогранниках зручно демонструвати взаємне розташування прямих і площин в просторі, показувати застосування ознак паралельності і перпендикулярності прямих і площин в просторі, ілюструвати перші теореми стереометрії. Тому знання як змістового наповнення, так і методичних особливостей вивчення теми «Многогранники» є надзвичайно важливим для майбутнього вчителя математики. Усе вищезазначене обґрунтовує актуальність проблеми дослідження і зумовлює вибір теми магістерського дослідження «**Вивчення многогранників у шкільному курсі геометрії**».

**Мета дослідження** – дослідити особливості вивчення многогранників в шкільному курсі геометрії.

Згідно з метою дослідження було поставлено наступні **завдання:**

1. Проаналізувати психолого-педагогічну, навчально-методичну та наукову літературу з теми дослідження.
2. Проаналізувати програмно-методичне забезпечення (чинних програм та підручників) з теми «Многогранники».
3. Виявити методичні особливості вивчення многогранників в шкільному курсі стереометрії.
4. Дослідити особливості використання комп’ютерних засобів при вивченні многогранників в шкільному курсі геометрії.
5. Провести аналіз завдань ЗНО у контексті дослідження.

**Об'єктом** дослідження є процес навчання геометрії учнів закладів загальної середньої освіти.

**Предмет** дослідження – особливості вивчення теми «Многогранники» в шкільному курсі геометрії.

**Матеріали та методи дослідження**. Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань використано наступні методи:

– ***теоретичні***: вивчення, аналіз і синтез психолого-педагогічної й спеціальної методичної літератури з предмету дослідження для з'ясування науково-теоретичних засад вивчення теми «Многогранники» в шкільному курсі геометрії; аналіз програм, підручників з математики з метою дослідження актуального стану програмно-методичного забезпечення з теми дослідження;

– ***емпіричні***: цілеспрямоване спостереження за процесом вивчення многогранників в шкільному курсі геометрії на уроках математики під час проходження педагогічної практики у закладах загальної середньої освіти; вивчення й узагальнення педагогічного досвіду для обґрунтування ефективності комп'ютерних засобів візуалізації при вивченні многогранників в шкільному курсі геометрії.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у розробці методичних рекомендацій щодо вивчення многогранників в шкільному курсі геометрії. Одержані в дослідженні результати можуть бути використані у освітньому процесі навчання математиці учнів старшої школи, у процесі розробки навчальних програм з математики, тестових завдань з ЗНО (НМТ), для вдосконалення методики вивчення многогранників в старших класах закладів загальної середньої освіти.

**Апробація дослідження та публікації**. Результати дослідження обговорювались на Звітній науковій конференції студентів фізико-математичного факультету (квітень 2023 р.) та на III Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023. Форум молодих дослідників» (листопад 2023) та опубліковані у статті [33] та тезах доповідей [34].

**Структура та обсяг магістерської роботи.** Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

У вступі розглянуто актуальність роботи, визначено об’єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Програмно-методичне забезпечення вивчення теми «Многогранники» в шкільному курсі геометрії» розглянуто особливості пропедевтики вивчення теми «Многогранники» в 5-6 класах; проаналізовано навчальні програми з геометрії щодо вивчення з теми «Многогранники» у старшій профільній школі; зроблено порівняльний аналіз особливостей введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках.

У другому розділі «Методичні особливості вивчення многогранників в старшій школі» описано методику вивчення многогранників в старшій школі; обґрунтовано необхідність формування графічних умінь учнів при вивченні многогранників; описано особливості вивчення теми «Перерізи многогранників»; запропоновано шляхи використання програм динамічної математики як засобів візуалізації при вивченні многогранників; здійснено аналіз задач зовнішнього незалежного оцінювання в контексті дослідження.

Обсяг магістерської роботи – 74 сторінки. Список використаних джерел включає 34 найменування. У тексті містяться 8 таблиць, 74 рисунки.

# РОЗДІЛ 1. ПРОГРАМНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

## 1.1. Пропедевтика вивчення теми «Многогранники» в 5-6 класах

Модельна програма з математики для 5-6 класів закладів загальної середньої освіти (автори Василишин М.С., Миляник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Школьний О.В.) пропонує «дворічний курс, який має стати основою для формування елементарних математичних знань, формування учнівських вмінь і навичок, а також передбачає широке поєднання вивчення найпростіших геометричних об'єктів на площині та в просторі, що розширює кругозір учнів. Тому планується вивчення учнями 5-6 класів найпростіших многогранників (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда) та тіл обертання (циліндр, конус, куля)» [8]. Автори програми вважають природним «розгляд на інтуїтивному рівні понять об'єму та площі поверхні для найпростіших геометричних тіл. Корисним при цьому є виготовлення паперових розгорток многогранників і використання комп'ютерних технологій для зображення геометричних тіл. Отримані під час опанування курсу вміння та компетентності можуть стати фундаментом для наступного ґрунтовного вивчення математики наступному циклі базової освіти та у старшій профільній школі» [8].

Очікувані результати, пропонований зміст, вид навчальної діяльності з теми «Многогранники» представлено в таблиці 1.1.

За модельною програмою для 5-6 класів закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М.П., Рубльов Б.В., Семенов В.В., Якір М.С.) [14] многогранники починають вивчатися вже у 5 класі (таблиця 1.2).

*Таблиця 1.1*

## Математика. 6 клас [8].
## Тема. Просторові геометричні фігури

| Очікувані результати | Пропонований зміст | Види навчальної діяльності |
|---|---|---|
| Розпізнає геометричні об'єкти та їх елементи на площині та в просторі.<br>Визначає та описує математичні характеристики навколишніх об'єктів (кількість, розмір, форма).<br>Групує математичні об'єкти за спільними ознаками, описує їхні властивості.<br>Вирізняє у проблемній ситуації математичні дані.<br>Розрізняє початкові дані та шукані результати.<br>Визначає дані, які є необхідними для розв'язання проблемної ситуації.<br>Пропонує ідеї щодо ходу розв'язання проблемної ситуації.<br>Користується креслярськими інструментами та комп'ютерними технологіями для розв'язування проблемної ситуації.<br>Використовує інформаційно-комунікаційні технології для пошуку та зберігання інформації математичного змісту.<br>Презентує іншим результати розв'язання проблемної ситуації, використовуючи різні способи та інструменти, зокрема інформаційно-комунікаційні технології. | Поняття паралелепіпеда, куба, піраміди, циліндра, конуса, кулі.<br>Розгортки поверхонь геометричних тіл. Уявлення про площу поверхні та об'єм геометричного тіла. Формули площі поверхні та об'єму прямокутного паралелепіпеда і циліндра. Одиниці об'єму, зв'язок між одиницями об'єму. | Розпізнавання на рисунках паралелепіпеда, куба, піраміди, циліндра, конуса, кулі та виокремлення їх як елементів у складі інших фігур. Обговорення прикладів об'єктів реального світу, що мають форму паралелепіпеда, куба, піраміди, циліндра, конуса, кулі.<br>Обговорення понять "площа поверхні" та "об'єм" просторового геометричного тіла. Обчислення площі поверхні та об'єму прямокутного паралелепіпеда і циліндра.<br>Використання формул площі поверхні та об'єму прямокутного паралелепіпеда і циліндра до розв'язування вправ і сюжетних задач. Здійснення переходів між одиницями об'єму. |

*Таблиця 1.2*

## Математика. 5 клас [14].
## Змістова лінія «Геометричні фігури і величини»

| Очікувані результати навчання | Пропонований зміст навчального предмета | Види навчальної діяльності |
|---|---|---|
| **розпізнає на рисунках** прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду;<br>**співвідносить** реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями просторових фігур, які вказано в змісті;<br>**називає** елементи вказаних просторових фігур;<br>**позначає** вказані просторові фігури;<br>**має уявлення** про розгортки прямокутного паралелепіпеда та піраміди, яке форму- | Прямокутний паралелепіпед. Куб. Піраміда<br><br>Розгортки прямокутного паралелепіпеда та піраміди | |

| | | |
|---|---|---|
| ється на реальних об'єктах навколишнього середовища;<br>**володіє** навичкою обчислення площі поверхні прямокутного паралелепіпеда, зокрема за допомогою його розгортки;<br>**розуміє** сутність процесу вимірювання об'єму прямокутного паралелепіпеда;<br>**знає** одиниці вимірювання об'єму та співвідношення між ними;<br>**вибирає** доцільні одиниці вимірювання для знаходження об'єму прямокутного паралелепіпеда;<br>**користується** формулами обчислення об'ємів прямокутного паралелепіпеда та куба; | Об'єм прямокутного паралелепіпеда | |

Аналізуючи підручники для 5-6 класів, робимо висновок, що початкове знайомство з многогранниками відбувається у 5 класі в ході вивчення теми «Прямокутний паралелепіпед. Піраміда». Зокрема, у підручнику з математики для 5 класу авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір зазначається, що:

«*прямокутний паралелепіпед є видом многогранника – фігури, поверхні якої складається з многокутників*», а «*одним із видів многогранника є піраміда*»; «*многогранники є видами геометричних тіл*» [16].

В ході вивчення даної теми вводяться поняття таких основних многогранників як паралелепіпед, куб, піраміда та їх основних елементів, вивчаються об'єм прямокутного паралелепіпеда і властивості об'ємів деяких фігур. В подальшому з многогранниками, а потім з тілами обертання, учні зустрічаються в 6 класі при вивченні теми «Циліндр. Конус. Куля» [27].

## 1.2. Аналіз діючих програм за темою дослідження

І. А. Сверчевська, досліджуючи еволюцію вивчення геометричних тіл у шкільному курсі стереометрії, зазначає, що програми з математики з 1958 по 2003 роки кардинально змінювалися 7 разів. За результатами аналізу авторка стверджує, що розділ «Геометричні тіла» є найбільш стабільним розділом стереометрії, але підходи до вивчення тем змінювалися [23]. Вона виділяє сім основних етапів (рис.1.1).

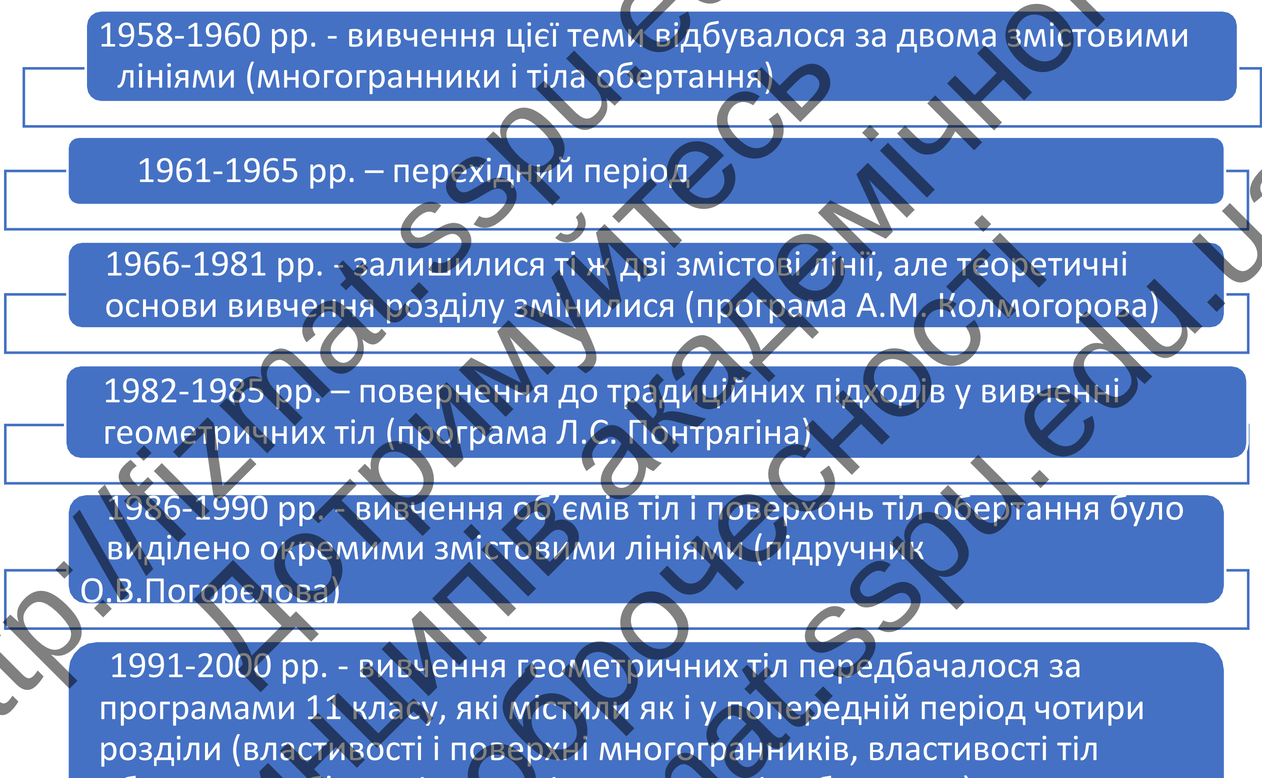



**Рис. 1.1. Етапи еволюції вивчення геометричних тіл у шкільному курсі стереометрії (за І. А. Сверчевською)**

І. А. Сверчевська виділяє чотири основних підходи до побудови структури вивчення розділу «Геометричні тіла» на основі результатів аналізу послідовності вивчення понять розділу, методів доведень в підручниках різних часів (рис. 1.2).

Схема 1

Окремими змістовими лініями виділені теми «Многогранники» і «Тіла обертання». Спочатку повністю вивчаються властивості, виводяться формули для обчислення площ поверхонь і об’ємів многогранників, а потім за таким же планом ведеться виклад теми «Тіла обертання» [23]. Цій схемі відповідають підручники: А. П. Кисельов. Елементарна геометрія. Стереометрія [11]; Н. А. Глаголєв. Елементарна геометрія. Стереометрія [9]; В. М. Клопський, З. А. Скопець, М. І. Ягодовський. Геометрія 9-10 [12].

Схема 2

Особливістю цього підходу є те, що об’єми многогранників і тіл обертання розглядаються після ознайомлення з властивостями цих тіл. Така послідовність дозволяє вибудувати чітку логічну послідовність викладу теми, забезпечує науковий підхід до побудови теорії [23]. Така послідовність викладу матеріалу розділу притаманна для підручників: О. В. Погорєлов. Геометрія 10-11 [22]; І.Ф. Шаригін. Геометрія 10-11 [31].

Схема 3

При такій послідовності викладу матеріалу спочатку вивчаються властивості і поверхні призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди, площі їх поверхонь, що даються через розгортки. Об’єми розглядаються послідовно для всіх тіл. Така послідовність дозволяє спростити сприймання властивостей, що дає змогу значно розширити коло задач і вправ цієї теми [23]. За такою схемою будуються підручники: Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. Геометрія 10-11 [7]; Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Кисельова, Е. Г. Позняк. Геометрія 10-11 [3].

Схема 4

Характерною рисою цього підходу є розгляд з єдиних позицій призм і циліндрів, пірамід і конусів. Така ідея була використана деякими авторами дореволюційних підручників, зокрема, Ф. Мочніком та О. Долговим. На відміну від підходу сучасних авторів, вони починають з означення призми, а циліндр – це призма, в основі якої лежить круг.

Підхід, здійснений авторами підручників [1], [4], не використовує граничного переходу і тому більш сприятливий з наукової точки зору. Означення циліндра дається, як тіла, основою якого може бути довільна плоска фігура, а після цього виділяються кругові циліндри і призми, як частинний випадок. Аналогічно вводяться поняття конуса та піраміди. Крім загального розгляду це має застосування далі при вимірюванні об’ємів та площ поверхонь геометричних тіл. Вивчення об’ємів тіл і площ їх поверхонь виділено окремою змістовою лінією [23]. Цій схемі відповідають підручники: О.Д. Александров, О.Л. Вернер, В.І. Рижик. Геометрія 10-11 та О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. Геометрія 10-11 [4].

**Рис. 1.2. Підходи до побудови структури вивчення розділу «Геометричні тіла»**

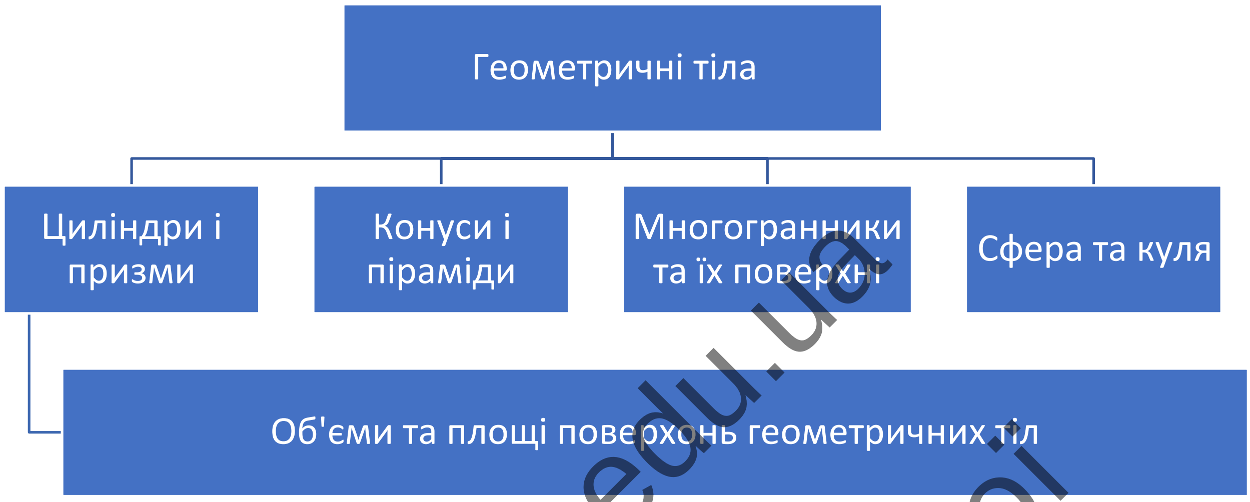



**Рис. 1.3. Схема 2 побудови структури вивчення розділу «Геометричні тіла»**

На сайті Міністерства освіти і науки України розміщено навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів (https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv).

Програми подані по трьох основних рівнях вивчення предмету: ***рівень стандарту*** [18], ***профільний рівень*** [19] та ***поглиблений рівень*** навчання (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) [20]. Детальний зміст кожної програми у векторі дослідження подано у додатку А (таблиці А.1-А.3).

Проаналізовані навчальні програми розроблені на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання. Порівнюючи зміст навчального матеріалу, вимоги до знань та умінь учнів щодо вивчення теми «Многогранники» (а також тем, де вивчаються питання, пов’язані з многогранниками), кількість годин, що відводиться на вивчення многогранників, можемо зробити висновок, усі вказані характеристики є досить схожими для профільного та поглибленого рівнів і мають суттєві відмінності з відповідними вимогами на рівні стандарт.

На ***рівні стандарту*** вивчення многогранників фактично розпочинається в 11 класі (при вивченні теми «Многогранники»). Учні знайомляться з основними видами многогранників (призмами та пірамідами) та їх елементами, розглядають їх властивості та формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь цих просторових фігур; навчаються будувати їх зображення та найпростіших перерізів площиною. На вивчення теми відводиться *14 годин.* Об’єми многогранників вивчаються окремо, після вивчення теми тіл обертання в рамках теми «Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл» (на вивчення усієї теми відводиться 11 годин).

В програмі ***профільного рівня*** вивчення просторових фігур починається з 10 класу в темі «Вступ до стереометрії»: учні знайомляться з основними видами многогранників, виокремлюють серед них призму і піраміду, зображують піраміди та призми, перерізи пірамід та прямокутних паралелепіпедів, значна увага приділяється побудові перерізів многогранників методом слідів. Окрім того, перерізи многогранників площинами розглядаються під час вивчення паралельного проєктування в рамках теми «Паралельність прямих і площин у просторі».

В 11 класі на вивчення теми «Многогранники» відводиться *24 години*, вивчаються многогранні кути (зокрема, тригранний кут), вивчаються многогранники, їх різновиди та характеристика їх елементів; розглядається зрізана піраміда; вивчаються формули для обчислення бічної та повної поверхонь цих многогранників.

Відповідно щодо знань та умінь учнів висуваються більш високі вимоги у порівнянням з рівнем стандарт. Так, учні повинні уміти формулювати і доводити теореми та наслідки з них; аналізувати та досліджувати елементи многогранників; виконувати завдання підвищеної складності; зображувати на рисунку основні просторові геометричні фігури та їх перерізи відповідно до властивостей паралельного проєктування; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження інших характеристик та є основними для заданого многогранника.

На відміну від програми рівня стандарт, програма з математики на профільному рівні передбачає вивчення об’ємів многогранників окремо від круглих тіл, у темі «Об'єми многогранників». Розглядаються і доводяться теореми про об'єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; об'єм призми; об'єм піраміди та об'єм зрізаної піраміди. На вивчення об'ємів многогранників програмою відводиться *16 годин*.

Зауважимо, що за ***програмою поглибленого навчання***, (початок вивчення на поглибленому рівні починається з 8 класу) з многогранниками учні знайомляться наприкінці 9 класу під час вивчення теми «Вступ до стереометрії». Близько 5 годин відводиться на вивчення призми і піраміди та формул для обчислення площ і об'ємів цих просторових тіл.

Як і на профільному рівні, за програмою ***поглибленого рівня*** навчання в 10 класі розглядаються призма і піраміда та побудова їх перерізів площиною методом слідів та з використанням властивостей паралельного проєктування під час вивчення тем «Вступ до стереометрії» та «Паралельність прямих та площин». Зміст навчального матеріалу стосовно побудови перерізів многогранників та вимоги до знань та умінь учнів є аналогічним до програми профільного рівня.

В 11 класі вивченню многогранників за програмою поглибленого рівня присвячено три теми: «Многогранники» (на її вивчення відводиться *20 годин*), «Геометрія тетраедра» (*11 годин*) та «Об'єми многогранників» (*14 годин*). При цьому як зміст навчального матеріалу, так і програмні вимоги аналогічні програмі профільного рівня (за виключенням теми «Геометрія тетраедра», якої в програмі профільного рівня немає).

Результати аналізу навчальної програми дозволяють вчителю розподілити кількість часу на вивчення тем з розрахунком 1 тема – 1 урок, тобто скласти календарно-тематичний план. Календарний план є основним робочим документом, який визначає педагогічну діяльність учителя та забезпечує досягнення очікуваних результатів навчання, зазначених у навчальній програмі. Календарно-тематичний план розробляє вчитель самостійно або разом з іншими вчителями навчального закладу, які входять до складу шкільної методичної комісії.

Приклад календарного планування з теми «Многогранники» для рівня стандарту наведено у таблиці 1.6.

*Таблиця 1.6*

**Календарне планування з теми «Многогранники» (рівень стандарту)**

| № п/п | Зміст уроку | Дата | Примітки |
|---|---|---|---|
| 1 | Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники | | |
| 2 | Призма. Пряма і правильна призми | | |
| 3 | Площі бічної та повної поверхонь призми | | |
| 4 | Площі бічної та повної поверхонь призми. | | |
| 5 | Площі бічної та повної поверхонь призми. С. р.№1 | | |
| 6 | Паралелепіпед | | |
| 7 | Паралелепіпед | | |
| 8 | Піраміда. Правильна піраміда | | |
| 9 | Піраміда. Правильна піраміда. | | |
| 10 | Піраміда. Правильна піраміда. С. р. №2 | | |
| 11 | Площі бічної та повної поверхонь піраміди | | |
| 12 | Площі бічної та повної поверхонь піраміди | | |
| 13 | Узагальнення та систематизація з теми: «Многогранники» | | |
| 14 | Контрольна робота з теми: "Многогранники" | | |

## 1.3. Особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках

Наразі Міністерством освіти і науки України запропоновано Перелік підручників, рекомендованих МОН України для використання в 5-11 класах закладів загальної середньої освіти з навчанням українською мовою (https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/). Відповідні підручники з математики та геометрії для 11 класу із цього переліку наведені нижче(рис.1.4).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Математика (рівень стандарту) (підручник) | Бевз Г.П., Бевз В.Г. | 11 | ВД «Освіта» | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Математика (рівень стандарту) (підручник) | Істер О.С. | 11 | Генеза | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Математика (рівень стандарту) (підручник) | Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. | 11 | Гімназія | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Математика (рівень стандарту) (підручник) | Нелін Є.П., Долгова О.Є. | 11 | Ранок | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) (підручник) | Істер О.С., Єргіна О.В. | 11 | Генеза | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) (підручник) | Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. | 11 | Гімназія | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) (підручник) | Нелін Є.П., Долгова О.Є. | 11 | Ранок | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень) (підручник) | Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. | 11 | Гімназія | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Геометрія (профільний рівень) (підручник) | Нелін Є.П., Долгова О.Є. | 11 | Ранок | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Геометрія (профільний рівень) (підручник) | Істер О.С., Єргіна О.В. | 11 | Генеза | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Геометрія (профільний рівень) (підручник) | Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. | 11 | ВД «Освіта» | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |
| Геометрія (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу,профільний рівень) (підручник) | Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. | 11 | Гімназія | Наказ МОН від 12.04.2019 № 472 |

**Рис. 1.4. Підручники з математики та геометрії для 11 класу, рекомендовані МОН України**

Проаналізуємо особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у підручниках з геометрії для 11 класу (*профільний рівень*) наступних авторів:

(1) Істер О. С., Єргіна О. В. [10];

(2) Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. [15];

(3) Нелін Є. П., Долгова О. Є. [21].

Зауважимо, що ключове поняття теми – поняття «многогранник» введено у всіх підручниках однаково: «многогранником називається тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників».

На Рис. 1.5 проілюстровано особливості введення поняття «призма» в розглядуваних підручниках.

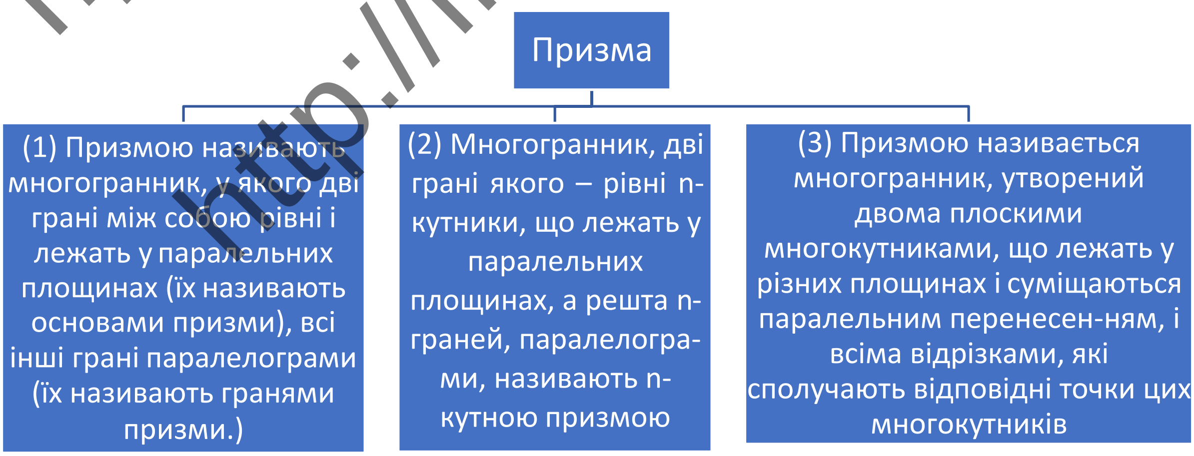



**Рис.1.5. Введення поняття «призма» у діючих підручниках**

У підручнику (1) геометричні фігури проілюстровані кольоровими зображеннями, у підручнику (2) вводиться поняття «*n*-кутної призми», а у підручнику (3) поняття призми вводиться через паралельне перенесення в просторі.

З'ясовано, що поняття «пряма призма» введено у розглядуваних підручниках однаково – «призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до її основи». Відмінності є тільки у підході до поняття «похила призма»: (1) – «В іншому випадку призму називають похилою», (2) – «Якщо призма не є прямою, то її називають похилою», (3) – «Якщо бічні ребра не перпендикулярні до основ призму називають похилою».

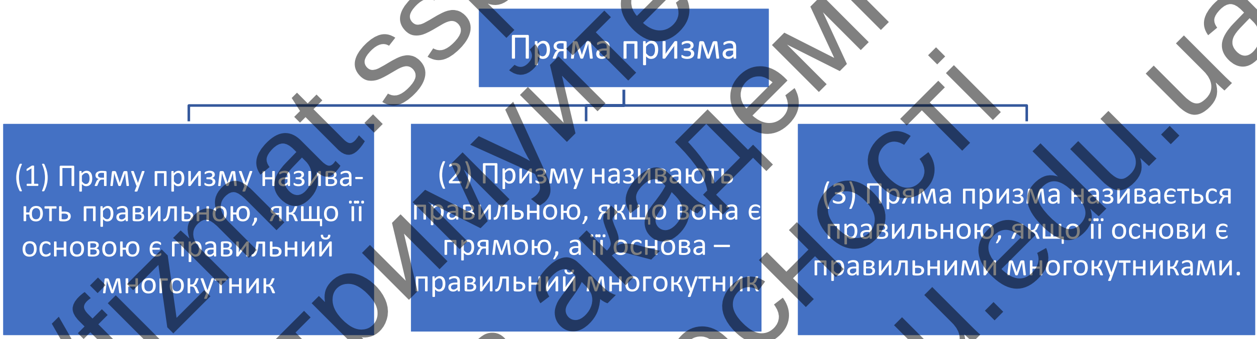



**Рис.1.6. Введення поняття «пряма призма» у діючих підручниках**

Зауважимо, що тільки у підручнику (3) автори звертають увагу та те, що у призми дві основи і термін «основа» вживають у множині. Також автори підручника (3) акцентують увагу учнів на тому, що призма пряма.

Автори підручників (1) та (3) при формулюванні теореми про площу бічної поверхні прямої призми вживають поняття «висота призми», уточнюючи його як бічне ребро – «площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи P на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра *l*».

Поняття «паралеллепіпеда» та «прямого паралеллепіпеда» вводяться в усіх наведених підручниках однаково – «паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами», «прямий паралелепіпед називають прямокутним, якщо його основами є прямокутники».

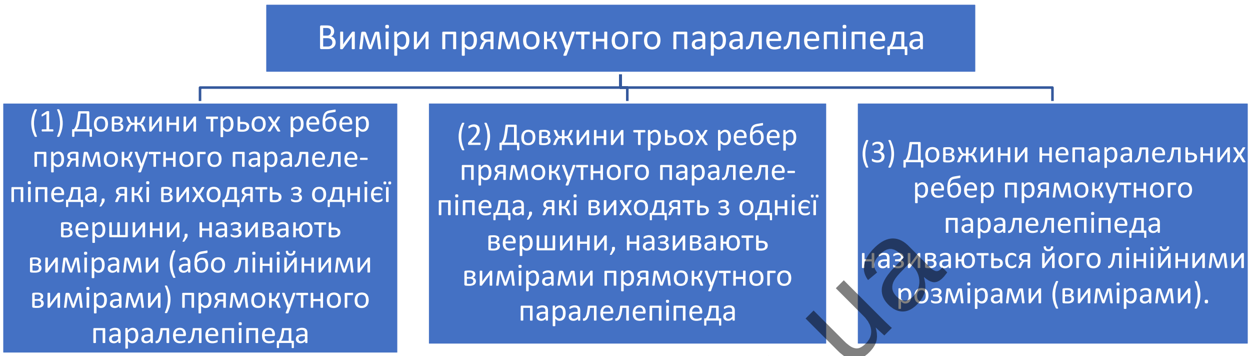



**Рис.1.7. Введення поняття «виміри прямокутного паралелепіпеда» у діючих підручниках**

Звернемо увагу, що означення у підручнику (3) більш широке, але у підручниках (1) та (2) більш доступні для сприйняття учнями.

«Прямокутний паралелепіпед називають кубом, якщо його виміри (ребра) є рівними» – автори підручника (3) означення куба вводять через рівність ребер, а не його вимірів (на відміну від двох інших авторських колективів).

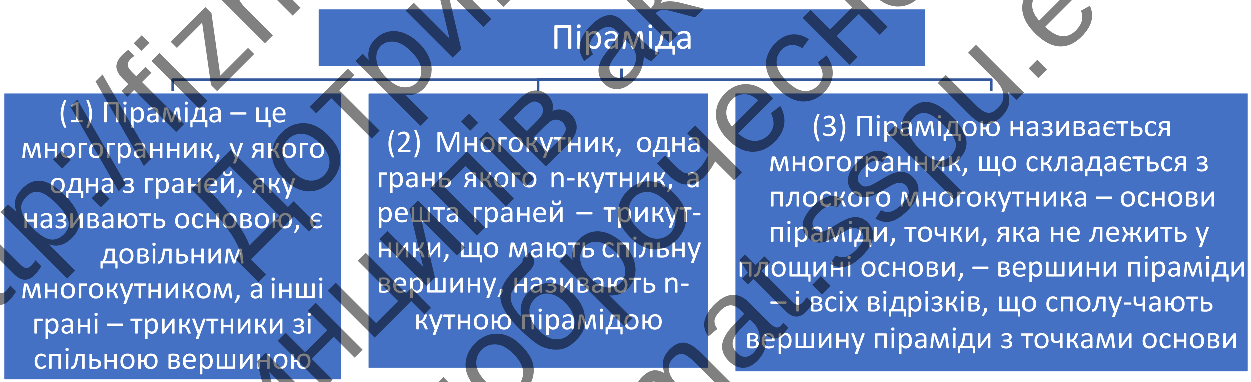



**Рис.1.8. Введення поняття «піраміда»**

Автори підручника (2) вводять поняття «$n$-кутної піраміди»; означення підручника (3) містить в собі означення інших понять, що ускладнює його сприйняття учнями.

Означення висоти і правильної піраміди в трьох підручниках співпадають за змістом: «висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи», «піраміду називають правильною, якщо її основа – правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника».

Апофема

(1) Висота бічної грані правильної піраміди, що виходить із вершини піраміди, називають апофемою піраміди

(2) Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди

(3) Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається апофемою

**Рис.1.9. Введення поняття «апофема»**

У підручниках (1) та (3) акцентується увага на тому, що поняття апофеми визначене тільки для правильної піраміди. Автори ж підручника (2) залишають відкритим запитання: «Чи існує поняття апофеми у неправильній піраміді?»

У підручниках (1) та (3) автори не надають означення площі бічної та повної поверхні піраміди, лише наведена теорема про способи їх обчислення.

У підручнику (2) маємо наступне означення «площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. Площею поверхні піраміди (ще говорять «площа повної поверхні піраміди») називають суму площ усіх її граней».

Зрізана піраміда

(1) Розглянемо довільну піраміду QABC…L . Проведемо площину, яка паралельна її основі. Ця площина перетинає бічні ребра піраміди в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, …, $L_1$ і розбиває піраміду на два многогранники. Многогранник, паралельними гранями якого є многокутники ABC…L і $A_1B_1C_1L_1$ , чотирикутники $AA_1BB_1$, $BB_1C_1C$, …, $LL_1A_1A$, називають зрізаною пірамідою.

(2) Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди. Ця площина розбиває піраміду на два многогранники: один многогранник є пірамідою, другий називають зрізаною пірамідою

(3) Якщо задано піраміду SABC і проведено площину $A_1B_1C_1$, паралельну основі піраміди, то ця площина відтинає від заданої піраміди піраміду $SA_1B_1C_1$, подібну заданій.

Іншу частину заданої піраміди – многогранник, $ABCAA_1B_1C_1$ називають зрізаною пірамідою

**Рис.1.10. Введення поняття «зрізана піраміда»**

Зауважимо, що означення у підручнику (2) видається найбільш лаконічним і не потребує рисунка.

Означення висоти зрізаної піраміди дається наступне – «висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи», а зрізану піраміду означають у такий спосіб – «зрізану піраміду називають правильною, якщо вона отримана з правильної піраміди перетином її площиною, паралельною основі».

В усіх трьох розглядуваних підручниках означення апофеми правильної зрізаної піраміди дається у різний спосіб.

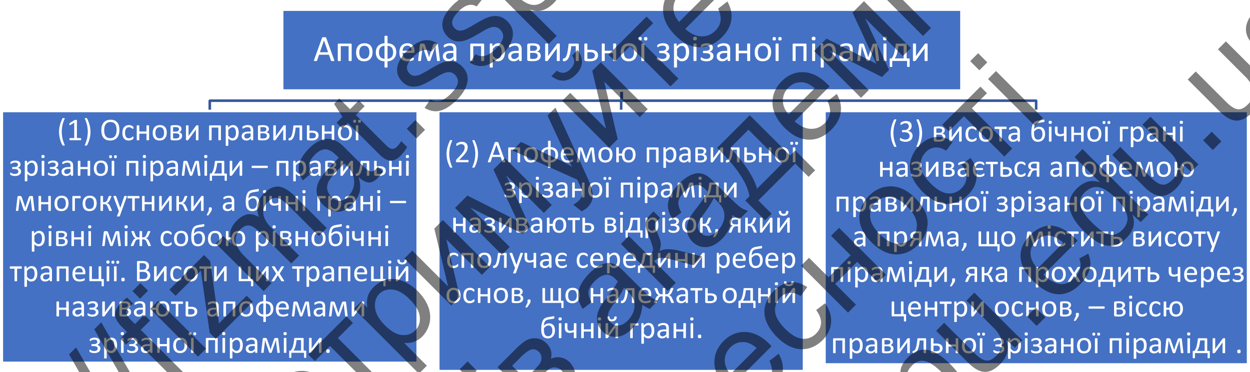



**Рис. 1.11. Введення поняття «апофема правильної зрізаної піраміди»**

Щодо площі бічної поверхні зрізаної піраміди, то так «називають суму площ усіх її бічних граней. Площею поверхні зрізаної піраміди (ще говорять: «площа повної поверхні зрізаної піраміди») називають суму площ усіх її граней». А у підручнику (3) таке означення відсутнє, лише наведений приклад розв'язання задачі про спосіб її обчислення.

Означення «опуклого многогранника» однакові – «опуклим многогранником називають правильним, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер».

Розглядувані підручники написані на високому науковому і методичному рівнях, дотримано принцип доступності, враховано вікові особливості учнів. Зауважимо, що підручники відрізняються наповненістю матеріалом. Так, у підручнику (1) є рубрика «Перевір свою компетентність» у тестовій формі, окрему увагу приділено побудовам перерізів призми і піраміди; у підручнику (2) використовуються кольорові ілюстрації геометричних фігур, наводяться історичні довідки та рубрика «Головне в параграфі»; у підручнику (3) на початку кожного параграфа наведена таблиця з означеннями основних понять і основними властивостями геометричних фігур, розглянуто теорему Ейлера про зв'язок кількості вершин, граней і ребер многокутника, винесено окремим параграфом «Метод слідів».

# РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

## 2.1. Методика вивчення многогранників в старшій школі

У межах змістової лінії «Геометричні фігури» вивчення многогранників є провідним та розглядається в межах тем «Многогранники» та «Об'єми тіл». При вивченні теми «Многогранники» в учнів формується уявлення про тіло, многогранник, опуклий і неопуклий многогранник, призма, піраміда, опуклі і неопуклі правильні многогранники. Тіло можна визначити як фігуру, яка має ненульовий, а точніше додатний об'єм. Для активізації розумової діяльності учнів, перший урок пропонуємо розпочати із запитання: «Що ви розумієте під поняттям «тіло»? та проілюструвати предмети, що є тілами, а що не є (рис. 2.1).

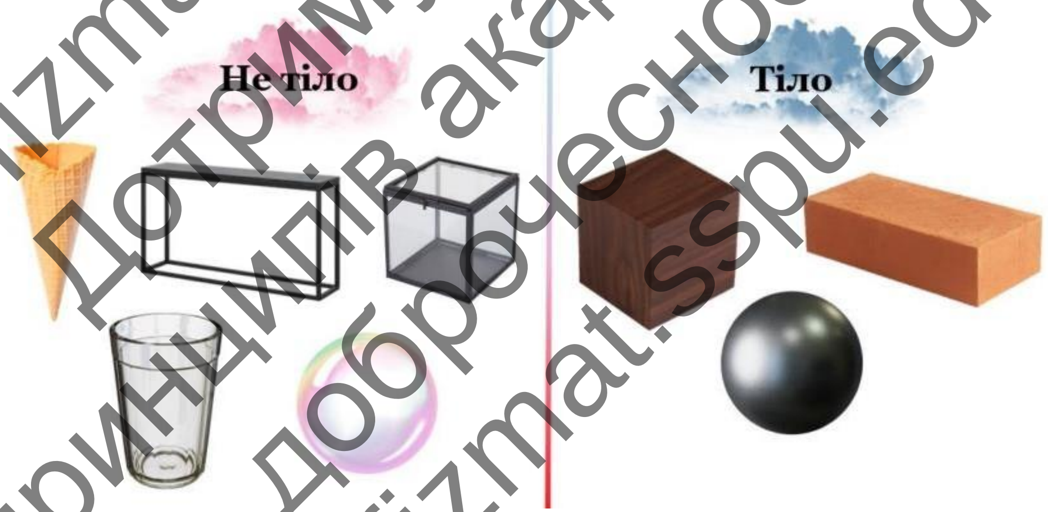



**Рис.2.1. Предмети, що ілюструються поняття «тіло» та «не тіло»**

Вважаємо, що перед вивченням окремих видів многогранників призм, пірамід) необхідно сформувати уявлення про загальне поняття «многогранник» – «многогранником називають тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників» [6] або «багатогранник – це частина простору, обмежена скінченною кількістю багатокутників» [26]. Варто також звернути увагу учнів на той факт, що з плоских многокутників складається саме поверхня тіла, а не власне тіло. Перед ознайомленням учнів із означеннями многогранників доцільно актуалізувати знання про властивості плоских многокутників, зробивши акцент на правильних многокутниках.

Обов'язковим є введення поняття опуклого многогранника: «многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані» [13]. При цьому, як і при формуванні більшості понять теми, варто спиратися на наявні в учнів знання щодо аналогій між фігурами на площині – многокутниками, які вивчались у 8 класі та фігурами у просторі – многогранниками. Вчитель може продемонструвати аналогію між означеннями опуклих многокутників та многогранників. Многокутник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від прямої, яка містить його сторону. Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані. На рис. 2.2 показано аналогію між неопуклим многокутником та неопуклим многогранником.

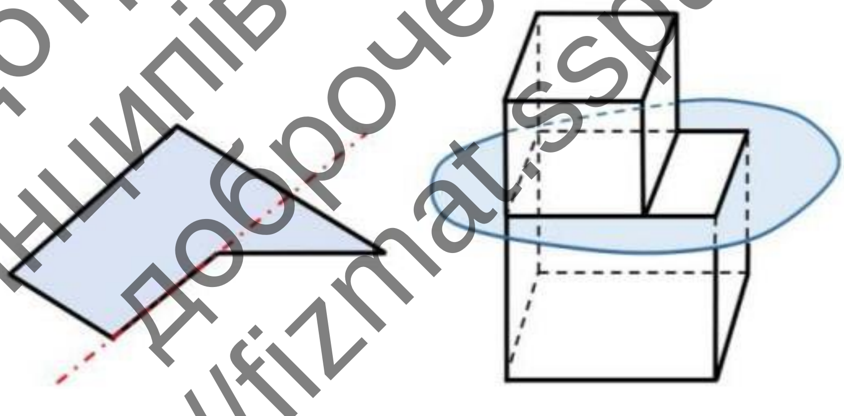


**Рис.2.2. Аналогія між неопуклим многокутником та неопуклим многогранником**

Одним з головних завдань вчителя є навчити учнів чітко розрізняли усі елементи многогранника (вершини, ребра, грані), діагоналі, діагональні перерізи тощо. Доцільно звернути увагу на закономірність між елементами многогранника, описану формулою Ейлера: В+Г−Р=2 (В, Г, Р – відповідно кількість вершин, граней та ребер многогранника). На даному етапі вивчення можна поставити учням декілька запитань з метою розвитку просторової уяви.

1. Яку найменшу кількість граней може мати многогранник?
2. Якими многокутниками можуть бути грані многогранника?
3. Яку мінімальну кількість ребер може мати многогранник?
4. Чи може у многогранника бути менше чотирьох вершин?
5. Чи може гранню шестигранника бути: а) чотирикутник; б) п’ятикутник; в) шестикутник. (Відповідь: а) може; б) може; в) не може.).
6. Яку мінімальну кількість граней може мати призма? Скільки вершин, ребер, бічних ребер у такої призми? (Відповідь: п’ять граней; шість вершин, дев’ять ребер у такої призми.).
7. Чи існує призма, що має 17, 25, 27 ребер? (Відповідь: в n-кутній призмі загальна кількість ребер становить 3n.).
8. Чи існує призма, в якій лише одне бічне ребро перпендикулярне до основи? (Відповідь: ні.).
9. Чи існує призма, в якій лише одна бічна грань перпендикулярна до площини основи? (Відповідь: ні.).
10. Чи існує піраміда, у якої кількість ребер дорівнює 25? (Відповідь: ні).
11. Чи може грань піраміди бути: а) трикутником; б) квадратом? (Відповідь: а) може; б) може).
12. Одна з граней піраміди – квадрат, тоді якою геометричною фігурою будуть інші грані? (Відповідь: трикутники).
13. Піраміда має шість граней, п’ять з яких – трикутники. Яким многокутником є її шоста грань?

Оглядово можна розглянути правильні (рис. 2.3-2.7) та напівправильні опуклі многогранники (платонові тіла та тіла Архімеда відповідно), правильні неопуклі многогранники (тіла Кеплера-Пуансо).



**Рис.2.3. Правильний тетраедр**

**Рис.2.4. Гексаедр**



**Рис.2.5. Октаедр**

**Рис.2.6. Додекаедр**


**Рис.2.7. Ікосаедр**

При вивченні правильних многогранників учням можна запропонувати дослідницьку роботу на визначення числа граней, вершин, ребер правильних многогранників (рис. 2.8)

*Дослідницька робота*

| Правильні многогранники | Число | | |
|---|---|---|---|
| | граней (**Г**) | вершин (**В**) | ребер (**Р**) |
| Правильний тетраедр | 4 | ? | ? |
| Гексаедр | 6 | ? | ? |
| Октаедр | 8 | ? | ? |
| Додекаедр | 12 | ? | ? |
| Ікосаедр | 20 | ? | ? |

**Рис.2.8. Дослідницька робота**

Нагадаємо, що до напівправильних многогранників відносяться многогранники, грані яких правильні, але різнойменні многокутники і всі двогранні кути рівні. Такі многогранники називаються рівнокутно напівправильними многогранниками. Вперше такі многогранники дослідив Архімед. Ним описано 13 многогранників такого типу: зрізаний тетраед, зрізаний октаедр, зрізаний куб, кубооктаедр, ікосододекаедр, зрізаний кубооктаедр, зрізаний ікосододекаедр, ромбокубооктаедр, ромбоікосододекаедр, «плосконосий» куб, «плосконосий» додекаедр. Крім напівправильних з правильних многогранників можна отримати правильні зірчасті многогранники, які називають тілами Кеплера-Пуансо. Їх всього чотири. І. Кеплер відкрив малий додекаедр (його ще називають колючим або їжаком), і великий додекаедр. Л. Пуансо відкрив великий зірчастий додекаедр та великий ікосаедр.

Наступним етапом вивчення многогранників є вивчення призми, її елементів і видів. Також формуються вміння обчислення площ бічної та повної поверхонь призми. Аналогічний підхід спостерігається і при вивченні піраміди.

У підручниках різних часів пропонувалися різні означення призми і піраміди. Так раніше у підручнику О. В. Погорєлова давалося таке означення призми: «Призмою називають багатогранник, що складається з двох плоских багатокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що з'єднують відповідні точки цих багатокутників» [26]. У підручниках, що відповідають чинній програмі означення призми побудовано наступним чином – «*Призмою називають многогранник, у якого дві грані між собою рівні і лежать у паралельних площинах (їх називають основами призми), всі інші грані паралелограми (їх називають гранями призми)*».

Отже, формулювання означення призми було значно спрощено, щоб полегшити засвоєння матеріалу здобувачами освіти.

Після засвоєння означень призми та піраміди дуже важливим є розгляд видів призм і пірамід. Вивчаючи види призм, доцільно скласти спеціальну схему щодо видів призм (рис. 2.9).

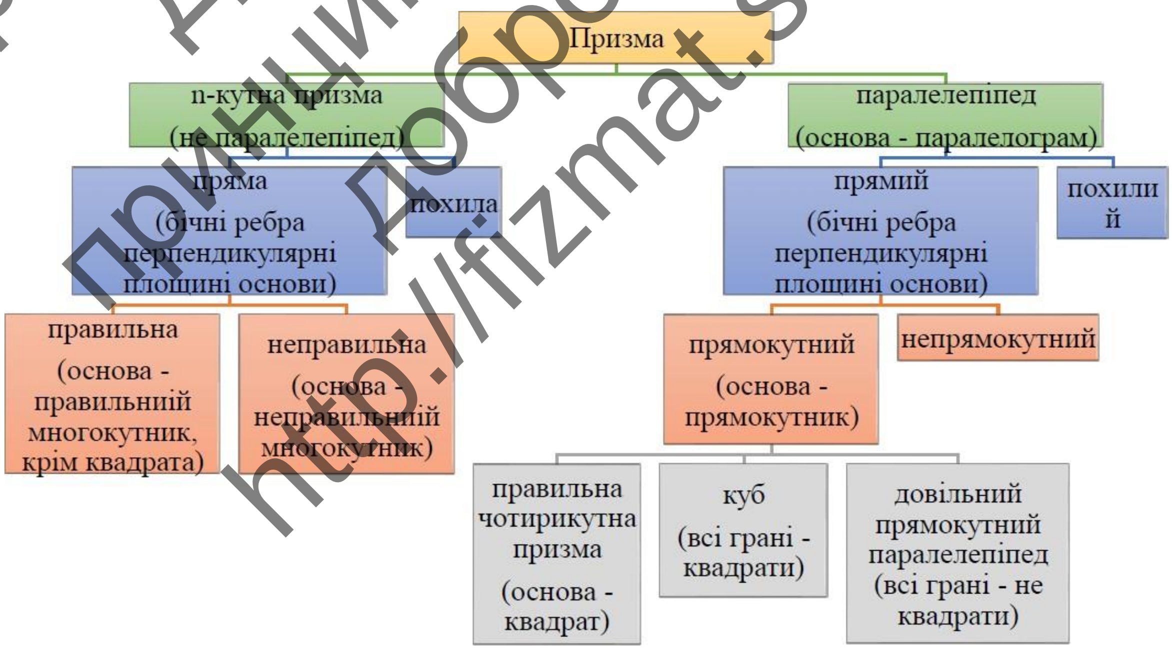



**Рис. 2.9. Види призм**

В підручнику [15] авторів Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. запропоновано схему, що ілюструє зв’язок між паралелепіпедами та їх окремими видами.


**Рис. 2.10. Зв’язок між паралелепіпедами та їх окремими видами**

Використовуючи дану схему, учні можуть легко відтворити означення кожного виду призми через найближче поняття. Вартує звернути увагу здобувачів освіти на відмінність понять «куб» і «правильна чотирикутна призма». Правильна чотирикутна призма – це пряма призма, в основі якої лежить квадрат, але довжина бічного ребра не дорівнює довжині ребра при основі.

Найбільша кількість задач – це задачі на паралелепіпед або на трикутну призму, тому перед вивченням призми доцільно актуалізувати знання про властивості паралелограма і його видів, формулу площі паралелограма, властивості різних видів трикутників, усі формули для знаходження площ трикутників.

Серед великої кількості видів пірамід слід зробити акцент на правильну піраміду; піраміду, у якої усі бічні ребра нахилені до площини основи під рівними кутами; піраміду, у якої усі бічні грані нахилені до площини основи під рівними кутами та зрізану піраміду. При цьому вчителю та учням буде корисним навчальний посібник Г.В. Апостолової та В.В.Ясінського «Шкільна геометрія в опорних схемах, задачах і прикладах» [2] (рис. 2.11).

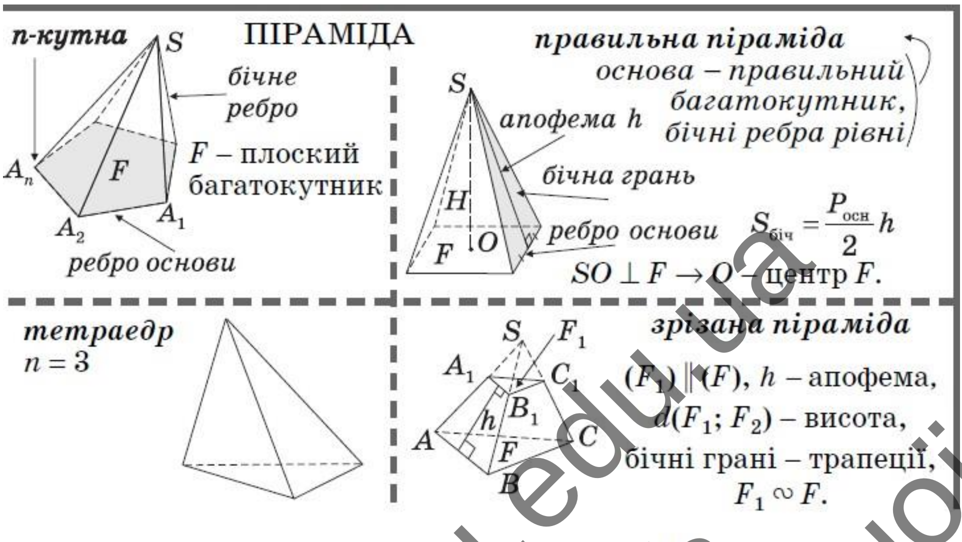



**Рис.2.11. Фрагмент посібника Г. В. Апостолової та В. В.Ясінського «Шкільна геометрія в опорних схемах, задачах і прикладах»**

Важливо, щоб учні чітко усвідомлювали, що «якщо бічні ребра піраміди є рівними або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди» [15] та «якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою піраміди» [15].

Велика кількість задач стосується правильних трикутної або чотирикутної піраміди. Отже, варто актуалізувати знання про властивості рівностороннього трикутника та квадрата. Слід домогтися чіткого засвоєння учнями алгоритму побудови правильної трикутної та правильної чотирикутної пірамід.

Наступним кроком вивчення теми «Многогранники» є розгляд понять «площа бічної поверхні», «площа повної поверхні» призми та піраміди. Якщо для непрямої призми і неправильної піраміди площу бічної поверхні можна знайти, як суму площ усіх бічних граней, то для прямої призми і правильної піраміди розглядають спеціальні формули. «Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми», «Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми» [15].

І знову на допомогу прийдуть опорні конспекти, в яких даний матеріал візуально структуровано (рис. 2.12) [2].

**ОК-38**

**Площі поверхонь**

| | | |
|---|---|---|
| $S_{біч\ призми}$ | $P_{\perp}l$ | $l$ – довжина бічного ребра; $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного перерізу (площиною, що перпендикулярна до бічних ребер). |
| $S_{біч\ прямої\ призми}$ | $Pl$ | $P$ – периметр основи; $l$ – довжина бічного ребра. |
| $S_{біч\ правильної\ піраміди}$ | $\frac{1}{2}Ph$ | $P$ – периметр основи; $h$ – апофема. |
| $S_{біч\ правильної\ зріз\ піраміди}$ | $\frac{1}{2}(P_1+P_2)h$ | $P_{1,2}$ – периметри основ; $h$ – апофема. |

**Об'єми**

| | | |
|---|---|---|
| $V_{призми}$ | $S_{осн}H = S_{\perp}l$ | $l$ – довжина бічного ребра; $S_{\perp}$ – площина перпендикулярного перерізу. |
| $V_{прямокут\ паралелепіпеда}$ | $abc$ | $a, b, c$ – його виміри. |
| $V_{піраміди}$ | $\frac{1}{3}S_{осн}H$ | $S_{осн}$ – площа основи. |
| $V_{зріз\ піраміди}$ | $\frac{H}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$ | $S_{1,2}$ – площі основ. |
| $V$ | $\frac{1}{}\pi R^2 H$ | $R$ – радіус основи |

**Рис. 2.12. Формули площ поверхонь та об'ємів многогранників**

У темі «Об'єми тіл» після введення поняття «об'єм» розглядають формули для знаходження об'єму призми та піраміди. Особливу увагу звертають на формулу об'ємів прямокутного паралелепіпеда і куба. Нагадаємо, що формуючи в учнів поняття «об'єм», слід акцентувати увагу на тому, що «за одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини» [15].

Задачі на многогранники можна умовно поділити на такі типи (рис. 2.13). Зауважимо, що останній тип задач розв'язують після вивчення тіл обертання.

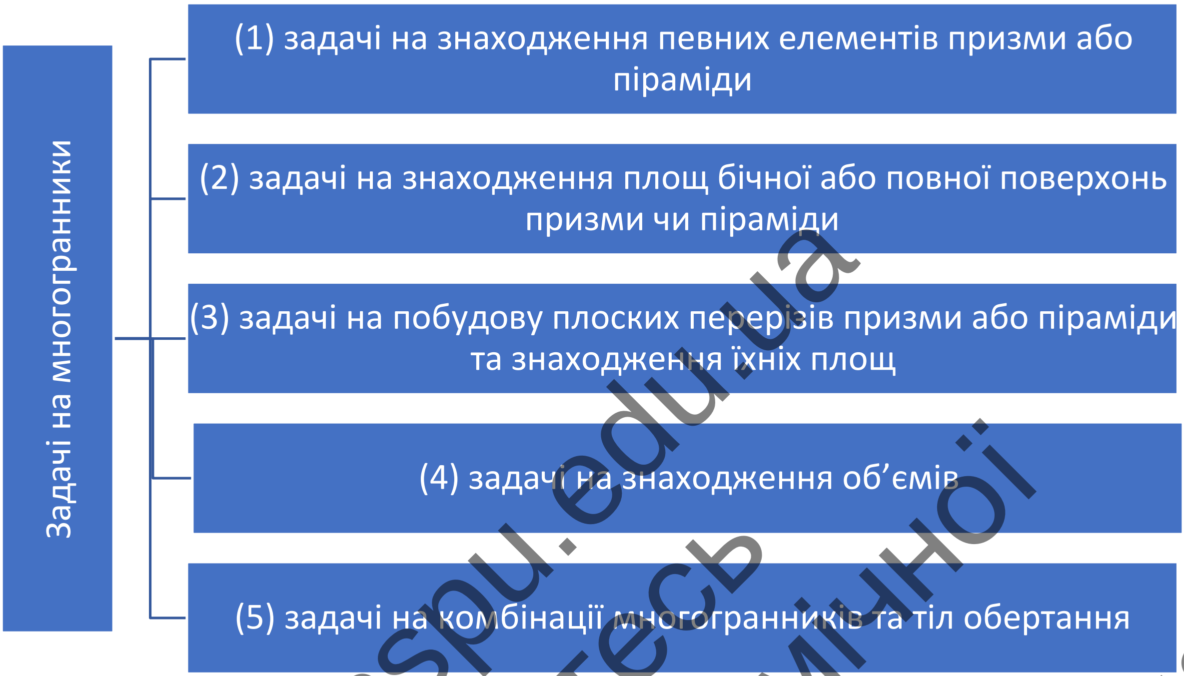



**Рис. 2.13. Типи задач на многогранники**

До типу (1) відносяться, наприклад, *задачі на знаходження кута між прямою та площиною* або *на знаходження кута між площинами* (цей тип задач необхідний для того, щоб учні мали змогу розглядати не тільки зовнішню область многогранника, а й внутрішню, таким чином розвивається просторову уяву).

**№1:** Знайдіть висоту похилої призми, якщо бічне ребро дорівнює 8 см і утворює з площиною кут 30°.

**№2:** Знайти висоту прямого паралелепіпеда, основа якого – паралелограм зі сторонами 3 см і 5 см та тупим кутом 120°, а більша діагональ нахилена до площини основи під кутом 45°.

**№3:** Знайти площу основи та апофему правильної трикутної піраміди з бічним ребром довжиною $4\sqrt{3}$ см, який утворює з площиною основи кут 60°.

**№4.** Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть висоту піраміди та сторону її основи.

**№5.** Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди з апофемою довжиною $2\sqrt{3}$ см, бічні грані якої утворюють з площиною основи кут 30°.

Тип (2). *Задачі на визначення площ повної та бічної поверхонь многогранників* (при виконанні даного типу завдань, учні краще розуміють та запам'ятовують формули для обчислення площі повної та площі бічної поверхонь даного в задачі виду многогранника).

**№1.** Площа бічної поверхні призми дорівнює 12 см$^2$, а площа основидорівнює 5 см$^2$. Яка площа повної поверхні призми?

**№2.** Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, висота і сторона основи якого по 2 дм, а діагональ - 3 дм.

**№3.** Апофема правильної піраміди дорівнює 5 см, знайти площу бічної поверхні цієї піраміди, якщо периметр її основи дорівнює 20 см.

Розглянемо опорну задачу другого типу (рис. 2.14), запропоновану у підручнику [15].

**Задача.** Доведіть, що коли кожний із двогранних кутів опуклої піраміди при ребрах основи дорівнює $\alpha$, то площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$.

*Розв'язання*

Доведення проведемо для трикутної піраміди. Для інших $n$-кутних пірамід доведення буде аналогічним.

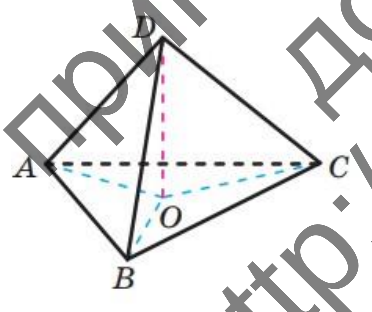



Рис. 3.6

На рисунку 3.6 відрізок $DO$ — висота піраміди $DABC$. Трикутники $AOB$, $BOC$ і $COA$ є відповідно ортогональними проекціями на площину основи піраміди трикутників $ADB$, $BDC$ і $CDA$.

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати:

$$S_{AOB} = S_{ADB}\cos\alpha,$$
$$S_{BOC} = S_{BDC}\cos\alpha,$$
$$S_{COA} = S_{CDA}\cos\alpha.$$

Додавши почленно ліві та праві частини записаних рівностей, отримаємо: $S_б = S_{осн}\cos\alpha$. Звідси $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. ◄

**Рис. 2.14. Опорна задача другого типу**

Задачі типу (3) буде розглянуто окремо у підрозділі 2.3.

## 2.2. Формування графічних умінь учнів при вивченні многогранників

При вивчення курсу стереометрії перед вчителем постає завдання навчити учнів зображувати геометричні тіла та їх комбінації, тобто сформувати вміння виконувати побудови та правильно їх «читати». Зауважимо, що вміння виконувати зображення просторових фігур складається з наступних складових (рис. 2.15) [17]

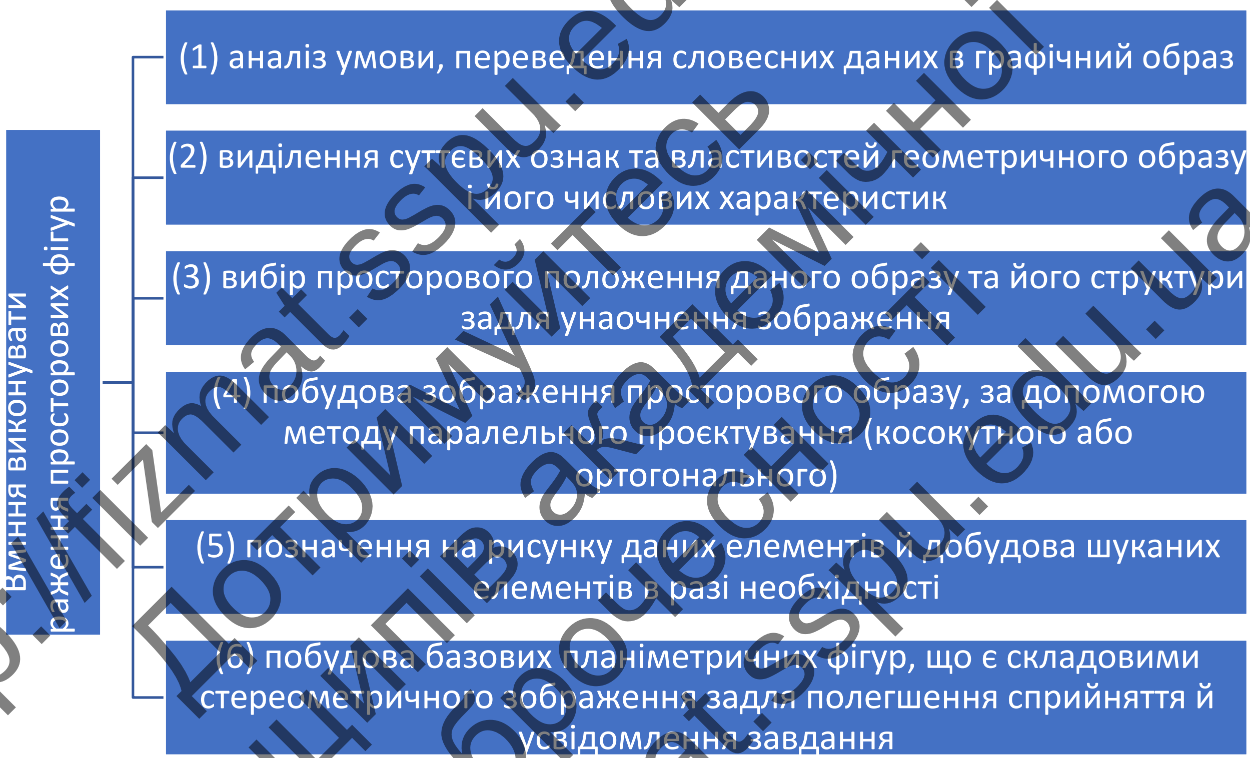



**Рис. 2.15. Складові вміння виконувати зображення просторових фігур**

Складові (1)–(3) пов’язані з оперуванням геометричними образами. Відбувається графічна інтерпретація умови задачі та створення образу, можливо частково узагальненого. Процес виділення суттєвих ознак та властивостей, а також урахування числових характеристик графічного образу уточнює його та конкретизує відповідно до умови. Складові (4) – (5) є демонстрацією учнями їх вмінь виконувати просторові зображення. Важливим є перехід від образу до зображення. Саме вміння учнів втілити образ в уяві на папері й визначає рівень їх вмінь зображувати геометричні тіла та їх комбінації. На цьому етапі відбувається синтез вивченого ними раніше теоретичного матеріалу та виконання певних елементарних побудов.

Але побудова рисунків за правилами обраного методу проєктування потребує виконання тих чи інших графічних операцій, розв’язання певних конструктивних задач, які абсолютно незрозумілі учням, і як наслідок заважатимуть і ускладнюватимуть процес навчання [30].

Найбільш наочні зображення можна дістати при центральному проєктуванні. Це можна пояснити тим, що саме розглядання предмета вже є свого роду центральним його проєктуванням на сітчатку ока. Проте, розглядаючи невеликі предмети з великої відстані, центральне проєктування можна наближено прийняти за паралельне. Тому в навчальному процесі застосовують зображення, побудовані тільки за допомогою паралельного проєктування, при чому рисунок необов’язково вважати проєкцією самого оригіналу, таке зображення в стереометрії називають проєкційним рисунком (вільним зображенням) [30].

При навчанні учнів виконувати стереометричні побудови варто ознайомити їх з певними вимогами до побудови рисунка (за М.Ф.Четверухіним) (рис. 2.16) [29].

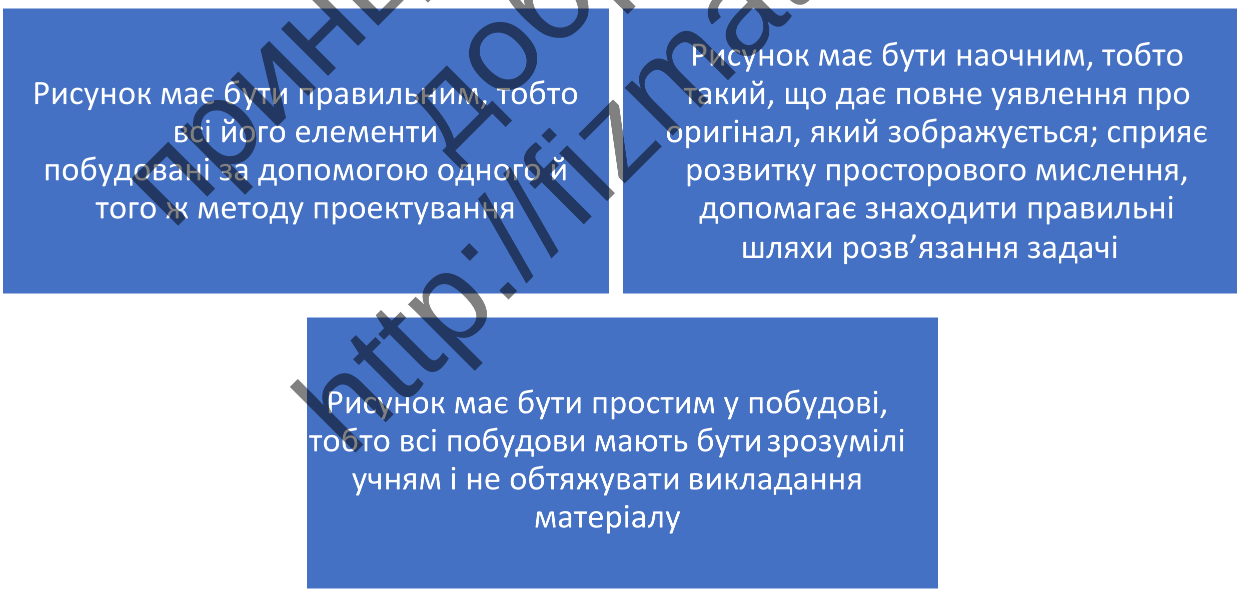



**Рис.2.16. Вимоги до побудови рисунка**

Щоб досягти свідомого та простого виконання побудов зображень многогранників, необхідно, щоб учні засвоїли принципи паралельного проєктування та основні його властивості.

Ознайомити учнів з паралельним проєктуванням як методом побудови зображень потрібно в 10 класі в межах теми «Паралельність у просторі» на уроці «Зображення просторових фігур на площині». На уроці учнів знайомлять з означенням та властивостями паралельного проєктування. Доведення цих властивостей дасть учням більш повну уяву про паралельне проєктування як методу побудови рисунків.

Зосередимося більш детально на методі паралельного проєктування та його властивостях. Варто зазначити, що паралельна проєкція є частинним випадком центральної проєкції, коли центром симетрії виступає нескінченно віддалена (невласна) точка. При цьому всі проєкційні лінії, що проходять через таку невласну точку, – паралельні. Тому і сама проєкція дістала назву паралельна, на відміну від центральної проекції (з власним центром).

При поясненні паралельного проєктування варто подати декілька означень, які будуть використовуватися при вивченні теоретичних основ властивостей паралельних проєкцій (рис. 2.17).

Після того, як вчитель пояснив зміст означень, необхідних при вивченні паралельного проєктування, доцільного зупинись на його властивостях (рис. 2.18).

Оскільки доведення властивостей є нескладними, то учнів можна ознайомити з ними на одному уроці. При цьому варто наголосити на існуванні частинного випадку паралельного проєктування, з яким учні познайомляться пізніше. Після цього вартує виділити 2 години на ознайомлення учнів з основними побудовами зображень просторових фігур та їх комбінацій на площині, спираючись на основні побудови з курсу планіметрії.

Означення 1. Зображенням фігури назвемо проєкцію фігури, яка подібна до оригіналу

Означення 2. Пряма $AA_1$, що визначає напрям проєктування, називається проєкційною прямою

Означення 3. Проєкцією фігури на площину називається множина всіх тих і тільки тих точок, кожна з яких є проєкцією хоча б однієї точки даної фігури. Перетворення однієї фігури в іншу паралельним проєктуванням називають перспективно-афінним або спорідненим перетворенням

Означення 4. Площина, яка паралельна напряму проєктування (проєкційній прямій), називається проєкційною площиною

**Рис.2.17. Означення, необхідні при вивченні паралельного проєктування [15]**

Властивість 1. Проєкція точки є точка.

Властивість 2. Проєкція прямої (непаралельної напряму проєктування) є пряма.

- Наслідок 1. Проєкцією відрізка є відрізок.
- Наслідок 2. Проєкцією променя є промінь.

Властивість 3. Відношення довжин відрізків прямої дорівнює відношенню довжин їх проекцій.

- Наслідок. При проєктуванні середина відрізка переходить у середину його проекції.

Властивість 4. Проєкції паралельних прямих паралельні між собою.

- Наслідок. Паралельне проєктування зберігає співнапрямленість (протилежну напрямленість) променів

Властивість 5. Відношення довжин проекцій паралельних відрізків дорівнює відношенню довжин цих відрізків.

Властивість 6. При ортогональному проєктуванні проекція відрізка прямої дорівнює відрізку, помноженому на косинус кута його нахилу до площини проєкцій

**Рис. 2.18. Властивості паралельного проєктування [15]**

Також учнів потрібно ознайомити з ортогональним проєктуванням, наприклад, наприкінці теми «Перпендикулярність прямих і площин». Але зауважити, що при ортогональному проєктуванні основи певних фігур будуть проєктуватися у відрізки. Тобто при горизонтальному розміщенні основи призми, піраміди, циліндра чи конуса не слід їх проєктувати на вертикальну площину, застосовуючи ортогональне проєктування. Але і косокутне проєктування не завжди доцільне.

Отже, напрям проєкційних прямих слід вибирати хоча і довільно, але так, щоб він не був паралельним жодній грані многогранника або площині основи циліндра чи конуса. При косокутному проєктуванні можливості вибору напряму проєктування є необмеженими, тому не потрібно обирати зручне положення самої фігури, на відміну від ортогонального проєктування. Для кращої візуалізації зображення многогранників варто розташовувати так, щоб їх висоти займали вертикальні положення і зображалися вертикальними відрізками. Зображення многогранників зазвичай починається із зображення їх основ – многокутників.

Перед вивченням алгоритмів побудови многогранників варто повторити правила зображення найпоширеніших плоских фігур (рис. 2.19).

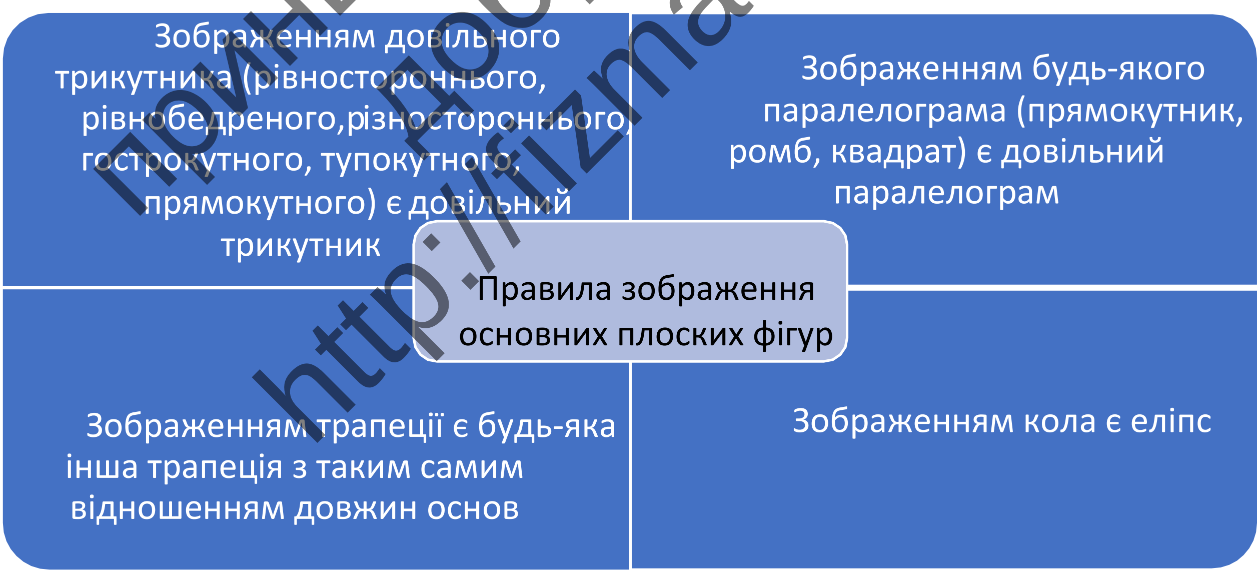



**Рис. 2.19. Правила зображення найпоширеніших плоских фігур**

Наведемо правила побудови зображень основних многогранників.

Побудову ***призми*** зручно розпочинати із зображення її основ. Бічні ребра призми зображують похилими відрізками (для похилої призми) та вертикальними відрізками (для прямої призми) (рис. 2.20).

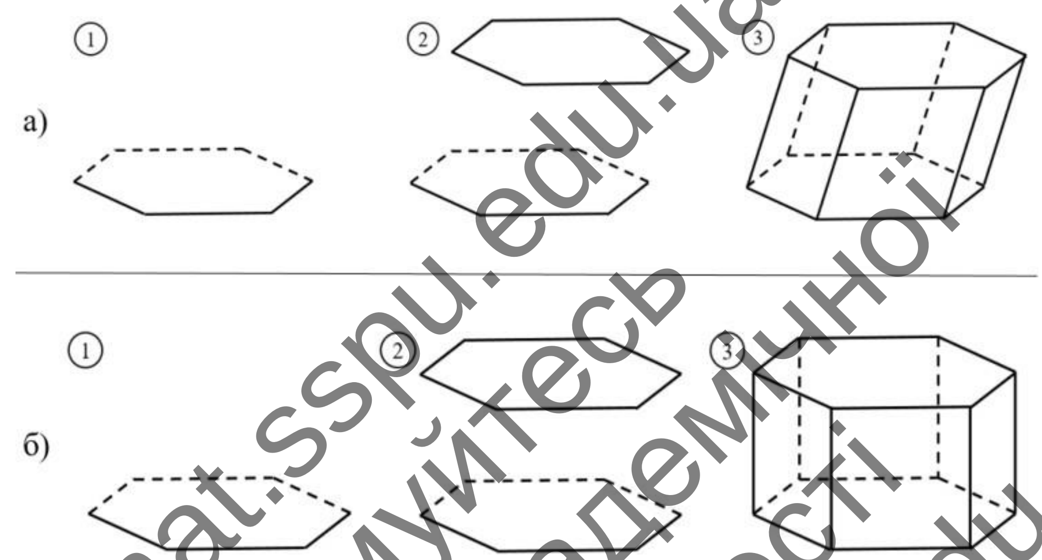



**Рис.2.20. Алгоритм побудови призми**

Щоб зобразити ***піраміду***, потрібно (рис. 2.21):

1) побудувати многокутник, що лежить в основі піраміди;

2) за умовою задачі визначити положення основи висоти піраміди;

3) з основи висоти піраміди вертикально вгору провести промінь на якому вибрати точку (вершину піраміди);

4) сполучити вершину піраміди з вершинами основи [5].

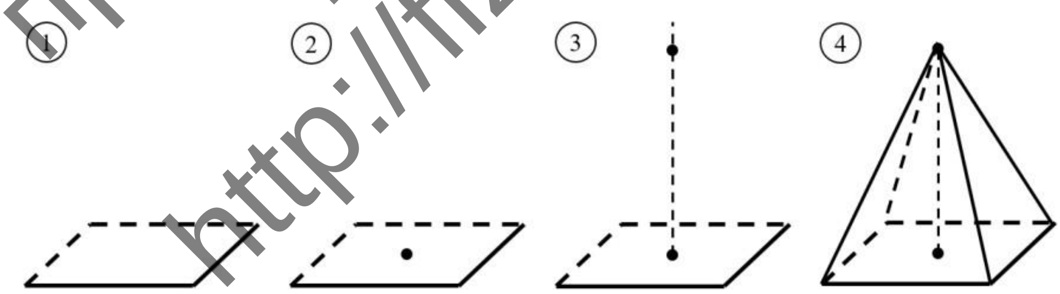
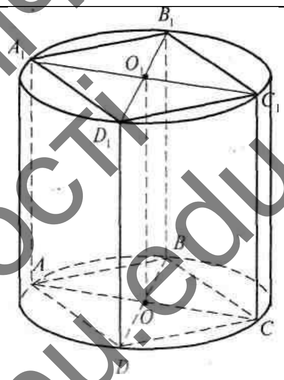


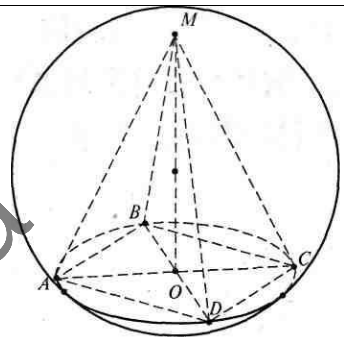
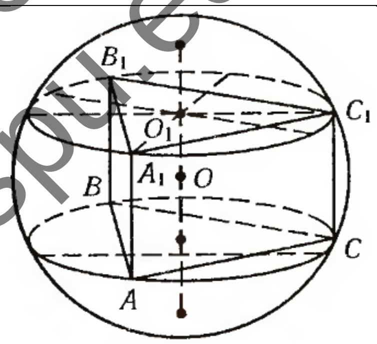

**Рис.2.21. Алгоритм побудови піраміди**

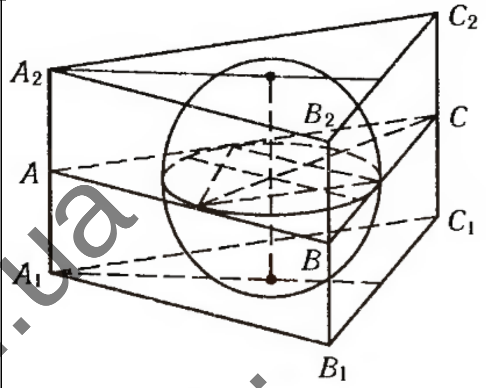
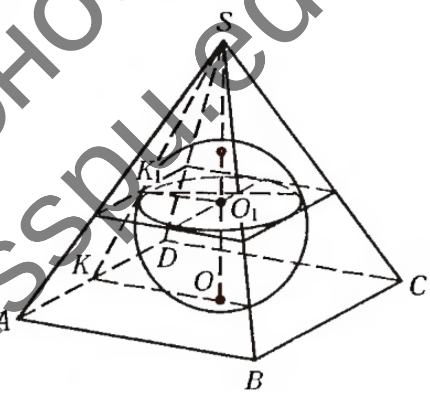
Для вивчення комбінацій основних геометричних тіл не можна визначити певного місця при викладенні курсу стереометрії. Зображення більшості з них потрібні саме при розв'язуванні конкретних задач, тому деякі комбінації не пов'язані з якимись конкретними темами навчального матеріалу. Зауважимо, що при зображенні комбінацій геометричних тіл іноді доцільно обмежитися зображенням відповідного перерізу фігури. Розглянемо основні, найбільш розповсюджені серед задачного матеріалу, комбінації тіл (таблиця 2.1).

*Таблиця 2.1*

**Правила побудови найбільш поширених комбінацій геометричних тіл**

| ***Правило побудови многогранника вписаного в циліндр*** | |
|---|---|
| Щоб побудувати зображення циліндра, потрібно в еліпс, що є зображенням основи циліндра, вписати відповідний многокутник – зображення основи призми. Через вершини цього многокутника провести прямолінійні відрізки, які зображають твірні циліндра і є бічними ребрами вписаної призми. Кінці цих відрізків, які належать еліпсу, що є зображенням другої основи циліндра, є зображенням решти вершин вписаної призми. |   |

<table>
<tr><td colspan="2">Правило побудови піраміди, вписаної в кулю</td></tr>
<tr><td>Щоб побудувати піраміду, вписану в кулю, потрібно провести обрис кулі й зображення кола перерізу кулі площиною основи піраміди. У побудований еліпс вписати відповідний многокутник – зображення основи піраміди – і визначити положення зображення вершини піраміди. У випадку правильної піраміди її вершину й коло, описане навколо многокутника основи, можна розглядати відповідно як полюс і паралель поверхні кулі. Висота, очевидно, проходить через центр кулі.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило побудови призми, вписаної в кулю</td></tr>
<tr><td>Щоб побудувати призму, вписану в кулю, потрібно виконати обрис кулі і її вертикального діаметру. На однаковій відстані від центра кулі провести хорди в зображенні нижньої та верхньої півсфер, позначити на вертикальному діаметрі центри перерізів, нарисувати еліпси. Вибрати вершини на верхньому еліпсі так щоб було видно найбільшу кількість граней. Спроектувати обрані вершини на нижній переріз і провести всі ребра призми.</td><td>
</td></tr>
</table>

| *Правило побудови кулі, вписаної в пряму призму* | |
|---|---|
| Щоб побудувати кулю, вписану в пряму призму, потрібно виконати обрис кулі та її вертикального діаметра. Зобразити великий круг, площина якого паралельна основі призми, й описати на нього багатокутник. Через вершини многокутник провести прямі, паралельні вертикальному діаметру кулі, і відкласти на них від кожної вершини в обидва боки відрізки, що дорівнюють радіусу кулі. Отримані точки сполучити відрізками. |  |
| *Правило побудови кулі, вписаної в правильну піраміду* | |
| Щоб побудувати кулю, вписану в правильну піраміду, потрібно виконати обрис кулі та її вертикального діаметра. Зобразити довільний горизонтальний переріз у верхній півсфері. З точки дотику кулі та еліпса провести до перетину з продовженням діаметра кулі, дана точка є вершиною піраміди. Виконати зображення описаного навколо круга перерізу піраміди (правильного многокутника) за вже відомими правилами. Щоб дістати зображення основи піраміди, виконати перетворення гомотетії в просторі відносно вершини піраміди з коефіцієнтом $k = \frac{\text{відстань від вершини піраміди до центра кулі}}{\text{висота піраміди}}$ |  |

*Зауваження 1.* Рисунок до задачі зі стереометрії повинен займати $\frac{1}{3}$ висоти аркуша зошита.

*Зауваження 2.* При зображенні призм, спочатку краще рисувати верхню основу, оскільки відрізки легше потім проводити вниз. Це зумовлено тим, що рука більш розслаблена коли малює зверху-вниз чим знизу-вгору.

Рисунок відіграє важливу роль при розв'язуванні геометричних задач та доведенні теорем. Він допомогає учню більш конкретно уявити абстрактні геометричні об'єкти, що даються в умові задачі чи формулюванні теореми, розібратися у взаємному розміщенні всіх тих ліній, кутів і площин, про які йде мова в задачі і які треба розглянути, щоб розв'язати її. Вдало виконаний рисунок дає можливість швидше знайти план і шляхи розв'язання задачі.

## 2.3. Особливості вивчення теми «Перерізи многогранників»

Аналізуючи навчальну програму з математики для 10-11 класів [25], можна відмітити, що при побудові перерізів многогранників активно використовуються вивчені в курсі планіметрії властивості геометричних фігур, застосовуються геометричні перетворення. Високий рівень абстрактності досліджуваного матеріалу, логічна строгість систематичного викладу поєднуються із залученням на всіх етапах навчального процесу наочності та постійним зверненням до досвіду старшокласників. Уміння зображувати найважливіші геометричні тіла, їх перерізи мають велику практичну значимість.

Порівняльний аналіз програмних вимог щодо знань та умінь учнів та змісту навчального матеріалу, який стосується вивчення теми «Перерізи многогранників» за трьома рівнями навчання (рівнем стандарту, профільним та поглибленим рівнями), наведено в таблиці 2.2.

*Таблиця 2.2*

**Порівняльна характеристика вивчення теми «Перерізи многогранників» у програмах з математики різних рівнів**

| Критерій | Клас, у якому вивчається тема | Тема/Зміст навчального матеріалу | Вимоги до навчальних досягнень учнів |
|---|---|---|---|
| **Рівень стандарту** | **11** | **Многогранники**. Перерізи многогранників | Учень має уявлення про перерізи многогранника площиною |
| **Профільний рівень** | **10** | **1) Вступ до стереометрії** Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та прямокутного паралелепіпеду методом слідів<br>**2)Паралельність прямих і площин у просторі.** Задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів. | 1) Учень розв’язує вправи, що передбачають виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах<br><br>2) Учень обґрунтовує методи слідів і проекцій під час побудови перерізів січної площини і многогранника; розв’язує вправи, що передбачають виконання побудови перерізів многогранників |
| | **11** | **Многогранники.** Перерізи многогранників. | Учень розв’язує вправи, що передбачають виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду |
| **Поглиблене вивчення** | **10** | **1) Вступ до стереометрії/** Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та призми методом слідів<br>**2) Паралельність прямих і площин у просторі.** Задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів | 1) Учень пояснює, що таке перетин многогранника січною площиною<br>2) розв’язує вправи, що передбачають застосування методу слідів та властивостей проектування; виконання побудови перерізів многогранників. |
| | **11** | **Многогранники.** Перерізи многогранників. | Учень розв’язує вправи, що передбачають виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду |

Таким чином, дана тема вивчається на всіх рівнях, проте для рівня стандарт вона суттєво обмежена як вимогами (учень повинен мати уявлення про перерізи многогранників), так і змістом навчального матеріалу та часом, який виділяється на вивчення даної теми (окремо цей матеріал на рівні стандарт не виділяється).

Проаналізуємо виклад теми «Перерізи многогранників» у деяких шкільних підручниках.

*В підручнику Г.П. Бевза «Математика» (рівень стандарту)* многогранники та їх перерізи розглядаються у 11 класі у темі «Геометричні тіла та многогранники». Означення перерізу вводиться через січну площину: «якщо принаймні дві точки многогранника розміщені по різні боки від деякої площиною, то ця площина перетинає цей многогранник. Її називають січною площиною, а множину точок, спільних для многогранника та січної площини, перерізом многогранника цією площиною… Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: трьома точками, що не лежать на одній прямій; прямою і точкою тощо» [5]. Це весь теоретичний матеріал про перерізи многогранників. У кінці параграфу наводиться приклад розв'язання задачі на побудову перерізу куба площиною, що проходить через середини сусідніх ребер, надається історична довідка. У вправах рівня А задачі на побудову перерізів многогранників відсутні, але є 5 задач рівня Б (на побудову перерізу тетраедра, прямокутного паралелепіпеда і куба).

У параграфах «Призми» та «Піраміди» дається означення діагонального перерізу призми та піраміди. Після параграфів є завдання складності А на побудову перерізу трикутної призми, який проходить через дві вершини і середину ребра, і складності Б – на побудову перерізу паралелепіпеда, що проходить через середини трьох ребер та на побудову перерізу піраміди площиною, що проходить через три точки, які мають два варіанта розміщення. Після параграфу «Правильні многогранники» пропонуються наступні завдання: чи може бути перерізом правильного гексаедра правильний трикутник, чотирикутник; чи може бути дев'ятикутник перерізом правильного октаедра.

*У підручнику Є. П. Неліна «Геометрія» (академічний і профільний рівні)* досліджувана тема вивчається у 10 класі і розкривається у окремому розділі «Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників». Пропонується означення перерізу: «перерізом многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини» [21], який ілюструється прикладом.

Після введення поняття перерізу розглядається побудова перерізу методом слідів на конкретному прикладі. Після викладу теоретичних відомостей пропонується ще один приклад побудови. Інших методів побудови перерізів у даному підручнику не розглядається. В кінці параграфу запропоновано 15 вправ на побудову перерізів різного ступеня складності, серед них є, наприклад, такі:

– чи може в перерізі тетраедра площиною бути чотирикутник, зображений на рисунку;

– на рисунках вказано три точки, які лежать або на ребрах, або на гранях куба, треба побудувати переріз куба площиною, яка проходить через ці три точки для кожного із запропонованих варіантів розміщень точок.

До кожного прикладу розв'язання задачі наводиться коментар, який можна сприймати, як правило-орієнтир або алгоритм: *Під перерізом многогранника даною площиною розуміється фігура, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, або многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини* [21].

У шкільному курсі геометрії використовується метод слідів для побудови перерізів многогранників. Пряму перетину площини перерізу та площини якої-небудь грані многогранника називають слідом. Щоб побудувати слід, достатньо побудувати дві його точки, тобто точки, що одночасно лежать у січній площині та площині β даної грані. Якщо слід побудований, то відрізок (PQ), по якому він перетинається з площиною β, визначає сторону перетину, що лежить у цій площині. Важливо, щоб кожна точка його перетину зі стороною грані або її продовженням лежала в площині іншої грані; наприклад, точка P (рис. 2.22) лежить на бічній грані ABS піраміди, точка U – в площині грані BCS і тощо

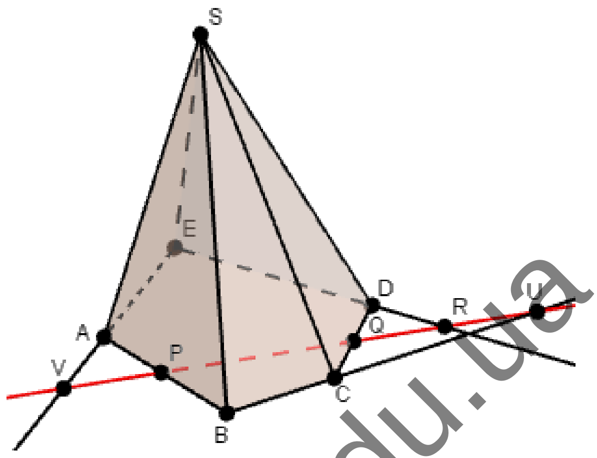



**Рис. 2.22. Побудова сліду**

Оскільки разом із зазначеними точками і весь слід лежить у площині перерізу, то отримаємо принаймні одну точку перетину в кожній з граней, суміжних з β. Далі використаємо інші (відомі з умови) або попередньо побудовані точки перерізу, що лежать в цих гранях, і побудуємо слід у новій грані і т.д. Цих дій достатньо для побудови перерізу піраміди або призми, що заданий двома точками в площині основи і однією на бічній поверхні.

Коли потрібно побудувати переріз призми, то можна додатково використовувати той факт, що сторони перерізу, які належать основам, паралельні. Проте дані завдання можуть не дозволяти відразу провести слід в площині основи піраміди або призми. Тоді спочатку потрібно побудувати слід (точніше будь-які дві його точки). Основним елементом цієї побудови є знаходження точки, в якій пряма перетинає площину.

***Приклад.*** Побудувати лінію перетину площини, що проходить через точки K, L, M, які розташовано на бічній поверхні призми, з її основою (рис. 2.23-2.24).

Для побудови перерізу піраміди використаємо схему, наведену на рисунку 2.23. Сам переріз призми площиною (KLM) подано на рисунку 2.24.

Побудова проєкції K', L', M' заданих точок на площину основи (в даному випадку взяті паралельні проєкції вздовж бічних ребер призми)

↓

Будь-які дві з точок K, L, M лежать в одній площині з своїми проєкціями. Отже, пряма, що сполучає ці точки, перетинається в просторі, з прямою, яка з'єднує їх проєкції (або названі прямі паралельні)

↓

Побудова точок P і Q перетину прямих KL і K'L', LM і L'M'. Ці точки і є точками перетину прямих KL і LM з площиною основи призми

↓

Побудова прямої PQ, що є слідом площини перетину KLM на площині основи

↓

Якщо одна з прямих KL і LM виявиться паралельною своїй проєкції, то й слід буде паралельний цій прямій.

**Рис. 2.23. Схема розв'язання задачі**

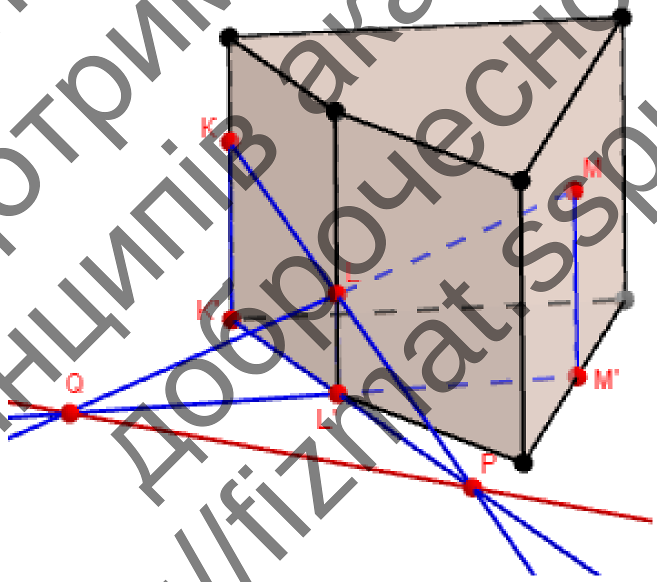



**Рис. 2.24. Приклад**

Сформулюємо алгоритм побудови перерізу многогранника методом слідів (рис. 2.25).

**Крок 1.** Будуємо проекції K', L', M' даних точок K, L, M на площину основи (паралельно бічним ребрам у разі призм та з вершини піраміди як з центру проекції у випадку пірамід); цю площину називають основною. Якщо якісь із заданих точок належать основній площині, то їх проекції будувати не треба.

**Крок 2.** Перетинаючи прямі (KL, LM, MK), що сполучають дані точки, з їх проекціями, знаходяться точки перетину цих прямих з основною площиною. Пряма, яка проходить через них, є слідом перетину на основі. Для того, щоб її провести, достатньо знайти хоча б дві її точки.

**Крок 3.** Знаходимо точки перетину сліду із сторонами основи або з їх продовженнями. Використовуючи ці точки та ті із заданих точок, що лежать на бічній поверхні многогранника, знаходимо послідовно вершини перетину на бічних ребрах, а у випадку призми і на сторонах другої основи.

**Рис.2.25. Алгоритм побудови перерізу многогранника методом слідів**

Після того, як учні вже ознайомилися із означенням перерізу многогранника і методом слідів, можна запропонувати задачу на побудову перерізу чотирикутної піраміди SABCD площиною, яка проходить через три точки M, N, K, що належать відповідно ребрам SB, SC, AD. Виконаємо побудову перерізу піраміди крок за кроком (рис. 2.26-2.31).

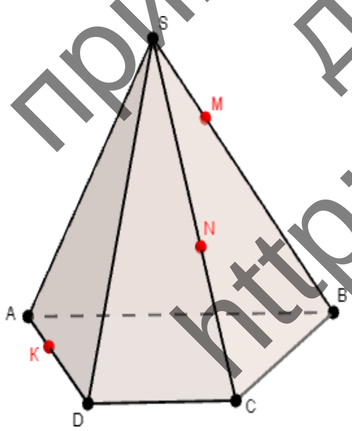



**Рис. 2.26**

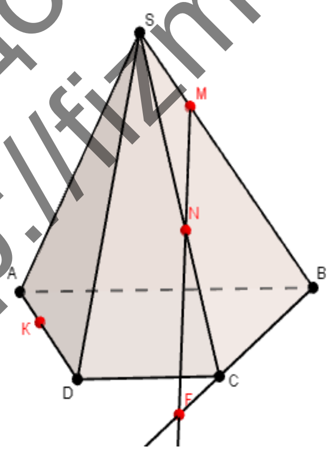



**Рис. 2.26**

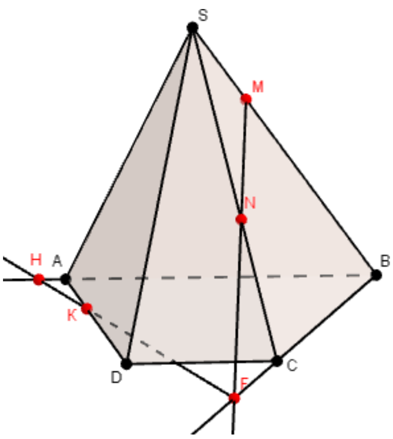



**Рис. 2.27**

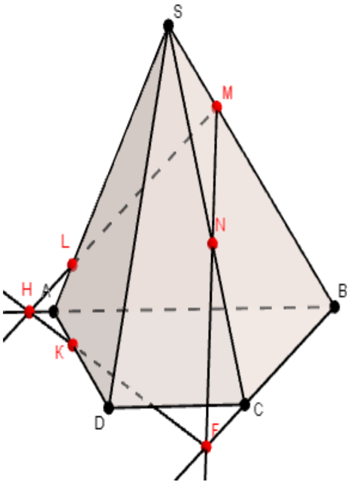



**Рис. 2.28**

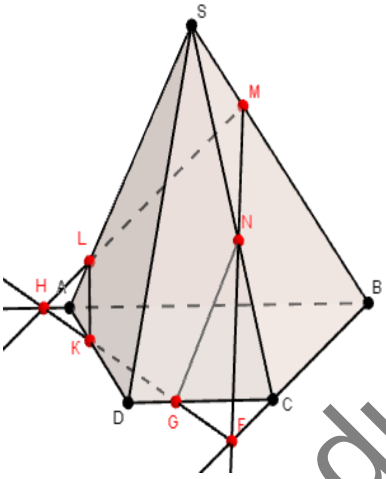



**Рис. 2.29**

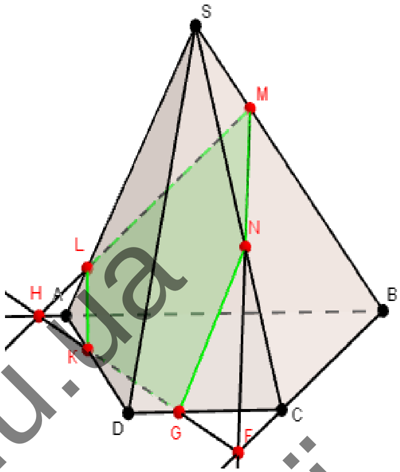



**Рис. 2.30**

Алгоритм побудови перерізу в цій задачі є наступним:

1) проводимо прямі MN і CB, $MN \cap CB = F$;

2) проводимо прямі AB і FK, $AB \cap FK = H$;

3) проводимо пряму MH, $MH \cap SA = L$;

4) $FK \cap CD = G$;

5) MNGKL – шуканий переріз.

Для формування умінь будувати перерізи многогранників методом слідів доцільно розглянути ряд базових задач, диференційованих за рівнем складності. Мета розв'язування цих задач – сформувати в учнів розуміння самого принципу побудови перерізів многогранників методом слідів, площини перерізів яких задано трьома точками або прямою та точкою, що їй не належить та сформувати вміння виконувати відповідні побудови. Враховуючи загальні та часткові вміння зображати стереометричні фігури, процес формування в учнів відповідних умінь виконувати побудови перерізів многогранників методом слідів має містити ряд умінь, формування яких відбувається в певній послідовності. Таким чином, розв'язання базових, а надалі й інших задач на побудову перерізів пропонуємо виконувати за схемою, яка власне відображає правило-орієнтир розв'язування таких задач.

1. Аналіз умови задачі: визначення, якого виду многогранник і створення графічного образу.

2. Побудова зображення просторового образу.

3. Позначення на рисунку даних в умові задачі елементів.

4. Побудова слідів перерізу площини перерізу з гранями многогранника за даними задачі.

5. Знаходження точок перетину сліду з площинами (гранями многогранника).

6. Побудова шуканого перерізу [32].

Виконання завдань кожного з пунктів даної схеми дасть можливість сформувати в учнів відповідні часткові вміння, які складають загальне вміння виконувати побудови перерізів многогранників методом слідів.

Розглянемо приклади задач, які можна вважати типовими (п’ять типів). Розв’язання до кожної задачі подано у вигляді поетапного зображення побудови самого перерізу та доповнено схемою розв’язання задачі.

**Тип 1**. Побудуйте переріз піраміди SABC площиною, що проходить через три точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах AS, SC, BC.

Схему побудови та саму побудову перерізу наведено на рис. 2.32–2.34). Як видно із рис. 2.34 отриманий переріз є чотирикутником.

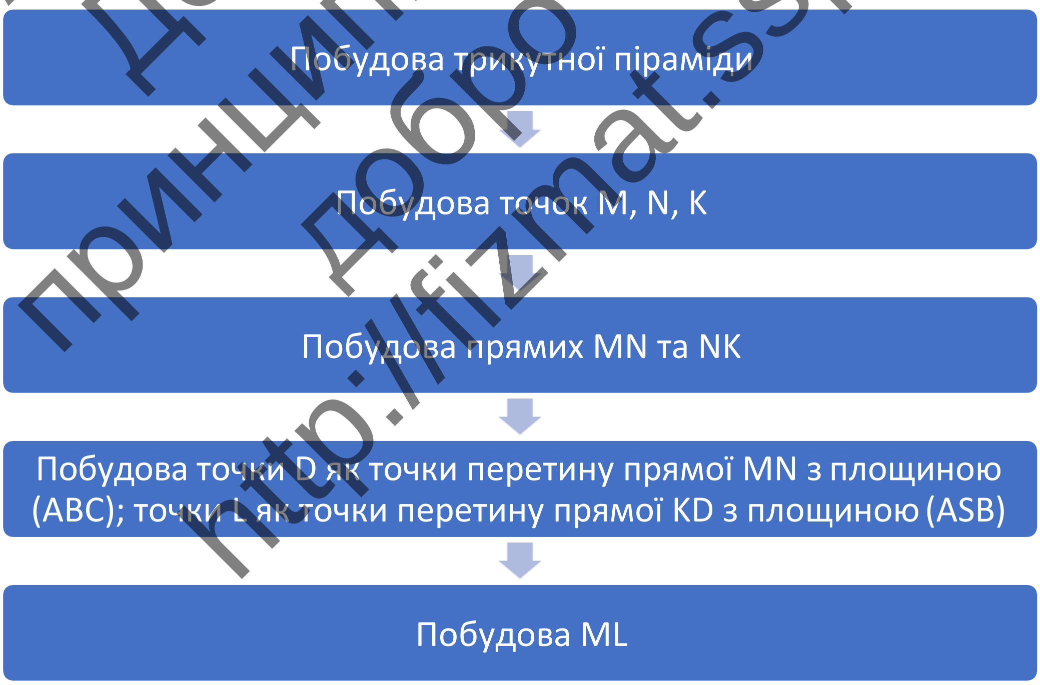



**Рис.2.32. Схема розв’язання задачі**

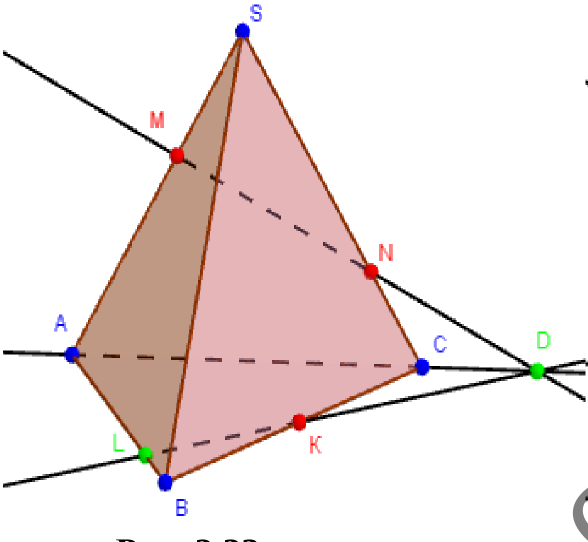



Рис. 2.33

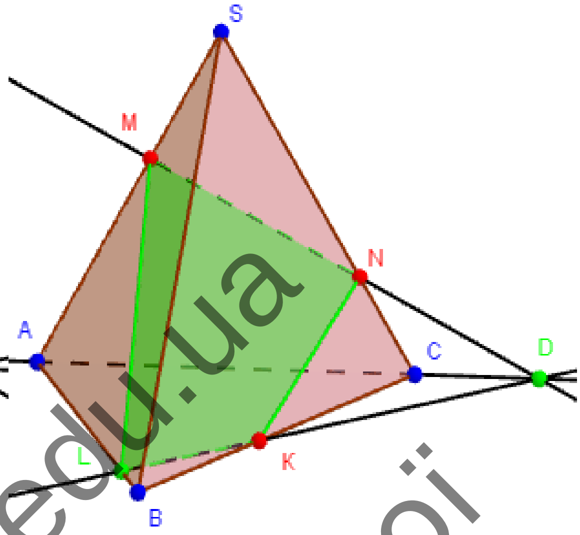



Рис. 2.34

**Тип 2.** Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K, які належать відповідно ребрам AB, AD, $CC_1$.

Алгоритм побудови наведено на рисунку рис. 2.35, а сам переріз побудовано нижче, на рисунках 2.36-2.37. Як видно з останнього рисунка, перерізом у цьому випадку є п’ятикутник.


**Рис.2.35. Схема розв’язання задачі типу 2**

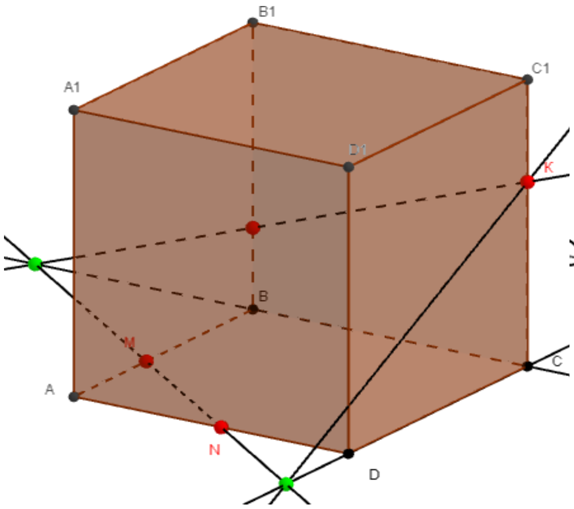



**Рис. 2.36**

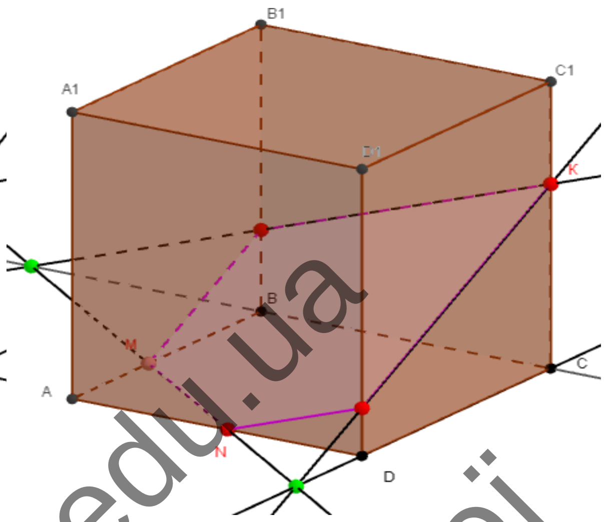



**Рис. 2.37**

**Тип 3.** Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K, які належать відповідно ребрам $B_1C_1$, $DD_1$, $D_1C_1$.

Як і для задач типів 1-2 наведемо схему побудови (рис. 2.38) та виконаємо її (рис. 2.39–2.40). В результаті побудови одержимо шестикутник, що є перерізом даного паралелепіпеда то містить відповідні точки.


**Рис.2.38. Схема розв’язання задачі**

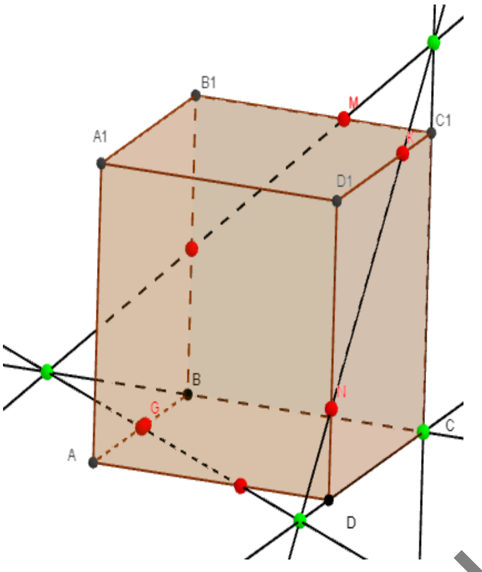



**Рис. 2.39**

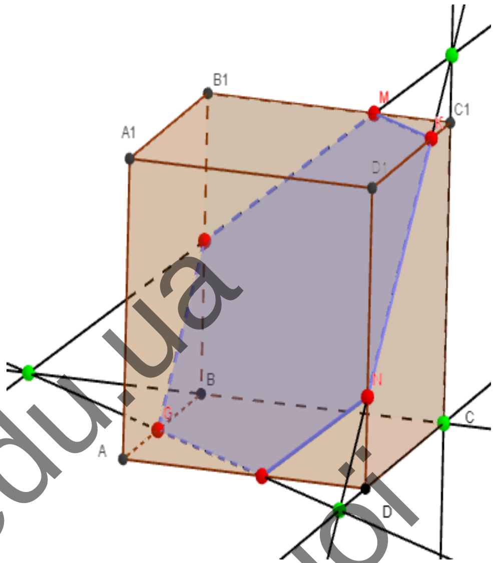



**Рис. 2.40**

У наступних двох задачах рисунок доцільно доповнити зображенням площини основи, оскільки вона містить один із даних елементів (слід g). Добудова площини основи можлива й у попередніх трьох задачах, але на нашу думку вона є недоцільною, бо вимагає врахування видимих і невидимих ліній, що ускладнює саму побудову. Оскільки площина основи є допоміжним елементом рисунка, то достатньо зображати лише видиму її частину.

**Тип 4**. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, заданою слідом g в площині (ABC) та точкою M, що належить площині $(DD_1C_1)$ (рис. 2.41-2.42).

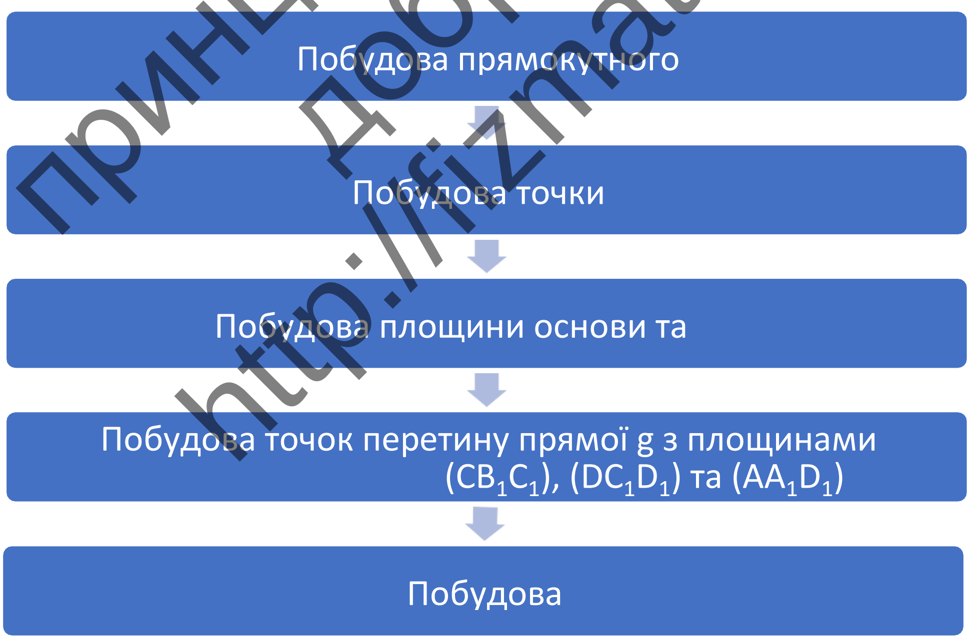



**Рис.2.41. Схема розв'язання задачі**

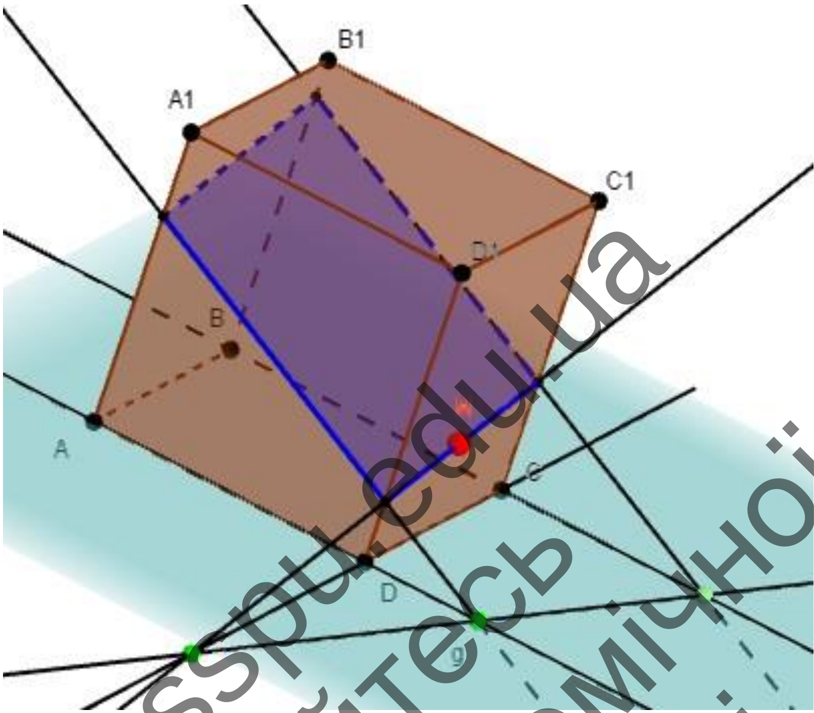



**Рис. 2.42. Переріз прямокутного паралелепіпеда**

**Тип 5.** Побудуйте переріз піраміди SABCD площиною, що проходить через три точки M, N, K, якщо точки M і N лежать відповідно на площинах (SAB), і (SBC), а точка K на ребрі SD (рис. 2.43-2.44).

Побудова чотирикутної піраміди

Побудова точок M, N, K і площини основи

Побудова сліду g як прямої, що проходить через точи перетину MN та NK відповідно з прямими $M_1N_1$ та $DN_1$

Побудова точок перетину прямої з площинами (SCD) та (SBC)

Побудова перерізу

**Рис.2.43. Схема розв’язання задачі**

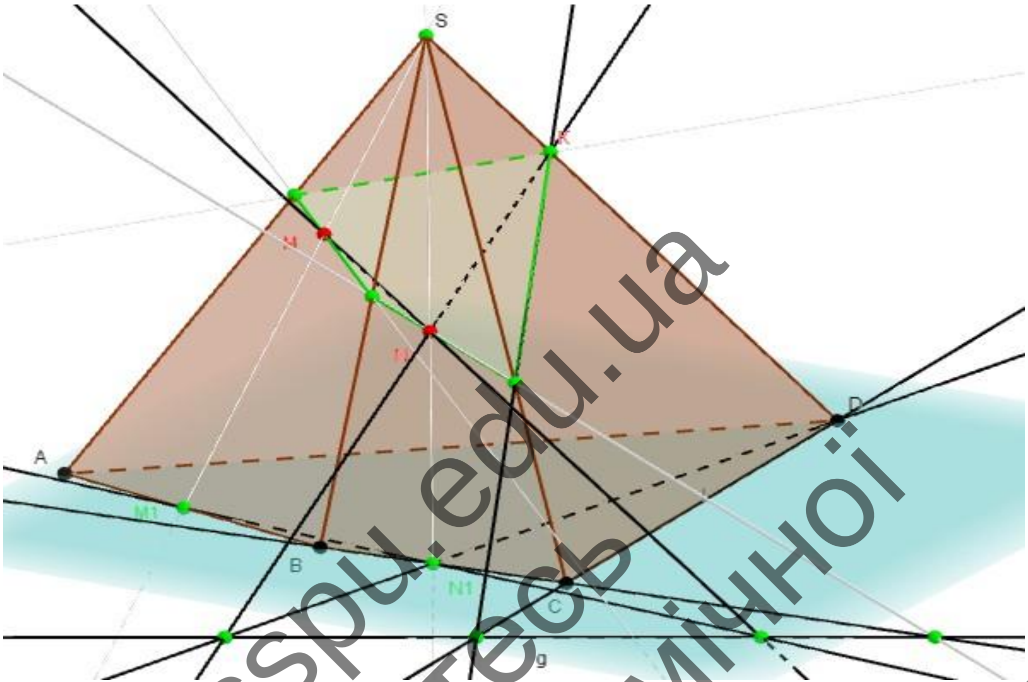



**Рис. 2.44. Переріз піраміди**

Ураховуючи принцип диференціації, вважаємо, що в класах, де вивчають математику на рівні стандарту, достатньо розглянути лише задачі першого типу; а в класах, де геометрія вивчається на профільному рівні або поглиблено – типи 1-5.

Для формування в учнів умінь будувати перерізи многогранників методом слідів запропонуємо різнорівневу добірку задач (Додаток Б). Для академічного, профільного та поглибленого рівнів доцільно пропонувати задачі за готовими рисунками, наприклад, під час контролю знань і вмінь (залік, самостійна робота) або як домашнє завдання з подальшою обов’язковою перевіркою.

Описана методика формування в учнів знань, умінь та навичок з теми «Перерізи многогранників» відповідає державним вимогам щодо рівня загальноосвітньої підготовки учнів. За рахунок виокремлення часткових умінь відбувається поетапне формування та вироблення умінь виконувати стереометричні зображення, а відповідно й розвиток просторових уявлень.

## 2.4. Програми динамічної математики як засоби візуалізації при вивченні многогранників

При вивченні многогранників з метою підвищення навчальних результатів учнів вчителю корисно використовувати різні засобів навчання. Окрім загальноприйнятих елементів таких, як підручники, посібники, методична література тощо, можна включати програмне забезпечення математичного спрямування, комплекс візуальних інформаційних схем, моделей, зошитів, конспектів, таблиць з теоретичного матеріалу, системи візуальних задач та їх методичний супровід.

Також варто використовувати наочне приладдя при вивченні многогранників, особливо на перших уроках, коли формуються перші уявлення про призму та піраміду. Тому при вивченні многогранників доцільно використовувати моделі (макети) многогранників.

Також бажано використовувати таблиці, схеми, які показуються залежність понять при вивчені даної теми. Завдяки використанню схем та таблиць зростає вибірковість уваги учнів та її залежність від спрямованості інтересів, що є характерним для кліпового мислення учнів.

Як засоби візуалізації варті уваги програми динамічної математики *GeoGebra* та *Cabri3D*. При їх використанні з'являється можливість організовувати цілеспрямоване спостереження за геометричною фігурою, перевіряти гіпотези, що виникають при цьому спостереженні та перевірити їх в ході комп'ютерного експерименту.

### *Задачі на розгортки многогранників*

При вивченні многогранників невід'ємною складовою є ознайомлення з їх розгортками. Такий підхід дозволяє розвивати просторові уявлення та уяву, формувати критичне мислення учнів та покращувати уявлення про многогранники. На початкових етапах можна запропонувати наступну задачу.

**Задача**. Паралелепіпед розрізали по семи ребрах, які виділені кольором на рисунку. Знайти відповідну розгортку (рис. 2.45).

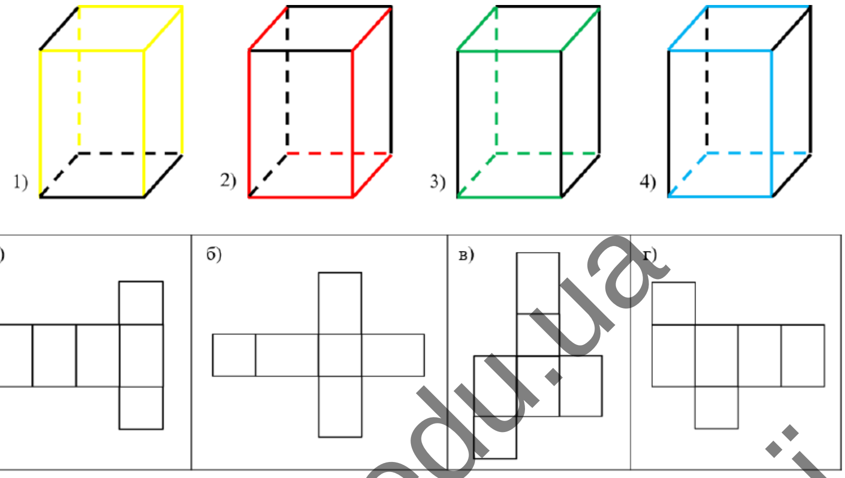



**Рис. 2.45. Задача на розгортки многогранників**

В подальшому учням можна пропонувати задачі на побудову розгорток многогранників із використанням програми *Cabri 3D*.

***Приклад.*** Побудувати розгортку трикутної піраміди, одне з бічних ребер якої перпендикулярне площині основи (рис. 2.46).

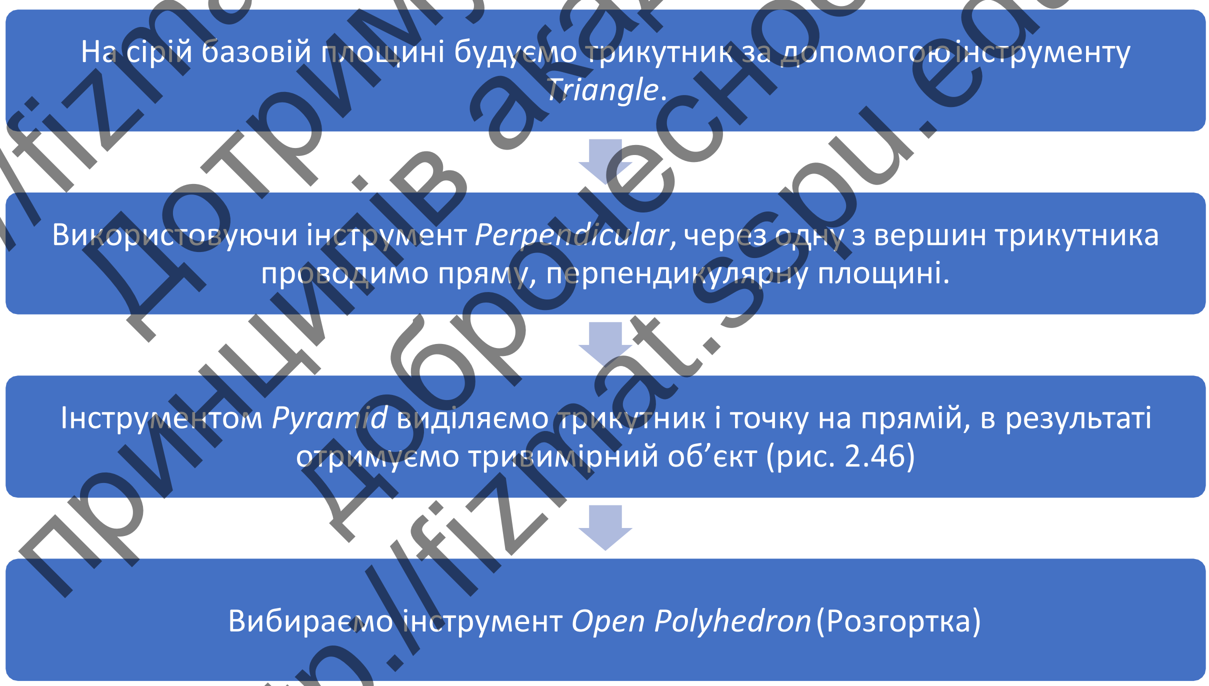



**Рис. 2.46. Алгоритм побудови моделі до задачі**

Розкриваємо розгортку, потягнувши її лівою кнопкою миші за будь-яку грань (рис. 2.48). Коли розгортка наблизиться до базової площини, вона автоматично до неї прив’яжеться (рис. 2.49) [24].

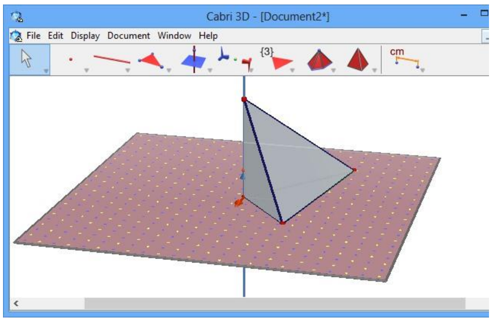



Рис. 2.47. Трикутна піраміда

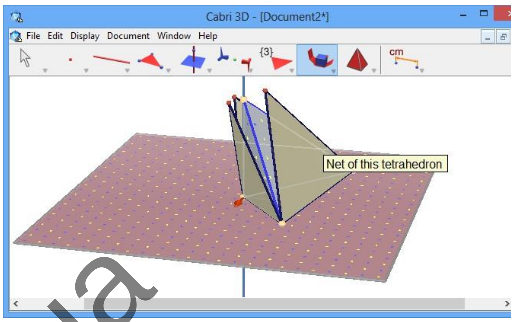



Рис. 2.48. «Розкриття» розгортки

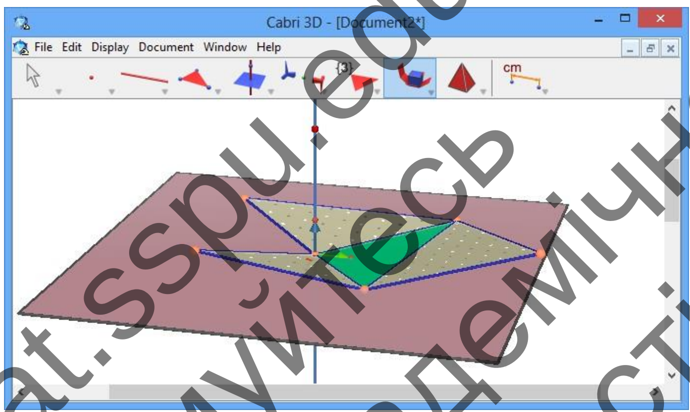



**Рис. 2.49. Побудова розгортки**

Розгортку також можна підготувати до друку. Для цього потрібно в контекстному меню обрати команду *Add Net Page* (Додати сторінку розгортки). Розгортка піраміди з'явиться на новій сторінці. Роздрукувавши розгортку, можна моделювати многогранник з паперу.

Одним з класичних прикладів задач, які розв'язуються із використанням розгортки, є задача на знаходження найкоротшої відстані по поверхні многогранника. Розглянемо приклад такого типу задач із використанням програми *GeoGebra*.

***Приклад.*** Знайти найкоротшу відстань по поверхні куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1 см між вершинами $A$ та $C_1$.

Найкоротший шлях визначається як відстань між двома точками. Проте у задачі присутнє обмеження на визначення відстані саме по поверхні куба, що вимагає прокласти шлях, який з'єднує ці точки. А це важко зробити навіть для тих учнів, хто має розвинену просторову уяву. В таких задачах використовується розгортка куба, оскільки її застосування значно спрощує розв’язання. Проте її побудова та нанесення потрібних точок на неї також вимагають від учнів вмінь бачити проєкції просторових тіл [25].

Побудуємо дві сусідні вершини нижньої основи куба зі стороною 1, наприклад, задавши точки *A(1;0;0)* та *B(1;1;0)*. Побудуємо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (інструмент *Куб*), вказавши дві сусідні вершини. Побудуємо розгортку куба (інструмент *Розгортка*, рис. 2.50), яка автоматично з’явиться і на додатковому полотні 2D [25].

При цьому на полотні 2D також з’являється повзунок, рух якого дозволяє побачити процес розкриття розгортки. На жаль, на розгортці залишаються позначеними лише точки нижньої основи. Інші вузлові точки розгортки не сприймаються програмою, як такі, що були вершинами куба (програма будує їх як нові). Ще один незручний момент в тому, що елементи, побудовані на кубі (наприклад, точки на ребрах, відрізки на гранях), не переносяться на розгортку, і навпаки, все, що побудовано на розгортці, не відображається на кубі. Куб та його розгортка динамічно не пов’язані [25].

Тому потрібно позначити на розгортці точку, що відповідає вершині $C_1$, побудувати відрізок $AC_1$ та визначити його довжину. Зауважимо, що після побудови розгортки знаходження точного розв’язку задачі зводиться до застосування теореми Піфагора і стає очевидним – $\sqrt{5}$. Отже, довжина відрізка $AC_1$ дорівнює 2,24 [25].

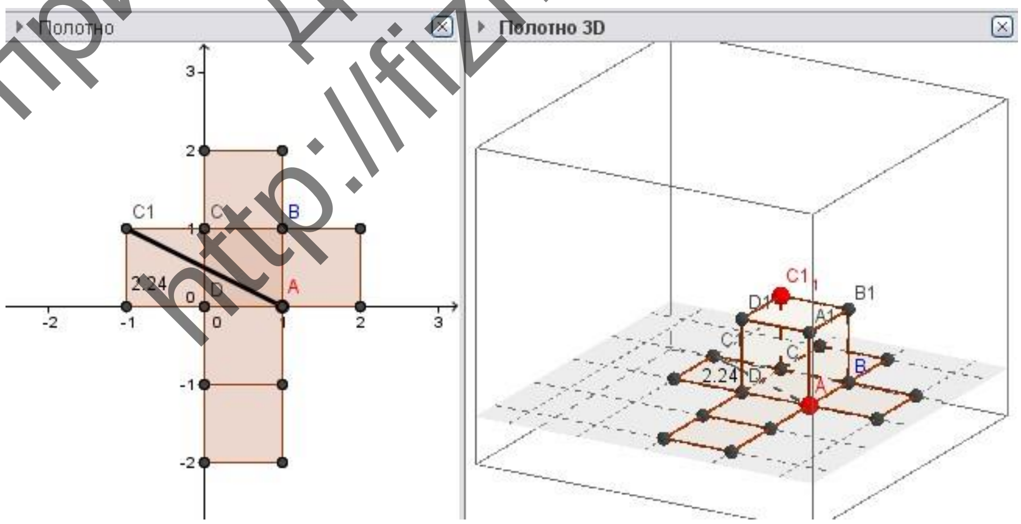



**Рис. 2.50. Знаходження найкоротшої відстані по поверхні куба**

### *Задачі на обчислення, доведення та дослідження*

Цікавим також є застосування програм динамічної математики до розв'язування задач на дослідження, а також задач на обчислення та доведення, попередньо переформулювавши її у задачу на дослідження, оскільки середовище дозволяє провести комп'ютерний експеримент. Розглянемо приклад розв'язання такої задачі в програмі *Cabri 3D*.

***Приклад***. Знайдіть, при якому співвідношенні між довжиною бічного ребра і висотою правильної чотирикутної піраміди центр описаної навколо неї сфери міститься: 1) всередині піраміди; 2) на основі піраміди; 3) поза пірамідою (рис. 2.51).

Квадрат (*Square*)

↓

Перпендикуляр до його площини, що проходить через центр (*Perpendicular*)

↓

Довільна незалежна точка (*Point*) на перпендикулярі – вершина піраміди

↓

Піраміда (*Pyramid/Surface Style/Empty*)

↓

Середина одного з бічних ребер (*Midpoint*)

↓

Перпендикулярна до нього площина (*Perpendicular*)

↓

Точка її перетину з висотою піраміди (*Intersection Point(s)*) – центр описаної кулі

↓

Описана сфера (Sphere/Surface Style/Small Hatches)

**Рис. 2.51. Алгоритм побудови моделі до задачі**

Для того, щоб рисунок був більш наочним, рекомендуємо додати коло перетину площини основи зі сферою [24]. Вимірюємо довжину бічного ребра та висоту піраміди (*Distance або Length*). Обчислюємо за допомогою калькулятора (*Calculator*) відношення довжини бічного ребра до висоти піраміди, для чого у відповідний рядок заносимо потрібні параметри з екрану і обираємо місце на полотні для розташування результату (*Result*). Рухаючи незалежну вершину піраміди (рис. 2.52-2.54), спостерігаємо за значенням даного відношення. Виявляється, що центр описаної навколо піраміди сфери знаходиться всередині піраміди, коли відношення менше 1,41; на основі піраміди, коли відношення рівне 1,41; поза пірамідою, коли відношення більше 1,41 [24].

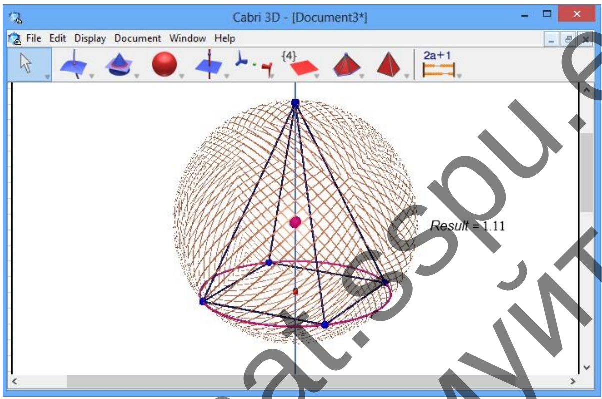



**Рис.2.52.**

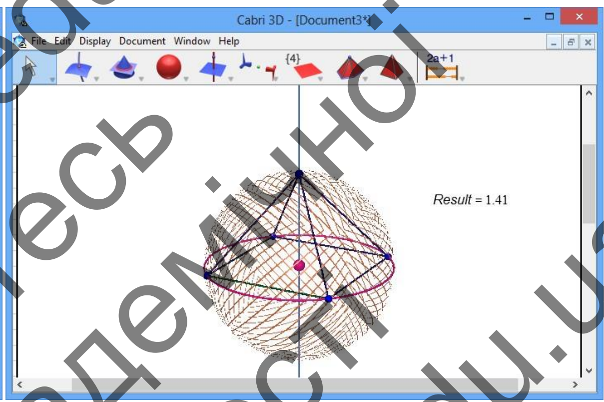



**Рис.2.53.**

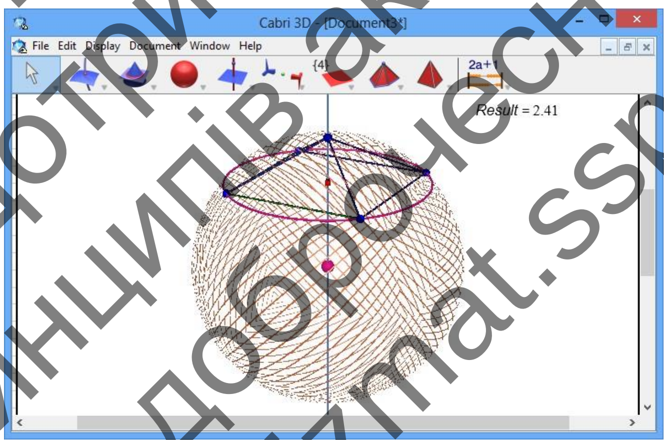



**Рис.2.54.**

Розв'язуючи цю задачу аналітично, можна побачити, що це співвідношення становить $\sqrt{2}\approx 1,41$ і корелює з результатами, отриманими у комп'ютерному дослідженні

***Задачі на геометричне місце точок (гмт)***

Програми динамічної геометрії є досить корисними для візуалізації розв'язання задач на ГМТ.

***Приклад*** (*GeoGebra*). Знайдіть ГМТ вершин рівновеликих пірамід зі спільною основою (рис. 2.55).

Неважко зрозуміти, що всі рівновеликі піраміди (і прямі, і похилі) зі спільною основою будуть мати рівні висоти. Тоді шукане ГМТ – площина, що рівновіддалена від площин основ пірамід на відстань, яка рівна висоті пірамід. Відповідне геометричне місце точок описують сліди вершин рівновеликих пірамід [25] (рис. 2.56).

Побудуємо основу піраміди – довільний трикутник

↓

Візьмемо довільну точку в площиніоснови *D* і проведемо перпендикуляр

↓

На перпендикулярі оберемо довільну точку *E* і проведемо висоту піраміди

↓

Побудуємо піраміду за основою та

↓

Побудуємо слід вершини *E* піраміди при русі основи піраміди *D* по площині

**Рис. 2.55. Алгоритм побудови моделі до задачі**

Складається враження, що всі сліди належать одній площині. Перевіримо цю гіпотезу, побудувавши площину, яка паралельна площині основи піраміди і проходить через її вершину. Змінюючи ракурс зображення, переконаємося, що дійсно всі точки-сліди належать одній площині.

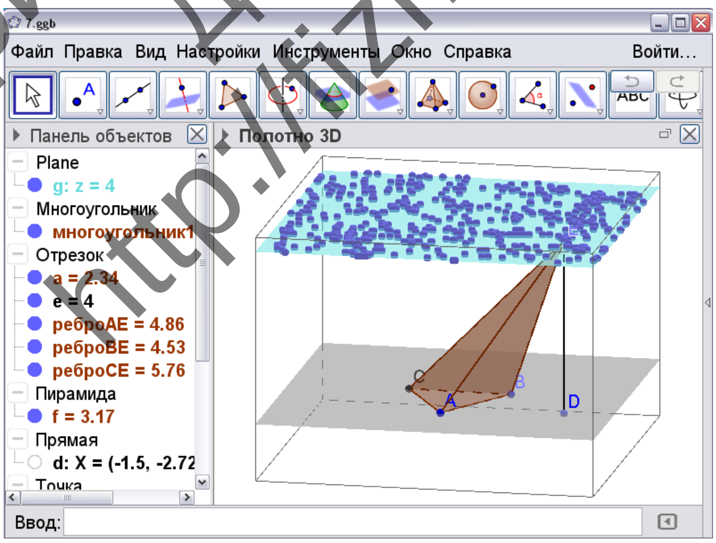



**Рис. 2.56. Задача на ГМТ з теми «Многогранники»**

## 2.5. Аналіз задач зовнішнього незалежного оцінювання в контексті дослідження

Математика є одним з обов'язкових предметів складання ЗНО (з 2022 року НМТ). Програма ЗНО з математики охоплює всі теми з математики, які вивчаються у шкільному курсі, не виключенням є і тема «Многогранники». У ЗНО задачі даної теми зустрічається у всіх формах тестових завдань.

***Завдання з вибором однієї правильної відповіді***

| |
|---|
| *Приклад.* Знайдіть площу повної поверхні куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см [28]. |

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 см$^2$ | 16 см$^2$ | 20 см$^2$ | 24 см$^2$ | $36\sqrt{3}$ см$^2$ |

***Завдання на встановлення відповідності***

| |
|---|
| *Приклад.* На рисунку (рис. 2.57) зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження [28]. |

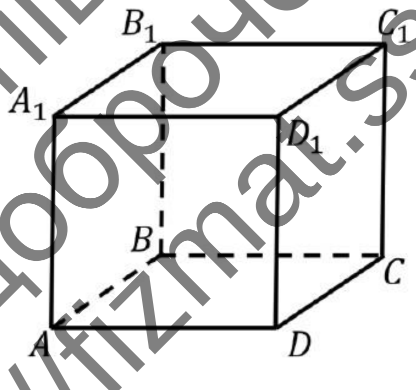



**Рис. 2.57. Ілюстрація до прикладу**

| Початок речення | | Закінчення речення | |
|---|---|---|---|
| 1 | Пряма $CB$ | А | паралельна площині $AA_1B_1B$ |
| 2 | Пряма $CD_1$ | Б | перпендикулярна площині $AA_1B_1B$ |
| 3 | Пряма $AC$ | В | належить площині $AA_1B_1B$ |
| 4 | Пряма $A_1B$ | Г | має з площиною $AA_1B_1B$ лише дві спільні точки |
| | | Д | утворює з площиною $AA_1B_1B$ кут 45° |

### *Неструктуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю*

*Приклад.* Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник $ABC$, де $AB$=$BC$=25 см, $AC$=30 см. Через бічне ребро $AA_1$ призми проведено площину, перпендикулярну до ребра $BC$. Визначте об'єм призми (у см$^2$), якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см$^2$ [28].

### *Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю*

*Приклад.* У правильній піраміді SABCD плоский кут при вершині S піраміди дорівнює β. Довжина апофеми піраміди дорівнює 6.

1) Зобразіть на рисунку задану піраміду й укажіть лінійний кут γ двогранного кута при її бічному ребрі. Обґрунтуйте його положення.

2) Визначте кут γ [28].

Серед завдань ЗНО часто зустрічаються **задачі прикладного змісту**, що дозволяють перевірити як учні вміють використовувати набуті знання у життєвих ситуаціях.

*Приклад 1* (ЗНО 2009). Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (ширина кімнати – 4 м, довжина – 5 м, висота – 2,5 м). Площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібно для того, щоб повністю пофарбувати СТІНИ і СТЕЛЮ цієї кімнати, якщо на м2 витрачається 0,25 кг фарби? [28].

*Приклад 2 (*ЗНО 2010). Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 25 см, 12 см, 6,5 см. Знайдіть масу m цеглини. (Для знаходження маси цеглини скористайтеся формулою m=ρV, де V – об'єм, ρ=1,8 г/см3 – густина цегли) [28].

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 5,31 кг | 3,51 кг | 3,5 кг | 3,41 кг | 3 кг |

*Приклад 3* (ЗНО, 2010). У таборі відпочинку вирішили дерев'яний стіл, з метою проведення змагань з настільних ігор (рис. 2.58). Скільки лаку знадобиться для покриття 5 дошок, розміри яких подано нижче, якщо на 1 м$^2$ витрачається 100 г лаку? [28].

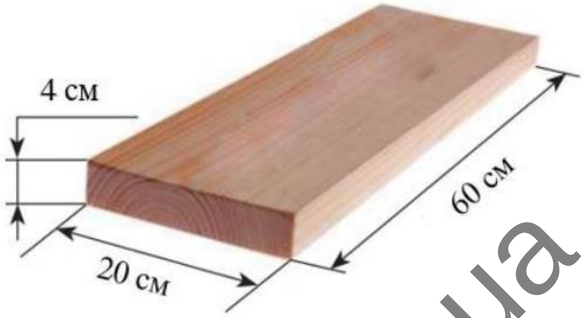



**Рис. 2.58. Ілюстрація до прикладу 3**

*Приклад 4* (ЗНО 2020). Дерев'яний брусок має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 10 см, 20 см, 80 см. Скільки лаку потрібно для того, щоб один раз покрити ним всю поверхню цього бруска, якщо на 1 м$^2$ витрачається 100 г лаку? [28].

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0,52 г | 26 г | 52 г | 160 г | 520 г |

*Приклад 5* (ЗНО 2014). На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють 40 см, 40 см і 50 см (рис. 2.59). Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об'єм бетону (у м$^3$) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утратою бетону під час виготовлення знехтуйте [28].

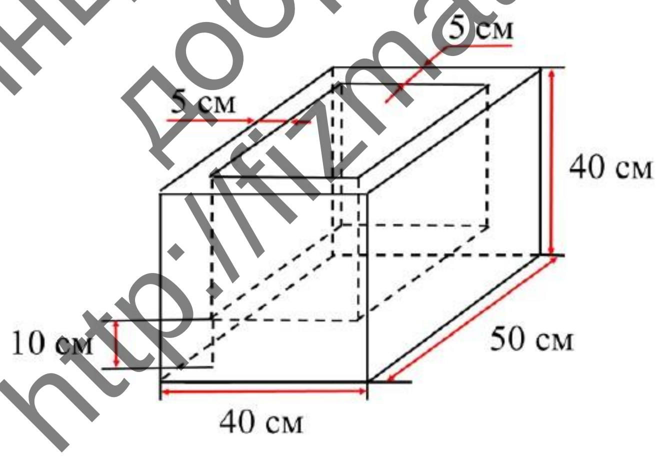



**Рис. 2.59. Ілюстрація до прикладу 5**

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0,32 м3 | 0,33 м3 | 0,36 м3 | 0,44 м3 | 0,8 м3 |

*Приклад* 6 (ЗНО 2019). У коробку у формі прямокутного паралелепіпеда щільно укладено у 2 ряди 10 шматочків крейди (рис. 2.60). Кожний шматочок має форму циліндра висотою 10 см і діаметром основи 15 мм. Визначте площу плівки, якою в один шар щільно з усіх боків без накладань обгорнуто цю коробку. Місцями з’єднання плівки та товщиною стінок коробки знехтуйте [28].

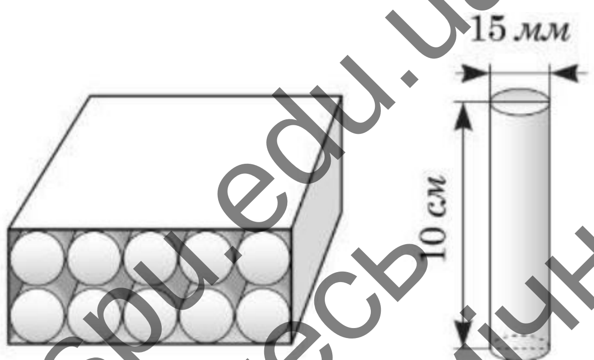



**Рис. 2.60. Ілюстрація до прикладу 6**

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 225 см$^2$ | 255 см$^2$ | 450 см$^2$ | 600 см$^2$ | 75 см$^2$ |

*Приклад* 7 (ЗНО 2021). Цукерку циліндричної форми висотою 10 см і радіусом основи 1 см запаковано в коробку, що має форму правильної трикутної призми (рис. 2.61). Основи циліндра вписано у відповідні основи призми. Основи коробки (призми) виготовлено з поліетилену, а всі її бічні грані – з паперу. Визначте площу паперу, витраченого на виготовлення такої коробки. Укажіть відповідь, найближчу до точної. Витратами паперу на з’єднання граней коробки знехтуйте [28].

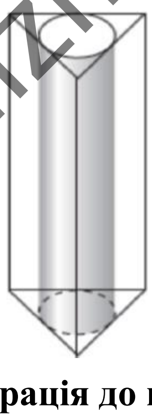


**Рис.2.61. Ілюстрація до прикладу 7**

*Приклад 8* (ЗНО 2021). Пластикові кульки радіуса 6 см зберігають у висувній шухлядці, що має форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.62). Якою з наведених може бути висота h цієї шухлядки? [28].

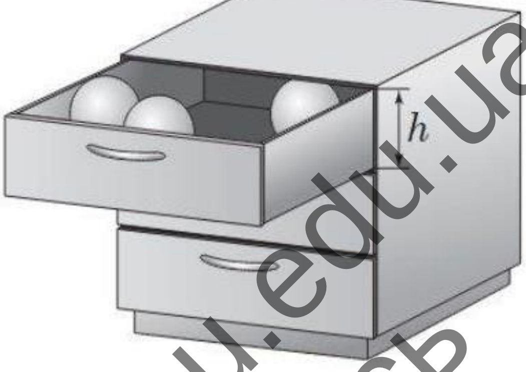



**Рис.2.62. Ілюстрація до прикладу 8**

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 см | 6 см | 10 см | 13 см | 15 см |

Для демонстрації розуміння означень многогранників та їх елементів автори завдань ЗНО пропонуютьмся **задачі на знаходження елементів многогранників** – сусідніх або протилежних ребер, сусідніх або протилежних граней, паралельних і мимобіжних прямих в многограннику.

*Приклад 1*(ЗНО 2015). Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перерізом куба площиною, що проходить через точки $A$, $C$, $C_1$,є [28]

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| прямокутний трикутник | рівносторонній трикутник | прямокутник | ромб | трапеція |

*Приклад 2* (ЗНО 2019). Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих (1 – 4) та їх взаємним розташуванням (А – Д) [28].

| Пара прямих | | Взаємне розташування | |
|---|---|---|---|
| 1 | $AC$ й $CC_1$ | А | прямі паралельні |
| 2 | $AB_1$ і $CD_1$ | Б | прямі мимобіжні |
| 3 | $AC$ й $CD_1$ | В | прямі перетинаються й утворюють прямий кут |
| 4 | $AB$ і $C_1D$ | Г | прямі перетинаються й утворюють кут 45° |
| | | Д | прямі перетинаються й утворюють кут 60° |

Також пропонують **задачі на розгортку многогранників** для знаходження кількості ребер і вершин многогранника, встановлення певного виду многогранника за його розгорткою, знаходження об'єму, бічної і повної площ поверхонь тіла, розгортку якого пропонують у завданні.

*Приклад 1* (ЗНО 2010). На рисунку 2.63 зображено розгортку многогранника. Визначте кількість його вершин [28].

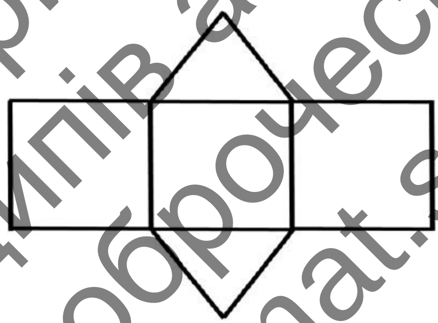


**Рис. 2.63. Ілюстрація до прикладу 1**

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 6 | 5 |

*Приклад 2* (ЗНО 2010). На рисунку 2.64 зображено розгортку многогранника. Визначте кількість його ребер [28].

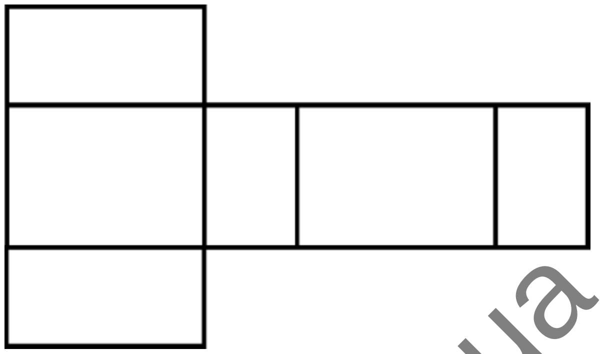


**Рис. 2.64. Ілюстрація до прикладу 2**

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 12 | 16 | 19 |

Крім вищеназваних задач часто зустрічаються **задачі на знання формул обчислення об'єму, площі повної і бічної поверхонь многогранників**.

*Приклад 1.* Знайдіть площу повної поверхні куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см [28].

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 см² | 16 см² | 20 см² | 24 см² | $36\sqrt{2}$ см² |

*Приклад 2* (ЗНО 2019). Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а об'єм – 64 см³. Знайдіть висоту піраміди [28].

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{4}{3}$ см | 4 см | 8 см | 12 см | 16 см |

За результатами аналізу завдань ЗНО з теми «Многогранники» можна зробити висновок, що більшість завдань з теми «Многогранник» – це завдання з вибором однієї правильної відповіді. У завданнях на встановлення відповідності частіше використовується завдання з теми «Призма», а у завданнях відкритої форми з розгорнутою відповіддю найчастіше пропонують завдання з теми «Піраміда». Серед завдань ЗНО присутні задачі прикладного змісту, задачі на знаходження елементів многогранників, задачі на розгортку многогранників, задачі на знання формул обчислення об'єму, площі повної і бічної поверхонь многогранників.

## ВИСНОВКИ

Результати проведеного дослідження дозволяють сформулювати наступні висновки.

1. Проаналізовано навчальну та науково-методичну літературу щодо вивчення многогранників в шкільному курсі геометрії. Зокрема, досліджено методичні особливості вивчення многогранників в старшій школі. Розглянуто типологію задач на многогранники: задачі на знаходження певних елементів призми або піраміди, задачі на знаходження площ бічної або повної поверхонь призми чи піраміди, задачі на побудову плоских перерізів призми або піраміди та знаходження їхніх площ, задачі на знаходження об'ємів, задачі на комбінації многогранників та тіл обертання.

Значну увагу приділено процесу формування графічних умінь учнів при вивченні многогранників, описано складові вміння виконувати зображення просторових фігур, сформульовано вимоги до побудови рисунка. Розглянуто принципи паралельного проєктування та основні його властивості. Описано правила зображення найпоширеніших плоских фігур (в якості актуалізації опорних знань), правила побудови зображень основних многогранників та правила побудови найбільш вживаних комбінацій геометричних тіл.

Акцентовано увагу на методичних особливостях вивчення теми «Перерізи многогранників». Детально розглянуто методику ознайомлення учнів із методом слідів для побудови перерізів, сформульовано алгоритм побудови перерізу многогранника цим методом. Розглянуто типологію задач на побудову перерізів многогранників, кожен тип проілюстровано відповідним прикладом. Запропоновано різнорівневу добірку задач, в тому числі і задач за готовими рисунками.

2. Розглянуто чинне програмно-методичне та навчально-дидактичне забезпечення з теми дослідження. Проаналізовано модельні програми для 5-6 класів закладів загальної середньої освіти з метою з'ясування змісту

пропедевтичного матеріалу вивчення теми «Многогранники». Здійснено аналіз навчальних програм подані за трьома основними рівнях: рівень стандарту, профільний рівень та поглиблений рівень навчання. Досліджено особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у підручниках з геометрії для 11 класу (профільний рівень), рекомендованих МОН України для використання в закладах загальної середньої освіти.

3. Досліджено особливості використання засобів візуалізації при вивченні многогранників в шкільному курсі геометрії. В якості таких засобів обрано програми динамічної математики *GeoGebra* та *Cabri3D*, оскільки їх використання дає можливість організовувати цілеспрямоване спостереження за геометричною фігурою, перевірити гіпотези, що виникають при цьому спостереженні та дослідити їх в ході комп'ютерного експерименту.

Розглянуто певні типи задач, при роботі з якими доцільно використовувати комп'ютерні засоби візуалізації. Значну увагу приділено задачам на розгортки многогранників, серед них задачам на знаходження найкоротшої відстані по поверхні многогранника. Зосереджено увагу на застосуванні програм динамічної математики до розв'язування задач на дослідження, на обчислення та доведення, при роботі на якими доцільно провести комп'ютерний експеримент, попередньо їх переформулювавши у задачі на дослідження.

4. Виконано аналіз завдань ЗНО у контексті дослідження. З'ясовано, що завдання з теми «Многогранники» присутні серед усіх типів завдань ЗНО – від тестових завдань з вибором однієї правильної відповіді до завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Більшість завдань з теми «Многогранник» це завдання з вибором однієї правильної відповіді. У завданнях на встановлення відповідності найчастіше використовуються завдання з теми «Призма», а у завданнях відкритої форми з розгорнутою відповіддю найчастіше пропонують завдання з теми «Піраміда». Зазначено, що серед завдань ЗНО з теми «Многогранники» найчастіше зустрічаються задачі прикладного змісту, задачі на знаходження елементів многогранників, задачі на розгортку многогранників, задачі на знання формул обчислення об'єму, площі повної і бічної поверхонь многогранників.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рижик В.И. Геометрія 10-11. – К.: Просвещение, 1998. – 271 с.
2. Апостолова Г. В., Ясінський В.В. Шкільна геометрія в опорних схемах, задачах і прикладах: для загальноосвітн. навч. закл. – К.: Генеза, 2013. – 104 с.
3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Киселева Л.С., Позняк Е.Г. Геометрия 10-11.– М.: Просвещение, 2002. – 206 с.
4. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Геометрія 10-11. – Донецьк: Дон НУ, 2001. – 235 с.
5. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів заг. серед. освіти. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. – 272 с.
6. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. Геометрія: 11 кл. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. академ. рівень, профіл. рівень. – К.: Генеза, 2011. – 336 с.
7. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Вежа, 2002. – 224 с.
8. Василишин М.С., Миляник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Школьний О.В. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. Режим доступу: http://surl.li/acmhs.
9. Глаголев Н.А. Элементарная геометрия (стереометрия). – М.: Учпедгиз, 1954. 128 с.
10. Істер О., Єргіна О. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. – Київ: Генеза, 2019. – 288с.
11. Клопський В.М., Скопець З.А., Ягодовський М.І. Геометрія 9-10. К.: Рад. школа, 1978. – 248 с.

12. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. – Харків : Гімназія, 2019. – 204 с.

13. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М.П., Рубльов Б.В., Семенов В.В., Якір М.С. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. Режим доступу: http://surl.li/jeehq.

14. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. – Х.: Гімназія, 2019. – 240 с.

15. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 5 клас: підруч. для закладів загальної середньої освіти. – Х.:Гімназія, 2022. – 353с.

16. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник./ Г.П. Бевз — К.: Вища школа, 1989. — 367с.

17. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

18. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

19. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

20. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 208 с.

21. Погорєлов О.В. Геометрія 10-11. – К.: Освіта, 2000. – 128 с.

22. Погорелов О.В. Геометрія: Підруч. Для 10-11 класів./ О.В. Погорелов. – К.: Просвіта, 2009. – 175с.

23. Сверчевська І.А. Еволюція вивчення геометричних тіл у шкільному курсі стереометрії. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*. – 2003. 13. – С 28-31.

24. Семеніхіна О.В., Друшляк М. Г. Використання комп'ютера при вивченні математики. Програми динамічної математики. – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка. 2016. – 146 с.

25. Семеніхіна О.В., Друшляк М. Г. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання математики. Навчальний посібник. – Суми: СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2017. – 144с.

26. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. К. : Вища школа, 2006. 582 с.

27. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта». 2017. – 304 с.

28. Український центр оцінювання якості освіти. Режим доступу: https://testportal.gov.ua/zagalna-informatsiya-zno/.

29. Четверухин М.Ф. Изображение фигур в курсе геометрии: Пособие для учителей. –М.: Учпедгиз, 1958.– 216 с.

30. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. – М.: Учпедгиз, 1946. – 286 с.

31. Шарыгин И.Ф. Геометрия 10-11. М.: Дрофа, 1999. – 208 с.

32. Швець Л. Розвиток умінь старшокласників виконувати просторові зображення: вступ до стереометрії// Математика в сучасній школі. – 2013, 1. С. 17-23.

33. Солодкий Є. Вивчення теми «перерізи многогранників»у

шкільному курсі стереометрії// Збірник праць студентів фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023. – Випуск 17. – С. 96-100.

34. Солодкий Є. Використання програм динамічної математики при вивченні многогранників у старшій школі // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників»: матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (17 листопада 2023 р., м. Суми) – Суми: [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2023. – С. 70-72.

# ДОДАТКИ

## Додаток А. Навчальні програми з математики

*Таблиця А.1*

**Навчальна програма з математики**
**(алгебра і початки аналізу та геометрія)**
**для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти**
**Рівень стандарту**

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">11 клас Геометрія<br>Тема 1. Многогранники (14 годин)<br>(2 години на тиждень в першому семестрі)</td></tr>
<tr><td>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</td><td>Зміст навчального матеріалу</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тема 1. МНОГОГРАННИКИ 14 годин</td></tr>
<tr><td>Учень/учениця:<br>розпізнає основні види многогранників та їх елементи;<br>зображує основні види многогранників та їх елементи;<br>має уявлення про перерізи многогранника площиною;<br>формулює означення вказаних у змісті многогранників;<br>записує формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди<br>обчислює величини основних елементів многогранників;<br>застосовує вивчені формули і властивості до розв’язування задач, зокрема прикладного змісту.</td><td>Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників.<br>Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.</td></tr>
</table>

*Таблиця А.2*

**Навчальна програма з математики**
**для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти**
**Профільний рівень**

| **Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів** | **Зміст навчального матеріалу** |
|---|---|
| **Геометрія 10-й клас**<br>(105 год, 3 год на тиждень, Резерв – 18 годин)<br>**Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ**<br>15 годин | |
| **Учень/учениця**<br>**наводить приклади** точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур;<br>**пояснює що таке** плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною;<br>**формулює** основні поняття, аксіоми, наслідки з них;<br>**виокремлює серед многогранників**: піраміду та призму;<br>**розрізняє** означувані та неозначувані поняття; аксіома та наслідок; видимі і невидимі елементи многогранника;<br>**ілюструє** текстовий зміст аксіоми, теореми, задачі за допомогою рисунка;<br>**зображає** піраміди та призми, перерізи пірамід та прямокутних паралелепіпедів;<br>**пояснює та записує:** належність точок та прямих площині; позначення многогранників, їх елементів та поверхні; скорочений запис умови задачі;<br>**характеризує** форму просторової геометричної фігури; сліди площини перерізу; розміщення двох точок двох площин, якими визначається лінія їх перетину;<br>**розв'язує вправи, що передбачають:** використання аксіом стереометрії та наслідків з них; доведення та дослідження висновків задач, виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах. | Основні поняття стереометрії.<br>Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки.<br>Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники.<br>Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та прямокутного паралелепіпеду методом слідів. |

<table>
<tr><td colspan="2">11 клас Геометрія<br>Тема 1. Многогранники (24 години)<br>(3 години на тиждень)</td></tr>
<tr><td>Учень/учениця<br>наводить приклади: геометричних фігур; многогранників і їх видів;<br>пояснює що таке: многраний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; формулює означення основних понять та<br>властивостей для многогранників, зазначених у змісті теми;<br>формулює і доводить теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди;<br>класифікує многогранники за характеристиками їх елементів: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники;<br>розрізняє елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; видимі і невидимі елементи призми/піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр;<br>зображає на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проекціювання: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданого многогранника – висота, твірна, апофема; перерізи площинами (осьові, діагональні, паралельні до площини основи тощо);<br>пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за</td>
<td>Многогранні кути.<br>Многогранник та його елементи.<br>Призма. Пряма і правильна призми.<br>Паралелепіпед. Піраміда.<br>Зрізана піраміда. Правильна піраміда.<br>Перерізи многогранників.<br>Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди.<br>Правильні многогранники.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди;<br>**аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю призми та площиною основи, між апофемою піраміди та площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи, кут між бічною гранню та площиною основи); розміщення проекції вершини піраміди в площині основи (відома рівність усіх бічних ребер, рівність усіх кутів, утворених бічними ребрами/гранями та площиною основи);<br>**обґрунтовує** розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв’язування прямокутного трикутника;<br>**характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання;<br>**вимірює та обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди;<br>**розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду. | |

*Таблиця А.3*

**Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів**
(початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу)
**закладів загальної середньої освіти Профільний рівень**

<table>
<tr><th>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</th><th>Зміст навчального матеріалу</th></tr>
<tr><td colspan="2">Геометрія 10-й клас<br>(105 год, 3 год на тиждень, Резерв – 18 годин)<br>Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ<br>15 годин</td></tr>
<tr><td>Учень/учениця<br>наводить приклади точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур;<br>пояснює що таке плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною;<br>формулює основні поняття, аксіоми, наслідки з них;<br>виокремлює серед многогранників: піраміду та призму;<br>ілюструє текстовий зміст аксіом, теорем, задач за допомогою рисунка;<br>характеризує форму просторової геометричної фігури; розв'язує вправи, що передбачають: використання аксіом стереометрії та наслідків з них; виконання найпростіших побудов перерізів в пірамідах та призмах.</td><td>Основні поняття стереометрії.<br>Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки.<br>Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники.<br>Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та призми методом слідів.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Геометрія 11-й клас<br>(105 год, 3 год на тиждень, Резерв – 28 годин) Тема 5. МНОГОГРАННИКИ<br>20 години</td></tr>
<tr><td>Учень/учениця<br>наводить приклади: геометричних тіл і фігур; многогранників і їх видів;<br>пояснює що таке: многогранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною;</td><td>Многогранник та його елементи.<br>Призма. Пряма і правильна призми.<br>Паралелепіпед. Піраміда.<br>Зрізана піраміда.<br>Правильна піраміда.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **формулює** означення основних понять та властивостей многогранників, зазначених у змісті теми;<br>**формулює і доводить** теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди;<br>**класифікує многогранники**: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники;<br>**розрізняє** геометричні фігури і геометричні тіла; елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр;<br>**зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду та їх елементи;<br>**визначає** відношення площ поверхонь подібних многогранників;<br>**обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди;<br>**розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду. | Перерізи многогранників.<br>Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди.<br>Відношення площ поверхонь подібних многогранників.<br>Правильні многогранники.<br>Тригранний кут та його властивості.<br>Перша теорема косинусів для тригранного кута.<br>Друга теорема косинусів для тригранного кута.<br>Теорема синусів для тригранного кута.<br>Поняття геометричного тіла.<br>Теорема Ейлера. |
| **Тема 6. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ ТЕТРАЕДРА**<br>11 годин | |
| **Учень/учениця**<br>**наводить приклади:** ортоцентричних та рівногранних тетраедрів; | Ортоцентричний тетраедр та його ознаки і властивості. |

| | |
|---|---|
| **пояснює що таке:** медіана та середня лінія тетраедра;<br>**формулює** означення основних фігур, зазначених у змісті теми;<br>**формулює і доводить** ознаку ортоцентричного тетраедра, теорему про середні лінії тетраедра, теорему про медіани тетраедра, теорему Менелая для тетраедра;<br>**класифікує тетраедри** за видом (правильний, ортоцентричний, рівногранний);<br>**зображує** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: середні лінії,<br>медіани, висоти тетраедра; перерізи площинами. | Рівногранний тетраедр та його властивості.<br>Медіани тетраедра та їх властивості.<br>Середні лінії тетраедра та їх властивості.<br>Теорем Менелая для тетраедра. |

# ДОДАТОК Б

## Система задач з теми «Перерізи многогранників»

***Рівень стандарту***

1. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини ребер, що виходять з однієї вершини.

2. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, що проходить через середини ребер, які виходять з вершини піраміди.

3. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, що проходить через ребро та середину ребра, що не має з ним спільної вершини.

4. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, що проходить через два протилежні ребра, які виходять з вершини піраміди.

5. Побудуйте переріз трикутної піраміди SABC площиною, що проходить через три точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах AS, SC, AB.

***Академічний рівень***

1. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди SABCD площиною, що проходить через:

1) середини ребер BC, AB, SB;

2) середину ребра AB і медіану SM грані (SAD);

3) медіани граней (SAD) та (SCD).

2. Побудуйте переріз трикутної піраміди SABC площиною, що проходить через вершину піраміди та середини двох ребер основи.

3. Побудуйте переріз трикутної піраміди SABC площиною, що проходить через три точки M, N, K, якщо точки M і N лежать відповідно на ребрах SA та SB, а точка K належить площині (SBC).

4. Побудуйте переріз трикутної піраміди SABC площиною, що проходить через точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах AC, SC, AB.

5. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах $AA_1$, CD, $DD_1$.

6. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, $B_1$, якщо точки M і N лежать відповідно на ребрах $AA_1$ та $CC_1$. Розгляньте всі можливі випадки.

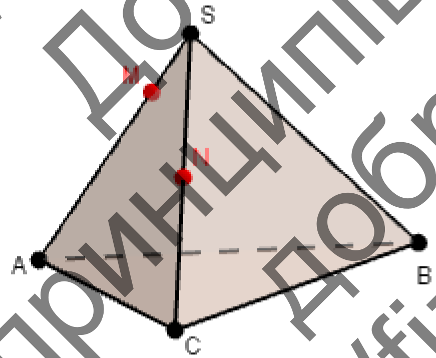
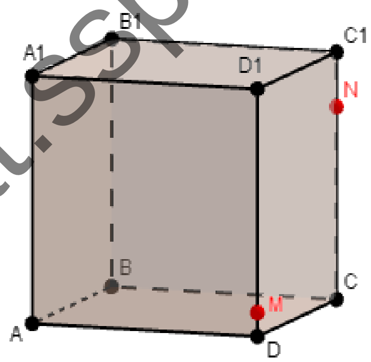
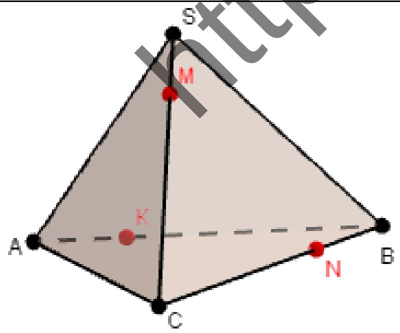
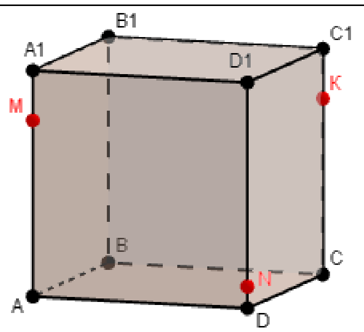
7. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди SABCD площиною, що проходить через три точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах SA, SB, SC. Розгляньте всі можливі випадки.

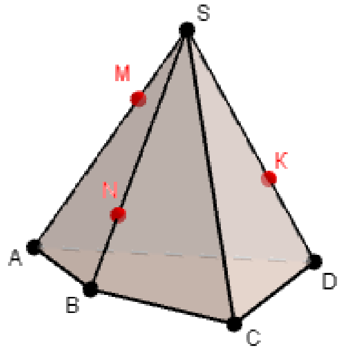
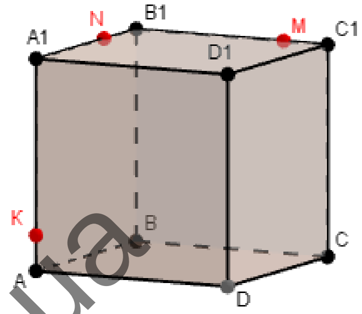
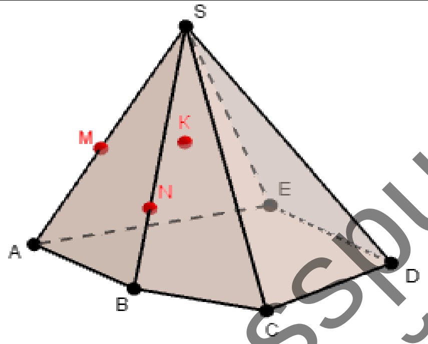
8. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K, які лежать відповідно на ребрах $AA_1$, $BB_1$, $B_1C_1$ і $AM : MA_1 = 1 : 3$, $BN : NB_1 = 3 : 1$, $B_1K : KC_1 = 3 : 1$.

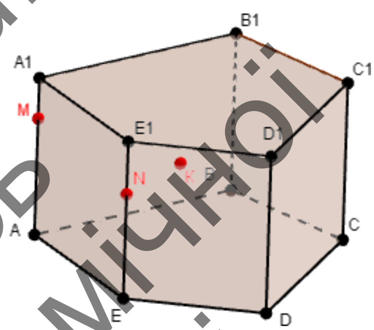
9. Побудуйте переріз куба площиною, заданою слідом g в площині основи і точкою на бічній грані. Розгляньте всі можливі випадки.

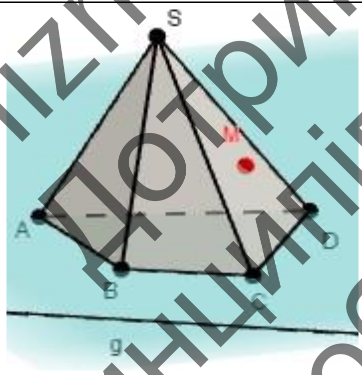
10. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, заданою слідом g в площині основи і точкою на бічному ребрі. Розгляньте всі можливі випадки.

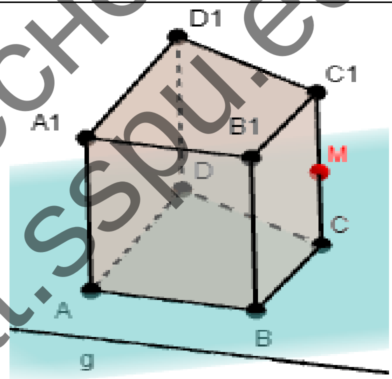
*Задачі за готовими рисунками*

| Рівень А | Рівень Б |
|---|---|
| 1. Побудуйте точку перетину прямої MN з площиною (ABC). | |
|   |   |
| 2. Побудуйте перерізи многогранників площинами, яка проходить через точки M, N, K. | |
|   |   |

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

K є (ASE)</td><td>

K є ($AA_1B_1$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Побудуйте переріз многогранника площиною, заданою точкою M та слідом g.</td></tr>
<tr><td>

M є (CSD)</td><td>
</td></tr>
</table>

***Профільний та поглиблений рівні***

1. Побудуйте зображення куба і виберіть на його ребрах три точки так, щоб площина, яка проходить через них, перетинала даний куб по:

1) трикутнику;
2) чотирикутнику;
3) п’ятикутнику;
4) шестикутнику.

2. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що задана слідом g в площині основи і точкою M, яка лежить на бічному ребрі $DD_1$, якщо:

1) g не перетинає прямокутник ABCD;
2) g проходить через точку A;
3) g проходить через точки A і B;
4) g проходить через середини сторін AB і BC.

3. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди SABCD площиною, що задана слідом g в площині основи і точкою M, яка лежить на грані (SAB), якщо:

1) g не перетинає прямокутник ABCD;
2) g проходить через точку D;
3) g проходить через точки C і D;
4) g проходить через середини сторін AD і BC.

4. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди площиною, яка проходить через три точки, взятих на трьох послідовних бічних ребрах.

5. Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, D і відомо, що точки M і N є серединами ребер $AA_1$ та $CC_1$.

6. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, $B_2$, якщо точки M і N є серединами ребер AB та BC відповідно, а точка $B_1$ середина відрізка $BB_2$.

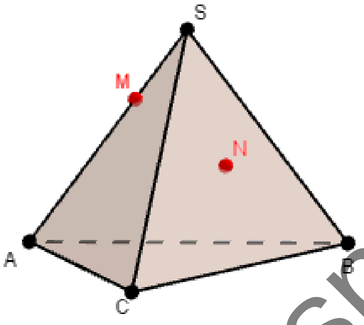
7. Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки A, $C_2$, $B_2$, якщо точки C та $B_1$ – середини відрізків $BC_2$ та $BB_2$ відповідно.

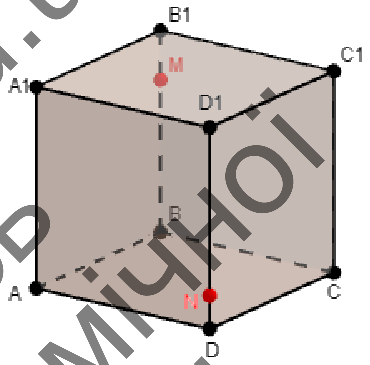
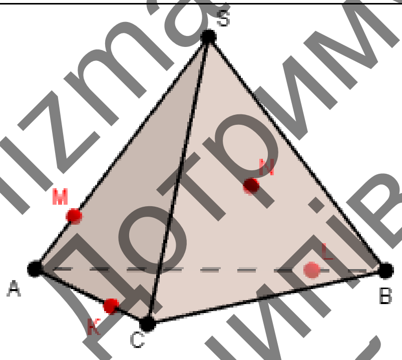
8. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K, і $AM : MA_1 = 1 : 3$, $BN : NB_1 = 3 : 1$, $AK : KD = 3 : 1$.

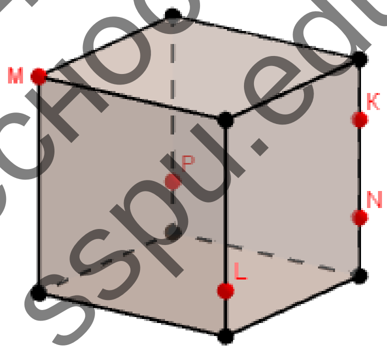
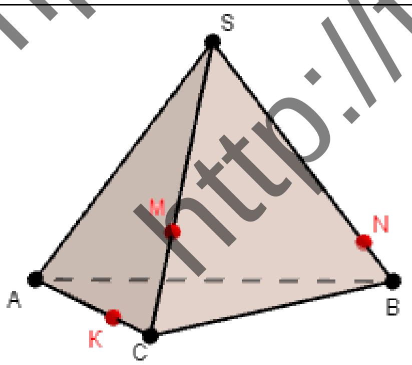
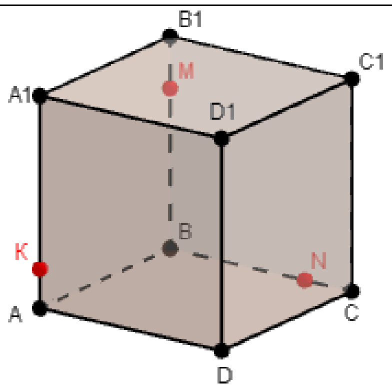
9. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки A і C та точку M, середину ребра $A_1B_1$.

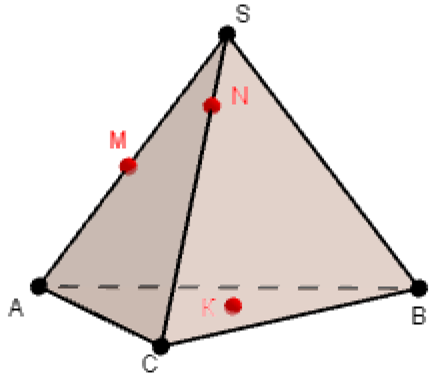
10. Побудуйте переріз п’ятикутної піраміди площиною, яка проходить через три точки, взятих на трьох послідовних бічних гранях.

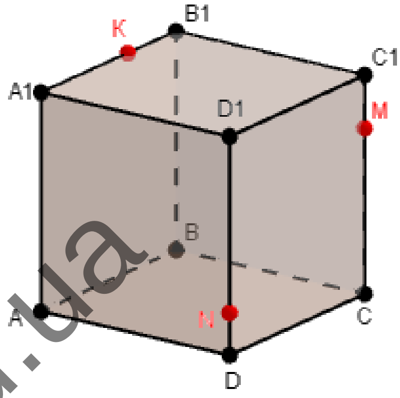
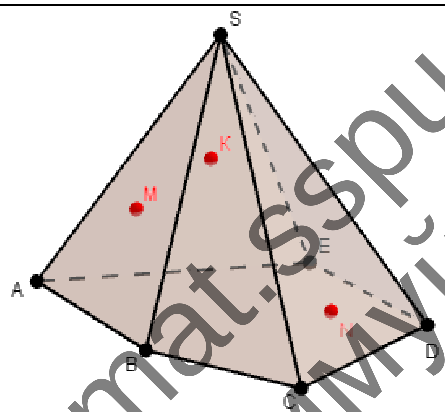
*Задачі за готовими рисунками*

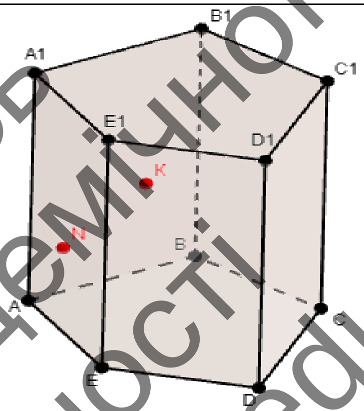
<table>
<tr><th>Рівень А</th><th>Рівень Б</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Побудуйте точку перетину прямої MN з площиною (ABC).</td></tr>
<tr><td>

N є (BSC)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Побудуйте точку перетину прямої MN з площиною (PKL).</td></tr>
<tr><td>

N є (BSC)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Побудуйте перерізи многогранників площинами, яка проходить через точки M, N, K.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

K є (ABC)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

K є (ASE), M є (ASB), N є (CSD)</td>
<td>

K є ($AA_1B_1$), N є ($AA_1$ $E_1$)</td>
</tr>
</table>