Геометрія

В.О. Тадеєв

«Геометрія»

підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2016

УДК 514 (075.3)
ББК 22.151я72
Т12

Тадеєв В.О.

Т12 Геометрія : підручник для 8 кл. загальноосвітн. навч. закл. / В.О Тадеєв. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2016. — 322 с. : іл.

ISBN 978-966-10-4484-4

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. У ньому подається обов'язковий обсяг програмного матеріалу, а також розширення «Для тих, хто хоче знати більше». Розширення містить теоретичний матеріал, що відповідає програмі поглибленого вивчення математики у 8 класі, відтак підручник може використовуватися і для такого навчання — як у груповій, так і в індивідуалізованій формі. Наведені приклади розв'язування задач та вправи і задачі для класної й самостійної роботи. У кінці кожного параграфа подаються питання для самоконтролю, а в кінці розділу — завдання для проведення контрольних робіт.

При викладі теоретичного матеріалу і в підборі задач значна увага приділяється міжпредметним зв'язкам та питанням історичного, світоглядного і методологічного характеру.

Для учнів та вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

ISBN 978-966-10-4484-4

Піктограмою у підручнику позначено ті його електронні складові, які можна відкрити за посиланням:

http://www.bohdan-digital.com/edu.

Мама сердиться на мене за те, що я більше люблю цвяхи, ніж підручники. А хто винуватий? Звісно, не я, а підручники. Не треба бути такими нудними.

Лія Гераскіна, «В країні невивчених уроків»

— Зараз я вам цю математику поясню... Е-е-е-е... — Папуга уже розкрив дзьоба, аби почати пояснення, і ... стулив його знову. — Ні, — сказав папуга, — так нічого не вийде. Потрібний наочний посібник.

— Який? — здивувався удав.

— Наочний. Він потрапить вам на очі, і все одразу стане зрозуміло.

Григорій Остер, «38 папуг»

Передмова автора і видавництва

Шановні друзі! У 8 класі ви продовжуватимете вивчення основ геометрії. Ви вже знаєте, що геометрія — це математична наука про геометричні фігури, а геометричні фігури конструюються для пізнання реальних та можливих форм матеріального і духовного світу. У 7 класі ви вивчали найпростіші із геометричних фігур — точки, прямі, відрізки, кути, трикутники і коло, ознайомилися із численними їхніми практичними застосуваннями. У цьому році ви істотно поповните арсенал геометричних фігур та прикладів їхнього застосування, долучивши до вже відомого найрізноманітніші багатокутники. А це, у свою чергу, дасть змогу поглибити знання і про трикутники та коло.

Крім цього, у 8 класі будуть з'ясовані дуже важливі факти щодо вимірювання фігур, і серед них — знаменита теорема Піфагора про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, яку відомий астроном Йоганн Кеплер (той самий, що відкрив закони руху планет навколо Сонця) назвав однією із двох найкоштовніших перлин геометрії. Ви запитаєте, а що він уважав другою перлиною? — Золотий переріз, або, як його тепер часто називають, код да Вінчі. І про нього ви теж довідаєтеся у цьому році.

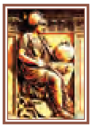
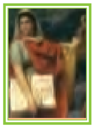
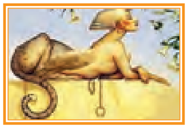
Нарешті, буде підведений логічний підсумок у тому питанні, з якого, власне, геометрія розпочиналася — в обчисленні площ багатокутників.

Однак не тільки цими суто теоретичними і практичними знаннями цінна геометрія, яку ви продовжуватимете вивчати.

Ще в сиву давнину знаменитий філософ Платон написав над входом до своєї школи мудрості в Афінах: «Не обізнаний з геометрією, не заходь під дах мій!» За що ж так цінувалася тоді геометрія? — За те, що вона розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися давні греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед своїх легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали духовними учителями, на першому місці вони завжди ставили ім'я Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим і, як стверджують легенди, довів лише декілька простих геометричних теорем. Однак цим він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей постулат став основою західної цивілізації. *Отже, вивчаючи геометрію, ви продовжуватимете навчатися мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю людського буття.*

Навчання основам теоретичних і практичних знань, а також мистецтву аргументації — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із цих завдань відведено належне місце.

По всьому тексту ви помітите низку розпізнавальних знаків, які мають своє символічне значення:

На урок вас запрошуватиме наш шкільний дзвоник, перев'язаний жовто-блакитною стрічкою.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афіна. Вибрано рельєфне її зображення з геометричними атрибутами — кутником, циркулем, лінійкою і сферою, створене Філіппом-Роланом Роландом для західного фасаду паризького Лувра.

Вправи і задачі розміщені в кінці кожного параграфів за порядком наростанням трудності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а найскладніші — темним. Задачі, не позначені додатковими значками, хоч і не так явно, однак теж природно розбиваються на дві групи: перші простіші, а наступі — складніші. Отже, загалом задачний матеріал проградуйований за чотирма рівнями складності. У кінці кожного розділу подані типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах), які теж відповідним чином проградуйовані за рівнями. Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем і ученицею, які разом розв'язують задачу. На поданих у тексті прикладах демонструються застосування вивчених теоретичних відомостей, а в окремих випадках — і корисні нові факти та загальні підходи до розв'язування. Ці приклади можуть слугувати взірцями для оформлення розв'язань у зошитах.

У підручнику є розширення «Для тих, хто хоче знати більше», розраховане на учнів, які хочуть дізнаватися про математику більше, можливо, мріють стати науковцями або працювати у високотехнологічних галузях. Розширення містить теоретичний матеріал, що відповідає програмі поглибленого вивчення математики у 8 класі, а відтак кожен учень має змогу опановувати його і в звичайній школі. Ці тексти подаються на жовтому і блакитному тлі та супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Життєвий шлях цих учених переконливо засвідчує, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці

Крім навчального матеріалу, підручник містить спеціальну рубрику «Сторінки історії». Її супроводжує муза історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас», яка прикрашає завісу Львівського оперного театру. Кліо тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні закони розвитку математики і мотиви діяльності її творців. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому її розумінню і легшому засвоєнню.

У рубриці «Перевірте себе» містяться запитання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкс з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповідав на її запитання.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!

На цій світлині 1970-х років — одна з найвідоміших художниць-авангардисток, дизайнерок і модельєрок XX ст. Соня Делоне з ескізами нових робіт. Про її славу свідчить те, що вона була нагороджена найвищою нагородою Франції — орденом Почесного легіону (1975 р.) і першою жінкою, чия персональна виставка відбулася у знаменитому Луврі (1964 р.). Уся її творчість надихалася двома головними субстанціями — кольором і геометричними формами. Про свою любов до яскравих і барвистих кольорів вона писала: «Це фарби мого дитинства, фарби України, спогади про сільське весілля, з платтями у червоних і зелених тонах, з кольоровими стрічками»[1]. А геометричні форми Соня Делоне вивчала уже в гімназії, мріючи про наукову кар'єру. І без цього етапу в її житті теж не було б великої художниці.

[1] Соня Делоне (Sonia Delaunay) (1885–1979) народилася в Одесі і прожила в Україні лише п'ять перших років свого довгого життя. Однак саме вони, за її визнанням, наклали найбільший відбиток на всю її багатогранну творчість.

Розділ I Чотирикутники

§1. Довільні чотирикутники

Уроки 1–3

1.1. Чотирикутник і його елементи

Із 7 класу відомо, що *геометрія — це наука про геометричні фігури*. Найпростішими геометричними фігурами є точки, прямі і площини, а їхні властивості описуються *аксіомами* геометрії. Усім іншим геометричним фігурам даються *означення*. В означенні геометричної фігури подається вичерпний перелік властивостей, який вирізняє цю фігуру з-поміж інших, або вказується спосіб її побудови. Із 7 класу вам відомі означення відрізка, півпрямої (променя), півплощини, кута, трикутника і кола. Трикутник — найпростіша фігура із так званих *багатокутників*, що утворюються за допомогою певним чином розміщених відрізків. Наступним іде чотирикутник. Із нього ми й почнемо вивчення геометрії у 8 класі.

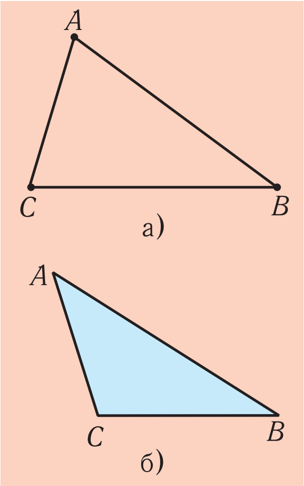
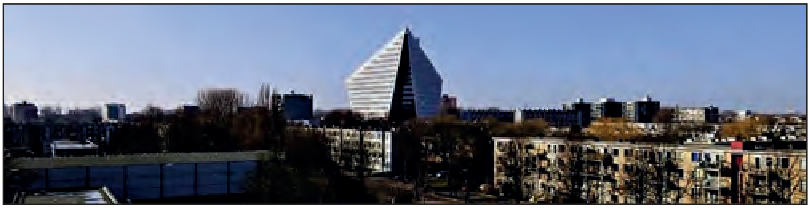


Рис. 1.1

Нагадаємо, що трикутник повністю визначається *трьома* своїми точками, які не лежать на одній прямій — вершинами, а утворюється за допомогою *трьох* відрізків — сторін, які послідовно сполучають ці точки. На рис. 1.1, а, б) зображено каркасний і плоский трикутники ABC з вершинами A, B, C



Будівля муніципалітету в Гаазі (Нідерланди). Висота будівлі 72 м. Уведена в експлуатацію у 2011 р. Чотирикутна форма бічних граней із гострим верхнім кутом надає споруді улюблених голландцями обрисів корабля, що здіймається на хвилях. Можливо, це — наймасштабніше втілення в архітектурі різнокутної чотирикутної форми.

і сторонами AB, BC і AC. *Каркасний* трикутник складається лише із вершин і сторін, а *плоский* — ще й із частини площини, обмеженої сторонами.

Чотирикутник утворюється в аналогічний спосіб, однак для його визначення потрібно уже *чотири* точки.

Означення.

Чотирикутником **називається плоска фігура, яка визначається чотирма точками —** ***вершинами*** **чотирикутника, а утворюється за допомогою чотирьох відрізків, які послідовно сполучають ці точки, —** ***сторін*** **чотирикутника. При цьому жодні три вершини не повинні лежати на одній прямій, а жодні дві сторони — не перетинатися у своїй внутрішній точці.** ***Каркасний*** **чотирикутник складається лише із вершин і сторін, а** ***плоский*** **— ще й із частини площини, обмеженої сторонами.**

На рис. 1.2, а), б) зображено каркасний і плоский чотирикутники $ABCD$ з вершинами A, B, C, D і сторонами AB, BC, CD і AD.

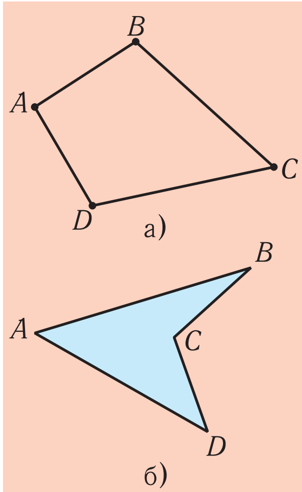


Рис. 1.2

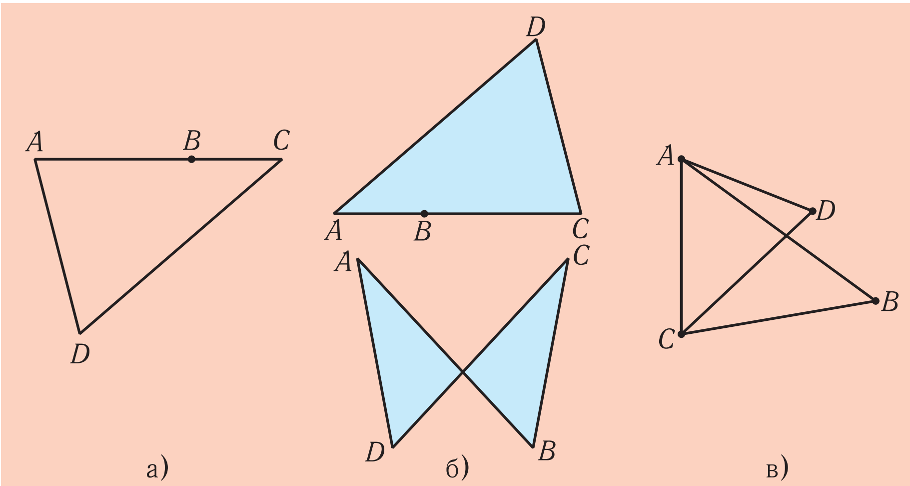


Рис. 1.3

Позначення чотирикутників утворюється з позначень їхніх вершин, записаних так, щоб кожні дві сусідні вершини визначали певну сторону. Ті самі чотирикутники $ABCD$, зображені на рис. 1.2, а), б), можна позначити й так: $BCDA$, $CBAD$, $DCBA$ тощо. Проте позначення $ACBD$ — неправильне, оскільки пари сусідніх вершин A, C і B, D не є кінцями їхніх сторін.

Зауважте, що фігури $ABCD$, зображені на рис. 1.3, а, б, в), не є чотирикутниками, оскільки у першій з них три точки A, B, C лежать на одній прямій, а в другій і третій відрізки AB і CD перетинаються у своїх внутрішніх точках.

Чотирикутник можна утворити із двох трикутників ADC і $A'BC'$, які мають по одній рівній стороні (рис. 1.4, а). Для цього потрібно сумістити рівні сторони AC і $A'C'$ трикутників, а протилежні вершини B і D розмістити по різні боки від прямої AC (рис. 1.4, б).

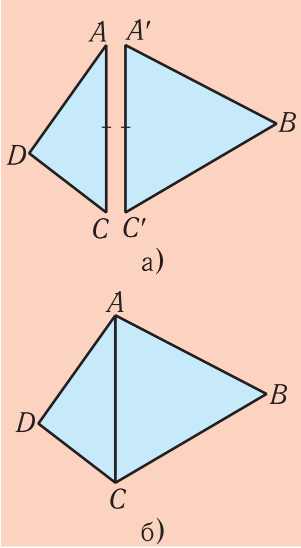


Рис. 1.4

Креслення чотирикутника $ABCD$ теж можна розпочати із трикутної частини ABC, а потім розмістити ззовні неї четверту вершину D так, щоб вона не належала жодній із прямих AB, BC чи AC (рис. 1.5, а, б). Провівши після цього відрізки DA і DC, матимемо чотирикутник $ABCD$.

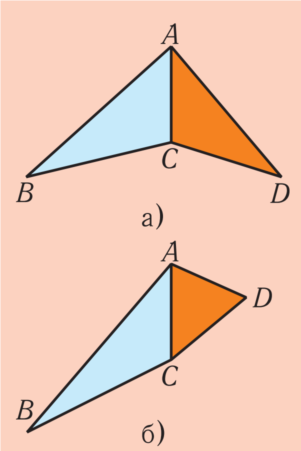


Рис. 1.5

Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називаються *суміжними*, а ті, що не мають спільної вершини, — *протилежними*. Суміжними в чотирикутниках $ABCD$, зображених на рис. 1.6, а), б), є сторони AB і BC, BC і CD, CD і DA, DA і AB, а протилежними — сторони AB і CD та AD і BC.

Означення.

Сума довжин усіх сторін чотирикутника називається його *периметром* (від грецьких слів «пері» — навколо і «метрео» — вимірюю).

Як і для трикутника, периметр чотирикутника теж часто позначають літерою P.

Вершини чотирикутника, які є кінцями однієї сторони, називаються *сусідніми*, а несусідні вершини називаються *протилежними*.

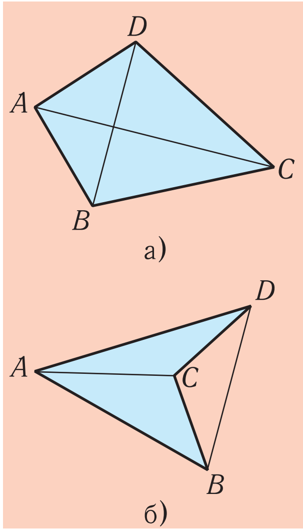


Рис. 1.6

Означення.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються *діагоналями* (від грецьких слів «діа» — через і «гоніо» — кут).

Зокрема, у чотирикутниках $ABCD$, зображених на рис. 1.6, а), б), сусідніми є вершини A і B, B і C, C і D, D і A, а протилежними — вершини A і C та B і D. *Діагоналями* є відрізки AC і BD.

У наступному пункті 1.2 ми з'ясуємо, що у так званих опуклих плоских чотирикутниках обидві діагоналі завжди належать чотирикутнику (як на рис. 1.6, а), а в неопуклих одна із діагоналей належить чотирикутнику, а інша — не належить йому (як на рис. 1.6, б).

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що будь-яка сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Р о з в' я з а н н я. Доведемо, що в довільному чотирикутнику $ABCD$ (байдуже, опуклому чи неопуклому) сторона AB, наприклад, менша від суми сторін BC, CD та AD (рис. 1.7). Для цього проведемо діагональ AC. Одержимо трикутники ABC та ADC. За нерівністю трикутника, з першого із них:

$$AB < BC + AC.$$

А з другого —

$$AC < CD + AD.$$

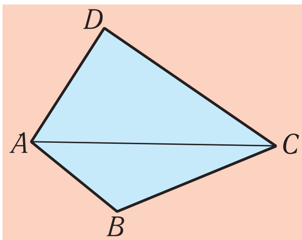


Рис. 1.7

Підставляючи у першу з цих нерівностей замість AC більше за нього значення $CD + AD$ (як свідчить друга нерівність), ми тільки підсилимо першу нерівність:

$$AB < BC + CD + AD.$$

Твердження задачі доведено.

1.2. Кути чотирикутника. Опуклі й неопуклі чотирикутники

На відміну від трикутника, означення кута чотирикутника потребує уточнення самого поняття про кут. Досі *кутом* ми називали фігуру, утворена двома променями (сторонами), що мають спільний початок (вершину) (рис.1.8, а). Кутом називали також частину площини, обмежену цими променями; її заповнюють відрізки з кінцями на сторонах кута (рис. 1.8, б). Для трикутників таких понять про кут було цілком достатньо, зокрема, тому, що жоден із кутів трикутника не перевищує максимальної міри кута між двома променями, тобто 180°. У чотирикутнику ж можуть бути й кути, які більші за 180°. Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$, зображеному на рис. 1.9, таким є кут при вершині D. Це й вимагає розширення поняття про кут.

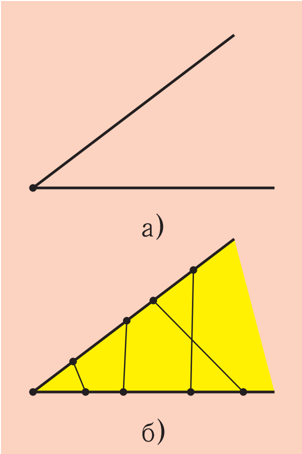


Рис. 1.8

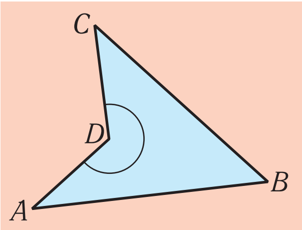


Рис. 1.9

Надалі фігуру, що складається із двох променів зі спільним початком, називатимемо *лінійним* кутом і братимемо до уваги кожну з обох частин площини, на які її розбиває лінійний кут (рис. 1.10). Ці частини називаються *плоскими* кутами, визначеними даним лінійним кутом. Якщо лінійний кут нерозгорнутий, то один із визначених ним плоских кутів має ту особливість, що йому належать усі відрізки з кінцями на сторонах цього лінійного кута. Його називають *опуклим* плоским кутом. Іншому плоскому куту згадані відрізки не належать. Його називають *неопуклим* плоским кутом. Вершина і сторони лінійного кута називаються, відповідно, *вершиною* і *сторонами* кожного з обох визначених ним плоских кутів.

На рис. 1.10, а) жовтим кольором зафарбовано опуклий плоский кут, а синім — неопуклий плоский кут, що визначені лінійним кутом з вершиною O та сторонами a і b.

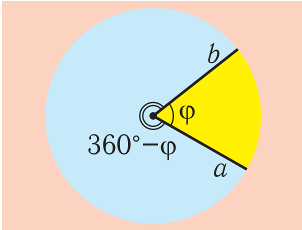


Рис. 1.10

Уважається, що розгорнутий лінійний кут (рис. 1.11) розбиває площину на два рівних плоских *розгорнутих* кути.

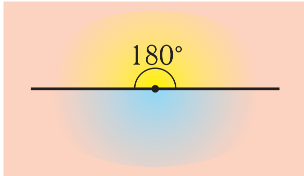


Рис. 1.11

Мірою опуклого плоского кута вважається градусна міра φ відповідного йому лінійного кута. Отже, ця міра більша за 0° і не перевищує 180°. Мірою неопуклого плоского кута вважається величина 360°– φ. Отже, ця міра не менша від 180° і не більша за 360°. Якщо лінійний кут розгорнутий, то обидва визначених ним плоских кути дорівнюють по 180°.

Тепер можемо перейти до означення кута чотирикутника.

Як і для трикутника, при кожній вершині чотирикутника розглядається плоский кут, який визначається його сторонами. Однак тепер, коли тими самими сторонами визначаються два плоскі кути, ставиться додаткова вимога — *плоский кут чотирикутника* повинен містити його протилежну вершину. Плоский кут чотирикутника найчастіше називається просто його *кутом*.

Наприклад, на рис. 1.12, а) дужкою відзначений опуклий, а на рис. 1.12, б) — неопуклий кути чотирикутників $ABCD$ при вершині B. *Кожен із них містить протилежну вершину D.*

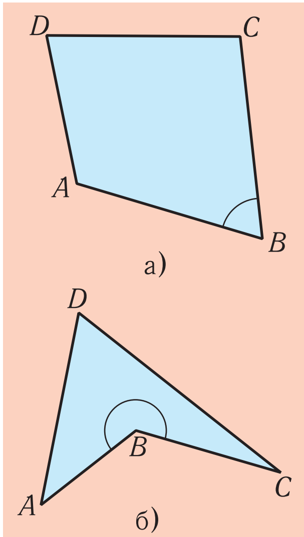


Рис. 1.12

Кути чотирикутника, вершини яких є протилежними, називаються *протилежними,* а кути, які мають спільну сторону чотирикутника — *сусідніми* або *прилеглими* до цієї сторони.

У чотирикутниках $ABCD$, що на рис. 1.12, а, б), протилежними є кути A і C та B і D, а прилеглими до сторони AB — кути DAB та CBA.

Теорема

(про суму кутів чотирикутника).

Сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360°.

Доведення. Нехай маємо довільний чотирикутник $ABCD$. Проведемо діагональ AC (рис. 1.13). Якщо вона належить чотирикутнику (рис. 1.13, а, б), то нею цей чотирикутник розіб'ється на два трикутники, сума кутів яких дорівнюватиме сумі кутів даного чотирикутника. А оскільки сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°, то звідси випливатиме, що сума кутів даного чотирикутника дорівнює $2 \cdot 180°$, тобто 360°.

Якщо ж діагональ AC лежатиме ззовні чотирикутника $ABCD$ (рис. 1.13, в), то невідома сума x його кутів дорівнюватиме сумі кутів трикутника ADC (тобто 180°), до якої потрібно додати кут β чотирикутника і відняти кути α і γ трикутника ABC: $x = 180° + \beta - \alpha - \gamma$.

Але сума кутів трикутника ABC теж дорівнює 180°, тому $\alpha + \gamma = 180° - \angle ABC$.

Звідси $x = 180° + \beta - (180° - \angle ABC) = \beta + \angle ABC = 360°$.

Отже, і в цьому разі сума кутів чотирикутника дорівнює 360°. Теорему доведено.

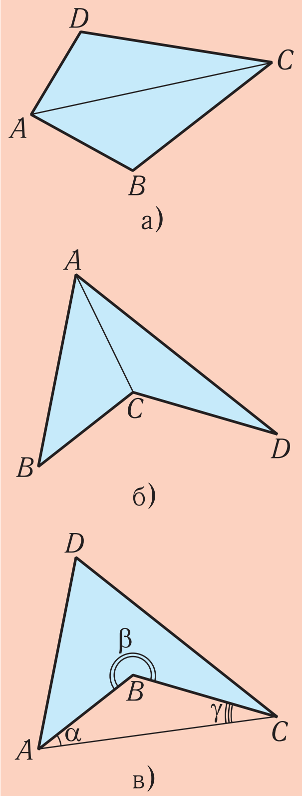


Рис. 1.13

Наслідок.

Чотирикутник може мати щонайбільше один неопуклий кут.

Справді, величина неопуклого кута більша за 180°. Тому, якби таких кутів у чотирикутнику було хоча б два, то їхня сума перевищувала б 360°, що неможливо.

Означення.

Чотирикутник, у якого всі кути опуклі, називається *опуклим*. Чотирикутник, один із кутів якого є неопуклим, називається *неопуклим*.

На рис. 1.13, а) зображено опуклий чотирикутник *ABCD*, а на рис. 1.13, б), в) — неопуклий.

Теорема

(про діагоналі чотирикутника).

Обидві діагоналі опуклого плоского чотирикутника належать чотирикутнику. Одна із діагоналей неопуклого плоского чотирикутника належить чотирикутнику, а інша не належить йому.

Доведення. Розглянемо, наприклад, діагональ *AC* чотирикутника *ABCD* з усіма опуклими плоскими кутами (рис. 1.14, а). Оскільки обидва протилежні кути *ABC* і *ADC* опуклі, то відрізок *AC* належить кожному з них, а тому належить і чотирикутнику. Аналогічні міркування застосовуємо й до іншої діагоналі *BD*.

Розглянемо тепер неопуклий чотирикутник *ABCD* (рис. 1.14, б). Оскільки з усіх кутів такого чотирикутника тільки один є неопуклим (нехай це кут при вершині *C*), то з трьох решти його опуклих кутів два обов'язково є протилежними один до одного (нехай це кути *B* і *D*). Тоді діагональ *AC*, яка їм належить, належить і чотирикутнику. Навпаки, інша діагональ *BD* не належить одному з плоских кутів (при вершині *C*) чотирикутника, а тому вона не належить і самому чотирикутнику. Теорему доведено.

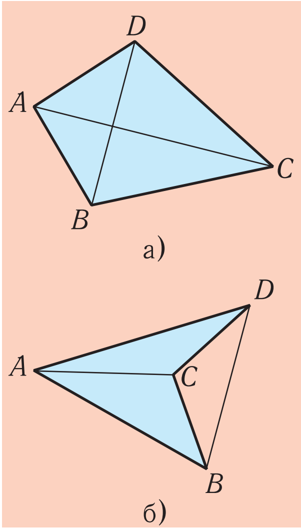


Рис. 1.14

Розв'язуємо разом

Задача 1.

Протилежні кути A і C чотирикутника $ABCD$ дорівнюють по 40°, а кут D утричі більший за кут B. Визначити, опуклий чи неопуклий цей чотирикутник. Використовуючи лінійку і транспортир, побудувати який-небудь чотирикутник з такими кутами.

Розв'язання. Оскільки сума усіх кутів чотирикутника дорівнює 360°, а на кути A і C припадає $2 \cdot 40° = 80°$, то для суми кутів B і D маємо значення $360° - 80° = 280°$.

Нехай кут B дорівнює x градусів. Тоді кут D дорівнює $3x$ градусів. Маємо рівняння: $x + 3x = 280$. Звідси $x = 70°$. Отже, $\angle B = 70°$, а $\angle D = 3 \cdot 70° = 210°$.

Оскільки величина кута D більша за 180°, то цей кут, а отже, і чотирикутник, є неопуклим.

Відповідь. Чотирикутник — неопуклий.

Побудову чотирикутника $ABCD$ можна розпочати з побудови кута $\angle B = 70°$. Потім на його сторонах відкладаємо довільні відрізки, які приймаємо за сторони BA і BC чотирикутника, наприклад, завдовжки 3 см і 5 см (рис. 1.15). Насамкінець, усередині кута ABC від променів AB і CB відкладаємо кути по 40°. Точка D перетину їхніх сторін буде шуканою четвертою вершиною чотирикутника $ABCD$.

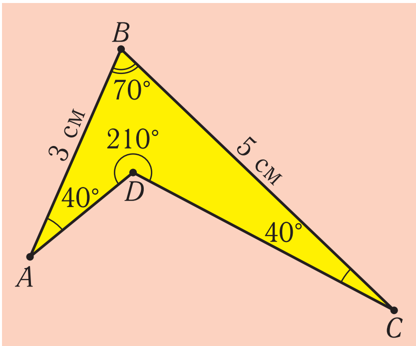


Рис. 1.15

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1.3. Заміщення площини чотирикутниками

Той факт, що сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360°, знайшов несподіване застосування для розв'язання надзвичайно важливої практичної задачі про так звані замощення площини рівними фігурами. *Замостити площину рівними фігурами* означає розмістити яку завгодно кількість цих фігур на площині так, щоб вони прилягали одна до одної рівними сторонами, ніде не накладалися одна на одну і не утворювали незаповнених проміжків. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360°, то чотири рівних чотирикутники $ABCD$ завжди можна прикласти один до одного рівними сторонами так, щоб кути A, B, C, D заповнили весь простір довкола однієї спільної точки (рис. 1.16). Зрозуміло, що таке саме

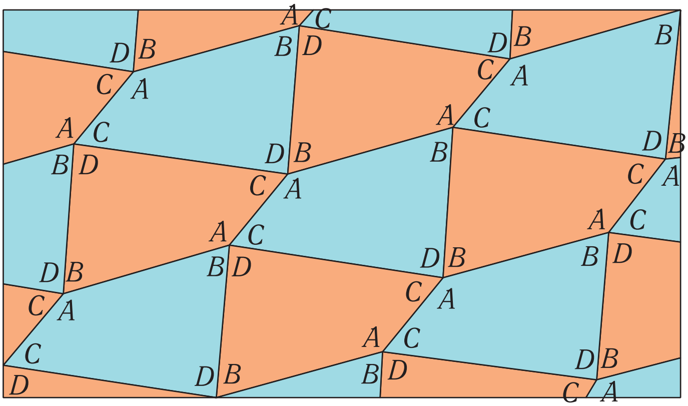


Рис. 1.16

замощення можна здійснити довкола кожної з інших вершин цих чотирикутників і продовжити це викладання як завгодно далеко у будь-якому напрямку, тобто замостити будь-яку частину площини. Для посилення естетичного враження можна вдатися до фарбування чотирикутників у різні кольори. На рис. 1.17 наведено декілька прикладів геометричних орнаментів, які можна одержати у такий спосіб. Спробуйте за цими взірцями створити свій неповторний орнамент!

Втім, чотирикутники — далеко не єдині фігури, якими можна замостити площину. Зокрема, це можна зробити й трикутниками (рис. 1.18). Однак фігурами з більшою кількістю кутів замощення можливе лише в окремих випадках.

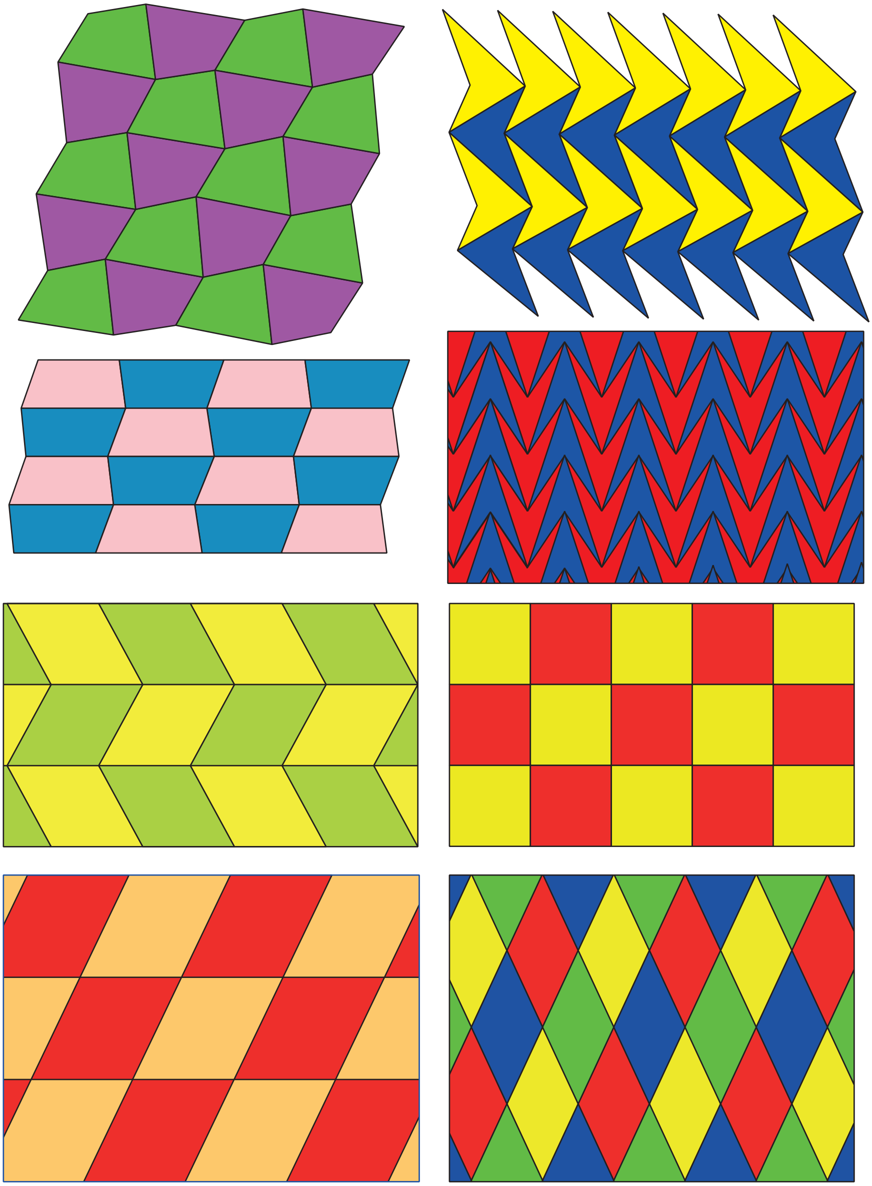


Рис. 1.17

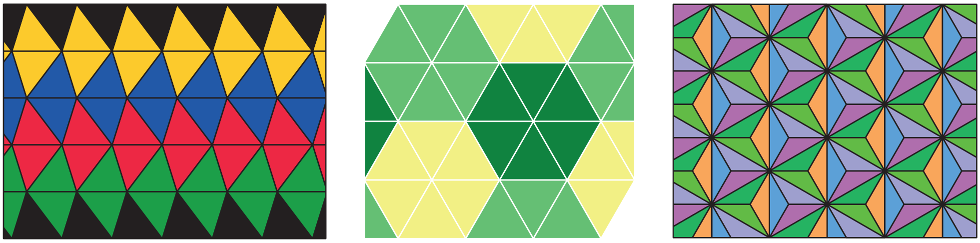


Рис. 1.18

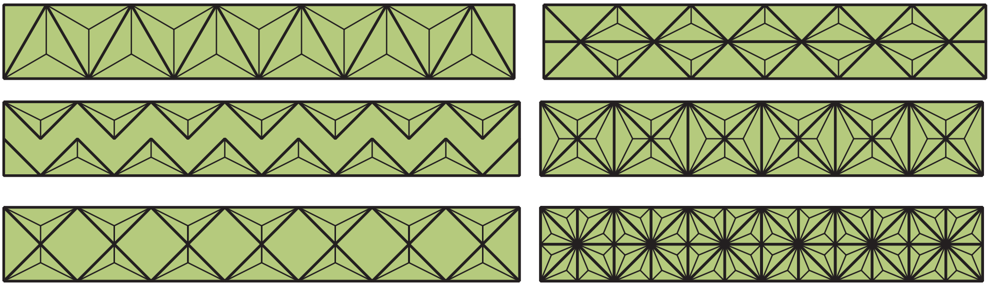


Рис. 1.19

На рис. 1.19 наведені приклади декоративних орнаментів, створених на основі замощення площини трикутниками і чотирикутниками.

1.4. «Нежорсткість» чотирикутника

Уявімо собі фізичну модель чотирикутника $ABCD$ у вигляді чотирьох планок, скріплених за допомогою шарнірів так, що вони можуть повертатися одна відносно одної (рис. 1.20). Діагоналі AC у цій моделі немає, вона проведена на рисунку умовно.

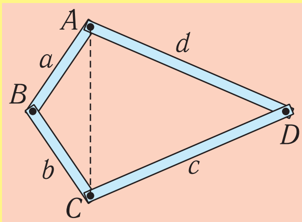


Рис. 1.20

Із нерівності трикутника випливає, що існує ціла множина значень для довжини відрізка AC із числового проміжку $(|a-b|;\ a+b)$, за яких при заданих довжинах сторін $AB = a$ та $BC = b$ існуватиме трикутник ABC. Так само існує ціла множина значень з числового проміжку $(|c-d|;\ c+d)$ для довжини відрізка AC, за яких при заданих довжинах сторін $CD = c$ та $AD = d$ існуватиме трикутник ACD. Нехай m — більше зі значень $|a-b|$ та $|c-d|$, а n — менше зі значень $a+b$ і $c+d$. Тоді для будь-якого зі значень для довжини відрізка AC з проміжку $(m;\ n)$ одночасно існуватимуть обидва трикутники ABC і ACD. А це свідчить про те, що коли існує хоча б один із чотирикутників

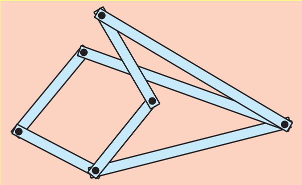


Рис. 1.21

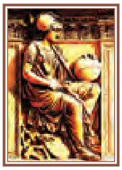
ABCD зі сторонами *a*, *b*, *c*, *d*, то їх існує нескінченно багато з фізичної точки зору це означає *нежорсткість* шарнірного чотирикутника *ABCD,* тобто можливість різних його трансформацій без зміни довжин сторін (рис. 1.21).

Цей факт широко використовується у техніці для створення шарнірних механізмів. Далі у нашому підручнику буде розглянуто декілька прикладів таких механізмів (див. п. 2.5).

Нагадаємо, що, на відміну від чотирикутника, трикутник є *жорсткою* фігурою, оскільки повністю визначається своїми сторонами: два трикутники з відповідно рівними сторонами обов'язково рівні між собою.

Перевірте себе

1. Яка фігура називається чотирикутником? Що таке каркасні і плоскі чотирикутники?
2. Що таке вершини і сторони чотирикутника? Які вершини (сторони) чотирикутника називаються сусідніми (суміжними), а які — протилежними? Що таке периметр чотирикутника? Що таке діагоналі чотирикутника?
3. Дайте означення плоского кута. Які плоскі кути називаються опуклими, а які — неопуклими? Як вимірюються плоскі кути?
4. Що таке кут чотирикутника? Які кути називаються сусідніми, а які — протилежними?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів чотирикутника. Скільки неопуклих кутів може мати чотирикутник?
6. Дайте означення опуклих та неопуклих чотирикутників?
7. Сформулюйте і доведіть теорему про діагоналі опуклих і неопуклих чотирикутників.



Вправи і задачі

1°. Які з фігур, зображених на рис. 1.22, є чотирикутниками? Котрі з них опуклі, а котрі — неопуклі?

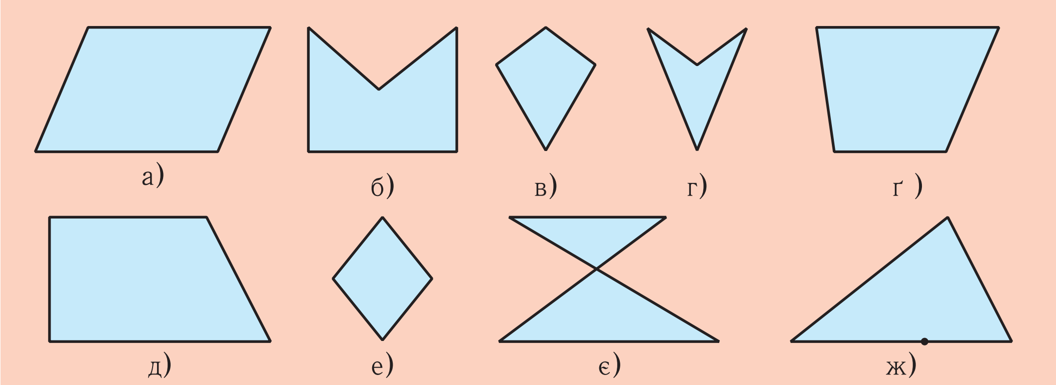


Рис. 1.22

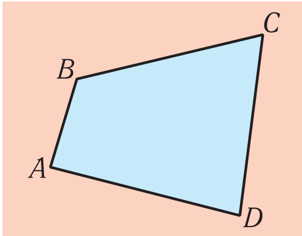


Рис. 1.23

2°. На рис. 1.23 зображено чотирикутник із вершинами A, B, C, D. Чи можна цей чотирикутник позначити так: а) $ABCD$; б) $BCDA$; в) $DCBA$; г) $ADBC$; ґ) $ACBD$? Назвіть вершини, сусідні з вершиною B. Назвіть сторони, суміжні зі стороною AD. Назвіть вершину, протилежну до вершини C, та сторону, протилежну до сторони AD. Назвіть кути, прилеглі до сторони CD, та кут, протилежний куту A.

3°. Накресліть два чотирикутники, один із яких опуклий, а інший — неопуклий. Визначте вимірюванням їхні сторони й кути. Чому дорівнюють периметри та суми кутів цих чотирикутників?

4°. Накресліть чотирикутник, у якому дві протилежні сторони паралельні і дорівнюють відповідно 3 см і 5 см. Чи можна виконати побудови так, щоб один із кутів одержаного чотирикутника дорівнював: а) 55°; б) 130°; в) 220°?

5°. Два рівних рівнобедрених трикутники прикладають один до одного рівними сторонами. За яких умов утворена фігура буде чотирикутником? Коли цей чотирикутник буде опуклим, а коли — неопуклим? Як зміняться відповіді, якщо рівнобедрені трикутники будуть нерівними?

6°. Накресліть чотирикутники, в якого три кути: а) гострі; б) прямі; в) тупі. У якому випадку можна одержати як опуклий, так і неопуклий чотирикутник?

7°. Чи може існувати чотирикутник з усіма: а) гострими; б) прямими; в) тупими кутами? Відповідь обґрунтуйте.

8°. Накресліть чотирикутник із взаємно перпендикулярними діагоналями, які: а) перетинаються; б) перетинаються і одна з них точкою перетину ділиться навпіл; в) не перетинаються.

9°. Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати: а) 1 см, 2 см, 4 см, 8 см; б) 3 см, 5 см, 6 см, 14 см?

10°. Яку найбільшу кількість тупих кутів може мати чотирикутник? А — неопуклих?

11°. Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що прямим є й четвертий кут.

12°. Чи може неопуклий чотирикутник мати два прямих кути?

13°. Чи можуть тільки два протилежних кути чотирикутника бути прямими?

14. Чи можуть бути рівними периметри двох чотирикутників $ABCD$ та $ABCE$, якщо один із них опуклий, а інший — неопуклий. Відповідь обґрунтуйте і проілюструйте рисунками.

15. Визначте сторони чотирикутника, якщо:
а) його периметр дорівнює 60 см, а одна зі сторін більша за решту трьох відповідно на 3 см, 4 см і 5 см;
б) його периметр дорівнює 35 дм, а одна зі сторін удвічі менша від кожної з трьох решти;
в) його периметр дорівнює 72 см, перша сторона більша за другу на 8 см, третя більша за першу теж на 8 см, а четверта — утричі більша за другу.

16. Визначте кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам:
а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 3, 3, 11.

17. Усі сторони чотирикутника рівні. Доведіть, що його протилежні кути попарно рівні. Чи може такий чотирикутник бути неопуклим?

18. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.24) $AB = AD$, $BC = DC$. Доведіть, що кути D і B — рівні.

19. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.25) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $AB = AD$, $BC = DC$.

20. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.26) $AB = AD$, $BC = DC$. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника взаємно перпендикулярні.

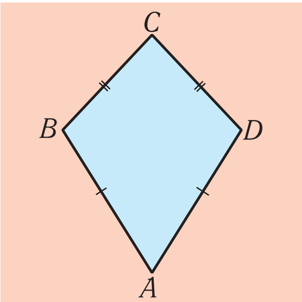


Рис. 1.24

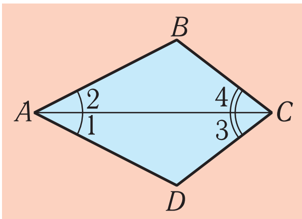


Рис. 1.25

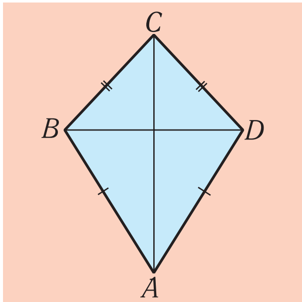


Рис. 1.26

21. Чи існує чотирикутник, у якого один із кутів дорівнює сумі трьох інших?

22. Визначте кути чотирикутника, в якого всі сторони і одна з діагоналей рівні між собою.

23. Чи можуть дві протилежні сторони чотирикутника бути взаємно перпендикулярними?

24. Один із кутів опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших. Доведіть, що цей кут є тупим.

25. Доведіть, що коли один із кутів опуклого чотирикутника гострий, то в цьому чотирикутнику є обов'язково тупий кут.

26•. Чи можуть бісектриси двох суміжних кутів чотирикутника бути паралельними?

27•. Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів чотирикутника паралельні або належать одній прямій, то два інших його кути рівні.

28•. Доведіть, що: а) кожна діагональ чотирикутника менша за половину його периметра;

б) довжина відрізка, який сполучає дві точки на протилежних сторонах опуклого чотирикутника, менша від половини його периметра;

в) сума відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, менша від половини його периметра;

г) сума діагоналей опуклого чотирикутника більша за суму будь-яких двох його протилежних сторін;

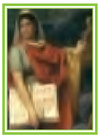
ґ) сума діагоналей опуклого чотирикутника більша за його півпериметр і менша за периметр.

29•. Два протилежних кути опуклого чотирикутника тупі. Доведіть, що діагональ, яка сполучає вершини цих кутів, менша від іншої діагоналі.

30•. Як побудувати чотирикутник, коли задані його сторони й одна з діагоналей?

31•. Як побудувати чотирикутник, коли задані його сторони й один із кутів?

32•. Чи можна побудувати чотирикутник із трьома заданими сторонами й обома діагоналями?



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Кубізм і геометризація образотворчого мистецтва

На початку XX ст. у середовищі західноєвропейських художників-авангардистів виник новий напрямок, який невдовзі дістав назву кубізму. Кубізм став відповіддю творчої спільноти на ті величезні трансформації, які відбулися в житті суспільства у зв'язку з розвитком машинної індустрії та засобів комунікації — «механічних сил цивілізації», як влучно висловився один із художників і теоретиків мистецтва тієї епохи Марсель Дюшан (1887–1968). «Який сенс у тому, щоб прагнути до натуралістичного зображення дійсності, коли вона така мінлива і, до того ж, для цього існує фотографія та кінематограф. Образотворче мистецтво повинне прагнути до того, щоб вловлювати й відображати сутнісні аспекти буття, які непідвладні часу і випадковим впливам», — такою в загальних рисах була закономірна логіка цього процесу. Дуже влучно про це висловився Пабло Пікассо (1881–1973),

Марсель Дюшан

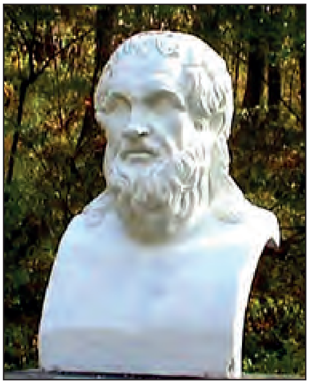
Пабло Пікассо

Анрі Матісс

Жорж Брак

якого вважають «батьком» кубізму: «Коли ми виявили кубізм, то у нас не було мети винаходити кубізм. Ми лише хотіли висловити те, що в нас уже було».

Сам термін «кубізм» уперше був застосований Анрі Матіссом (1869–1954) у 1908 р. в його характеристиці картини Жоржа Брака (1882–1963) «Дім в Естаку», яка викликала в нього враження гри з дитячими кубиками (Естак (L'Estaque) — живописне рибальське селище поблизу Марселя, улюблене місце творчості багатьох художників). Порівняння виявилося надзвичайно продуктивним у тому відношенні, що безпосередньо пов'язувало живопис із геометрією. Це робило абсолютно природним подальше узагальнення: до арсеналу зображальних засобів залучалися не тільки кубічні, а й будь-які інші геометричні форми.



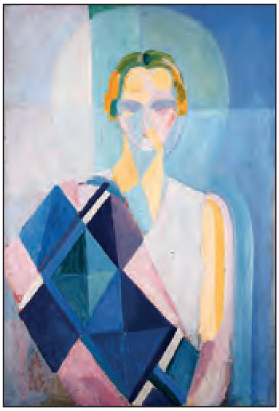
Погруддя Платона, знаменитого давньогрецького філософа IV ст. до н. е., у національному парку «Софіївка» в Умані

Зліва направо. 1) Пабло Пікассо. Фабрика в Хорта де Ебро (1909 р.);
2) Жорж Брак. Дім в Естаку (1908 р.); 3) Людмила Попова. Портрет філософа (1915 р.).

За великим рахунком, кубізм став перенесенням на мистецтво науково-філософських ідей Платона про незмінні сутності, які в античну епоху призвели до бурхливого розвитку геометрії. Такий самий бурхливий розвиток розпочався у мистецтві на початку XX ст.

Революційні ідеї перших кубістів привнесли в живопис такий заряд інтелектуальної і виражальної свободи, який довго не міг уміщатися в певних рамках. З'явилися численні відгалуження, в яких основні ідеї кубістів про геометризацію рисунка і композиції уточнювалися, доповнювалися або навіть звужувалися (мінімізувалися). Відрадно, що зачинателями двох із найбільш впливових таких напрямків були вихідці з України Соня Делоне і Казимир Малевич.

Соня Делоне (справжнє ім'я Сара Єліївна Штерн) (1885–1979) народилася в Одесі у єврейській родині. Батьки померли дуже рано, і в п'ятирічному віці її взяв на виховання рідний дядько по маминій лінії, відомий на той час і вельми успішний Петербурзький адвокат Генріх Товієвич Терк. Відтоді вона носила прізвище Терк і навіть після одруження часто додавала його до прізвища свого чоловіка. Дядько дав дівчинці чудову освіту: вона не тільки закінчила престижну петербурзьку гімназію, а й щороку під час канікул виїжджала у європейські країни для ознайомлення з музеями і виставками. У 18-річному віці, за порадою свого шкільного вчителя малювання, Соня вступає в Художню академію у німецькому місті Карлсруе, однак через два роки переїздить до Парижа, визнаного центра мистецького центру Європи, і закінчує освіту в академії «Ла Палетт». У Парижі дівчина одразу поринає в культурне життя столиці, входить до різних авангардних мистецьких об'єднань. В одному з них вона познайомилася з талановитим художником-кубістом Робером Делоне (1885–1941) і в 1910 р. вийшла за нього


Зліва направо. 1) Соня і Робер Делоне (1920-і роки);
2) Робер Делоне. Портрет мадам Хейм (1927 р.); 3) Соня Делоне за роботою (1926 р.).

Моделі одягу від Соні Делоне (1920-і рр.)

Соня Делоне на тлі своїх найвидатніших картин (1970-і роки) заміж. Це був щасливий і міцний творчий союз, який збагатив обох і дав новий напрямок у мистецтві, названий орфізмом, а обірвався лише з передчасною смертю Робера. «Робер дав мені форму, а я йому — колір», — писала Соня Делоне у своїх спогадах.

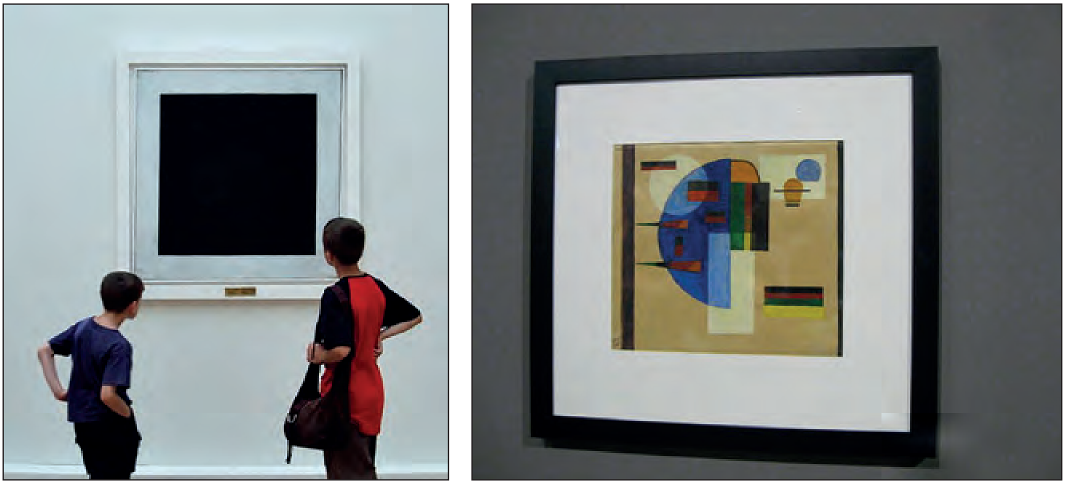
Особливістю орфізму була підвищена увага до кольорів і їхнього поєднання, а особливістю вдачі Соні Делоне — те, що її творчий світ не обмежувався картинами, а поширювався на весь життєвий простір — одяг, інтер'єр, костюми, декорації і навіть автомобілі.

Казимир Северинович Малевич (1879–1935) народився у Києві в сім'ї українських поляків. Його батько був інженером у корпорації цукрозаводчика М.І. Терещенка, тому сім'я час від часу переїжджала з одного невеличкого містечка, в якому була цукроварня, до іншого. Загалом до 17-річного віку Казимир устиг побувати на Поділлі (у Ямполі), на Харківщині (у Пархомівці та Білопіллі) та Чернігівщині (у Вовчку і Конотопі). Під час тривалого перебування у Пархомівці у 1890–1894 рр. він закінчив п'ятикласне агрономічне училище. Наприкінці навчання в училищі (у 15 років) вперше взяв до рук пензлі. А в 1895–96 рр., коли сім'я на якийсь час повернулася до Києва, відвідував Київську рисувальну школу відомого художника і педагога М.І. Мурашка. І це надовго була його єдина систематична художня освіта. Пізніше він двічі вступав до Московського художнього училища, однак двічі провалювався. Лише після відкриття приватного училища художника Ф.І. Рерберга, Малевич упродовж трьох років систематично відвідував у ньому заняття (з 1907 по 1910 рр.). Відтоді починається і його кар'єра художника, з усіма необхідними атрибутами цієї професії — виставками, обговореннями, диспутами.

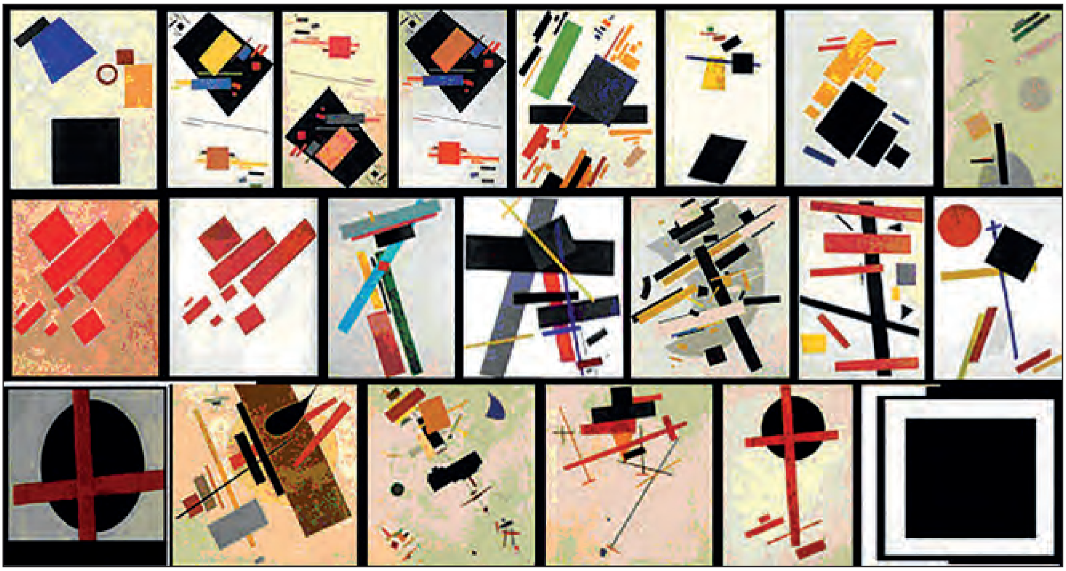
Казимир Малевич (1927 р.) Зверху латинськими літерами українською мовою написано: Мамі з Берліна. 21 мая, 1927 року. Казим.

Від самого початку К. Малевич у своїй творчості тяжів до радикального кубізму, котрий ще інакше називали кубофутуризмом. Однак згодом викристалізувалася і крайня форма цього напрямку, яку сам художник назвав супрематизмом (від латинського supremus — крайній, найвищий). Своєрідною точкою відліку нового стилю став показ у 1915 р. на виставці в Петрограді знаменитого «Чорного квадрата» Малевича.

У своєму новому методі Малевич повністю пориває з предметною і майже повністю з кольоровою реальністю, дивлячись на землю немовби ззовні, з космосу.



Праворуч. Перед «Чорним квадратом» Малевича у Третьяковській галереї в Москві. Праворуч. Казимир Малевич. Супрематизм 65 (1915 р.) Із фондів Пархомівського історико-художнього музею. Виставка у Мистецькому арсеналі (Київ, 2013 р.).



Колаж із творів Казимира Малевича у стилі супрематизму



Твори Казимира Малевича у стилі класичного кубізму (зліва направо):
1) Жінка з відрами; 2) Лісоруб; 3) На сінокосі.

Супрематизм Малевича — це високоінтелектуальний живопис. Його сприйняття потребує теоретичної підготовки. Саме тому у 1922 р. Малевич написав спеціальну теоретичну працю: «Супрематизм. Світ як безпредметність». Після цього він істотно відійшов від принципів супрематизму і повернувся в бік класичного кубізму. Саме у цей час з'явився його крилатий вислів: «Якщо ти прагнеш вивчати мистецтво, то вивчай кубізм».

Він сам конструює свою художню реальність, беручи за основу лише найпростіші і найпрозоріші геометричні елементи.

Майже одразу після свого утвердження в живописі та дизайні, ідеї кубізму почали свою експансію на архітектуру. Особливо яскраво вони заявляли про себе тоді, коли нові технології та матеріали істотно розширювали технічні можливості будівництва. У поданій тут композиції зображена низка видатних сучасних архітектурних споруд і ансамблів з різних країн світу, від Канади до Японії, які можна пов'язати з кубізмом[1]. У центрі композиції — твір-жарт сучасного британського художника Філіпа Абсолона (нар. 1960 р.) «Кессі розмірковує над кубізмом» (Philip Absolon. «Cassie Thinking About Cubism»)[2].

[1] Справа наліво і зверху вниз: Будинок музики у м. Порто (Португалія, 2005 р.); вулиця Будинків-кубів у Роттердамі (Нідерланди, 1984 р.); нове крило Королівського музею Онтаріо у Торонто (Канада, 2007 р.); вежа «Херст-Тауер» у Нью-Йорку (США, 2006 р.); Банк Китаю у Гонконзі (1990 р.); офісна споруда «Фацет» у м. Утрехті (у висотній частині споруди — головний офіс фармацевтичної компанії MEDIQ) (Нідерланди, 2011 р.); музей сучасної архітектури і дизайну у м. Імабарі (префектура Ехіме, Японія, 2011 р.); Центральна міська бібліотека у м. Сієтлі (США, 2004 р.).

[2] Ім'я кішки Кессі — англійська зменшувальна форма жіночого грецького імені Кассандра (у Британії — Кетрін). Це може мати символічний зміст. За античною легендою, провісниця Кассандра закликала троянців не приймати від ахейців їхнього подарунка («троянського коня»), однак ті не послухали її і жорстоко поплатилися за це.

Залишається зауважити, що, на відміну від живопису, де художник у питаннях геометричних форм може значною мірою покладатися на свою інтуїцію, архітектура потребує уже значно глибших теоретичних знань з геометрії.

Основні геометричні фігури для кубізму — багатокутники. Саме вони головним чином і вивчаються на уроках геометрії у 8 класі.