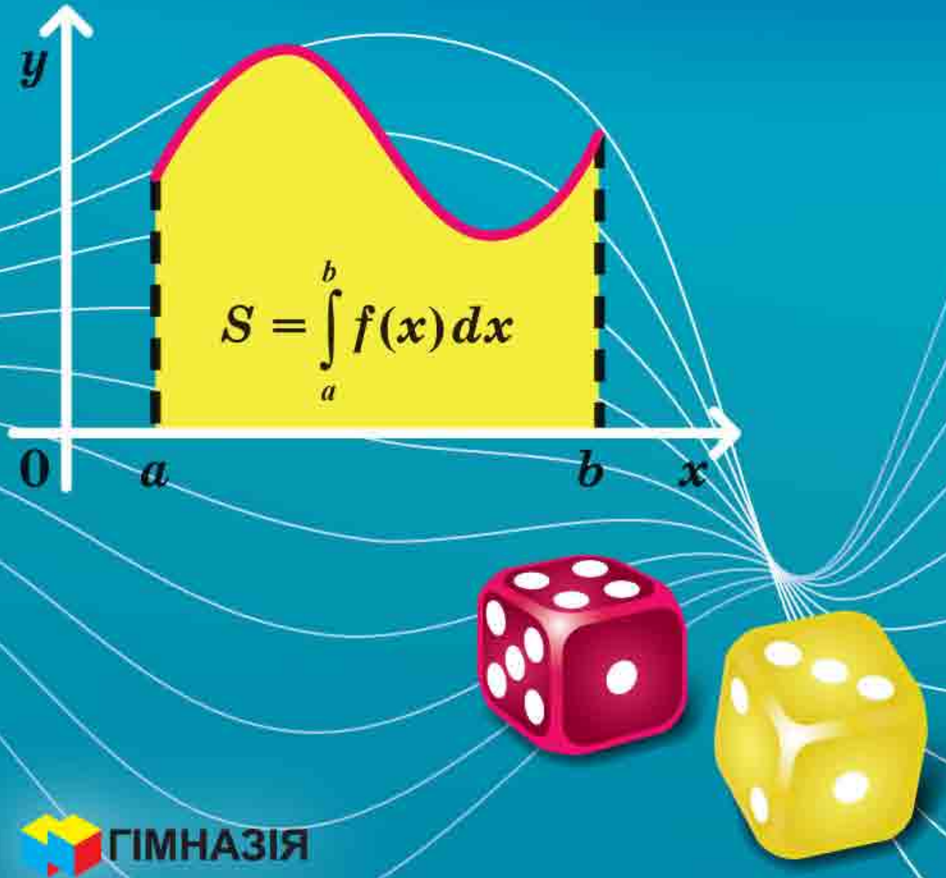
Е. П. Нелин
О. Е. Долгова

АЛГЕБРА 11

АКАДЕМИЧЕСКИЙ УРОВЕНЬ
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+22.161я721
Н49

Рекомендовано Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины
(приказ от 16.03.2011 № 235)

Научную экспертизу проводил
Институт математики Национальной академии наук Украины

Психолого-педагогическую экспертизу проводил
Институт педагогики Национальной академии педагогических наук Украины

Условные обозначения

▶	начало решения задачи
◁	окончание решения задачи
●	начало обоснования утверждения
○	окончание обоснования утверждения

Нелин Е. П.
Н49 Алгебра. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учеб. заведений: академ. уровень, профил. уровень / Е. П. Нелин, О. Е. Долгова. — Х. : Гимназия, 2011. — 448 с. : ил.
ISBN 978-966-474-166-5.

Учебник по алгебре и началам анализа направлен на реализацию основных положений концепции профильного обучения и организацию личностно-ориентированного обучения математике в общеобразовательных учебных заведениях. Материал соответствует действующей программе по математике для классов академического и профильного уровней, а также может использоваться в классах с углубленным изучением математики.

Учебник ориентирован на подготовку учащихся к успешной сдаче государственной итоговой аттестации (ГИА) и внешнего независимого оценивания (ВНО) по математике.

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+22.161я721

ISBN 978-966-474-166-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие друзья!

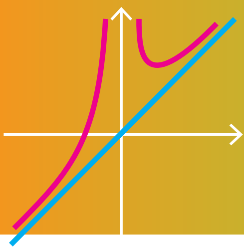
Предлагаемый учебник для 11 класса является продолжением учебника «Алгебра и начала анализа» для 10 класса. В 11 классе рассматривается принципиально новая часть курса — начала анализа. Математический анализ (или просто анализ) — область математики, сформировавшаяся в XVIII в. и сыгравшая значительную роль в развитии естествознания: появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций для решения многих прикладных задач. В 11 классе будут рассмотрены показательная и логарифмическая функции, элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики, которые широко применяют в самых разных областях знаний.

Структура учебника для 11 класса аналогична структуре учебника для 10 класса. Напомним, как пользоваться учебником.

Система учебного материала по каждой теме представлена на двух уровнях. Основной материал для академического и профильного уровней приведен в параграфах, номера которых обозначены синим цветом. Дополнительный материал (номера параграфов обозначены серым цветом) предназначен для овладения темой на более глубоком уровне (например, для выполнения более сложных заданий по алгебре и началам анализа внешнего независимого оценивания по математике). Этот материал учащиеся могут осваивать самостоятельно или под руководством учителя в классах, которые изучают математику по программе академического уровня. Материал можно также использовать для систематического углубленного изучения курса алгебры и начал анализа в школах, лицеях и гимназиях физико-математического профиля или в классах с углубленным изучением математики.

В начале многих параграфов приведены справочные таблицы, в которых содержатся основные определения, свойства и ориентиры для поиска плана решения задач по теме. Для ознакомления с основными идеями решения приведены примеры, содержащие, кроме самого решения, комментарий, который должен помочь составить план решения аналогичного задания.

Для закрепления, контроля и самоконтроля усвоения учебного материала после каждого параграфа предлагаются вопросы и упражнения. Ответы на эти вопросы и примеры решения аналогичных упражнений можно найти в тексте параграфа. Система упражнений к основному материалу представлена на трех уровнях. Задачи среднего уровня обозначены символом «°», несколько более сложные задачи достаточного уровня приведены без обозначений, а задачи высокого уровня сложности обозначены символом «*». Для многих задач углубленного уровня также предложены специальные ориентиры, которые позволят освоить методы их решения. Ответы и указания к подавляющему большинству упражнений приведены в соответствующем разделе. О происхождении понятий, терминов и символов вы сможете узнать, прочитав «Сведения из истории». В приложении приведен материал по теме «Комплексные числа», позволяющий расширить понятие числа и ознакомиться с комплексными числами, которые широко используются как в самой математике, так и в различных отраслях науки и техники.



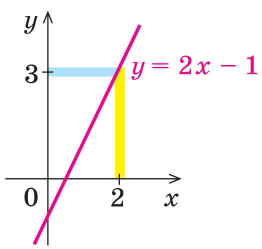
Раздел 1
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Таблица 1

1. Понятие предела функции в точке

Пусть задана некоторая функция, например $f(x) = 2x - 1$.
Рассмотрим график этой функции и таблицу ее значений в точках, которые на числовой прямой расположены достаточно близко к числу 2.

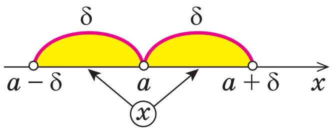
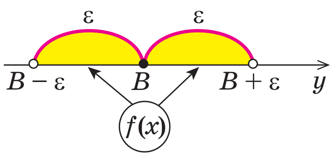


x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

Из таблицы и графика видно, что чем ближе аргумент x к числу 2 (обозначают: $x \to 2$ и говорят, что *x стремится к* 2), тем ближе значение функции $f(x) = 2x - 1$ к числу 3 (обозначают $f(x) \to 3$ и говорят, что $f(x)$ стремится к 3). Это записывают также так: $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1) = 3$ (читается: «лимит $2x - 1$ при x, стремящемся к 2, равен 3») и говорят, что предел функции $2x - 1$ при x, стремящемся к 2 (или *предел функции в точке* 2), равен 3.

В общем случае запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ обозначает, что **при $x \to a$ $f(x) \to B$**, то есть B — число, к которому стремится значение функции $f(x)$, когда x стремится к a.

Продолжение табл. 1

2. Запись обозначений $x \to a$ и $f(x) \to B$ с помощью знака модуля		
Обозначение и его смысл	Иллюстрация	Запись с помощью знака модуля
$x \to a$ На числовой прямой точка x находится от точки a на малом расстоянии (меньше δ).		$\lvert x - a \rvert < \delta$*
$f(x) \to B$ Значение $f(x)$ на числовой прямой находится на малом расстоянии от точки B (меньше ε).		$\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$

3. Определение предела функции в точке**	
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$	*Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $\lvert x - a \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$.*

4. Свойства предела функции	
Смысл правил предельного перехода	Запись и формулировка правил предельного перехода
Если $f(x) = c$, то при $x \to a$ $f(x) \to c$.	$\lim\limits_{x \to a} c = c$ *Предел постоянной функции равен самой постоянной.*
Если при $x \to a$ $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$, то: $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$.	$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют.*

* Если значение x удовлетворяет неравенству $\lvert x - a \rvert < \delta$, то говорят, что точка x находится в δ-окрестности точки a.

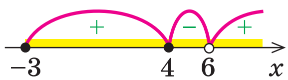
** Это определение обязательно только для классов физико-математического профиля.

Продолжение табл. 1

$f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$	$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.*
$c \cdot f(x) \to c \cdot A$	$\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*
$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ (где $B \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(\text{где} \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$ *Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.*
5. Непрерывность функции в точке	
Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке a****, если при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$*, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.	
Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют ***непрерывной на промежутке I****.*	
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то **сумма, произведение и частное непрерывных в точке *a* функций непрерывны в точке *a*** (*частное в случае, когда делитель $g(a) \neq 0$*).	
Графиком функции, непрерывной на промежутке, является неразрывная линия на этом промежутке.	
Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения, поэтому на каждом промежутке из области определения их графики — неразрывные линии.*	
Если на интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она сохраняет постоянный знак на этом интервале.	

* Элементарными обычно называют функции: $y = c$ ($c = \text{const}$); $y = x^n$, $n \in N$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$; $y = a^x$ ($a > 0$); $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$, а также все функции, которые получаются из перечисленных выше с помощью конечного количества действий сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции (функции от функции).

Окончание табл. 1

6. Метод интервалов (решение неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)	
План	Пример
1. Найти область допустимых значений (ОДЗ) неравенства. **2. Найти нули функции: $f(x) = 0$.** **3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.**	Решите неравенство $\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}>0.$ ▶ Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}$. Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из промежутков своей области определения как частное двух непрерывных функций, поэтому для решения можно использовать метод интервалов. 1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ \sqrt{x+3}-3\neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ \sqrt{x+3}\neq 3. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ x\neq 6. \end{cases}$ 2. Нули функции: $f(x) = 0$. $\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}=0,\ x^2-16=0,$ $x_1 = 4$ (входит в ОДЗ), $x_2 = -4$ (не входит в ОДЗ). 3.  *Ответ:* $[-3;\ 4)\cup(6;\ +\infty)$ ◁

Объяснение и обоснование

1. Понятие предела функции в точке. Простейшее представление о пределе функции можно получить, рассматривая график функции $y = 2x - 1$ (рис. 1.1). Из этого графика видно: чем ближе выбираются значения аргумента на оси Ox к числу 2 (это обозначается $x \to 2$ и читается: «x стремится к 2»), тем ближе будет значение $f(x)$ на оси Oy к числу 3.

Это можно записать так:

$$f(x) \to 3 \text{ при } x \to 2, \text{ или } \lim_{x\to 2}(2x-1)=3.$$

Знак lim (читается: «лимит») — краткая запись латинского слова *limes* (лимес), что означает «предел».

В общем виде **запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ означает, что при $x \to a$ значение $f(x) \to B$**, то есть B — число, к которому стремится значение функции $f(x)$, когда x стремится к a.

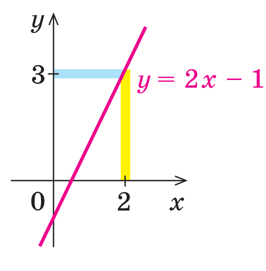


Рис. 1.1

Чтобы дать определение предела функции $f(x)$ в точке a, напомним, что расстояние между точками x и a на координатной оси Ox — это модуль разности $|x - a|$, а расстояние между точками $f(x)$ и B на координатной оси Oy — это модуль разности $|f(x) - B|$.

Тогда запись $x \to a$ означает, что на числовой прямой точка x находится от точки a на малом расстоянии, например меньше какого-то положительного числа δ (рис. 1.2). Это можно записать так: $|x - a| < \delta$. Обратим внимание, что запись $x \to a$ означает, что x стремится к a, но не обязательно его достигает, поэтому в определении предела функции в точке a рассматривают значения $x \neq a$. Также обратим внимание, что в случае, когда значение x удовлетворяет неравенству $|x - a| < \delta$, говорят, что точка x находится в δ-*окрестности точки* a.

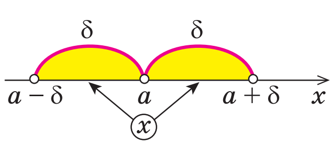


Рис. 1.2

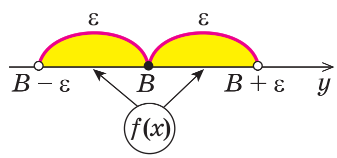


Рис. 1.3

Аналогично запись $f(x) \to B$ означает, что значение $f(x)$ на числовой прямой находится на малом расстоянии от B, например меньше какого-то положительного числа ε (рис. 1.3). Это можно записать так: $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Тогда можно дать следующее определение предела функции в точке: *число* B *называют пределом функции* $f(x)$ *в точке* a (*при* x, *стремящемся к* a), *если для любого положительного числа* ε *найдется такое положительное число* δ, *что при всех* $x \neq a$, *удовлетворяющих неравенству* $|x - a| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Нахождение числа B по функции f называют *предельным переходом*. При выполнении предельных переходов можно пользоваться такими правилами*:

Если нам известны пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, *то для выполнения предельного перехода над суммой, произведением или частным этих функций достаточно выполнить соответствующие операции над пределами этих функций* (для частного только в том случае, когда предел знаменателя не равен нулю).

Иными словами, если **при $x \to a$ $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$**, то

$\boxed{f(x) + g(x) \to A + B}$ $\boxed{f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B}$ $\boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}}$ (где $B \neq 0$).

---

* Обоснование правил предельного перехода, а также примеры использования определения для доказательства того, что число B является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, приведены в § 6.

Отметим также, что в случае, когда функция $f(x)$ является постоянной, то есть при всех значениях x значение $f(x)$ равно c, следовательно, и при $x \to a$ значение $f(x) \to c$. Таким образом, *предел постоянной равен самой постоянной*.

Обратим внимание, что согласно определению предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, можно вычислить и тогда, когда значение $x = a$ не входит в область определения функции $f(x)$. Например, областью определения функции $f(x)=\frac{x}{x}$ являются все действительные числа, кроме числа 0. Для всех $x \neq 0$ выполняется равенство $\frac{x}{x}=1.$ Тогда при $x \to 0$ значение $\frac{x}{x} \to 1,$ то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$

2. Понятие непрерывности функции. Если значение $x = a$ входит в область определения функции $f(x)$, то при $x \to a$ для многих функций значение $f(x) \to f(a)$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a).$ Такие функции называются *непрерывными в точке** a. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют *непрерывной на промежутке* I.

Графики непрерывных функций изображаются непрерывными (неразрывными) кривыми на каждом промежутке, который полностью входит в область определения. На этом и основывается способ построения графиков «по точкам», которым мы постоянно пользовались. Все известные вам элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения (см. также § 7), и это можно использовать при построении графиков и вычислении пределов функций.

Например, поскольку многочлен является непрерывной функцией, то

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x+1)=f(2)=2^3-3\cdot 2+1=3.$$

Из правил предельного перехода следует, что в случае, когда ***функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a,*** **сумма, произведение и частное непрерывных в точке a функций непрерывны в точке a** (частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ в случае, когда $g(a) \neq 0$).

Например, функция $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ непрерывна как сумма двух непрерывных функций. (Действительно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x^2+\sqrt[3]{x})=\lim\limits_{x\to a} x^2 + {}$ $+\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=a^2+\sqrt[3]{a}=f(a),$ а значит, функция $f(x)$ — непрерывная.)

Отметим еще одно важное свойство непрерывных функций, полное доказательство которого приводится в курсах математического анализа.

---

* Если в точке $x = a$ не выполняется условие $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a),$ то функцию $f(x)$ называют разрывной в точке a (а точку a — точкой разрыва функции $f(x)$).

Если на интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак.

Это свойство имеет простую наглядную иллюстрацию. Допустим, что функция $f(x)$ на заданном интервале изменила свой знак (например, «–» на «+»). Это означает, что в какой-то точке x_1 значение функции отрицательно ($f(x_1) < 0$), и тогда соответствующая точка M графика функции находится ниже оси Ox. В некоторой точке x_2 значение функции положительно ($f(x_2) > 0$), и соответствующая точка N графика находится выше оси Ox.

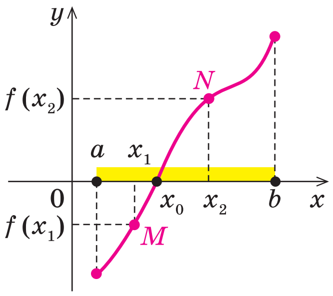


Рис. 1.4

Но если график функции (который является неразрывной линией) перешел из нижней полуплоскости относительно оси Ox в верхнюю, то он обязательно хотя бы один раз на заданном интервале пересек ось Ox, например в точке x_0 (рис. 1.4). Тогда $f(x_0) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и на заданном интервале функция не может изменить свой знак.

На последнем свойстве непрерывных функций основывается метод решения неравенств с одной переменной, называемый *методом интервалов*, который мы применяли в 10 классе.

Действительно, если функция f непрерывна на интервале I и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала, то по сформулированному выше свойству непрерывных функций интервал I разбивается этими точками на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция f сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции f в любой точке каждого из таких интервалов.

Схема решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов приведена в учебнике для 10 класса (§ 4) и в п. 6 табл. 1.

Примеры решения задач

Задача 1 Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

1) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$, $(-\infty; +\infty)$;

2) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$, $[5; +\infty)$;

3) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$, $(0; +\infty)$?

Решение	*Комментарий*
► 1) Областью определения функции $f(x)$ является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Многочлен	Многочлен $f(x)$ и дробно-рациональная функция $g(x)$ являются непрерывными в каждой точке их

является непрерывной функцией в каждой точке своей области определения, поэтому в каждой точке промежутка $(-\infty; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна.

2), 3) Область определения функции $g(x)$: $x \neq 3$, то есть

$$D(g) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

Дробно-рациональная функция $g(x)$ является непрерывной в каждой точке ее области определения.

Промежуток $[5; +\infty)$ полностью входит в область определения этой функции, поэтому в каждой точке промежутка $[5;+\infty)$ функция $g(x)$ непрерывна.

Промежуток $(0; +\infty)$ содержит точку 3, которая не входит в область определения функции $g(x)$. Следовательно, в этой точке функция $g(x)$ не может быть непрерывной (не существует значение $g(3)$), поэтому функция $g(x)$ не является непрерывной в каждой точке промежутка $(0; +\infty)$. ◁

области определения (в частности, функция $g(x)$ непрерывна как частное двух многочленов — непрерывных функций при условии, что знаменатель дроби не равен нулю). Значит, в каждом из заданий необходимо найти область определения данной функции и сравнить ее с заданным промежутком.

Если этот промежуток полностью входит в область определения соответствующей функции, то эта функция будет непрерывной в каждой точке заданного промежутка, а если нет, то функция не будет непрерывной в тех точках, которые не входят в ее область определения.

Задача 2 Выясните, к какому числу стремится функция $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}$ при $x \to 0$.

Решение

▶ Дробно-рациональная функция $f(x)$ является непрерывной в каждой точке ее области определения ($x \neq 5$). Число 0 входит в область определения этой функции, поэтому при $x \to 0$ значение

$$f(x) \to f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$. ◁

Комментарий

Фактически в условии задачи говорится о нахождении предела функции $f(x)$ при $x \to 0$. Дробно-рациональная функция $f(x)$ является непрерывной в каждой точке ее области определения ($x \neq 5$) как частное двух непрерывных функций — многочленов. Учитывая это, получаем, что при $x \to 0$ значение $f(x) \to f(0)$, то есть $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Задача 3* Найдите: 1) $\lim\limits_{x \to 3} (x^3 + 2x - 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 5}$; 3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Решение	*Комментарий*
▶ 1) Многочлен $f(x) = x^3 + 2x - 1$ является непрерывной функцией в каждой точке числовой прямой, поэтому $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x-1) = f(3) = 3^3 + 2\cdot 3 - 1 = 32.$ 2) Дробно-рациональная функция $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-5}$ является непрерывной в каждой точке ее области определения ($x \neq 5$). Число 1 входит в область определения этой функции, поэтому $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-5} = f(1) = \frac{1^2-9}{1-5} = 2.$$ 3) При $x \neq 1$ $$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = \varphi(x).$$ Тогда $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$$ $$= \lim_{x\to 1}(x+1) = \varphi(1) = 1+1 = 2.$$ ◁	Многочлены и дробно-рациональные функции являются непрерывными в каждой точке их областей определения. Это означает, что в том случае, когда число a (к которому стремится x) входит в область определения функции $f(x)$ (задания 1 и 2), получаем $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$ Если же число a не входит в область определения функции $f(x)$ (задание 3), то пытаемся выполнить тождественные преобразования выражения $f(x)$ при $x \neq a$, получить функцию, определенную при $x = a$, а затем использовать непрерывность полученной функции при $x = a$ (в данном случае функции $\varphi(x) = x + 1$ при $x = 1$). Напомним, что обозначение $x \to a$ означает только то, что x стремится к a (но не обязательно принимает значение a), и поэтому при $x \to 1$ значение $x + 1 \to 1 + 1 = 2$.

Пример 4* Решите неравенство $\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}} \leqslant 1.$

Решение	*Комментарий*
▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}} - 1 \leqslant 0.$ Поскольку функция $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}} - 1$ непрерывна в каждом из промежутков своей области определения, то можно применить метод интервалов. 1. ОДЗ: $8 + x > 0$. Тогда $x > -8$. 2. Нули $f(x)$: $\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}} - 1 = 0.$ Из этого уравнения получаем уравнения-следствия:	Заданное неравенство можно решить или с помощью равносильных преобразований, или методом интервалов. Если мы выберем метод интервалов, то сначала неравенство необходимо привести к виду $f(x) \geqslant 0$. Для того чтобы решить неравенство методом интервалов, достаточно убедиться, что функция $f(x)$ непрерывна (это требование всегда выполняется для всех элементарных функций $f(x)$), и использовать известную схему решения: 1) *Найти ОДЗ неравенства.* 2) *Найти нули функции:* $f(x) = 0$.

$$\frac{x-4}{\sqrt{8+x}}=1,\quad x-4=\sqrt{8+x},$$

$$x^2-8x+16=8+x,$$

$$x^2-9x+8=0,\ x_1=1,\ x_2=8.$$

Проверка показывает, что $x = 1$ — посторонний корень, а $x = 8$ — корень.

3. Отмечаем нуль функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (рис. 1.5).

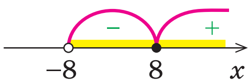


Рис. 1.5

Ответ: $(-8; 8]$. ◁

3) *Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.*
4) *Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.*

При нахождении нулей $f(x)$ можно следить за равносильностью выполненных (на ОДЗ) преобразований полученного уравнения, а можно использовать уравнения-следствия и в конце выполнить проверку найденных корней.

Записывая ответ к нестрогому неравенству, необходимо учесть, что все нули функции должны войти в ответ (в данном случае — число 8).

Чтобы найти знак функции $f(x)$ в каждом из полученных промежутков, достаточно сравнить величину дроби $\frac{x-4}{\sqrt{8+x}}$ с единицей в любой точке из выбранного промежутка.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что обозначают записи $x \to a$ и $f(x) \to B$.
2. Объясните, что обозначает запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.
3. Если при $x \to a$ $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$, то к каким числам при $x \to a$ будут стремиться функции: $f(x) \pm g(x)$; $f(x)\,g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ (если $B \neq 0$)?
4. Когда функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a? Приведите примеры.
5. Какая функция называется непрерывной на промежутке? Что можно сказать о графике такой функции на рассмотренном промежутке?
6. На каком свойстве непрерывной функции основывается метод решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$? Объясните, опираясь на графическую иллюстрацию, справедливость этого свойства.
7. Охарактеризуйте план решения неравенства вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов. Приведите пример решения неравенства методом интервалов.

Упражнения

1°. Являются ли непрерывными в каждой из точек $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ функции, графики которых изображены на рис. 1.6?

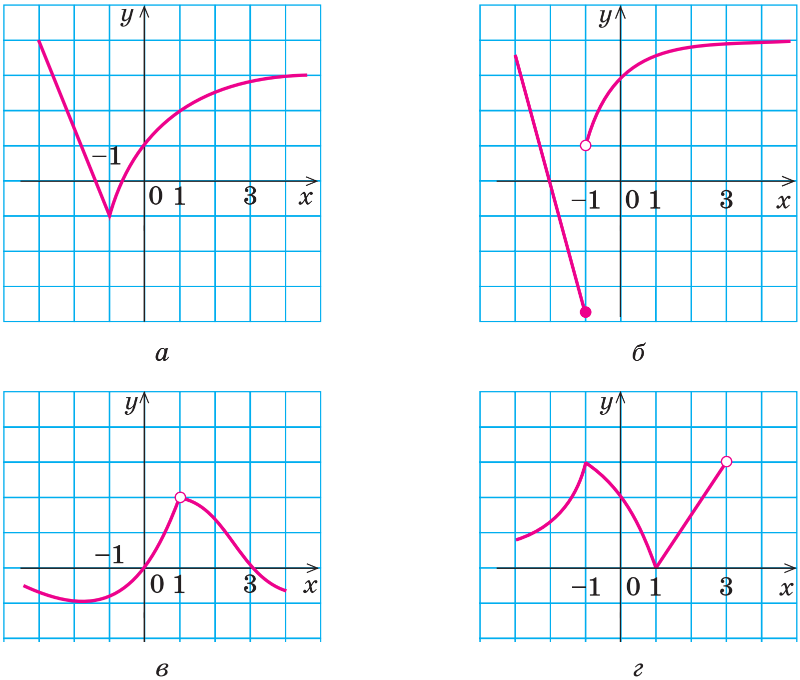


Рис. 1.6

2. Является ли функция непрерывной в каждой точке данного промежутка:

1) $f(x) = x^2 - 3x$, $(-\infty; +\infty)$;   2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$, $(0; +\infty)$;

3) $f(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$, $[2; +\infty)$?

3. Выясните, к какому числу стремится функция $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ при $x \to 1$;   2) $f(x) = \frac{2x + 5}{x^3 - 7}$ при $x \to 2$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3}$ при $x \to -1$;   4) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x}$ при $x \to 3$.

4*. Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + x + 5\right)$;   2) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 2x}{4x + 1}$;   3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$;   4) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$.

5. Решите неравенство методом интервалов:

1) $(x^2-9)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\leqslant 0$; 2) $\dfrac{2-\sqrt{2x+6}}{2x-1}>0$;

3) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\sqrt{x-3}-1}<0$; 4) $\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x^2-16}\geqslant 0$.

6. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x+2}}}$;

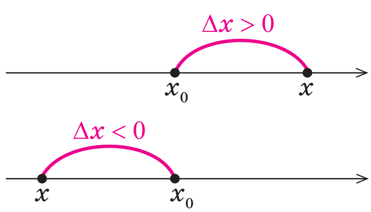
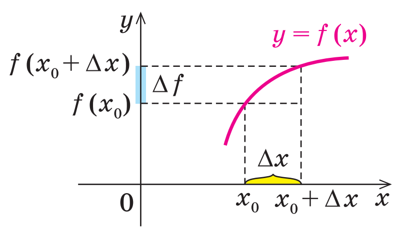
2) $y=\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

3) $y=\sqrt{(x^4-4x^2+3)\left|2x-3\right|}$;

4) $y=\left(\dfrac{5-\sqrt{x-3}}{x-4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

§ 2 ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

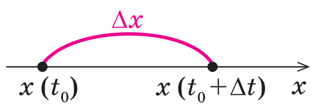
Таблица 2

1. Понятия приращения аргумента и приращения функции в точке x_0	
Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 из области определения функции $f(x)$.	
Приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$  	Приращение функции $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 
2. Запись непрерывности функции через приращения аргумента и функции	
Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда малому изменению аргумента в точке x_0 отвечают малые изменения значений функции, то есть **функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0** $\Leftrightarrow$ **при $\Delta x\to 0$ $\Delta f\to 0$**	

Продолжение табл. 2

3. Задачи, приводящие к понятию производной

I. Мгновенная скорость движения точки по прямой



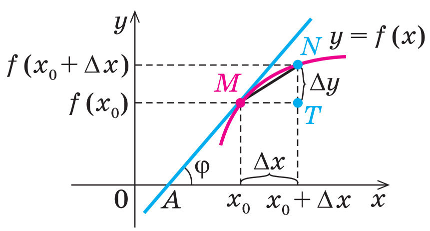
$x(t)$ — координата x точки в момент времени t;

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$\boxed{v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

II. Касательная к графику функции

Касательной к графику функции в данной точке M называется предельное положение секущей MN.



Когда точка N приближается к точке M (перемещаясь по графику функции $y=f(x)$), то величина угла NMT приближается к величине угла φ наклона касательной MA к оси Ox.

Поскольку $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

4. Определение производной

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 **называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

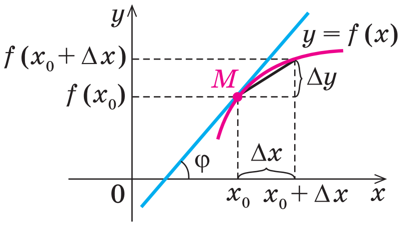
Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Окончание табл. 2

5. Производные некоторых элементарных функций

$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$$

k — угловой коэффициент касательной,

$$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)};$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — **уравнение касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и угловому коэффициенту этой касательной.

(*Угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.*)

7. Механический смысл производной

Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента

$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени

$v = s'(t)$ — **скорость** прямолинейного движения

$a = v'(t)$ — **ускорение** прямолинейного движения

В частности, *производная по времени является мерой скорости изменения соответствующей функции. Производную по времени используют для описания различных физических величин.*

Например, **мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения — это производная функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t.**

8. Зависимость между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она непрерывна на этом промежутке.

Объяснение и обоснование

1. Понятия приращения аргумента и приращения функции. Часто нас интересует не значение какой-то величины, а ее приращение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины, работа — это изменение энергии и т. д.

Приращение аргумента или функции традиционно обозначают большой буквой греческого алфавита Δ (дельта). Дадим определение приращения аргумента и приращения функции.

Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 из области определения функции $f(x)$.

Разность $x - x_0$ называют ***приращением независимой переменной*** (или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначают Δx (читают: «дельта икс»):

$$\Delta x = x - x_0.$$

Из этого равенства имеем

$$x = x_0 + \Delta x, \tag{1}$$

то есть первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. При $\Delta x > 0$ значение x больше, чем x_0, а при $\Delta x < 0$ значение x меньше, чем x_0 (рис. 2.1).

Тогда при переходе аргумента от точки x_0 к точке x значение функции изменилось на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Учитывая равенство (1), получаем, что функция изменилась на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{2}$$

(рис. 2.2), которую **называют *приращением функции f в точке x_0*, соответствующим приращению аргумента Δx** (символ Δf читают: «дельта эф»).

Из равенства (2) получаем $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

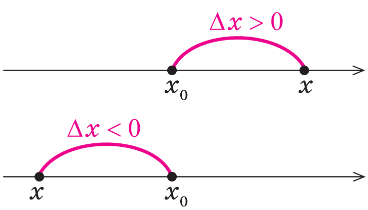


Рис. 2.1

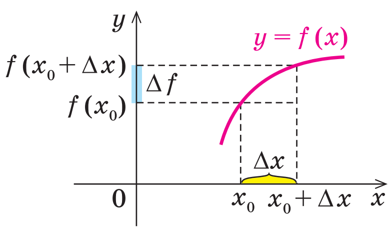


Рис. 2.2

При фиксированном x_0 приращение Δf является функцией от приращения Δx.

Если функция задается формулой $y = f(x)$, то Δf называют также приращением зависимой переменной y и обозначают через Δy.

Например, если $y = f(x) = x^2$, то приращение Δy, соответствующее приращению Δx, равно

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

2. Запись непрерывности функции через приращения аргумента и функции. Напомним, что функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0, если при $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Но если $x \to x_0$, то $x - x_0 \to 0$, то есть $\Delta x \to 0$ (и наоборот, если $\Delta x \to 0$, то $x - x_0 \to 0$, то есть $x \to x_0$). Следовательно, условие $x \to x_0$ эквивалентно условию $\Delta x \to 0$. Аналогично утверждение $f(x) \to f(x_0)$ эквивалентно условию $f(x) - f(x_0) \to 0$, то есть $\Delta f \to 0$. Таким образом, *функция* $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда при $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$, *то есть если малым изменениям аргумента в точке* x_0 *соответствуют малые изменения значений функции*. Именно вследствие этого свойства графики непрерывных функций изображаются непрерывными (неразрывными) кривыми на каждом из промежутков, которые полностью входят в область определения функции.

3. Задачи, приводящие к понятию производной

I. Мгновенная скорость движения точки по прямой. Рассмотрим задачу, известную из курса физики,— движение материальной точки по прямой. Пусть координата x точки в момент времени t равна $x(t)$. Будем считать, что движение происходит непрерывно (как это мы наблюдаем в реальной жизни). Попробуем по известной зависимости $x(t)$ определить скорость, с которой точка движется в момент времени t_0 (так называемую мгновенную скорость). Рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 2.3). Определим среднюю скорость на промежутке $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$ как отношение пройденного пути ко времени движения:

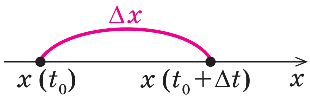


Рис. 2.3

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Для определения мгновенной скорости точки в момент времени t_0 сделаем так, как вы делали на уроках физики: возьмем промежуток времени продолжительностью Δt, вычислим среднюю скорость на этом промежутке и начнем уменьшать промежуток Δt до нуля (то есть уменьшать отрезок $[t_0;\ t]$ и приближать t к t_0). Мы заметим, что значение средней скорости при стремлении Δt к нулю будет стремиться к некоторому числу, которое и считается значением скорости в момент времени t_0. Иными словами, *мгновенной скоростью* в момент времени t_0 называется предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, если $\Delta t \to 0$, то есть

$$\boxed{v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

Например, рассмотрим свободное падение тела. Из курса физики известно, что в этом случае зависимость пути от времени задается формулой

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

1) Найдем сначала Δs:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2 - t_0^2)}{2} = \frac{g(2t_0\Delta t + (\Delta t)^2)}{2}.$$

2) Найдем среднюю скорость: $v_{\text{ср}}(t_0) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g(2t_0\Delta t + (\Delta t)^2)}{2\Delta t} = gt_0 + \frac{g\Delta t}{2}.$

3) Выясним, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$: это и будет мгновенная скорость в момент времени t_0.

Если $\Delta t \to 0$, то $\frac{g\Delta t}{2} = \frac{g}{2} \cdot \Delta t \to 0$, а поскольку gt_0 — величина постоянная, то $gt_0 + \frac{g\,\Delta t}{2} \to gt_0$. Последнее число и есть значением мгновенной скорости точки в момент времени t_0. Мы получили известную из физики формулу $v = gt$ (тогда $v(t_0) = gt_0$). Используя понятие предела, это можно записать так: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0$.

II. Касательная к графику функции. Наглядное представление о касательной к кривой можно получить, изготовив кривую из плотного материала (например, из проволоки) и прикладывая к кривой линейку в выбраной точке (рис. 2.4). Если мы изобразим кривую на бумаге, а затем будем вырезать фигуру, ограниченную этой кривой, то ножницы также будут направлены по касательной к кривой.

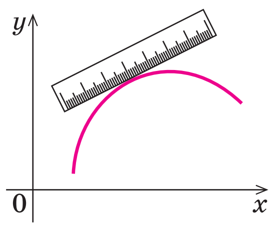


Рис. 2.4

Рис. 2.5

Попробуем перевести наглядное представление о касательной на более точный язык.

Пусть задана некоторая кривая и точка M на ней (рис. 2.5). Возьмем на этой кривой другую точку N и проведем прямую через точки M и N. Эту прямую обычно называют *секущей*. Начнем приближать точку N к точке M. Положение секущей MN будет изменяться, но при приближении точки N к точке M оно начнет стабилизироваться.

***Касательной* к кривой в данной точке *M* называется предельное положение секущей *MN*.**

Чтобы записать это определение с помощью формул, будем считать, что кривая — это график функции $y = f(x)$, а точка M, находящаяся на графике, задана координатами $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$. Касательной является некоторая прямая, проходящая через точку M (рис. 2.6). Чтобы построить эту прямую, достаточно знать угол φ наклона касательной* к оси Ox.

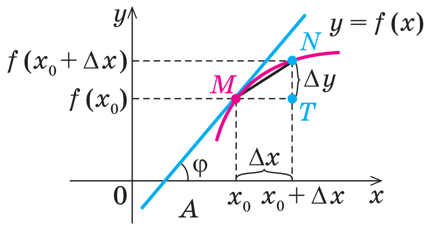


Рис. 2.6

Пусть точка N (через которую проходит секущая MN) имеет абсциссу $x_0 + \Delta x$. Когда точка N, перемещаясь по графику функции $y = f(x)$, приближается к точке M (это будет при $\Delta x \to 0$), величина угла NMT приближается к величине угла φ наклона касательной MA к оси Ox. Поскольку $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x \to 0$ значение $\operatorname{tg} \angle NMT$ приближается к $\operatorname{tg} \varphi$, то есть

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Фактически мы пришли к той же задаче, что и при нахождении мгновенной скорости: найти предел отношения выражения вида $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (где $y = f(x)$ — заданная функция) при $\Delta x \to 0$. Найденное таким образом число называют *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4. Определение производной

***Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0* называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ (или $y'(x_0)$) и читают: «эф штрих в точке x_0». Коротко определение производной функции $y = f(x)$ можно записать так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая определение приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующего приращению Δx, определение производной можно записать также следующим образом:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

---

* Будем рассматривать невертикальную касательную (то есть $\varphi \neq 90°$).

Функцию $f(x)$, имеющую производную в точке x_0, называют *дифференцируемой* в этой точке. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операцию нахождения производной называют *дифференцированием*.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ согласно определению можно пользоваться такой *схемой*:

1. *Найти приращение функции* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *соответствующее приращению аргумента* Δx.
2. *Найти отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. *Выяснить, к какому пределу стремится отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$. *Это и будет производной данной функции.*

5. Производные некоторых элементарных функций. Обоснуем, пользуясь предложенной схемой, формулы, приведенные в п. 5 табл. 2.

1. Вычислим производную функции $y = c$, то есть $f(x) = c$, где c — постоянная.

● 1) Найдем приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0$.

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

3) Поскольку отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно нулю, то и предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ равен нулю. Следовательно, $y' = 0$, то есть

$$c' = 0.$$ ○

2. Вычислим производную функции $y = x$, то есть $f(x) = x$.

● 1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Поскольку отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно 1, то и предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ равен единице. Следовательно, $y' = 1$, то есть

$$x' = 1.$$ ○

3. Вычислим производную функции $y = x^2$, то есть $f(x) = x^2$.

● 1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 =$
$= 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) При $\Delta x \to 0$ значение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Это означает, что $y'(x_0) = 2x_0$. Тогда производная функции $y = x^2$ в произвольной точке x равна $y'(x) = 2x$. Таким образом,

$$\mathbf{(x^2)' = 2x.}$$

○

4. Вычислим производную функции $y = \frac{1}{x}$, то есть $f(x) = \frac{1}{x}$.

● 1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0}$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0 \cdot \Delta x} = \frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значение $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$. Это означает, что $y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Тогда производная функции $y = \frac{1}{x}$ в произвольной точке x из ее области определения (то есть при $x \neq 0$) равна $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

○

5. Вычислим производную функции $y = \sqrt{x}$, то есть $f(x) = \sqrt{x}$.

● 1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$. Умножим и разделим полученное выражение на сумму $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$ и запишем Δy так:

$$\Delta y = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right) \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значение $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Это означает, что $y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (при $x_0 \neq 0$). Тогда производная функции $y = \sqrt{x}$ в произвольной точке x из области определения функции, кроме $x = 0$ (то есть при $x > 0$), равна: $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно,

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

○

6. Геометрический смысл производной и уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$. Учитывая определение производной функции $y = f(x)$, запишем результаты, полученные при рассмотрении касательной к графику функции (с. 24).

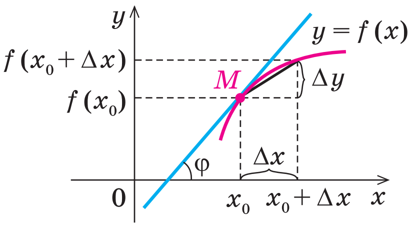


Рис. 2.7

Как было обосновано выше, тангенс угла φ наклона касательной в точке M с абсциссой x_0 (рис. 2.7) вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. В то же время $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, тогда

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Напомним, что в уравнении прямой $y = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла φ наклона прямой к оси Ox (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки). Значит, если k — угловой коэффициент касательной, то $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, то есть

значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и равно угловому коэффициенту этой касательной

(*угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки*).

Таким образом, если $y = kx + b$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M с абсциссой x_0 (и ординатой $f(x_0)$), то $k = f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной можно записать так: $y = f'(x_0)\,x + b$. Чтобы найти значение b, учтем, что эта касательная проходит через точку $M(x_0;\ f(x_0))$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют последнему уравнению, то есть $f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + b$. Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$, и уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$. Его удобно записать так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Это уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

З а м е ч а н и е. Угол φ, который образует невертикальная касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 с положительным направлением оси Ox, может быть нулевым, острым или тупым. Учитывая геометрический смысл производной, получаем, что *в случае, когда* $f'(x_0) > 0$ (то есть $\operatorname{tg}\varphi > 0$), угол φ будет острым, *а в случае, когда* $f'(x_0) < 0$ ($\operatorname{tg}\varphi < 0$), угол φ будет тупым. *Если* $f'(x_0) = 0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 0$), то $\varphi = 0$ (то есть *касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней*). И наоборот, *если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с положительным направлением оси Ox острый угол* φ, *то* $f'(x_0) > 0$, *если тупой угол*, то $f'(x_0) < 0$, *а если касательная параллельна оси Ох или совпадает с ней* ($\varphi = 0$), то $f'(x_0) = 0$.

Если же касательная образует с осью Ох прямой угол ($\varphi = 90°$), *то функция* $f(x)$ *производной в точке* x_0 *не имеет* (tg 90° не существует).

7. Механический смысл производной. Записывая определение производной в точке t_0 для функции $x(t)$:

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

и сопоставляя полученный результат с понятием мгновенной скорости прямолинейного движения:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

можно сделать вывод, что *производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента*.

В частности, *производная по времени является мерой скорости изменения соответствующей функции, что может применяться к разнообразнейшим физическим величинам*. Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения является производной функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t; ускорение a неравномерного прямолинейного движения является производной функции, выражающей зависимость скорости v от времени t.

Если $s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени, то
$v = s'(t)$ — *скорость* прямолинейного движения ($v = v(t)$);
$a = v'(t)$ — *ускорение* прямолинейного движения.

8. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

● Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует ее производная $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть при $\Delta x \to 0$ значение $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Для обоснования непрерывности функции $y = f(x)$ достаточно обосновать, что при $\Delta x \to 0$ значение $\Delta y \to 0$.

Действительно, при $\Delta x \to 0$ получаем $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Из этого следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Таким образом, **если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.**

Из этого утверждения можно заключить:

если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (то есть в каждой его точке), то она непрерывна на этом промежутке. ○

Отметим, что *обратное утверждение неверно*. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производной в некоторых точках этого промежутка.

Например, функция $y = |x|$ (рис. 2.8) непрерывна при всех значениях x, но не имеет производной в точке $x = 0$. Действительно, если $x_0 = 0$ и $y = f(x) = |x|$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$

Поэтому при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела, а значит, и функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0.

Замечание. Тот факт, что непрерывная функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, означает, что к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 нельзя провести касательную (или соответствующая касательная перпендикулярна к оси Ox). График в этой точке может иметь излом (рис. 2.8), а может иметь значительно более сложный вид*.

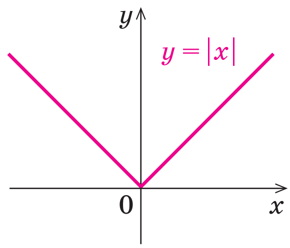


Рис. 2.8

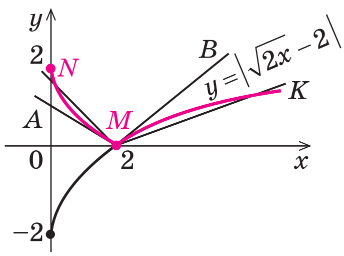


Рис. 2.9

Например, к графику непрерывной функции $y = \left|\sqrt{2x} - 2\right|$ (рис. 2.9) в точке M с абсциссой $x = 2$ нельзя провести касательную (а значит, эта функция не имеет производной в точке 2). Действительно, по определению касательная — это предельное положение секущей. Если точка N будет приближаться к точке M по левой части графика, то секущая MN займет предельное положение MA. Если же точка K будет приближаться к точке M по правой части графика, то секущая MK займет предельное положение MB. Но это две разные прямые, следовательно, в точке M касательной к графику данной функции не существует.

Примеры решения задач

Пример 1 Найдите тангенс угла φ наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, к оси Ox, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$.

* В курсе математического анализа построены примеры функций, которые являются непрерывными, но ни в одной точке не имеют производной.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ По геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Учитывая, что $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, получаем: $$f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1.$$ Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = f'(1) = -1$. ◁ 2) ▶ Поскольку $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$. По геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = f'(25) = 0{,}1$. ◁	По геометрическому смыслу производной $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол наклона касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, к оси Ox. Для нахождения $\operatorname{tg}\varphi$ достаточно найти производную функции $f(x)$, а затем найти значение производной в точке x_0. Формулы производных для нахождения производных заданных функций приведены в п. 5 табл. 2 (и обоснованы на с. 22, 23). Далее при решении задач мы будем использовать их как табличные значения.

Пример 2 Используя формулу $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, запишите уравнение касательной к графику функции $y=\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{1}{2}$.

Решение	*Комментарий*
▶ Если $f(x)=\frac{1}{x}$, то $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Тогда $f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$. Подставляя эти значения в уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, получаем: $$y=2-4\left(x-\frac{1}{2}\right).$$ То есть $y = -4x + 4$ — искомое уравнение касательной. ◁	Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 в общем виде таково: $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$ Чтобы записать это уравнение для заданной функции, необходимо найти значение $f(x_0)$, производную $f'(x)$ и значение $f'(x_0)$. Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить заданную функцию через $f(x)$ и использовать табличное значение производной $$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах и дайте определения приращения аргумента и приращения функции в точке x_0.
2. а) Охарактеризуйте понятие непрерывности функции в точке, пользуясь понятиями приращения аргумента и функции. б*) Обоснуйте запись непрерывности функции в точке через приращение аргумента и функции.
3. Объясните, как можно вычислить мгновенную скорость точки при ее движении по прямой.
4. Объясните, какая прямая считается касательной к графику функции.
5. Как вычислить тангенс угла наклона секущей, проходящей через две точки графика некоторой функции, к оси Ox?
6. Объясните, как можно определить тангенс угла φ наклона касательной к оси Ox.
7. а) Дайте определение производной. Как обозначается производная функции f в точке x_0?
   б*) Опишите схему нахождения производной функции $y = f(x)$.
8. а) Запишите, чему равна производная функции:

   1) c (где c — постоянная); 2) x; 3) x^2; 4) $y=\frac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{x}$.

   б*) Обоснуйте формулы для нахождения производных функций, приведенных в пункте а).
9. Что такое производная с геометрической точки зрения?
10. Что такое производная с механической точки зрения?
11. а) Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
    б*) Обоснуйте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
12. а) Объясните связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
    б*) Обоснуйте связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Упражнения

1°. Для функции $y = 2x$ найдите приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в точке x_0, если:

1) $x_0 = 2$ и $\Delta x = 3$; 2) $x_0 = 1{,}5$ и $\Delta x = 3{,}5$; 3) $x_0 = 0{,}5$ и $\Delta x = 2{,}5$.

2. Найдите приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в точке x_0 для функции:

1) $y = 3x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^2 - x$; 4) $y = x+\frac{1}{x}$.

3. Закон движения точки по прямой задается формулой $x = x(t)$, где x — координата точки в момент времени t. Найдите:

а) среднюю скорость движения точки на отрезке [2; 4];

б) мгновенную скорость движения точки при $t = 2$, если:

1) $x(t) = 3t + 4$; 2) $x(t) = -2t + 1$; 3) $x(t) = 5t - 7$; 4) $x(t) = -3t - 2$.

4. Пользуясь схемой вычисления производной, приведенной на с. 22, найдите производную функции:

1) $y = 3x$; 2) $y = -5x$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^2 - 2x$.

5°. На рис. 2.10, *а–г* изображен график функции $y = f(x)$ и касательные к нему в точках с абсциссами x_1 и x_2. Пользуясь геометрическим смыслом производной, запишите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

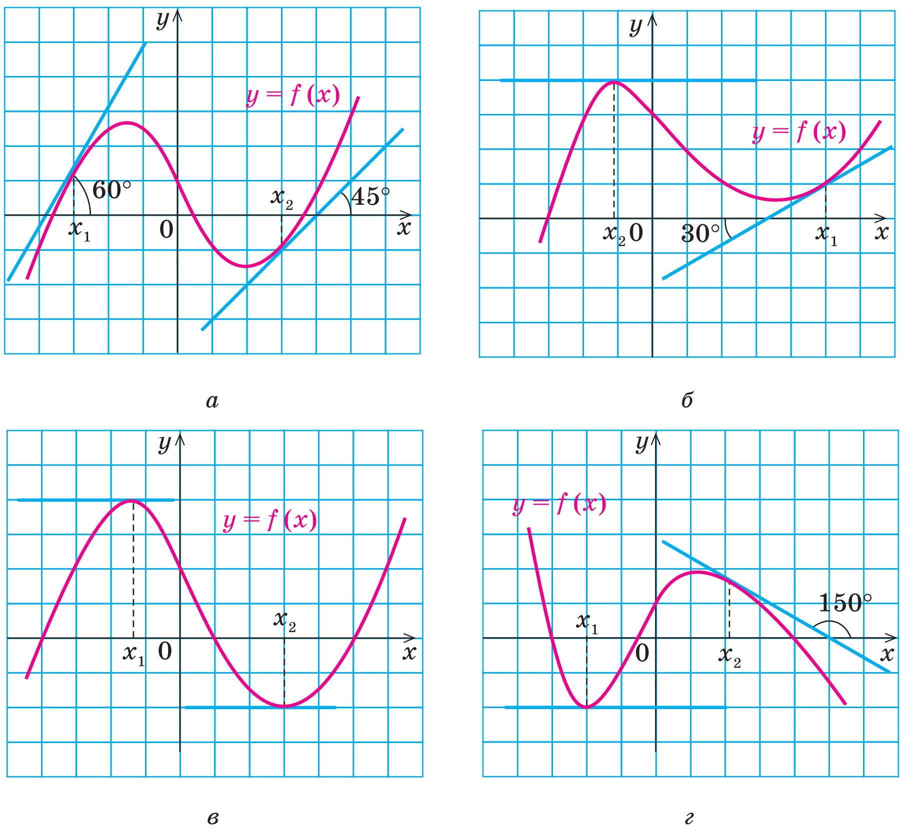


Рис. 2.10

6. Используя формулы, приведенные в п. 5 табл. 2, и геометрический смысл производной, запишите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = x$, $x_0 = 8$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

7. Используя формулу $(x^2)' = 2x$, запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = 0{,}5$; 4) $x_0 = -3$.

Изобразите график данной функции и соответствующую касательную.

8. Используя формулу $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, запишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0{,}25$; 3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = 9$.

9. Используя механический смысл производной, найдите скорость тела, которое движется по закону $s = s\,(t)$, в момент времени t, если:

1) $s\,(t) = t$, $t = 7$; 2) $s\,(t) = t^2$, $t = 6{,}5$;

3) $s\,(t) = t^3$, $t = 5$; 4) $s(t) = \sqrt{t}$, $t = 4$.

10. Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 2.11).

1) Найдите среднюю скорость точки с момента $t = 2$ до $t = 3$.

2) Сравните скорости точки в моменты времени $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$.

3) Изменяла ли точка направление движения? Если изменяла, то в какой момент времени?

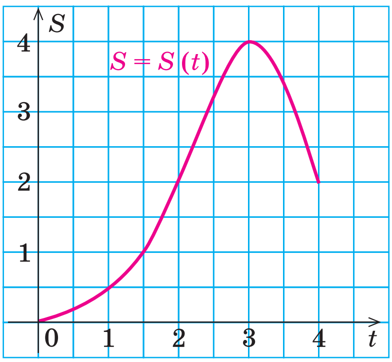


Рис. 2.11

11. На рис. 2.12 изображен график функции $y = f\,(x)$ на промежутке $[-4;\ 7]$. Используя геометрический смысл производной, укажите на промежутке $(-4;\ 7)$:

1) значения аргумента, в которых производная $f'\,(x)$ равна нулю;

2) значения аргумента, в которых производная $f'\,(x)$ не существует. Существует ли в каждой точке с найденными абсциссами касательная к графику функции $y = f\,(x)$?

3*) промежутки, в которых производная $f'\,(x)$ положительна. Охарактеризуйте поведение функции на каждом из этих промежутков;

4*) промежутки, в которых производная $f'(x)$ отрицательна. Охарактеризуйте поведение функции на каждом из этих промежутков.

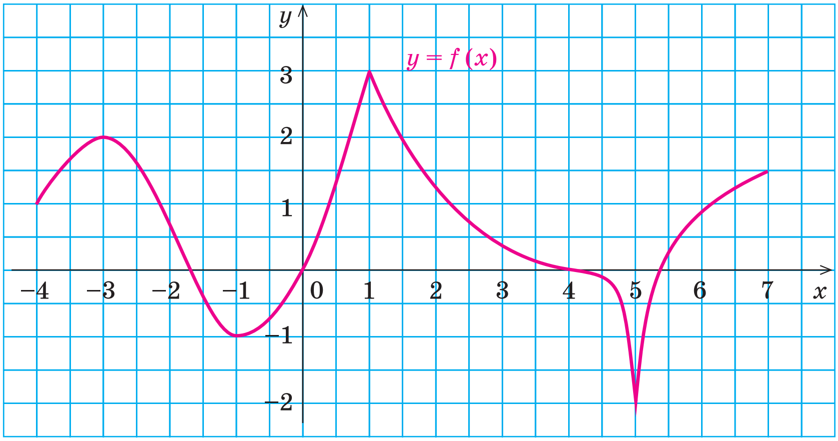


Рис. 2.12

§ 3 ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Таблица 3

1. Производные некоторых элементарных функций				
$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

2. Правила дифференцирования	
Правило	**Пример**
$(cu)' = cu'$ *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*	$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$
$(u + v)' = u' + v'$ *Производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных*	$\left(x + \sqrt{x}\right)' = (x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)' = u'v + v'u$	$((x + 2)\,x^2)' = (x + 2)'\,x^2 + (x^2)'(x + 2) =$ $= (x' + 2')\,x^2 + 2x\,(x + 2) =$ $= (1 + 0)\,x^2 + 2x\,(x + 2) = 3x^2 + 4x$

Окончание табл. 3

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - x' \cdot 1}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$
3. Производная сложной функции (функции от функции)	
Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$, то есть $y = f(u(x))$, то $\big(f(u(x))\big)' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$ Коротко это можно записать так*: $\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x}$	$((3x-1)^5)' = 5(3x-1)^4(3x-1)' = 5(3x-1)^4((3x)' - 1') = 5(3x-1)^4(3-0) = 15(3x-1)^4.$ (Если $u = 3x - 1$, тогда $(u^5)'_x = 5u^4u'_x$.)

Объяснение и обоснование

1. Правила дифференцирования. С учетом определения производной в п. 5 § 2 были найдены производные некоторых элементарных функций:

$$\boxed{c' = 0} \text{ (}c\text{ — постоянная), } \boxed{(x)' = 1}, \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}, \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Для нахождения производных в более сложных случаях целесообразно помнить *правила дифференцирования* — специальные правила нахождения производной от суммы, произведения и частного тех функций, для которых мы уже знаем значения производных, и правило нахождения производной сложной функции (функции от функции).

Обоснуем эти правила. Для сокращения записей будем использовать такие обозначения функций и их производных в точке x_0:

$$u(x_0) = u,\ v(x_0) = v,\ u'(x_0) = u',\ v'(x_0) = v'.$$

Правило 1. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке и*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Коротко говорят:

производная суммы равна сумме производных.

● Для доказательства обозначим $y(x) = u(x) + v(x)$ и используем план нахождения y' по определению производной в точке x_0 (с. 22).

1) Приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$

---

* В обозначениях y'_x, f'_u, u'_x нижний индекс указывает, по какому аргументу берется производная.

3) Выясним, к какому пределу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Поскольку функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u'$, а $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0) = v'$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$.

Так как предел суммы равен сумме пределов слагаемых, получаем, что при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \to u' + v'$. Из этого следует, что $y' = u' + v'$,

$$\text{то есть } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Таким образом, $(u + v)' = u' + v'$. ○

Правило 1 можно расширить на любое конечное количество слагаемых* ($n \in N$):

$$\boxed{(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots + u_n'}.$$

Правило 2. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и*

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

● 1) Обозначим $y(x) = u(x)\, v(x)$. Сначала запишем приращения функций u и v в точке x_0:

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0),\ \Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0).$$

Из этих равенств получаем:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u + \Delta u, \qquad (1)$$

$$v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v = v + \Delta v. \qquad (2)$$

Учитывая равенства (1), (2), имеем

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)\, v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\, v(x_0) =$$
$$= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv =$$
$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$

3) Поскольку функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u'$, а $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0) = v'$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$.

Так как функция v дифференцируема в точке x_0, а значит, и непрерывна в этой точке, то при $\Delta x \to 0$ значение $\Delta v \to 0$.

Учитывая, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых (и постоянные множители u и v можно выносить за знак предела), получаем, что при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \to vu' + uv' + u' \cdot 0 = vu' + uv'.$$

---

* Для обоснования того, что эта формула верна для любого натурального n, необходимо применить метод математической индукции (см. учебник для 10 класса).

Это означает, что $y' = u'v + v'u$, то есть

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = u'v + v'u.$$

Таким образом, $(uv)' = u'v + v'u$. ○

Следствие (правило 3). *Если функция u дифференцируема в точке x_0, а c — постоянная, то функция cu дифференцируема в этой точке и*

$$(cu)' = cu'.$$

Коротко говорят:

постоянный множитель можно выносить за знак производной.

● Для доказательства используем правило 2 и известный из § 2 факт, что $c' = 0$:

$$(cu)' = c'u + u'c = 0 \cdot u + u'c = cu'. \quad ○$$

Правило 4. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функция v не равна нулю в этой точке, то их частное $\frac{u}{v}$ также дифференцируемо в точке x_0 и*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

● Эту формулу можно получить аналогично производной произведения. Но можно использовать более простые рассуждения, если принять без доказательства, что производная данного частного существует. Обозначим функцию $\frac{u}{v}$ через t. Тогда $\frac{u}{v} = t$, $u = vt$. Найдем производную функции u по правилу дифференцирования произведения: $u' = v't + t'v$.

Выразим из этого равенства t', а вместо t подставим его значение $\frac{u}{v}$.

Получим: $t' = \frac{u' - v't}{v} = \frac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. Следовательно, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. ○

Используя правило нахождения производной произведения и формулу $x' = 1$, обоснуем, что **производную функции** $y = x^n$ при натуральном $n > 1$ вычисляют по формуле

$$(x^n) = nx^{n-1}. \quad (3)$$

● При $n = 2$ получаем: $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x' \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$. Тот же результат дает и применение формулы (3):

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x.$$

При $n = 3$ получаем: $(x^3)' = (x^2 \cdot x) = (x^2)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$. Тот же результат дает и применение формулы (3):

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

Приведенные соображения позволяют, опираясь на предыдущий результат, обосновать формулу для следующего значения n.

Допустим, что формула (3) выполняется для $n = k$ ($k > 1$), то есть

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажем, что тогда формула (3) верна и для следующего значения $n = k + 1$. Действительно,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)'\, x + x'\, x^k = kx^{k-1}\, x + 1 \cdot x^k =$$
$$= k\, x^k + x^k = (k+1)x^k.$$

Итак, если формула (3) выполняется при $n = 2$, то она выполняется и для следующего значения $n = 3$. Но тогда формула (3) выполняется и для следующего значения $n = 4$, а значит, и для $n = 5$ и т. д. для любого* натурального $n > 1$. ○

Можно обосновать (см. § 18), что *формула* $(x^n)' = nx^{n-1}$ *верна для любого действительного показателя степени* n (но только при тех значениях x, при которых определена ее правая часть).

● Например, если $n = 1$ или $n = 0$, то при $x \neq 0$ эта формула также верна. Действительно, если $x \neq 0$, то по формуле (3):

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

что совпадает со значениями производных функций x и 1, полученных в п. 5 § 2.

Если n — целое отрицательное число, то $n = -m$, где m — натуральное число. Тогда при $x \neq 0$

$$\left(x^n\right)' = \left(x^{-m}\right)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{\left(x^m\right)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} =$$
$$= -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Следовательно, формула (3) выполняется и для любого целого показателя степени.

Если $n = \frac{1}{2}$, то при $x > 0$ имеем $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Как известно из § 2, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (при $x > 0$). Но по формуле (3) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

то есть формула (3) верна и при $n = \frac{1}{2}$. ○

---

* В приведенном обосновании фактически неявно использован метод математической индукции (см. учебник для 10 класса), который позволяет аргументированно сделать вывод, что рассмотренное утверждение выполняется для любого натурального n (в данном случае $n > 1$).

2. Производная сложной функции. Сложной функцией обычно называют функцию от функции. Если переменная y является функцией от u: $y = f\,(u)$, а u, в свою очередь, функцией от x: $u = u\,(x)$, то y *является сложной функцией* от x, то есть $y = f\,(u\,(x))$.

В таком случае говорят, что y является сложной функцией независимого аргумента x, а u называют *промежуточным аргументом*.

Например, если $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = u\,(x) = x - 2$, то $y(x) = f\big(u(x)\big) = \sqrt{x-2}$ — сложная функция, определенная только при тех значениях x, для которых $x - 2 \geqslant 0$, то есть при $x \geqslant 2$ (промежуточный аргумент $u = x - 2$).

Правило 5 (производная сложной функции). *Если функция $u\,(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f\,(u)$ — производную в точке $u_0 = u\,(x_0)$, то сложная функция $y = f\,(u\,(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем*

$$\big(f\big(u(x)\big)\big)' = f'_u(u)\cdot u'_x(x).$$

Поскольку по условию функция $u\,(x)$ имеет производную в точке x_0, то она является непрерывной в этой точке (с. 17), и тогда малому изменению аргумента в точке x_0 соответствуют малые изменения значений функции, то есть при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ (с. 15).

Из равенства $\Delta u = u\,(x_0 + \Delta x) - u\,(x_0)$ имеем

$$u\,(x_0 + \Delta x) = u\,(x_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u.$$

Тогда

$$\Delta y = y\,(x_0 + \Delta x) - y\,(x_0) = f\,(u\,(x_0 + \Delta x)) - f\,(u\,(x_0)) =$$
$$= f\,(u_0 + \Delta u) - f\,(u_0) = \Delta f.$$

Дальнейшее доказательство проведем только для функций $u\,(x)$, в которых $\Delta u \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. При $\Delta u \neq 0$ представим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следующим образом: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Учитывая, что при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u'_x$, а при $\Delta u \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta u} \to f'(u_0) = f'_u$, получаем, что при $\Delta x \to 0$ (и соответственно $\Delta u \to 0$) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} \to f'_u\,u'_x$. Это означает, что

$$\boxed{y'_x = f'_u\,u'_x},$$

то есть

$$\big(f\big(u(x)\big)\big)' = f'_u(u)\,u'_x(x).$$

Следовательно, *производная сложной функции $y = f\,(u\,(x))$ равна произведению производной данной функции $y = f\,(u)$ по промежуточному аргументу u* (обозначается f'_u) *на производную промежуточного аргумента $u = u\,(x)$ по независимому аргументу x* (обозначается u'_x). ○

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите производную функции:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y = \dfrac{x+2}{5-x}$.

Решение

1) ▶ $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2$. ◁

2) ▶ $y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)' \cdot (2x + x^4) + (2x + x^4)' \cdot x^8$.

Учитывая, что $(x^8)' = 8x^7$,

$(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$,

имеем

$$y' = 8x^7(2x + x^4) + (2 + 4x^3)x^8 = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}. \ ◁$$

3) ▶ $$y' = \left(\frac{x+2}{5-x}\right)' = \frac{(x+2)' \cdot (5-x) - (5-x)'(x+2)}{(5-x)^2}.$$

Учитывая, что

$(x + 2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$,

$(5 - x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$,

имеем

$$y' = \frac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \frac{5 - x + x + 2}{(5-x)^2} = \frac{7}{(5-x)^2}. \ ◁$$

Комментарий

Напомним, что *алгебраическое выражение* (формулу, задающую функцию) *называют по результату последнего действия, которое необходимо выполнить при нахождении значения заданного выражения*. Следовательно, в задании 1 сначала необходимо найти производную суммы:

$$(u + v)' = u' + v',$$

в задании 2 — производную произведения:

$$(uv)' = u'v + u'v,$$

в задании 3 — производную частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Также в заданиях 1 и 2 нужно использовать формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, а в задании 2 учесть, что при вычислении производной $2x$ постоянный множитель 2 можно вынести за знак производной. Можно заметно упростить решение задания 2, если сначала раскрыть скобки, а затем взять производную суммы.

Задача 2 Вычислите значение производной функции $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x}$ в точках: $x = 4$, $x = 0{,}01$.

Решение

▶ $$f'(x) = \left(x^2 - 5\sqrt{x}\right)' = (x^2)' - 5\left(\sqrt{x}\right)' = 2x - 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(4) = 2 \cdot 4 - \frac{5}{2\sqrt{4}} = 8 - \frac{5}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

Комментарий

Для нахождения значения производной в указанных точках достаточно найти производную данной функции и в полученное выражение подставить заданные значения аргумента. При вычислении производной

$$f'(0{,}01)=2\cdot 0{,}01-\frac{5}{2\sqrt{0{,}01}}=0{,}02-\frac{5}{2\cdot 0{,}1}=$$
$$=0{,}02-\frac{5}{0{,}2}=0{,}02-25=-24{,}98.$$

Ответ: $6\frac{3}{4}$; $-24{,}98$. ◁

необходимо учесть, что заданную разность можно рассматривать как алгебраическую сумму выражений x^2 и $\left(-5\sqrt{x}\right)$, а при нахождении производной $\left(-5\sqrt{x}\right)$ за знак производной вынести постоянный множитель (-5). В результате мы получаем разность производных функций x^2 и $5\sqrt{x}$.

Задача 3 Найдите значения x, при которых производная функции $f(x) = x^4 - 32x$ равна нулю.

Решение	*Комментарий*
▶ $f'(x) = (x^4 - 32x)' =$ $= (x^4)' - 32x' = 4x^3 - 32.$ $f'(x) = 0$. Тогда $4x^3 - 32 = 0$, $x^3 = 8$, $x = 2$. *Ответ:* 2. ◁	Чтобы найти соответствующие значения x, достаточно найти производную данной функции, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение.

Задача 4 Найдите производную функции f:

1) $f(x) = (x^3 - 1)^{-7}$; 2) $f(x)=\sqrt{5x^2+x}$;

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $f'(x) = -7(x^3 - 1)^{-7-1}\cdot(x^3 - 1)'$. Учитывая, что $(x^3 - 1)' = (x^3)' - 1' = 3x^2 - 0 = 3x^2$, получаем $f'(x) = -7\,(x^3 - 1)^{-8}\cdot 3x^2 =$ $= -21x^2(x^3 - 1)^{-8} = -\frac{21x^2}{(x^3-1)^8}$; ◁ 2) ▶ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x^2+x}}\cdot\left(5x^2+x\right)'$. Учитывая, что $(5x^2 + x)' = 5(x^2)' + x' =$ $= 5\cdot 2x + 1 = 10x + 1$, получаем $f'(x)=\frac{10x+1}{2\sqrt{5x^2+x}}$. ◁	В заданиях 1 и 2 необходимо найти соответственно производную степени и корня, но в основании степени и под знаком корня стоит не аргумент x, а выражения с этим аргументом (тоже функции от x). Следовательно, необходимо найти производные сложных функций. Обозначая (в черновике или мысленно) промежуточный аргумент через u (для задания 1: $u = x^3 - 1$, для задания 2: $u = 5x^2 + x$), по формуле $f'_x = f'_u\cdot u'_x$ записываем производные заданных функций с учетом формул $(u^n)' = nu^{n-1}$ и $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}$.

Вопросы для контроля

1. Запишите правила нахождения производной суммы, произведения и частного двух функций. Проиллюстрируйте их применение на примерах.
2. Запишите формулу нахождения производной степенной функции x^n. Проиллюстрируйте ее применение на примерах.
3. Объясните на примерах правило нахождения производной сложной функции.

4*. Обоснуйте правила нахождения производной суммы, произведения и частного двух функций и правило нахождения производной сложной функции.

5*. Обоснуйте формулу нахождения производной степенной функции x^n для целых значений n.

Упражнения

Найдите производную функции **(1—5)**.

1°. 1) $y = x^8$; 2) $y = x^{-5}$; 3) $y = x^{\frac{2}{3}}$;
4) $y = x^{20}$; 5) $y = x^{-20}$; 6) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

2. 1°) $f(x) = x + 3$; 2°) $f(x) = x^5 - x$;
3) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$; 4) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

3. 1) $f(x) = 2x^3 + 3x$; 2) $f(x) = x^2 + 5x + 2$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^3 + 3$.

4. 1) $y = x^2(2x + x^4)$; 2) $y = (2x - 1)(1 - x^2)$;
3) $y = (3 + x^3)(2 - x)$; 4) $y = \sqrt{x}\,(3x^2 - x)$.

5. 1) $y = \frac{x^2}{x+3}$; 2) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$;
3) $y = \frac{2-x}{5x+1}$; 4) $y = \frac{1-2x}{x^2}$.

6. Вычислите значения производной функции $f(x)$ в указанных точках:

1°) $f(x) = x^2 + 2x$; $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$;

2°) $f(x) = x^4 - 4x$; $x = 2$, $x = -1$;

3) $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$; $x = 0$, $x = -3$;

4) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; $x = -\sqrt{2}$, $x = 0{,}1$.

7. Найдите значения x, для которых производная функции $f(x)$ равна нулю:

1°) $f(x) = 3x^2 - 6x$; 2°) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+5$;

3) $f(x)=12x+\frac{3}{x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$.

8. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

1°) $f(x) = 2x - x^2$; 2°) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

3) $f(x)=2x+\frac{8}{x}$; 4) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

9. Задайте формулами элементарные функции $f(u)$ и $u(x)$, из которых состоит сложная функция $y = f(u(x))$:

1) $y=\sqrt{\sin x}$; 2) $y=(2x+x^2)^5$;

3) $y=\sqrt{x^3-x}$; 4) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

10. Найдите область определения функции:

1°) $y = (2x^3 - 4x)^5$; 2°) $y=\sqrt{2x+6}$;

3°) $y=\frac{1}{2x-8}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

5) $y=\sqrt{\sin x}$; 6) $y=\sqrt{\frac{1}{x}-2}$;

7*) $y=\sqrt{1-2\cos x}$;

11. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = (x^2 - x)^3$; 2) $f(x) = (2x - 1)^{-5}$;

3) $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$; 4) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$;

5*) $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3x}}+\frac{1}{(2x-1)^2}$.

12. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = -3$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-x^3}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

§ 4 ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица 4

$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Объяснение и обоснование

Формулы $c' = 0$ (c — постоянная), $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) были обоснованы в § 2 и 3.

● Для обоснования формулы $(\sin x)' = \cos x$ используем то, что при малых значениях α значения $\sin\alpha \approx \alpha$ (например, $\sin 0{,}01 \approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001 \approx 0{,}001$). Тогда при $\alpha \to 0$ отношение $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$, то есть

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \qquad (1)^*$$

Если $y = f(x) = \sin x$, то, применяя формулу преобразования разности синусов в произведение и схему нахождения производной по определению (с. 22), имеем:

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$

$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3) При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Тогда $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0)$, а учитывая (1) $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1\cdot\cos x_0 = \cos x_0$, то есть $f'(x_0) = \cos x_0$. Тогда производная функции $y = \sin x$ в произвольной точке x равна $\cos x$. Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad ○$$

* Справедливость этой формулы обоснована на с. 109.

● Учитывая, что по формулам приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, и используя правило нахождения производной сложной функции, получаем:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x.$$

Следовательно,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$ ○

● Для нахождения производных $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ используем формулы $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ и правило нахождения производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$ ○

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ докажите самостоятельно.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите производную функции:

1) $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{\cos 3x}$.

Решение	*Комментарий*
1) ► $f'(x) = \left(\sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= (\sin^2 x)' + \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= 2\sin x\,(\sin x)' + \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$ $= 2\sin x \cos x + \frac{1}{2\sqrt{2x}} = \sin 2x + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$. ◁	Последовательно определим, от какого выражения надо взять производную (ориентируясь на результат последнего действия). В задании 1 сначала берут производную суммы: $(u + v)' = u' + v'$. Затем для каждого из слагаемых используют правило вычисления производной сложной функции: берут производную от u^2 и $\sqrt{u}$ и умножают на u'. Полученный результат желательно упростить по формуле $2\sin x \cos x = \sin 2x$.

2) ▶ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{\cos 3x}\right)'=$

$$=\frac{(x^2)'\cos 3x-(\cos 3x)'\,x^2}{(\cos 3x)^2}=$$

$$=\frac{2x\cos 3x-(-\sin 3x)(3x)'\,x^2}{\cos^2 3x}=$$

$$=\frac{2x\cos 3x+3x^2\sin 3x}{\cos^2 3x}.$$ ◁

В задании 2 сначала берут производную частного: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, а для производной знаменателя используют правило вычисления производной сложной функции (производная cos u умножается на u').

Задача 2 Найдите значения x, при которых значение производной функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$:

1) равно нулю; 2) положительно; 3) отрицательно.

Решение	*Комментарий*

▶ Область определения данной функции: $\begin{cases} x+2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$

то есть [− 2; 0) ∪ (0; + ∞).

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)'x^2-(x^2)'\sqrt{x+2}}{\left(x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}x^2-2x\sqrt{x+2}}{x^4}=\frac{-3x-8}{2x^3\sqrt{x+2}}.$$

Область определения функции $f'(x)$: (−2; 0) ∪ (0; +∞), то есть производная $f'(x)$ существует на всей области определения данной функции $f(x)$, кроме точки $x = -2$.

Поскольку производная данной функции может существовать только в точках, входящих в область определения функции, то сначала целесообразно найти область определения данной функции.

Производная функции сама является функцией от x, поэтому для решения неравенств $f'(x)\gtrless 0$ можно использовать метод интервалов. После нахождения ОДЗ соответствующего неравенства необходимо сопоставить ее с областью определения функции $f(x)$ и продолжать решение неравенства на их общей части.

Следовательно, *неравенства* $f'(x)\gtrless 0$ *всегда решаются на общей части областей определения функций* $f(x)$ и $f'(x)$. Для решения соответствующих неравенств достаточно на общей области определения функций $f(x)$ и $f'(x)$ отметить нули $f'(x)$

$$f'(x) = 0, \quad \frac{-3x-8}{2x^3\sqrt{x+2}} = 0, \quad x = -\frac{8}{3}$$

(не входит в область определения $f'(x)$).

На области определения $f'(x)$ решим неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ методом интервалов (рис. 4.1):

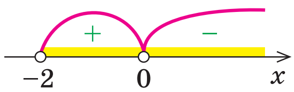


Рис. 4.1

Ответ: 1) значений x, при которых $f'(x) = 0$, нет;
2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-2; 0)$;
3) $f'(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$. ◁

и найти знак $f'(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается общая область определения.

Задача 3 Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 \cos(x-1)$ в точке $x_0 = 1$.

Решение	*Комментарий*

▶ Если $f(x) = x^2 \cos(x-1)$, то $f(x_0) = f(1) = 1$.

$$f'(x) = (x^2)'\cos(x-1) + (\cos(x-1))'x^2 = 2x\cos(x-1) - x^2\sin(x-1).$$

Тогда $f'(x_0) = f'(1) = 2$. Подставляя эти значения в уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

получаем $y = 1 + 2(x-1)$, то есть $y = 2x - 1$ — искомое уравнение касательной. ◁

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 в общем виде записывается так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Чтобы записать это уравнение для данной функции, необходимо найти $f(x_0)$, производную $f'(x)$ и значение $f'(x_0)$. Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить заданную функцию через $f(x)$, а для нахождения ее производной использовать формулу производной произведения

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы нахождения производных тригонометрических функций.
2*. Обоснуйте формулы нахождения производных тригонометрических функций.

Упражнения

Найдите производную функции **(1–7)**.

1°. 1) $y = \cos x + 1$; 2) $y = 2\sin x - 3x$;

3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 4) $y = x^3 - \operatorname{ctg} x$.

2. 1) $f(x) = x \operatorname{tg} x$; 2) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$;

3) $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \cos x \operatorname{ctg} x$.

3. 1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 3) $f(x) = \sin^2 x$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

4. 1) $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;

3) $y = \sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x$;

4) $y = \sin 7x \sin 3x + \cos 7x \cos 3x$.

5*. 1) $y=\sqrt{1+\sin x}$; 2) $y = \cos x^2$; 3) $y = \sin(\cos x)$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg} 6x}$.

6. 1) $y = x^5 + \sin 4x$; 2) $y = x^3 \sin x$; 3) $y = (\sin x - \cos x)^2$; 4) $y = \operatorname{tg}^3 4x$.

7. 1) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$; 2) $y = 3\sin^2 x + \cos 2x$; 3) $y=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$; 4) $y=\sqrt{x+\sin x}$.

Вычислите значение производной функции $f(x)$ в указанной точке **(8, 9)**.

8. 1°) $f(x) = \cos 2x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$; 2°) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$, $x = 0$;

3) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$, $x=\dfrac{3\pi}{8}$.

9. 1) $f(x) = x^3 + \sin x$, $x = 0$; 2) $f(x)=x\sqrt{2x}$, $x = 2$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x = 1$; 4) $f(x) = (2x - x^3)^5$, $x = -1$.

Найдите значения x, для которых производная функции $f(x)$ равна нулю **(10, 11)**.

10. 1°) $f(x) = 2 - \cos x$; 2°) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$;

3) $f(x) = \sin^2 2x$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x$.

11. 1°) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 7$; 2°) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$;

3) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$.

12. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:

1°) $f(x) = 12x - x^3 + 1$; 2°) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 5$;

3) $f(x) = \cos 2x + 3$; 4) $f(x)=4\sqrt{x}-x$.

13. Найдите значения x, при которых значение производной функции $f(x)$: а) равно нулю; б) положительно; в) отрицательно.

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; 2) $f(x) = 2x^4 - 16x^3 + 2$;

3) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

14. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \sqrt{2x + 2}$, $x_0 = 1$.

15. Найдите абсциссы x_0 точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему образует угол φ с положительным направлением оси Ox:

1) $f(x) = \sin 2x$, $\varphi = 0°$; 2) $f(x) = x^3 - 11x$, $\varphi = 45°$;

3) $f(x) = \sin^2 x$, $\varphi = 135°$.

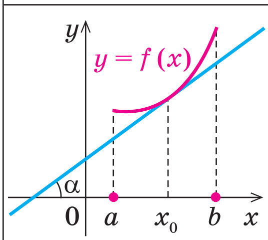
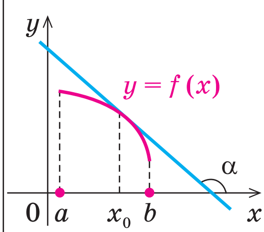
16*. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 3x + 5$, которая параллельна прямой $y = -3x + 7$.

17*. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^4 + x - 2$, которая параллельна прямой $y = 5x + 1$.

§ 5 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

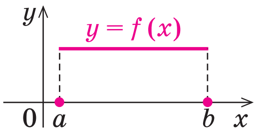
5.1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К НАХОЖДЕНИЮ ПРОМЕЖУТКОВ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ И ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ

Таблица 5

1. Монотонность и постоянство функции	
Достаточное условие возрастания	Достаточное условие убывания
 $0° < \alpha < 90°$ $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$	 $90° < \alpha < 180°$ $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$
Если в каждой точке интервала $(a; b)$ **$f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает** на этом интервале.	Если в каждой точке интервала $(a; b)$ **$f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает** на этом интервале.

Продолжение табл. 5

Необходимое и достаточное условие постоянства функции



Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала.

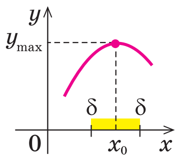
2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

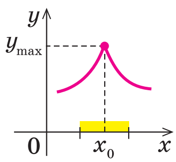
Точки максимума

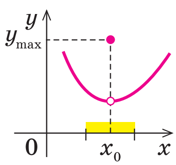
Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой максимума*** этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

$x_{max} = x_0$ — *точка максимума*





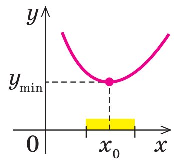


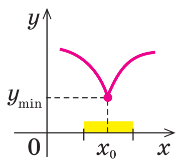
Точки минимума

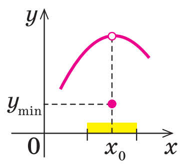
Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***точкой минимума*** этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

$x_{min} = x_0$ — *точка минимума*







Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*.
Значения функции в точках максимума и минимума называют экстремумами (максимумом и минимумом) функции.

$y_{max} = f(x_{max}) = f(x_0)$ — *максимум*

$y_{min} = f(x_{min}) = f(x_0)$ — *минимум*

3. Критические точки

Определение	Пример
Критическими точками **функции называют внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю* или не существует.**	$f(x) = x^3 - 12x$ $(D(f) = \mathbf{R})$. $f'(x) = 3x^2 - 12$ — существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ — критические точки.

* Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю, называют еще стационарными точками.

Продолжение табл. 5

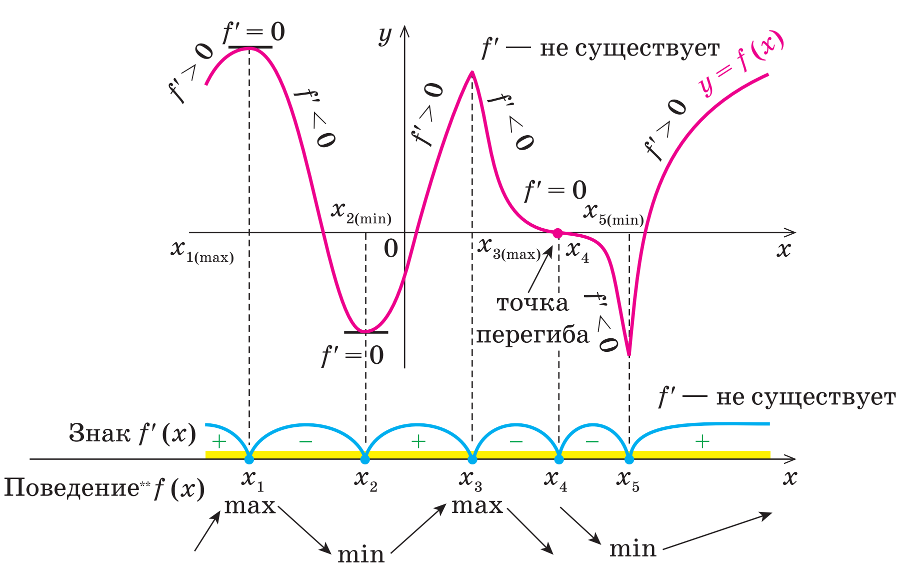
<table>
<tr><th colspan="2">4. Необходимое и достаточное условия экстремума</th></tr>
<tr><th>Необходимое условие экстремума</th><th>Достаточное условие экстремума</th></tr>
<tr><td>В точках экстремума производная функции $f\,(x)$ равна нулю или не существует.

x_0 — точка экстремума функции $f\,(x)$
$\Downarrow$
$f'\,(x_0) = 0$
или
$f'\,(x_0)$ — не существует

(но не в каждой точке x_0, где $f'\,(x_0) = 0$ или $f'\,(x_0)$ не существует, будет экстремум)</td><td>Если функция $f\,(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'\,(x)$ меняет знак при переходе* через точку x_0, то x_0 — точка экстремума функции $f\,(x)$

В точке x_0 знак $f'\,(x)$ меняется с «+» на «−» $\Longrightarrow$ x_0 — точка максимума

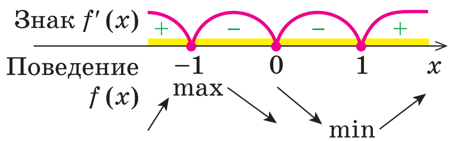
В точке x_0 знак $f'\,(x)$ меняется с «−» на «+» $\Longrightarrow$ x_0 — точка минимума</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Пример графика функции $y = f\,(x)$,
имеющей экстремумы (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критические точки)</td></tr>
</table>



* Имеется в виду переход через точку x_0 при движении слева направо.

** Знаком «↗» обозначено возрастание функции, а знаком «↘» — ее убывание на соответствующем промежутке.

Окончание табл. 5

6. Исследование функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы	
Схема	Пример: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Найти область определения функции.	Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) =$ $= 15x^2(x - 1)(x + 1)$.
3. Найти критические точки, то есть *внутренние точки области определения, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует.*	$f'(x)$ существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.
4. Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.	
5. Определить относительно каждой критической точки, является ли она точкой максимума либо минимума или не является точкой экстремума.	
6. Записать результат исследования (*промежутки монотонности и экстремумы*).	$f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$*; $f(x)$ убывает на $[-1; 1]$. Точки экстремума: $x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$. Экстремумы: $y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$.

Объяснение и обоснование

1. Монотонность и постоянство функции. Критические точки функции. Производная является важным инструментом исследования функции. В частности, с помощью производной удобно исследовать функцию на монотонность, то есть на возрастание и убывание.

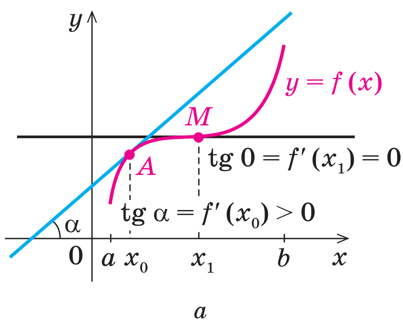
---

* Как отмечается на с. 54, поскольку функция $f(x)$ непрерывна (например, вследствие того что она дифференцируема на всей области определения), то точки -1 и 1 можно включить в промежутки возрастания и убывания функции.

Напомним, что *функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции*, то есть для любых x_1 и x_2 из этого множества из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции, то есть для любых x_1 и x_2 из этого множества из условия $x_2 > x_1$ вытекает, что $f(x_2) < f(x_1)$.

Как видно из рис. 5.1, *а*, в каждой точке графика возрастающей функции касательная образует с положительным направлением оси Ox или острый угол α (тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$), или угол, равный нулю (тогда $f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$). А в каждой точке графика убывающей функции (рис. 5.1, *б*) касательная образует с положительным направлением оси Ox или тупой угол α (тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$), или угол, равный нулю (тогда $f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$).



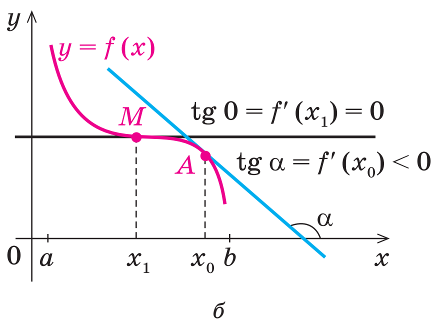


Рис. 5.1

Следовательно, *если на каком-нибудь интервале функция $f(x)$ дифференцируема и возрастает, то $f'(x) \geqslant 0$ на этом интервале; если на каком-нибудь интервале функция $f(x)$ дифференцируема и убывает, то $f'(x) \leqslant 0$ на этом интервале*.

Но для решения задач на исследование свойств функций важными являются обратные утверждения, которые позволяют по знаку производной выяснить характер монотонности функции.

Для обоснования соответствующих утверждений воспользуемся так называемой формулой Лагранжа, строгое доказательство которой приводится в курсе математического анализа. Здесь мы ограничимся только ее геометрической иллюстрацией и формулировкой.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$. Тогда на этом интервале найдется такая точка c, в которой касательная l к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой c будет параллельна секущей AB, проходящей через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ (рис. 5.2).

Действительно, рассмотрим все возможные прямые, параллельные секущей AB и имеющие с графиком функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ хотя бы одну общую точку. Прямая, которая находится на наибольшем расстоянии от секущей AB, и будет касательной к графику функции $f(x)$ (это предельное положение секущей, параллельной AB). Если обозначить абсциссу точки касания через c, то, учитывая геометрический смысл производной, получаем $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между прямой l и положительным направлением оси Ox. Но $l \parallel AB$, поэтому угол α равен углу наклона секущей AB к оси Ox, который, в свою очередь, равен углу A прямоугольного треугольника ABD с катетами $AD = b - a$ и $BD = f(b) - f(a)$.

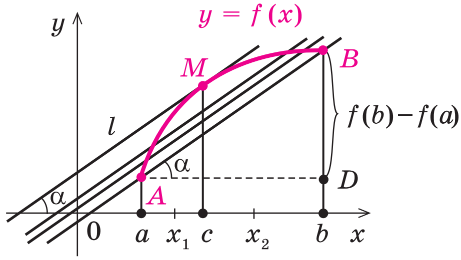


Рис. 5.2

Тогда $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким образом, можно сделать вывод:

если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$, то на интервале $(a; b)$ найдется такая точка $c \in (a; b)$, в которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа*.

Применим ее для обоснования достаточных условий возрастания и убывания функции.

1. ***Если $f(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.***
2. ***Если $f(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.***

● Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из заданного интервала. По формуле Лагранжа существует число $c \in (x_1; x_2)$, такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \qquad (1)$$

Число c принадлежит заданному интервалу, поскольку ему принадлежат числа x_1 и x_2. Пусть $x_2 > x_1$, тогда $x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке заданного интервала, то $f'(c) > 0$, и из равенства (1) получаем, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$. Из этого следует, что функция $f(x)$ возрастает на заданном интервале.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке заданного интервала, то $f'(c) < 0$, и из равенства (1) получаем, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ убывает на заданном интервале. ○

Задача 1 Функция $f(x) = x^3 + x$ определена на всем множестве действительных чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) и имеет производную $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ при всех значениях x. Следовательно, эта функция возрастает на всей области определения.

Задача 2 Функция $g(x) = \sin x - 3x$ определена на всем множестве действительных чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) и имеет производную $g'(x) = \cos x - 3$. Поскольку $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $\cos x - 3 < 0$ при всех значениях x. Следовательно, эта функция убывает на всей области определения.

Рассматривая степенную функцию в курсе 10 класса, мы без доказательства приняли, что при $x > 0$ функция $y = x^\alpha$, где α — дробное число, возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$. Обоснуем это. Действительно, $y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$. Тогда при $x > 0$ и $\alpha > 0$ значение $y' > 0$, следовательно, функция $y = x^\alpha$ возрастает, а при $x > 0$ и $\alpha < 0$ значение $y' < 0$, следовательно, функция $y = x^\alpha$ убывает.

Достаточные условия возрастания и убывания функции имеют наглядную физическую иллюстрацию. Пусть по оси ординат движется точка, которая в момент времени t имеет ординату $y = f(t)$. Учитывая физический смысл производной, получаем, что скорость этой точки в момент времени t равна $f'(t)$. Если $f'(t) > 0$, то точка движется в положительном направлении оси ординат и с увеличением времени ордината точки увеличивается, то есть функция возрастает. Если же $f'(t) < 0$, то точка движется в отрицательном направлении оси ординат и с увеличением времени ее ордината уменьшается, то есть функция убывает.

Отметим, что в случае, когда $f'(t) = 0$, скорость точки равна нулю, то есть точка не движется, поэтому ее ордината остается постоянной. Получаем *условие постоянства функции*.

Функция $f(x)$ является постоянной на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала.

● Действительно, если $f(x) = k$ (где k — постоянная), то $f'(x) = 0$.
Наоборот, если $f'(x) = 0$ во всех точках интервала $(a; b)$, то зафиксируем некоторое число x_0 из этого интервала и найдем значение функции в точке x_0 (пусть $f(x_0) = k$). Для любого числа x из заданного интервала по формуле Лагранжа можно найти такое число c, которое содержится между x и x_0, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Тогда $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$.
Поскольку $c \in (a; b)$, то по условию $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) - f(x_0) = 0$. Таким образом, для всех x из заданного интервала $f(x) = f(x_0) = k$, то есть функция $f(x)$ является постоянной. ○

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции необходимо решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$. Поскольку $f'(x)$ является функцией переменной x, то для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов, точнее, его обобщение, которое основывается на утверждении, называемом в курсе математического анализа теоремой Дарбу*:

точки, в которых производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак.

Внутренние ** **точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками* этой функции.**

Согласно плану решения неравенств методом интервалов (с. 7), промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$ можно находить по схеме:

1. *Найти область определения функции $f(x)$.*
2. *Найти производную $f'(x)$.*
3. *Выяснить, в каких внутренних точках области определения функции производная $f'(x)$ равна нулю или не существует* (то есть найти критические точки этой функции).
4. *Отметить найденные точки на области определения функции $f(x)$ и найти знак $f'(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения функции* (знак можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в любой точке промежутка).

Задача 3 Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Решение

1. Область определения данной функции — все действительные числа: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Производная $f'(x) = 3x^2 - 3$.
3. Производная существует на всей области определения функции; $f'(x) = 0$, если $3x^2 - 3 = 0$, то есть при $x = 1$ или $x = -1$.

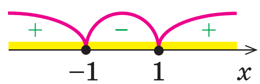


Рис. 5.3

4. Решаем неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$ методом интервалов. Для этого отмечаем точки 1 и (−1) на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 5.3).

Учитывая достаточные условия возрастания и убывания функции, получаем, что на тех интервалах, где производная положительна, функция $f(x)$ возрастает, а на тех интервалах, где производная отрицательна, —

---

* Жан Гастон Дарбу (1842–1917) — французский математик, внесший значительный вклад в развитие дифференциальной геометрии, интегрального исчисления и механики.

** Внутренней точкой множества называется точка, которая принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

убывает. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 1)$. ◁

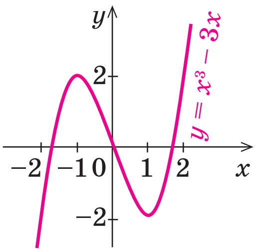


Рис. 5.4

График функции $y = x^3 - 3x$ изображен на рис. 5.4. При построении графика учтено, что $f(-1) = 2$ и $f(1) = -2$. Из графика видно, что функция $f(x) = x^3 - 3x$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, и убывает не только на интервале $(-1; 1)$, но и на отрезке $[-1; 1]$.

Всегда, *когда функция $f(x)$ непрерывна в любом из концов промежутка возрастания (убывания), его можно присоединить к этому промежутку* (как точки -1 и 1 в предыдущей задаче). Примем это утверждение без доказательства.

2. Экстремумы (максимумы и минимумы) функции. Рассмотрим окрестность точки $x = -1$ на графике функции $y = x^3 - 3x$, то есть произвольный интервал, содержащий точку -1 (например, δ-окрестность этой точки). Как видно из рис. 5.4, существует такая окрестность точки $x = -1$, что наибольшее значение для точек из этой окрестности функция $f(x) = x^3 - 3x$ принимает в точке $x = -1$. Например, на интервале $(-2; 0)$ наибольшее значение, равное 2, функция принимает в точке $x = -1$. Точку $x = -1$ называют *точкой максимума* этой функции и обозначают $x_{\max}$, а значение функции в этой точке $f(-1) = 2$ называют *максимумом* функции (от латинского слова *maximum* — максимум, что означает «наибольшее»).

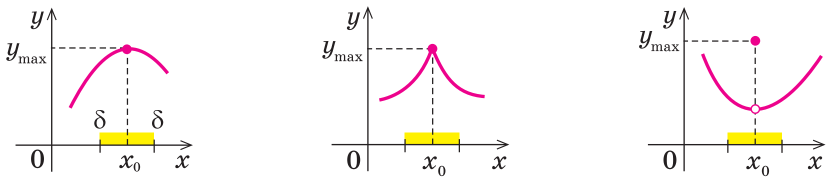
Аналогично точку $x = 1$ называют *точкой минимума* функции $f(x) = x^3 - 3x$, поскольку значение функции в этой точке меньше, чем ее значение в любой точке некоторой окрестности точки 1, например окрестности $(0{,}5; 1{,}5)$. Обозначают точку минимума $x_{\min}$, а значение функции в этой точке $f(1) = -2$ называют *минимумом* функции (*minimum* — минимум, в переводе с латинского «наименьшее»).

Точки максимума и минимума функции еще называют точками экстремума, а значения функции в этих точках — *экстремумами* функции (от латинского слова *extremum* — экстремум, что означает «крайний»).

Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют *точкой максимума* этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют *точкой минимума* этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

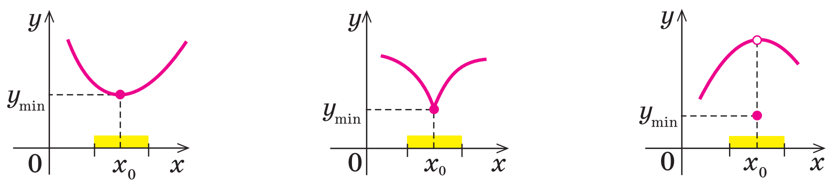
По определению значение функции $f(x)$ в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 чаще всего имеет вид гладкого «холма» (рис. 5.5, *а*), но может иметь и вид заостренного «пика» (рис. 5.5, *б*). В точке максимума также может быть изолированная точка графика (понятно, что в этом случае функция не будет непрерывной в точке x_0), в которой достигается наибольшее значение функции для некоторой окрестности точки x_0 (рис. 5.5, *в*).



а *б* *в*

Рис. 5.5

Аналогично значение функции $f(x)$ в точке минимума x_0 является наименьшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 обычно имеет вид «впадины» — гладкой (рис. 5.6, *а*) или заостренной (рис. 5.6, *б*). В точке минимума также может быть изолированная точка графика, в которой достигается наименьшее значение функции для некоторой окрестности точки x_0 (рис. 5.6, *в*).



а *б* *в*

Рис. 5.6

З а м е ч а н и е. По определению точки экстремума — это такие точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение по сравнению со значениями этой функции в точках некоторой окрестности экстремальной точки. Такой экстремум обычно называют *локальным* (от латинского *lokalis* — «местный»). Например, на рис. 5.4 изображен график функции $y = x^3 - 3x$, которая имеет локальный максимум в точке $x_{max} = -1$ ($y_{max} = 2$) и локальный минимум в точке $x_{min} = 1$ ($y_{min} = -2$), но, как видно из графика, на всей области определения эта функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

3. Необходимое и достаточное условия экстремума. При исследовании функции и построении ее графика важное значение имеет нахождение точек экстремумов функции. Покажем, что *точками экстремума могут быть только критические точки функции*, то есть внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). ***Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.***

Докажем это утверждение методом от противного. Пусть x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$. Допустим, что $f'(x_0) \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда $f'(x_0) > 0$. По определению производной при $x \to x_0$ (то есть при $\Delta x \to 0$) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$, следовательно, и само будет положительным при всех x, достаточно близких к x_0. Для таких x

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Тогда при $x > x_0$ получаем, что $f(x) > f(x_0)$, и, значит, точка x_0 не может быть точкой максимума.

При $x < x_0$ получаем, что $f(x) < f(x_0)$, следовательно, точка x_0 не может быть точкой минимума, то есть x_0 не может быть точкой экстремума, что противоречит условию.

Аналогично рассматривается и случай, когда $f'(x_0) < 0$.

Отметим, что теорема Ферма дает только необходимое условие экстремума: из того, что $f'(x_0) = 0$, не обязательно следует, что в точке x_0 функция имеет экстремум. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ и $f'(0) = 0$. Но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, поскольку функция x^3 возрастает на всей числовой прямой (рис. 5.7).

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (где x_0 — точка экстремума функции) параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней), поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 5.8).

В точке с абсциссой $x_0 = 0$ к графику функции $y = x^3$ также можно провести касательную: поскольку $f'(0) = 0$, то этой касательной является ось Ox. Но графики функций (рис. 5.7, 5.8) по-разному расположены относительно касательных. На рис. 5.8, где x_0 и x_1 — точки экстремума, можно указать окрестности этих точек, для которых соответствующие точки графика располагаются по одну сторону от касательной, а на рис. 5.7 *график функции $y = x^3$ при переходе аргумента через точку*

$x_0 = 0$ (в которой производная равна нулю, но которая не является точкой экстремума) *переходит с одной стороны касательной на другую*. В этом случае точку x_0 называют *точкой перегиба** *функции*.

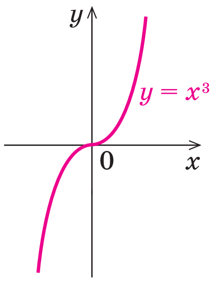


Рис. 5.7

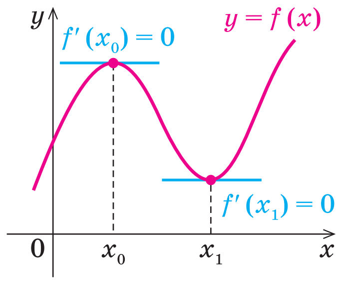


Рис. 5.8

Функция может иметь экстремум и в той критической точке, в которой не существует производная данной функции. Например, как было показано на с. 26, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, но, как следует из ее определения и как видно из графика (рис. 5.9), именно в этой точке функция имеет минимум.

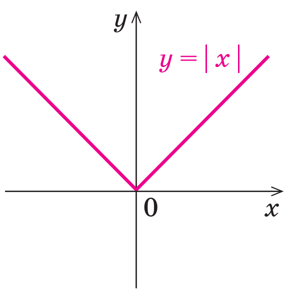


Рис. 5.9

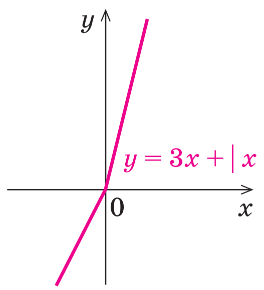


Рис. 5.10

Отметим, что не каждая критическая точка, в которой не существует производная данной функции, будет точкой экстремума этой функции. Например, функция $f(x) = 3x + |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$: график имеет излом при $x = 0$ (рис. 5.10). Действительно, если допустить, что функция $f(x) = 3x + |x|$ имеет производную в точке 0, то функция $f(x) - 3x$ также должна иметь производную в точке 0. Так как $f(x) - 3x = |x|$, а функция $|x|$ не имеет производной в точке 0, значит, функция $f(x) - 3x$ не имеет производной в точке 0, то есть мы пришли

---

* Более детально о точках перегиба см. на с. 133. Отметим, что в точке перегиба производная не обязательно должна быть равна нулю.

к противоречию. Следовательно, функция $f(x)$ в точке 0 производной не имеет. Но, как видно из рис. 5.10, функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой и экстремума не имеет.

Приведенные соображения и примеры показывают, что для нахождения точек экстремума функции необходимо прежде всего найти ее критические точки. Для выяснения того, является ли соответствующая критическая точка точкой экстремума, необходимо провести дополнительное исследование. Этому часто помогают достаточные условия существования экстремума в точке.

Теорема 1 (признак максимума функции). ***Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через точку x_0 ее производная меняет знак с плюса на минус (то есть в некоторой δ-окрестности точки x_0 при $x < x_0$ значение $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ значение $f'(x) < 0$), то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.***

● Рассмотрим заданную δ-окрестность точки x_0, то есть интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. По условию производная $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta;\ x_0)$ (при $x < x_0$). Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, а учитывая непрерывность $f(x)$ в точке x_0, функция $f(x)$ возрастает и на промежутке $(x_0 - \delta;\ x_0]$. Тогда для всех x из интервала $(x_0 - \delta;\ x_0)$ имеем $x < x_0$, следовательно, $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично по условию производная $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;\ x_0 + \delta)$ (при $x > x_0$). Таким образом, функция $f(x)$ убывает на этом интервале, а с учетом непрерывности $f(x)$ в точке x_0 функция $f(x)$ убывает и на промежутке $[x_0;\ x_0 + \delta)$. Тогда для всех x из интервала $(x_0;\ x_0 + \delta)$ имеем $x > x_0$, следовательно, $f(x) < f(x_0)$.

Итак, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из некоторой δ-окрестности точки x_0, а значит, точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$. ○

Теорема 2 (признак минимума функции). ***Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через точку x_0 ее производная меняет знак с минуса на плюс (то есть в некоторой δ-окрестности точки x_0 при $x < x_0$ значение $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ значение $f'(x) > 0$), то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.***

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 (предлагаем провести его самостоятельно).

Теоремы 1 и 2 дают возможность сделать такой вывод: *если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка экстремума функции $f(x)$.*

Если же функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и ее производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 не может быть точкой экстремума функции.

Действительно, если, например, $f'(x) > 0$ на интервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$ и $(x_0;\ x_0 + \delta)$, то функция возрастает на каждом из этих интервалов. Учитывая ее непрерывность в точке x_0 (см. доказательство теоремы 1), получаем, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ выполняется неравенство $f(x) << f(x_0)$ и для всех $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$. Это означает, что на всем промежутке $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ возрастает и точка x_0 не является точкой экстремума. Аналогично рассматривается случай, когда на этих же интервалах $f'(x) < 0$. ○

З а м е ч а н и е. Приведенное обоснование позволяет уточнить условия возрастания и убывания функции.

Если $f'(x) \geqslant 0$ *в каждой точке интервала* $(a;\ b)$, *причем уравнение* $f'(x) = 0$ *имеет только конечное (или счетное*[*]*) множество корней, то функция* $f(x)$ *возрастает на этом интервале.*

Если $f'(x) \leqslant 0$ *в каждой точке интервала* $(a;\ b)$, *причем уравнение* $f'(x) = 0$ *имеет только конечное (или счетное) множество корней, то функция* $f(x)$ *убывает на этом интервале.*

Для практического *исследования функции на экстремумы* можно использовать уточненный вариант схемы, приведенной на с. 53:

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти производную* $f'(x)$.
3. *Найти критические точки* (то есть *внутренние точки области определения, в которых* $f'(x)$ *равна нулю или не существует*).
4. *Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.*
5. *Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума.*

Пример применения этой схемы к исследованию функции на экстремум приведен в табл. 5 (с. 49) и в задаче 2 на с. 61.

Примеры решения задач

Задача 1 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7;\ 8)$. На рис. 5.11 изображен график ее производной.

1) Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

2) Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, какие — точками минимума, а какие не являются точками экстремума.

---

[*] Счетность множества означает, что мы можем установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, то есть можем указать, как занумеровать все элементы множества.

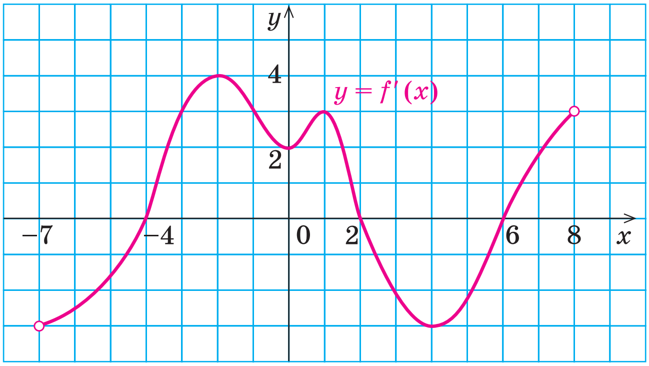


Рис. 5.11

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Из графика имеем, что $f'(x) > 0$ на промежутках $(-4;\ 2)$ и $(6;\ 8)$, следовательно, $f(x)$ возрастает на этих промежутках. Аналогично $f'(x) < 0$ на промежутках $(-7;\ -4)$ и $(2;\ 6)$, а значит, $f(x)$ убывает на этих промежутках. Поскольку в точках −4, 2 и 6 существует производная $f'(x)$, то функция $f(x)$ непрерывна в этих точках и их можно включить в промежутки возрастания и убывания. *Ответ:* $f(x)$ возрастает на промежутках $[-4;\ 2]$ и $[6;\ 8)$ и убывает на промежутках $(-7;\ -4]$ и $[2;\ 6]$. ◁	1) Как известно, *на тех промежутках, где производная функции положительная, функция возрастает, а на тех промежутках, где производная отрицательная, — убывает*. Поэтому по графику выясняем промежутки, в которых производная положительна и в которых — отрицательна. Это и будут промежутки возрастания и убывания функции.
2) ▶ Производная $f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ и равна нулю в точках −4, 2 и 6. Это внутренние точки области определения, следовательно, критическими точками будут только точки −4, 2 и 6. Поскольку производная существует на всей области определения, то функция непрерывна в каждой точке области определения.	2) *Критические точки — это внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует*. Из графика видно, что производная $f'(x)$ существует на всей заданной области определения. Следовательно, критическими точками будут только те значения x, при которых производная равна нулю. Для определения того, является ли критическая точка точкой экстремума, используем достаточные условия экстремума: *если в критической точке функция непрерывна*

В точках −4 и 6 производная меняет знак с «−» на «+», следовательно, это точки минимума. В точке 2 производная меняет знак с «+» на «−», следовательно, это точка максимума.

Ответ: $x_{1\,\min} = -4$, $x_{2\,\min} = 6$,
$x_{\max} = 2$. ◁

и ее производная меняет знак с «+» на «−», то это точка максимума, а если с «−» на «+» — точка минимума.

Задача 2 Для функции $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$ найдите промежутки монотонности, точки экстремума и значения функции в точках экстремума.

Решение

▶ 1. Область определения, $D(f)$: $x \neq 0$, то есть $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. $f'(x) = x' + 25\left(\dfrac{1}{x}\right)' = 1 - \dfrac{25}{x^2}$.

3. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$.
$f'(x) = 0$. Тогда $1 - \dfrac{25}{x^2} = 0$, следовательно, $x^2 = 25$, то есть $x = 5$ и $x = -5$ — критические точки.

4. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 5.12).

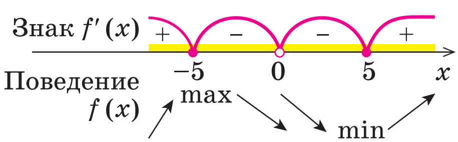


Рис. 5.12

Получаем, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;\ -5]$ и $[5;\ +\infty)$ и убывает на промежутках $[-5;\ 0)$ и $(0;\ 5]$. В точке −5 производная меняет знак с «+» *на* «−»,

Комментарий

Исследовать функцию на монотонность и экстремум можно по схеме:

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти производную* $f'(x)$.
3. *Найти критические точки* (то есть *внутренние точки области определения, в которых* $f'(x)$ *равна нулю или не существует*).
4. *Отметить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.*
5. *Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума.*

Функция непрерывна (и дифференцируема) в каждой точке области определения, поэтому, записывая промежутки возрастания и убывания функции, критические точки можно включить в эти промежутки. Для выяснения того, является ли критическая точка точкой следовательно, это точка максимума; в точке 5 производная меняет знак с «–» *на* «+», то есть это точка минимума, а значит,

$x_{\max} = -5$, $x_{\min} = 5$.

Тогда $y_{\max} = f(-5) = -10$,

$y_{\min} = f(5) = 10$. ◁

экстремума, используем достаточные условия экстремума.

З а м е ч а н и е. Результаты исследования функции на монотонность и экстремумы удобно фиксировать не только в виде схемы, изображенной на рис. 5.12, но и в виде специальной таблицы:

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$\searrow$	10	$\nearrow$
		max			min	

Задача 3* Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

1) $f(x) = x^3 - 12|x + 1|$; 2) $\varphi(x) = 4\cos x - \cos 2x$.

К о м м е н т а р и й

Для исследования заданных функций используем схему, приведенную на с. 59.

В задании 1, используя определение модуля, отдельно найдем производную при $x < -1$ и при $x > -1$. Чтобы выяснить, существует ли производная $f'(x)$ при $x = -1$, попытаемся найти значения $f'(-1)$ по формулам (1) и (2), приведенным далее в решении, и сравнить их*. Чтобы найти точки, в которых $f'(x) = 0$, приравняем к нулю значения производной $f'(x)$ при $x < -1$ и при $x > -1$ и учтем соответствующие ограничения для x.

В задании 2 учтем, что $\varphi'(x) = 0$ — это тригонометрическое уравнение, имеющее бесконечное множество корней, то есть функция $\varphi(x)$ имеет бесконечное количество критических точек, поэтому отметить их все на области определения функции (как это предлагается в схеме исследования функции) мы не в состоянии. В таком случае можно попытаться непосредственно использовать достаточные признаки возрастания и убывания функции (то есть решить неравенства $\varphi'(x) > 0$ и $\varphi'(x) < 0$) или в случае, когда функция $\varphi'(x)$ является периодической, провести исследование поведения $\varphi'(x)$ на одном периоде, а затем результат по-

---

* Фактически мы будем сравнивать значения так называемых односторонних производных функции $f(x)$ в точке (–1). Эти производные определяются аналогично односторонним пределам функции (см. с. 102).

вторить через период. В случае, когда $\varphi'(x)$ определена на всем периоде и мы знаем промежутки, где выполняется неравенство $\varphi'(x) > 0$, и точки, где выполняется равенство $\varphi'(x) = 0$, для всех остальных точек периода обязательно будет выполняться неравенство $\varphi'(x) < 0$.

Решение

1) ▶ Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$. Запишем заданную функцию так:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-12x-12 & \text{при } x \geqslant -1, \\ x^3+12x+12 & \text{при } x<-1. \end{cases}$$

Тогда
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-12 & \text{при } x>-1, \quad (1) \\ 3x^2+12 & \text{при } x<-1. \quad (2) \end{cases}$$

Производная $f'(x)$ не существует в точке $x = -1$, поскольку значения $f'(-1)$, вычисленные по формулам (1) и (2), разные ($-9 \neq 15$), следовательно, $x = -1$ — критическая точка функции $f(x)$. Значение $f'(x)$, вычисленное по формуле (2), не может равняться нулю ($3x^2 + 12 \neq 0$). Для формулы (1) имеем $3x^2 - 12 = 0$, то есть $x = 2$ и $x = -2$, но, учитывая условие $x > -1$, получаем, что только $x = 2$ является критической точкой. Это означает, что функция $f(x)$ имеет две критические точки: 2 и (-1).

Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ на каждом из промежутков (рис. 5.13). Получаем, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1; 2]$.

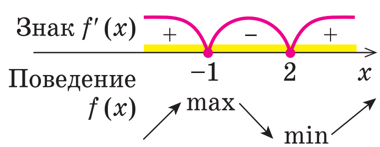


Рис. 5.13

В точке (-1) производная меняет знак с «+» *на* «–», следовательно, это точка максимума. В точке 2 производная меняет знак с «–» на «+», а значит, это точка минимума. Тогда $x_{max} = -1$, $y_{max} = f(-1) = -1$, $x_{min} = 2$, $y_{min} = f(2) = -28$. ◁

2) ▶ Область определения: $D(\varphi) = \mathbf{R}$. Производная $\varphi'(x) = (4\cos x - \cos 2x)' =$
$= -4\sin x + 2\sin 2x = -4\sin x + 4\sin x\cos x = 4\sin x(\cos x - 1)$.

Критические точки: поскольку производная $\varphi'(x)$ существует на всей области определения функции $\varphi(x)$, критическими точками будут все значения x, для которых $\varphi'(x) = 0$.

$4\sin x(\cos x - 1) = 0$. Тогда $\sin x = 0$ или $\cos x = 1$. Следовательно, $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. (Значение $2\pi k$ дает и формула πn при $n = 2k$, поэтому все критические точки можно задать формулой πn, $n \in \mathbf{Z}$.)

Функция $\varphi(x)$ возрастает в тех точках ее области определения, где $\varphi'(x) > 0$.

Имеем: $4\sin x(\cos x - 1) > 0$, тогда $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < 1. \end{cases}$

Первая система не имеет решений ($\cos x$ не может быть больше 1), а вторая система имеет решение (рис. 5.14): $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

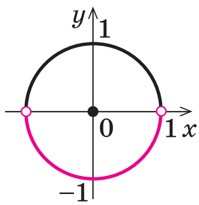


Рис. 5.14

Производная $\varphi'(x) = 4 \sin x (\cos x - 1)$ является периодической функцией (относительно переменной x) с периодом 2π (это общий период для функций $\sin x$ и $\cos x$). На периоде $[0; 2\pi]$ неравенство $\varphi'(x) > 0$ выполняется на промежутке $(\pi; 2\pi)$, а равенство $\varphi'(x) = 0$ в точках πn, то есть в точках 0, π и 2π. Тогда неравенство $\varphi'(x) < 0$ выполняется на промежутке $(0; \pi)$, а учитывая период, и на всех промежутках $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Принимая во внимание условия возрастания и убывания функции и то, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на всей числовой прямой (она дифференцируема во всех точках), получаем, что функция $\varphi(x)$ возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и убывает на каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

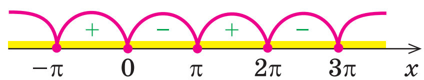


Рис. 5.15

Поскольку производная $\varphi'(x)$ является периодической функцией с периодом 2π, то через промежуток длиной 2π знаки производной $\varphi'(x)$ повторяются (рис. 5.15). В точке 0 производная $\varphi'(x)$ меняет знак с «+» *на* «–», следовательно, $x = 0$ — точка максимума, а учитывая, что поведение $\varphi'(x)$ повторяется через 2π, имеем $x_{\max} = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $y_{\max} = \varphi(2\pi k) = 4 \cos(2\pi k) - \cos(4\pi k) = 3$.

В точке π производная $\varphi'(x)$ меняет знак с «–» *на* «+», следовательно, $x = \pi$ — точка минимума, а учитывая, что поведение $\varphi'(x)$ повторяется через 2π, имеем $x_{\min} = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $y_{\min} = \varphi(\pi + 2\pi k) = 4 \cos(\pi + 2\pi k) - \cos(2\pi + 4\pi k) = -5$. ◁

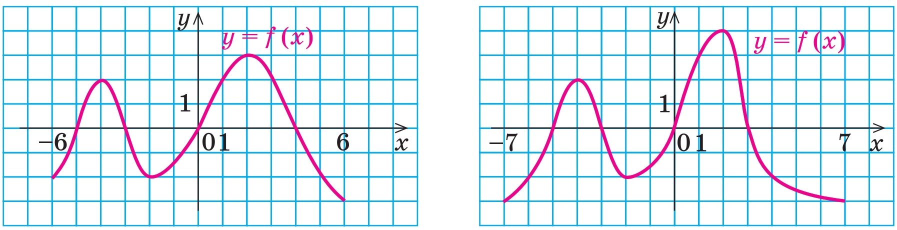
Вопросы для контроля

1. Дайте определение возрастающей и убывающей на множестве функции. Приведите примеры таких функций и их графиков.
2. а) Сформулируйте достаточные условия возрастания и убывания функции. Приведите примеры их применения.
   б*) Обоснуйте достаточные условия возрастания и убывания функции.
3*. Сформулируйте и обоснуйте условие постоянства функции на интервале.
4. Изобразите график функции, имеющей экстремумы. Дайте определение точек экстремума функции и ее экстремумов.
5. Какие точки называются критическими?
6. а) Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
   б*) Обоснуйте необходимое условие экстремума функции.

7. а) Сформулируйте достаточное условие существования экстремума в точке.
   б*) Обоснуйте достаточное условие существования экстремума в точке.
8. По какой схеме можно исследовать функцию на монотонность и экстремум? Приведите пример такого исследования.

Упражнения

1°. На рис. 5.16 изображен график функции $y = f(x)$ (на рис. 5.16, *а* функция задана на промежутке $[-6; 6]$, а на рис. 5.16, *б* — на промежутке $[-7; 7]$). Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.



а *б*

Рис. 5.16

2°. Известно, что производная функции $y = f(x)$, заданной на множестве всех действительных чисел, имеет знаки, как на рис. 5.17. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

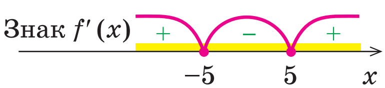


Рис. 5.17

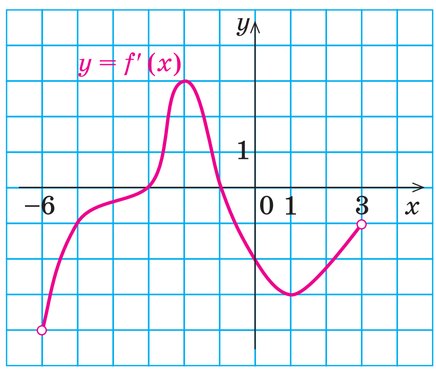


Рис. 5.18

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рис. 5.18 изображен график ее производной. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

4. Докажите, что заданная функция возрастает на всей области определения:

1°) $f(x) = x^3 + 5x$; 2) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 7$;

3) $f(x) = 2x + \cos x$; 4) $f(x) = \sin x + 3x + 2$.

5. Докажите, что заданная функция убывает на всей области определения:

1°) $y = -x^3 - 3x$; 2) $f(x) = -x^7 + x^4 - x + 2$;

3) $f(x) = \cos x - 6x$; 4) $f(x) = \sin x - 2x + 1$.

Найдите промежутки возрастания и убывания функции **(6, 7)**.

6. 1°) $f(x) = x^2 - 2x$; 2) $f(x) = x^3 - 24x + 2$; 3) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; 5) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$; 6*) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$.

7. 1) $y = x^3 - 27x + 1$; 2) $y = x - x^5$;

3*) $y = x + 2\cos x$; 4*) $y = x - \sin 2x$.

8*. Найдите все значения параметра a, при которых функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $f(x) = x^3 - 3ax$; 2) $f(x) = ax + \cos x$; 3) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax - 5$.

9*. Докажите, что уравнение имеет единственный корень, и найдите этот корень:

1) $2x^3 + 3x - 5 = 0$; 2) $x^3 - x^2 + x = 6$;

3) $5x - \cos 3x - 5\pi = 1$; 4) $x^3 - x^5 - x = 1$.

10°. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рис. 5.16, найдите точки максимума и минимума функции $f(x)$. Существует ли производная в каждой из этих точек? Если существует, то каково ее значение?

11°. Известно, что производная некоторой функции $y = f(x)$, заданной на множестве всех действительных чисел, имеет такие знаки, как на рис. 5.17, и $f'(-5) = f'(5) = 0$. Укажите критические точки функции, а также ее точку максимума и точку минимума.

12°. Пользуясь данными о производной $f'(x)$, приведенными в таблице

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	+

(если $D(f) = \boldsymbol{R}$), укажите:

1) промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$;

2) точки максимума и точки минимума функции $f(x)$.

13. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рис. 5.18 изображен график ее производной. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них — точки максимума, какие — точки минимума, а какие не являются точками экстремума.

Исследуйте заданную функцию на экстремумы **(14, 15)**.

14°. 1) $f(x) = 1 + 12x - x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^3$; 4) $f(x) = 5x - x^5$.

15. 1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=x-\sqrt{x}$; 3) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Определите промежутки монотонности, точки экстремума функции и значения функции в точках экстремума **(16, 17)**.

16. 1°) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2°) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

3) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

17*. 1) $y=\dfrac{x}{x+4}$; 2) $y = x^2 - |x| - 1$;

3) $y = 6x^3 - 2|x - 1|$; 4) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

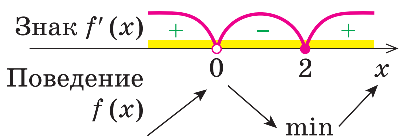
5.2. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЕЕ ГРАФИКА

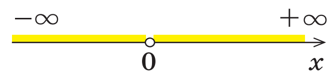
Таблица 6

Схема исследования функции	Пример
1. Найти область определения функции.	Постройте график функции $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$. ▶ 1. Область определения: $x \neq 0$ $(D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty))$.
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной (или периодической*).	2. Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это возможно).	3. График не пересекает ось Oy $(x \neq 0)$. На оси Ox $y = 0$: $x+\dfrac{4}{x^2}=0$, $x^3 = -4$, $x=-\sqrt[3]{4}$ $(\approx -1{,}6)$ — абсцисса точки пересечения графика с осью Ox.
4. Найти производную и критические точки функции.	4. $f'(x)=x'+\left(\dfrac{4}{x^2}\right)'=1-\dfrac{8}{x^3}$. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (значит, функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения). $f'(x) = 0$; $1-\dfrac{8}{x^3}=0$. При $x \neq 0$ имеем: $x^3 = 8$, $x = 2$ — критическая точка.

* Периодичность чаще всего устанавливают для тригонометрических функций.

Продолжение табл. 6

<table>
<tr>
<td>5. Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума (и значение функции в этих точках).</td>
<td>5. Отметим критические точки на области определения, определим знак производной и характер поведения функции на каждом из промежутков, на которые разбивается область определения.


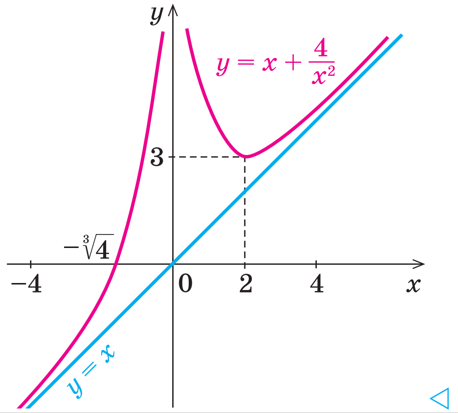
Итак, функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $[2;\ +\infty)$ и убывает на промежутке $(0;\ 2]$. Поскольку в критической точке 2 производная меняет знак с «–» на «+», то $x = 2$ — точка минимума: $x_{\min} = 2$. Тогда $y_{\min} = f(2) = 3$.</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Исследовать поведение функции на концах промежутков области определения (этот этап не входит в минимальную схему исследования функции).</td>
<td>6.


При $x \to 0$ справа (и при $x \to 0$ слева)
$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty$.*
При $x \to -\infty$ (и при $x \to +\infty$) значение $\frac{4}{x^2} \to 0$, тогда** $f(x) \to x$ (то есть при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Если необходимо, найти координаты дополнительных точек, чтобы уточнить поведение графика функции.</td>
<td>7.
<table>
<tr><td>x</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>4</td><td>–4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$16\frac{1}{2}$</td><td>$15\frac{1}{2}$</td><td>$4\frac{1}{4}$</td><td>$-3\frac{3}{4}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

* В этом случае говорят, что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика функции $f(x)$ (см. с. 117).

** В этом случае говорят, что прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика функции $f(x)$.

Окончание табл. 6

8. На основании проведенного исследования построить график функции.	8. 

Объяснение и обоснование

Для построения графика функции (особенно в тех случаях, когда речь идет о незнакомой функции) целесообразно исследовать ее свойства, которые помогают составить определенное представление о виде ее графика. Когда такое представление составлено, можно построить график функции по найденным характерным точкам. Фактически при исследовании функции мы будем придерживаться схемы, приведенной в учебнике для 10 класса, только для исследования функции на возрастание, убывание и экстремумы используем производную. Таким образом, для построения графика функции ее можно исследовать по схеме:

1) *найти область определения функции*;
2) *исследовать функцию на четность/нечетность и периодичность*;
3) *найти точки пересечения графика с осями координат*;
4) *найти производную и критические точки функции*;
5) *найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума* (*и значения функции в этих точках*);
6) *исследовать поведение функции на концах промежутков области определения*;
7) *если необходимо, найти координаты дополнительных точек*;
8) *на основании проведенного исследования построить график функции*.

Эта схема — ориентировочная, и не всегда нужно выполнять все этапы исследования. Например, иногда нельзя точно найти точки пересечения графика с осью Ox, даже если мы знаем, что такие точки существуют. Также бывает сложно исследовать поведение функции на концах промежутков области определения. В таком случае уточнить ее поведение можно за счет нахождения координат точек графика функции, абсциссы которых приближаются к концам промежутков области определения.

Охарактеризуем особенности выполнения каждого из указанных этапов исследования функции и особенности учета полученных результатов при построении графика функции.

1. В первую очередь, необходимо выяснить и записать *область определения*. Если нет специальных ограничений, то функцию считают заданной при всех значениях аргумента, при которых существуют все выражения, входящие в запись функции. Ограничения, которые следует учесть при нахождении области определения функции, приведены в табл. 7.

Таблица 7

<table>
<tr><th colspan="2">Вид функции</th><th colspan="2">Ограничения , которые учитываются при нахождении области определения функции*</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$</td><td>$g(x)\neq 0$</td><td>Знаменатель дроби не равен нулю</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y=\sqrt[2k]{f(x)}$
$(k\in N)$</td><td>$f(x)\geqslant 0$</td><td>Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$y=\mathrm{tg}\,(f(x))$</td><td>$f(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$
$(k\in Z)$</td><td>Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное $\frac{\pi}{2}+\pi k$ (k — любое целое число)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$y=\mathrm{ctg}\,(f(x))$</td><td>$f(x)\neq\pi k$
$(k\in Z)$</td><td>Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное πk (k — любое целое число)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$y=\arcsin\,(f(x))$</td><td rowspan="2">$\lvert f(x)\rvert\leqslant 1$,
то есть
$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$</td><td rowspan="2">Под знаками арксинуса и арккосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$y=\arccos\,(f(x))$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">7</td><td>$y=x^{\alpha}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>а) α — натуральное</td><td colspan="2">x — любое число</td></tr>
<tr><td>б) α — целое отрицательное или нуль</td><td colspan="2">$x\neq 0$</td></tr>
<tr><td>в) α —нецелое положительное число</td><td colspan="2">$x\geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>г) α — нецелое отрицательное число</td><td colspan="2">$x>0$</td></tr>
</table>

* При записи этих ограничений предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на рассматриваемом множестве.

После нахождения области определения функции полезно отметить ее на оси абсцисс. Если область определения — вся числовая прямая, то никаких отметок можно не выполнять. Если эта область — промежуток числовой прямой, то через его концы полезно провести вертикальные прямые, между которыми будет находиться график функции. Если отдельные точки числовой прямой не входят в область определения функции, то целесообразно отметить их на оси абсцисс и провести через них вертикальные прямые, не пересекающие график функции.

2. Если выяснится, что заданная *функция четная* (*или нечетная*), то можно исследовать свойства и построить ее график только при $x \geqslant 0$, а затем отобразить его симметрично относительно оси Oy (для четной) или относительно начала координат (для нечетной). Если же функция периодическая, то достаточно построить ее график на отрезке длиной T, а затем повторить его на каждом из промежутков длиной T (то есть перенести график параллельно вдоль оси Ox на Tk, где k — целое число).

Для обоснования четности функции достаточно проверить, что для всех x из ее области определения $f(-x) = f(x)$, для нечетности — выполнение равенства $f(-x) = -f(x)$, а для периодичности — равенства $f(x + T) = f(x)$ при условии, что если x входит в область определения функции $f(x)$, то $x + T$ и $x - T$ (где $T \neq 0$) также входят в нее.

3. Чтобы найти *точки пересечения графика с осями координат*, учитываем, что на оси Oy значение $x = 0$. Тогда $y = f(0)$ (если это значение существует). На оси Ox значение $y = 0$, поэтому для нахождения соответствующих значений x приравниваем заданную функцию к нулю и находим корни полученного уравнения (если его удается решить).

4. Далее полезно найти производную и критические точки функции — внутренние точки ее области определения, в которых производная равна нулю или не существует. На всех промежутках, где существует производная данной функции, эта функция непрерывна и ее график на каждом из промежутков — неразрывная линия.

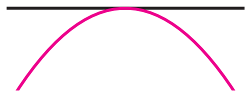
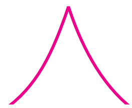
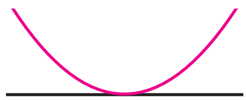
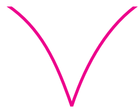
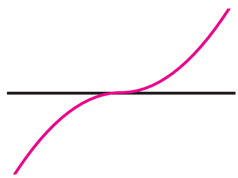
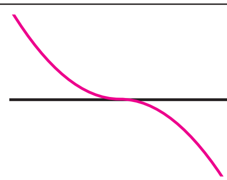
5. Используя производную и критические точки функции, находим промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции (и значения функции в этих точках). Целесообразно отметить критические точки функции на ее области определения и найти знаки производной в каждом из промежутков, на которые разбивается область определения. Вывод о возрастании или убывании функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной).

Результаты этого этапа исследования можно оформить в виде специальной таблицы:

Значение x
Знак и значение $f'(x)$
Поведение и значение $f(x)$

После нахождения значения функции в каждой критической точке x_0 строим соответствующие точки на координатной плоскости, учитывая поведение графика функции в окрестности точки x_0 (табл. 9).

Таблица 8

Критическая точка x_0	Поведение $f'(x)$	Ориентировочный вид графика функции $f(x)$ в окрестности точки x_0
x_0 — точка максимума	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с «+» на «–»*	
	$f'(x_0)$ не существует, *$f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с «+» на «–»*	
x_0 — точка минимума	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с «–» на «+»*	
	$f'(x_0)$ не существует, *$f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с «–» на «+»*	
x_0 — критическая точка, в которой производная равна нулю, но которая не является точкой экстремума	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ слева и справа от точки x_0 положительная*	
	$f'(x_0) = 0$, *$f'(x)$ слева и справа от точки x_0 отрицательная*	

При изображении графика функции в окрестности точки x_0 учитывают геометрический смысл производной: если $f'(x_0) = 0$, то в точке с абсциссой x_0 к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, параллельную оси Ox. Если же значение $f'(x_0)$ не существует, то в точке с абсциссой x_0 график будет иметь излом (или касательную к графику функции в этой точке провести нельзя, или касательная перпендикулярна к оси Ox).

6. Для более полного представления о виде графика функции, целесообразно исследовать *поведение функции на концах области определения*. При этом возможны несколько случаев.

а) Около точки $x = a$, ограничивающей промежуток области определения, значение функции стремится к бесконечности. Например, у функции $y=\frac{1}{x}$ область определения — $x \neq 0$, то есть $D\ (y) = (-\infty;\ 0) \cup \cup\ (0;\ +\infty)$, и если значение x стремится к нулю, то значение y — к бесконечности (рис. 5.19).

Как отмечалось на этапе 1, через точку $x = a$ уже проведена вертикальная прямая. Около точки $x = a$ график функции будет стремиться вверх или вниз, приближаясь к этой прямой. Ее называют *вертикальной асимптотой** графика функции. Чтобы выяснить, вверх или вниз стремится график функции, достаточно определить знаки функции слева и справа от точки a. Характерные случаи изображены на рис. 5.20, 5.21.

б) Если *предельная точка $x = a$ входит в область определения функции*, то надо определить значение функции в точке a и построить полученную точку. Типичный пример — точка $x = 0$ для функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 5.22).

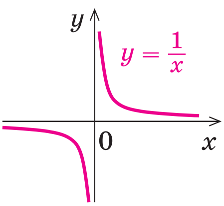


Рис. 5.19

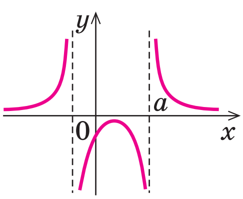


Рис. 5.20

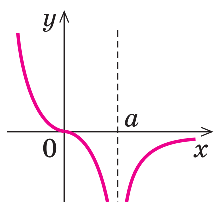


Рис. 5.21

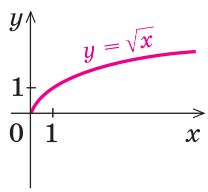


Рис. 5.22

в) В область определения функции входит бесконечный промежуток (либо вся числовая прямая, либо промежутки $(-\infty;\ a)$ или $(a;\ +\infty)$). В этом случае полезно представить себе поведение графика функции при $x \to -\infty$ или при $x \to +\infty$. Например, для функции $y=\frac{1}{x}$ имеем: при $x \to +\infty$ значение $y \to 0$, оставаясь положительным (записываем: $y \to +0$). А при $x \to -\infty$ значение $y \to 0$, оставаясь отрицательным (записываем: $y \to -0$). В этом случае говорят, что прямая $y = 0$ — *горизонтальная асимптота* графика функции (см. рис. 5.19).

Иногда при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ можно выделить наклонную прямую, к которой неограниченно приближается график функции, —

* Прямую, к которой неограниченно приближается кривая при удалении ее в бесконечность, называют *асимптотой* этой *кривой* (подробнее см. на с. 115).

так называемую *наклонную асимптоту*, позволяющую лучше представить поведение графика функции (см. пример в табл. 6).

7. Если нужно уточнить поведение графика функции (например, когда на каком-нибудь бесконечном промежутке области определения функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$), следует найти координаты *дополнительных точек* графика, взяв произвольные значения аргумента из необходимого промежутка.

Примеры решения задач

Задача 1 Постройте график функции $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

Решение	*Комментарий*

1. Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x) = -x^3 + 3x - 3 \neq f(x)$ (и $f(-x) \neq -f(x)$).

3. Точка пересечения графика с осью Oy:

$$x = 0,\ y = f(0) = -3.$$

4. Производная и критические точки.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Производная существует на всей области определения функции $f(x)$. $f'(x) = 0$. Тогда $3x^2 - 3 = 0$, следовательно, $x^2 = 1$, то есть $x = 1$ и $x = -1$ — критические точки.

5. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ на каждом из полученных промежутков (рис. 5.23).

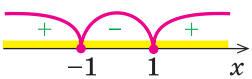


Рис. 5.23

Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$
		max		min	

Используем общую схему исследования функции (с. 69). При нахождении области определения учитываем, что никаких ограничений, зафиксированных в табл. 8, функция не имеет, значит, областью определения является множество всех действительных чисел (можно использовать известное утверждение, что *областью определения многочлена являются все действительные числа*).

Чтобы найти точку пересечения графика с осью Ox, нужно приравнять функцию к нулю и решить уравнение $x^3 - 3x - 3 = 0$. Но мы не можем найти корни этого уравнения, поэтому в решение включено лишь нахождение точки пересечения графика с осью Oy.

Когда уже известны производная данной функции, ее критические точки и знаки производной в каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции, удобно находить промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции, заполняя специальную таблицу.

6. Найдем значения функции в нескольких точках:

x	-2	2	3
$f(x)$	-5	-1	15

7. Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 3x - 3$ (рис. 5.24).

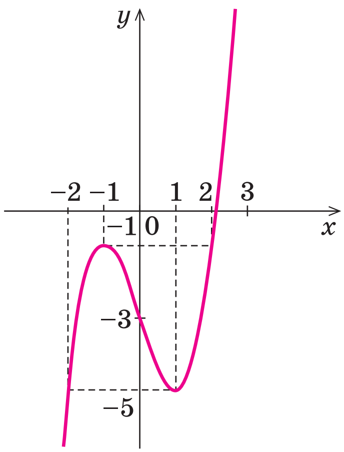


Рис. 5.24 ◁

Обратим внимание: функция непрерывна на всей числовой прямой, поскольку дифференцируема в каждой точке области определения, а значит, ее график — неразрывная линия.

Для уточнения вида графика целесообразно найти координаты нескольких дополнительных точек.

После построения графика функции можно сделать вывод, что он имеет единственную точку пересечения с осью Ox. Она находится между точками $x = 2$ и $x = 3$, поскольку функция $f(x)$ непрерывна, на промежутке $[1; +\infty)$ возрастает, в точке $x = 2$ принимает отрицательное значение, а в точке $x = 3$ — положительное. Других точек пересечения с осью Ox быть не может, потому что на промежутке $(-\infty; -1]$ функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до -1, а на промежутке $[-1; 1]$ — убывает от -1 до -5, то есть значения функции на этих промежутках отрицательны.

З а м е ч а н и е. При построении графика функции мы не исследовали поведение функции на концах промежутков ее области определения. Покажем, как это можно сделать. Область определения данной функции — промежуток $(-\infty; +\infty)$. Чтобы исследовать поведение функции на концах промежутков области определения, необходимо выяснить, к какому значению будет стремиться функция при $x \to \infty$. Для этого в многочлене достаточно вынести за скобки наивысшую степень переменной (это всегда можно сделать, так как $x \neq 0$, когда значение x велико по модулю). Тогда при $x \neq 0$ имеем $f(x) = x^3 - 3x - 3 = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Поскольку при $x \to \infty$ значения $\frac{3}{x^2} \to 0$ и $\frac{3}{x^3} \to 0$, то $1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \to 1$. Следовательно, $f(x)$ будет стремиться к тому же значению, что и x^3. Но при $x \to -\infty$ значение $x^3 \to -\infty$, тогда и $f(x) \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ значение $x^3 \to +\infty$, тогда и $f(x) \to +\infty$. Учитывая непрерывность функции $f(x)$, получаем, что она принимает все значения из промежутка $(-\infty;\ +\infty)$. Приведенные соображения можно повторить для любой функции — многочлена нечетной степени. Тогда, строя графики таких функций, полезно помнить, что *многочлен нечетной степени принимает все значения из промежутка* $(-\infty;\ +\infty)$ и *при больших по модулю значениях аргумента поведение многочлена будет аналогично поведению степенной функцией — его старшего члена*.

Задача 2

1) Постройте график функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.
2*) Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ в зависимости от значения параметра a?

Комментарий

Для выполнения задания 1 исследуем функцию $f(x)$ по общей схеме и по результатам исследования построим ее график. Для нахождения точки пересечения графика с осью Ox приравниваем функцию к нулю и решаем полученное биквадратное уравнение. При построении графика также учитываем, что при $x \to \infty$ значение

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 = x^4\left(1 - \frac{8}{x^2} - \frac{9}{x^4}\right) \to +\infty.$$

Как видим, и для многочлена четной степени *при больших по модулю значениях аргумента поведение многочлена будет аналогично поведению степенной функции — его старшего члена.*

При выполнении задания 2 можно пользоваться таким ориентиром: *если в задании с параметром идет речь о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа данной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения.*

Особенно простым является исследование в том случае, когда заданное уравнение можно представить в виде $f(x) = a$, поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox (которая пересекает ось Oy в точке a), а график функции $y = f(x)$ легко построить, исследовав функцию $f(x)$ с помощью производной. (Заменяя заданное уравнение на уравнение $f(x) = a$, необходимо следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и заданное. Следовательно, и количество корней у них будет одинаковым.) Чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$, достаточно узнать, сколько точек пересечения имеет график функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$ при разных значениях параметра a. (Для этого на рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

Решение

▶ 1) Исследуем функцию $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

1. Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Функция четная, поскольку для всех значений x из ее области определения
$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x).$$
Следовательно, график функции симметричен относительно оси Oy.
3. Точка пересечения графика с осью Oy: $x = 0$, $y = f(0) = -9$.
Точки пересечения графика с осью Ox: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Замена $x^2 = t$ дает: $t^2 - 8t - 9 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 9$. Тогда $x^2 = -1$ (корней нет) или $x^2 = 9$. Отсюда $x = 3$ и $x = -3$ — абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.
4. Производная и критические точки. $f'(x) = 4x^3 - 16x$.
Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция непрерывна на всей числовой прямой).
$f'(x) = 0$. Тогда $4x^3 - 16x = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$, $4x(x - 2)(x + 2) = 0$, значит, $x = 0$, $x = 2$ и $x = -2$ — критические точки.
5. Отмечаем критические точки на области определения функции $f(x)$ и находим знак $f'(x)$ на каждом из полученных промежутков (рис. 5.25). Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции:

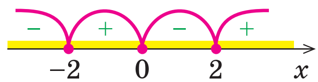


Рис. 5.25

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	-9	$\searrow$	-25	$\nearrow$
		min		max		min	

6. Используя результаты исследования, строим график* функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (рис. 5.26). ◁

▶ 2) Заданное уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ равносильно уравнению $x^4 - 8x^2 - 9 = a$. Решим последнее уравнение графически: построим графики функций $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (см. задание 1) и $y = a$ (рис. 5.27). Как видим, при $a < -25$ уравнение не имеет корней (нет точек пересечения графиков); при $a = -25$ и $a > -9$ уравнение имеет два корня (графики имеют только две общие точки); при $a = -9$ уравнение имеет три корня (графики имеют три общие точки) и при $-25 < a < -9$ уравнение имеет четыре корня (графики имеют четыре общие точки). ◁

Вопросы для контроля

1. По какой схеме можно исследовать свойства функции для построения ее графика?
2*. Охарактеризуйте особенности выполнения основных этапов исследования функции и отображения результатов исследования на графике функции. Приведите примеры.

* Масштаб по осям Ox и Oy разный.

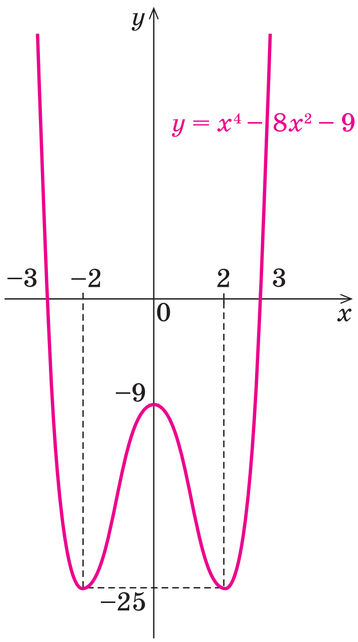


Рис. 5.26

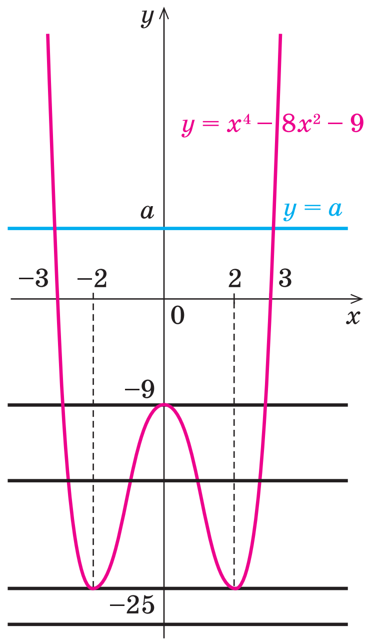


Рис. 5.27

Упражнения

1°. Постройте схематический график функции, определенной и непрерывной на множестве всех действительных чисел, пользуясь ее свойствами, указанными в таблице:

1)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$
		max		min	

2)

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$
		min		max		min	

Исследуйте функцию и постройте ее график **(2, 3)**.

2°. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = 3x - x^3 + 1$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 4) $f(x) = 5x^4 - 4x^5$.

3. 1) $f(x) = (x^2 - 2)^2$; 2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = \frac{4}{x} - x$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

4. а) Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график.

б) Найдите область значений функции $f(x)$.

в*) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a?

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$; 2) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$;

3) $f(x) = x - \sqrt{x}$; 4) $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}}$.

5. Сколько корней имеет уравнение:

1) $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 + 2 = 0$;

3) $x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3 = 0$; 4) $x^3 - 3x^2 - 9x - 7 = 0$?

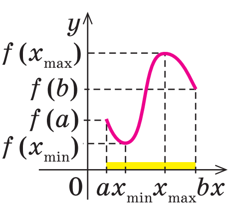
6*. Исследуйте функцию и постройте ее график:

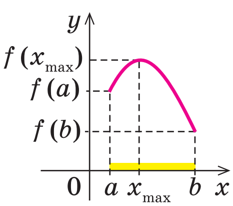
1) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 2) $y = 2x - 5\sqrt[5]{x^2}$;

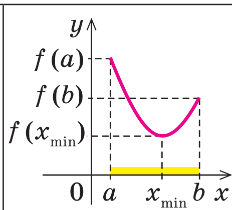
3) $y = 2\sin x - \cos 2x$; 4) $y = \cos^2 x - \cos x$.

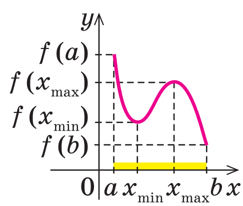
5.3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Таблица 9

<table>
<tr><td colspan="4">1. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке</td></tr>
<tr><td colspan="4">Свойство</td></tr>
<tr><td colspan="4">Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке, или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Примеры</td></tr>
<tr>
<td>

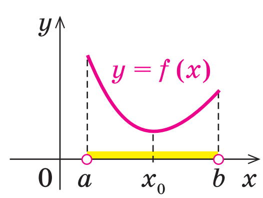
$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{max})$
$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{min})$</td>
<td>

$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{max})$
$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$</td>
<td>

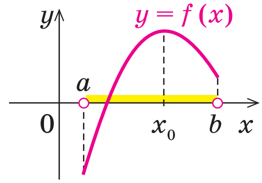
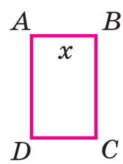
$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$
$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{min})$</td>
<td>

$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$
$\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$</td>
</tr>
</table>

Продолжение табл. 9

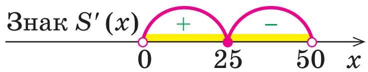
<table>
<tr><td colspan="2">2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке</td></tr>
<tr><td>Схема</td><td>Пример
Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на отрезке [1; 3].</td></tr>
<tr><td>**1. Убедиться, что заданный отрезок входит в область определения функции $f(x)$.**</td><td>▶ Область определения заданной функции — все действительные числа ($D(f) = \boldsymbol{R}$). Следовательно, заданный отрезок входит в область определения функции $f(x)$.</td></tr>
<tr><td>**2. Найти производную $f'(x)$.**</td><td>$f'(x) = 3x^2 - 12.$</td></tr>
<tr><td>**3. Найти критические точки: $f'(x) = 0$ или не существует.**</td><td>$f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ (значит, функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке).
$f'(x) = 0$; $3x^2 - 12 = 0$ при
$x = 2$ или $x = -2$.</td></tr>
<tr><td>**4. Выбрать критические точки, принадлежащие заданному отрезку.**</td><td>Заданному отрезку [1; 3] принадлежит только критическая точка $x = 2$.</td></tr>
<tr><td>**5. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.**</td><td>$f(1) = 1$; $f(2) = -4$; $f(3) = 3$.</td></tr>
<tr><td>**6. Сравнить полученные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.**</td><td>$\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(3) = 3,$
$\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(2) = -4.$ ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на интервале</td></tr>
<tr><td>Свойство</td><td>Иллюстрация</td></tr>
<tr><td>*Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то на заданном интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке x_0.*</td><td></td></tr>
</table>

Продолжение табл. 9

<table>
<tr>
<td>Если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка максимума, то на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке x_0.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">4. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции</td>
</tr>
<tr>
<td>Схема</td>
<td>Пример
Имеется кусок проволоки длиной 100 м. Необходимо огородить им прямоугольный участок наибольшей площади. Найдите размеры участка.</td>
</tr>
<tr>
<td>1. Одну из искомых величин (или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи), обозначить через x
(и по смыслу задачи наложить ограничения на x).</td>
<td>▶ Пусть участок имеет форму прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок) со стороной $AB = x$ (м).


Так как проволока будет натянута по периметру прямоугольника, получаем: $2AB + 2BC = 100$, т. е. $2x + 2BC = 100$. Отсюда $BC = 50 - x$ (м). Поскольку длина каждой стороны прямоугольника — положительное число, то $0 < x < 50$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию от x.</td>
<td>Площадь прямоугольника:
$S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение (чаще всего с помощью производной).</td>
<td>Исследуем функцию $S(x)$ с помощью производной. Производная $S'(x) = 50 - 2x$ существует при всех действительных значениях x (значит, $S(x)$ — непрерывная функция на заданном промежутке). $S'(x) = 0$,
$50 - 2x = 0$,
$x = 25$ — критическая точка.</td>
</tr>
</table>

Окончание табл. 9

	 В точке $x = 25$ производная $S'(x) = 50 - 2x$ меняет знак с «+» на «–» (см. рисунок), следовательно, $x = 25$ — точка максимума. Поскольку непрерывная функция $S(x)$ имеет на заданном интервале (0; 50) только одну точку экстремума $x = 25$ и это точка максимума, делаем вывод: на заданном интервале функция принимает свое наибольшее значение в точке $x = 25$*.
4. Убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи.	Итак, площадь огороженного участка будет наибольшей, если стороны прямоугольника равны: $AB = x = 25$ (м), $BC = 50 - x = 25$ (м), то есть если участок будет иметь форму квадрата со стороной 25 м. ◁

Объяснение и обоснование

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. Человеку в жизни часто приходится искать лучшее, или, как говорят, оптимальное решение поставленной задачи. Часть таких задач удается решить с помощью методов математического анализа — это задачи, которые можно свести к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции.

В курсах математического анализа доказывается **теорема Вейерштрасса:**

непрерывная на отрезке $[a; b]$ *функция* $f(x)$ *имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения*, то есть существуют точки отрезка $[a; b]$, в которых $f(x)$ принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения.

---

* В этой задаче можно было исследовать функцию $S(x)$ и без применения производной. $S(x) = 50x - x^2$ — квадратичная функция, ее график — парабола с ветвями, направленными вниз. Тогда наибольшее значение эта функция принимает в вершине параболы, то есть при $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25$. Это значение находится в заданном интервале (0; 50), следовательно, на этом интервале функция принимает наибольшее значение при $x = 25$.

Рассмотрим случай, когда непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке только конечное число критических точек. Тогда имеет место свойство:

если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке, или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка.

Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена в п. 1 табл. 9.

1) Сначала рассмотрим случай, когда непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ не имеет на нем критических точек. Тогда на отрезке $[a; b]$ производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак (см. с. 53), следовательно, функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ возрастает (рис. 5.28, *а*) или убывает (рис. 5.28, *б*). Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ — это значения на концах отрезка в точках a и b.

2) Пусть теперь функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек. Они разбивают отрезок $[a; b]$ на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Тогда согласно п. 1 наибольшее и наименьшее значения функция $f(x)$ принимает на концах таких отрезков, то есть в критических точках функции, или в точках a и b. ○

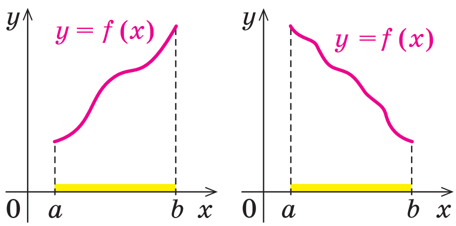
Таким образом, *чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции, имеющей на этом отрезке конечное число критических точек, достаточно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.*

Для использования этого ориентира нужно убедиться, что заданный отрезок входит в область определения данной функции и что функция непрерывна на этом отрезке (последнее следует, например, из того, что функция дифференцируема на заданном отрезке). Для нахождения критических точек функции необходимо найти ее производную и выяснить, где она равна нулю или не существует. Уточненная схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, приведена в табл. 9 (п. 2, с. 80). Там же дан пример использования этой схемы. Другие примеры нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, приведены далее на с. 85–89.

Утверждение, что наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигается в точке x_0, можно обозначать так: $\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_0)$, а утверждение, что наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигается в точке x_0, можно обозначать так: $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_0)$.

При решении некоторых задач приходится находить ***наибольшее*** и ***наименьшее значения непрерывной функции*** не на отрезке, а ***на ин-***

тервале. Чаще всего в таких задачах функция имеет на заданном интервале только одну критическую точку: или точку максимума, или точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 5.29), а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 5.30) (см. полное формулирование соответствующих свойств в п. 3 табл. 9 на с. 80, 81).



а *б*

Рис. 5.28

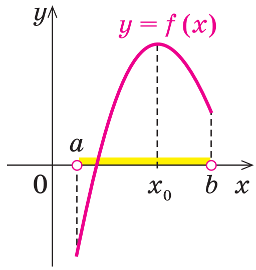


Рис. 5.29

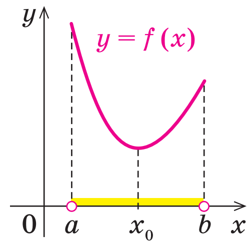


Рис. 5.30

Действительно, если, например, непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале $(a; b)$ только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то в этой точке производная $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+». Таким образом, если $x < x_0$, то $f'(x) < 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она убывает при $x \leqslant x_0$, и тогда при $x < x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$. Если же $x > x_0$, то $f'(x) > 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она возрастает при $x \geqslant x_0$, и тогда при $x > x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$. Это и означает, что значение $f(x_0)$ — наименьшее значение функции на интервале $(a; b)$. ○

Аналогично обосновывается и случай, когда x_0 — точка максимума (проведите обоснование самостоятельно).

Рассмотренные способы нахождения наибольших и наименьших значений функции используются для ***решения*** разнообразных ***прикладных задач***. Решение практических задач математическими методами, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию, то есть создание математической модели задачи (перевод условия задачи на язык математики); 2) решение составленной математической задачи; 3) интерпретацию найденного решения (анализ полученного результата, то есть перевод его с языка математики в термины исходной задачи)*.

Эти этапы для задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений можно реализовать по схеме:

---

* С общим методом решения практических задач методами математики (его называют *методом математического моделирования*) вы уже фактически ознакомились: по описанной схеме решали текстовые задачи в курсе алгебры.

1) *одну из величин, которую необходимо найти (или величину, с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи), обозначить через* x (и по смыслу задачи наложить ограничения на x);
2) *величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию от* x;
3) *исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значения*;
4) *убедиться, что результат имеет смысл для исходной задачи.*

Примеры использования этой схемы приведены в п. 4 табл. 9 (с. 81, 82) и в примерах на с. 86–89.

При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции целесообразно использовать следующее утверждение:

если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

● Действительно, при $u \geqslant 0$ функция $y = u^n$, где n — натуральное число, является возрастающей ($y' = nu^{n-1} \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$ и $y' = 0$ только при $u = 0$*). Тогда сложная функция $y = (f(x))^n$ (то есть функция $y = u^n$, где $u = f(x)$) будет возрастать там, где возрастает функция $f(x)$, и убывать там, где убывает функция $f(x)$, а значит, принимать наибольшее (или наименьшее) значение в той же точке, что и функция $f(x)$. ○

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

<table>
<tr><th>Решение</th><th>Комментарий</th></tr>
<tr><td>

▶ 1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, следовательно, отрезок $[0; \pi]$ входит в область определения функции $f(x)$.

2) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$.

3) $f'(x)$ существует на всей области определения функции $f(x)$ (следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на заданном отрезке);
$f'(x) = 0$, $2\cos x - 2\sin 2x = 0$,
$\cos x - 2\sin x\cos x = 0$,
$\cos x(1 - 2\sin x) = 0$, $\cos x = 0$
или $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

</td><td>

Используем схему нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции $f(x)$:
1) *убедиться, что заданный отрезок входит в область определения функции*; 2) *найти производную*; 3) *найти критические точки* ($f'(x) = 0$ или не существует); 4) *выбрать критические точки, принадлежащие заданному отрезку*; 5) *вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка*; 6) *сравнить полученные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.*

</td></tr>
</table>

* Конечно, при $n \geqslant 2$, а при $n = 1$ значение $y' = (u)' = 1 > 0$.

или $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z},$ — критические точки.

4) В заданный отрезок попадают только критические точки: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

5) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1,$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$

$f(0)=1,\ f(\pi)=1.$

6) $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=f(0)=f(\pi)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$

$\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$ ◁

Чтобы убедиться в непрерывности данной функции, достаточно после нахождения ее производной показать, что производная существует в каждой точке области определения функции, или отметить, что заданная функция непрерывна как сумма двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos 2x$.

Выяснить, какие критические точки принадлежат заданному отрезку, можно на соответствующем рисунке, отмечая критические точки на числовой прямой (рис. 5.31):

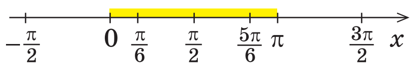


Рис. 5.31

Задача 2 Из круглого бревна вырезают брус прямоугольного сечения наибольшей площади. Найдите размеры сечения бруса, если радиус сечения бревна равен 25 см.

Решение

▶1) Пусть из круга вырезают прямоугольник $ABCD$ (рис. 5.32) со стороной $AB = x$ (см). Учитывая, что AC — диаметр круга, имеем $AC = 50$ (см). Поскольку x — длина отрезка, то $x > 0$. Кроме того, $AB < AC$ (катет прямоугольного треугольника ABC меньше его гипотенузы), следовательно, $0 < x < 50$.

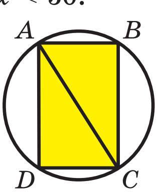


Рис. 5.32

2) Из прямоугольного $\Delta\ ABC$

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2500-x^2}$ (см).

Комментарий

Используем общую схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения: 1) *одну из величин, которую необходимо найти (или с помощью которой можно дать ответ на вопрос задачи) обозначить через* x (и по смыслу задачи наложить ограничения на x); 2) *величину, о которой говорится, что она наибольшая или наименьшая, выразить как функцию от* x; 3) *исследовать полученную функцию на наибольшее или наименьшее значение*; 4) *убедиться, что полученный результат имеет смысл для исходной задачи*.

Полученную функцию

$$S(x)=x\sqrt{2500-x^2}$$

Тогда площадь сечения прямоугольника $ABCD$ равна:

$$S(x) = AB \cdot BC = x\sqrt{2500 - x^2}.$$

Поскольку при $0 < x < 50$ значение $S(x) > 0$, то рассмотрим функцию $f(x) = (S(x))^2 = x^2(2500 - x^2) = 2500x^2 - x^4$, принимающую наибольшее значение на промежутке $0 < x < 50$ в той же точке, что и $S(x)$.

3) Производная $f'(x) = 5000x - 4x^3$ существует во всех точках заданного промежутка (следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на заданном промежутке).

$f'(x) = 0, \quad 5000x - 4x^3 = 0,$

$4x(1250 - x^2) = 0, \quad x = 0$ или $x = \pm 25\sqrt{2}$.

В промежуток $(0;\ 50)$ попадает только критическая точка $x = 25\sqrt{2}$, которая является точкой максимума: в этой точке производная меняет знак с «+» на «−» (рис. 5.33).

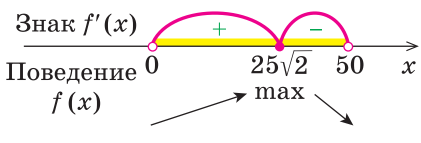


Рис. 5.33

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на заданном интервале и имеет там только одну точку экстремума и это точка максимума, то на этом интервале функция принимает наибольшее значение в точке $x = 25\sqrt{2}$.

4) Тогда $AB = x = 25\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2500 - x^2} = 25\sqrt{2}$. Следовательно, наибольшая площадь сечения бруса будет в том случае, когда искомый прямоугольник будет квадратом со стороной $25\sqrt{2}$ (≈ 35 см). ◁

Функцию $S(x)$ на промежутке $0 < x < 50$ можно исследовать непосредственно. Но лучше учесть, что на этом промежутке $S(x) > 0$, и исследовать функцию $f(x) = (S(x))^2$, в записи которой не содержится знака корня и которая принимает наибольшее значение в той же точке, что и $S(x)$.

Вывод о том, что в найденной точке функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, можно обосновать одним из трех способов: 1) использовать свойство непрерывной на интервале функции, имеющей на этом интервале только одну точку экстремума (см. например, п. 3 табл. 9); 2) опираясь на поведение непрерывной функции $f(x)$, исследованной с помощью производной (см. рис. 5.33), обосновать, что на промежутках $(0;\ x_0)$ и $(x_0;\ 50)$ (где $x_0 = 25\sqrt{2}$) $f(x) < f(x_0)$, а значит, в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение; 3) для нахождения наибольшего значения функции $f(x)$ на интервале $(0;\ 50)$ можно использовать то, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, поэтому можно найти ее наибольшее значение на отрезке $[0;\ 50]$, а затем сделать вывод для данной задачи:

$$f(0) = f(50) = 0, \quad f\left(25\sqrt{2}\right) = 1250.$$

Следовательно, наибольшее значение на отрезке $[0;\ 50]$ функция $f(x)$ принимает в точке x_0 (которая лежит внутри этого отрезка). Тогда и на интервале $(0;\ 50)$ эта функция принимает наибольшее значение в точке x_0.

Задача 3* Найдите наибольшее значение площади треугольника OAB, если точка O — начало координат, точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B — на оси Ox, и ее абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A (где $f(x)=\sqrt{7+3\sin x-(3x+1)\cos x}$ и $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$).

Комментарий

Для функции $f(x)$ непросто найти область определения, но можно убедиться, что заданный промежуток полностью входит в область определения этой функции, оценив значения подкоренного выражения на заданном промежутке. Для этого учитываем, что на единичной окружности заданный промежуток находится во второй и третьей четвертях (рис. 5.34), где $\cos x < 0$ и $7 + 3\sin x > 0$ при всех значениях x.

Также следует учесть, что согласно определению графика функции точка A имеет координаты $(x;\ y) = (x;\ f(x))$. Чтобы утверждать, что высота треугольника OAB равна ординате точки A (рис. 5.35), необходимо обосновать, что на заданном промежутке график функции $y = f(x)$ лежит в первой четверти.

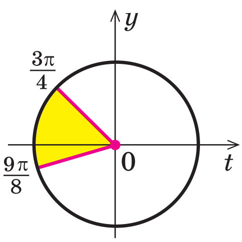


Рис. 5.34

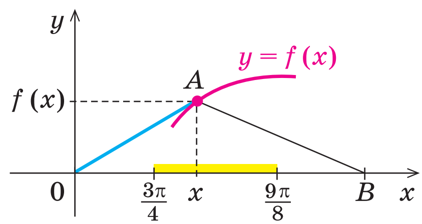


Рис. 5.35

После записи площади треугольника OAB как функции $S(x)$ для нахождения ее наибольшего значения обращаем внимание на то, что достаточно сложно найти $S\left(\frac{9\pi}{8}\right)$. Поэтому удобно выполнить исследование этой функции с помощью производной и обосновать, что в точке экстремума из заданного промежутка функция принимает наибольшее значение на заданном промежутке (а не пользоваться схемой нахождения наибольшего значения непрерывной функции на отрезке).

Решение

▶ При $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ $3x + 1 > 0$ и $\cos x < 0$. Тогда $-(3x + 1)\cos x > 0$ на заданном промежутке. При всех значениях x имеем $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Тогда $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$, значит, $7 + 3\sin x > 0$. Таким образом, на заданном промежутке

$$7 + 3\sin x - (3x + 1)\cos x > 0,$$

следовательно, заданный промежуток полностью входит в область определения функции $f(x)$. Отметим также, что в этом случае значения функции $f(x)$ будут положительными, то есть на заданном промежутке график функции $y = f(x)$ лежит в первой четверти.

Поскольку заданная точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, то в случае, когда абсцисса точки A равна x, ордината равна $f(x)$ (рис. 5.35). По условию $x_B = 4y_A = 4f(x)$. Точка A лежит в первой четверти, следовательно, $y_A > 0$, а значит, и $x_B > 0$. Тогда $OB = x_B = 4f(x)$, а высота треугольника OAB равна ординате точки A: $h = y_A = f(x)$. Поэтому площадь треугольника OAB равна:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x) = 2 \cdot (7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x).$$

Следовательно, необходимо найти наибольшее значение функции

$$S(x) = 14 + 6\sin x - (6x + 2)\cos x \quad \text{при } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}.$$

Тогда $S'(x) = 6\cos x - (6\cos x - (6x + 2)\sin x) = (6x + 2)\sin x$.

Производная $S'(x)$ существует во всех точках заданного отрезка, а значит, функция $S(x)$ непрерывна на этом отрезке. Найдем, где $S'(x) = 0$:

$$(6x + 2)\sin x = 0; \; x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = \pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

Из найденных точек в заданный отрезок входит только критическая точка $x = \pi$.

Обозначим критические точки на области определения и найдем знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (рис. 5.36).

Учитывая непрерывность функции $S(x)$ на заданном промежутке, получаем, что функция возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ (тогда при $\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$ значение $S(x) < S(\pi)$) и убывает на промежутке $\left[\pi; \frac{9\pi}{8}\right]$ (при $\pi < x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ значение $S(x) < S(\pi)$). Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}\right]$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \pi$. Тогда $S(\pi) = 14 + 6\sin\pi - (6\pi + 2)\cos\pi = 16 + 6\pi$ (квадратных единиц).

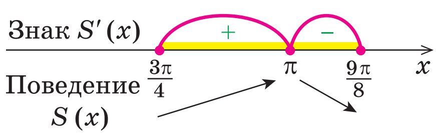


Рис. 5.36

Ответ: наибольшее значение искомой площади треугольника равно $16 + 6\pi$ кв. ед. ◁

Вопросы для контроля

1. а) Объясните, в каких точках непрерывная на отрезке функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке. Проиллюстрируйте соответствующее свойство на графиках функций. б*) Обоснуйте соответствующее свойство для случая, когда непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке только конечное число критических точек.
2. Опишите схему нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке. Приведите пример.
3. а) Сформулируйте свойства непрерывной на интервале функции, которая имеет на этом интервале только одну точку экстремума. б*) Обоснуйте соответствующие свойства.
4. Опишите схему решения задач на наибольшее и наименьшее значения с помощью исследования соответствующих функций. Приведите пример.

Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке **(1–4)**.

1°. 1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$, $[0; 3]$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-1; 2]$;
3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $[-1; 1]$; 4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[-2; 1]$.

2. 1) $f(x) = 3\cos x + \cos 3x$, $[0; \pi]$; 2) $f(x) = 5\sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. 1) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1; 6]$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 9]$;
3) $f(x) = x - 4x^{-2}$, $[-3; -1]$; 4) $f(x) = |x - 1| - \sqrt{x}$, $[0; 4]$.

4*. 1) $f(x) = -x^3 + 3x\,|x - 3|$, $[0; 4]$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - |x - 3|$, $[1; 4]$;
3) $f(x) = \frac{1}{x} + |x - 2|$, $[1; 4]$; 4) $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$, $[-4; 4]$.

5°. Число 10 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

6°. Число 4 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого с квадратом второго была наименьшей.

7. Разность двух чисел равна 8. Какими должны быть эти числа, чтобы произведение куба большего числа на второе число было наименьшим?

8. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 25 см^2, найдите прямоугольник с наименьшим периметром.

9. Из квадратного листа картона со стороной a необходимо изготовить открытую сверху коробку, вырезав в углах квадратики (рис. 5.37) и загнув полученные края. При какой высоте коробки ее объем будет наибольшим?

а *б*

Рис. 5.37

10. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

11. На странице текст занимает 384 см². Верхнее и нижнее поля должны быть по 2 см, правое и левое — по 3 см. Какими должны быть размеры страницы с точки зрения экономии бумаги?

12*. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах. Определите бо́льшую из сторон прямоугольника.

13*. Из треугольников, которые имеют данный угол α, находящийся между сторонами, сумма длин которых постоянна и равна a, найдите такой, который имеет наименьший периметр.

14*. В шар радиуса R вписан цилиндр, который имеет наибольшую боковую поверхность. Найдите объем этого цилиндра.

15*. Найдите наименьшее значение площади треугольника OAB, если точка O — начало координат, точка A лежит на графике функции $y = f\ (x)$ (где $f\,(x) = \sqrt{4x - 2\sin 2x - 9\cos x + 12}$ и $\frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{12\pi}{5}$), точка B — на оси Ox и ее абсцисса равна ординате точки A.

16*. Найдите наибольшее значение площади треугольника OAB, если точка O — начало координат, точка A лежит на графике функции $y = f\,(x)$ (где $f\,(x) = \sqrt{7 + 2\sin x - (2x + 7)\cos x}$ и $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{5}$), точка B — на оси Ox и ее абсцисса в два раза больше ординаты точки A.

17. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки хочет добраться до села B, которое расположено на берегу на расстоянии 5 км от точки A (участок AB берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч; пассажир, выйдя из лодки, может пройти за час 5 км. К какому пункту на берегу должна пристать лодка, чтобы пассажир прибыл в село B за кратчайшее время?

§ 6 ПОНЯТИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

6.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ О ПРЕДЕЛАХ

Таблица 10

1. Определение предела функции в точке	
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$	**Число B называют пределом функции $f(x)$ в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ*, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $\lvert x - a \rvert < \delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$.**
2. Основные теоремы о пределах функции	
$\lim\limits_{x\to a} c = c$	*Предел постоянной функции равен самой постоянной.*
$\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$	*Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют.*
$\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$	*Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.*
$\lim\limits_{x\to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$	*Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (где $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$)	*Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.*
3. Понятие бесконечно малой функции при $x \to a$	
Функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называют бесконечно малой функцией при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.	
4. Свойства бесконечно малых функций	
1. *Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$, произведение $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $c \cdot \alpha(x)$ (где c = const) также являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$.*	

* Заметим, что δ зависит от ε и поэтому его часто обозначают $\delta(\varepsilon)$.

Окончание табл. 10

2. *Если функция* $\beta(x)$ *— бесконечно малая при* $x \to a$ *и для всех* x*, удовлетворяющих условию* $\lvert x - a \rvert < \delta$ *(кроме, возможно,* $x = a$*), выполняется неравенство* $\lvert \alpha(x) \rvert \leqslant \lvert \beta(x) \rvert$*, то функция* $\alpha(x)$ *также бесконечно малая при* $x \to a$.
5. Связь определения предела функции в точке с бесконечно малыми функциями
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$

Объяснение и обоснование

1. Определение предела функции в точке. Сформулируем *определение предела функции в точке* (оно уже рассматривалось на с. 5), используя понятие δ-окрестности точки. Обычно δ-окрестностью точки a называют промежуток $(a - \delta;\ a + \delta)$, то есть все значения x, удовлетворяющие неравенству $\lvert x - a \rvert < \delta$.

Пусть задана функция $f(x) = 2x + 3$, $x \in (-\infty; +\infty)$, значения которой найдены при некоторых x из так называемой δ-окрестности точки $x = 2$ (из интервала $(2 - \delta,\ 2 + \delta)$, где $\delta > 0$).

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	7,002	7,02	7,2

Из приведенной таблицы видно, что чем ближе значение x к 2, тем ближе к числу 7 соответствующее значение $f(x)$. Причем, выбирая все меньшую δ-окрестность точки 2, можно неограниченно приближать значение $f(x)$ к числу 7. Иными словами, можно выбрать такую δ-окрестность точки 2, чтобы расстояние от $f(x)$ до точки 7 на числовой прямой, то есть $\lvert f(x) - 7 \rvert$, было меньше любого положительного числа ε. Как уже отмечалось, в этом случае говорят, что число 7 является пределом функции $f(x)$ в точке $x = 2$ (или при x, стремящемся к 2), и записывают: $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3) = 7$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, возможно, самой точки a. **Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$ из δ-окрестности точки a (то есть при $x \neq a$ и $\lvert x - a \rvert < \delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$.**

Проиллюстрируем применение определения к обоснованию того, что предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен B. В простейших случаях такое обоснование проводится по схеме:

1) *для любого положительного числа* ε *расматривают неравенство*

$$\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon;$$

2) *при всех значениях* $x \neq a$ *из некоторой окрестности точки* a *из этого неравенства получают неравенство* $|x - a| < \delta$;
3) *объясняют* (опираясь на равносильность выполненных преобразований неравенства или на свойства неравенств), *что при полученном значении* δ (которое записывают через ε) *из неравенства* $|x - a| < \delta$ (при $x \neq a$) *следует неравенство* $|f(x) - B| < \varepsilon$;
4) *используя определение предела функции в точке* a, *делают вывод, что* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Задача 1 Используя определение предела, проверьте, что $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3) = 7$.

Решение

▶ Пусть $f(x) = 2x + 3$ и ε — некоторое положительное число ($\varepsilon > 0$). Рассмотрим неравенство

$$|f(x) - 7| < \varepsilon \qquad (1)$$

и найдем такое число $\delta > 0$, чтобы при $|x - 2| < \delta$ выполнялось неравенство (1).

Поскольку $|f(x) - 7| = |(2x + 3) - 7| = |2x - 4| = |2\ (x - 2)| = 2|x - 2|$, неравенство $|f(x) - 7| < \varepsilon$ равносильно неравенству $2|x - 2| < \varepsilon$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому если выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x - 2| < \delta$ будет выполняться неравенство $|(2x + 3) - 7| < \varepsilon$, а это значит, что $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3) = 7$. ◁

Замечание. Как видим, выбор δ зависит от заданного значения ε. Чтобы подчеркнуть этот факт, иногда записывают $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Напомним, что точка a, в которой рассматривается предел, может принадлежать области определения функции $f(x)$ (как в рассмотренной задаче 1), а может и не принадлежать ей.

Задача 2 Докажите, что $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Решение

▶ Пусть $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда на области определения функции $f(x)$ (при $x \neq 3$) имеем

$$|f(x) - 6| = \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |(x+3) - 6| = |x - 3|.$$

Если выбрать $\delta = \varepsilon$, то получим, что $|f(x) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$, как только $|x - 3| < \delta$. Поэтому согласно определению предела $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$. ◁

Задача 3 Докажите, что предел постоянной функции равен самой постоянной.

Решение

▶ Пусть $f(x) = c$ для всех x из некоторой окрестности точки a. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ при всех x из выбранной окрестности точки a. Поэтому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$. ◁

Задача 4 Докажите, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Решение

▶ Пусть $f(x) = x$ и выбрано некоторое положительное число ε. Если взять $\delta = \varepsilon > 0$, то получим, что $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, как только $|x - a| < \delta$. Поэтому согласно определению предела $\lim\limits_{x \to a} x = a$. ◁

Задача 5 Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

Решение

▶ Пусть $f(x) = x^2$ и выбрано некоторое положительное число ε. Если взять $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, получим, что $|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon$, как только $|x - 0| = |x| < \delta$. Поэтому согласно определению предела $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. ◁

2. Основные теоремы о пределах функции. Понятие бесконечно малой функции при $x \to a$. С помощью определения предела функции можно доказать также **т е о р е м у о п р е д е л е с у м м ы д в у х ф у н к ц и й.**

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов, если пределы слагаемых существуют:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

● Зададим $\varepsilon > 0$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что при $|x - a| < \delta_1$ (кроме, возможно, $x = a$) выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Аналогично, если $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при $|x - a| < \delta_2$ (кроме, возможно, $x = a$) выполняется неравенство

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Если выбрать как число δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 (это можно обозначить так: $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то это будет общая часть двух окрестностей точки a, и при $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$) будут выполняться оба неравенства (1) и (2). Тогда

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Из этого следует, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$, то есть

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x). \quad \bigcirc$$

Для доказательства свойств пределов произведения и частного функций удобно ввести понятие *бесконечно малой функции*.

Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называется бесконечно малой функцией при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=0.$$

С учетом определения предела функции в точке это определение можно сформулировать так.

Функция $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки a, называется бесконечно малой функцией при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), *выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.*

Например,

1) $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ (см. задачу 4), следовательно, $f(x) = x$ — бесконечно малая функция при $x \to 0$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ (см. задачу 5), следовательно, $f(x) = x^2$ — бесконечно малая функция при $x \to 0$.

З а м е ч а н и е. **Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то это эквивалентно тому, что $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.**

● Действительно, если рассмотреть функцию

$$\alpha(x) = f(x) - A, \tag{3}$$

то $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}A=A-A=0$. Это означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Но тогда равенство (3) эквивалентно равенству $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$. ○

Свойства бесконечно малых функций

1. *Если функции* $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — *бесконечно малые при $x \to a$, то их сумма* $\alpha(x) + \beta(x)$ *и произведения* $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ *и* $c\cdot\alpha(x)$ (*где* $c = \text{const}$) *также являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$.*
2. *Если функция $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ и для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, то функция $\alpha(x)$ также бесконечно малая при $x \to a$.*

Докажем эти свойства.

1. По условию функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Тогда, используя формулу предела суммы, имеем

$$\lim_{x\to a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x\to a} \alpha(x) + \lim_{x\to a} \beta(x) = 0 + 0 = 0.$$

Из этого следует, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая функция. В то же время, если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_1$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Аналогично, если функция $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, это означает, что, например, для $\varepsilon = 1$ можно указать такое $\delta_2 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_2$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < 1. \tag{5}$$

Если выбирать как число δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 ($\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то это будет общая часть двух окрестностей точки a, и при $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$) будут выполняться оба неравенства (4) и (5). Тогда $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. Из этого следует, что $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Для обоснования того, что функция $c \cdot \alpha(x)$ (где $c = \text{const}$) является бесконечно малой, достаточно заметить, что при $c = 0$ это утверждение выполняется $\left(\lim\limits_{x\to a} 0 \cdot \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0\right)$, а при $c \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогда $|c \cdot \alpha(x)| = |c| \cdot |\alpha(x)| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. Из этого следует, что функция $c \cdot \alpha(x)$ (где $c = \text{const}$) — бесконечно малая при $x \to a$.

2. По условию функция $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_1$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Кроме того, по условию при всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|. \tag{7}$$

Тогда, если выбирать как число δ_2 наименьшее из чисел δ_1 и δ ($\delta_2 = \min\{\delta_1; \delta\}$), то это будет общая часть двух окрестностей точки a, и при $|x - a| < \delta_2$ (кроме, возможно, $x = a$) будут выполняться оба неравенства (6) и (7). Получаем $|\alpha(x)|\,|\beta(x)| < \varepsilon$. Из этого следует, что функция $\alpha(x)$ также является бесконечно малой при $x \to a$. ○

Докажем **теорему о пределе произведения.**

● Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то это эквивалентно тому, что $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.
Аналогично, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то это эквивалентно тому, что $g(x) = B + \beta(x)$, где $\beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.
Тогда
$f(x)g(x) = (A + \alpha(x))\cdot(B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$.
Учитывая свойства бесконечно малых функций, получаем, что функция $\varphi(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая. Следовательно, $f(x)\cdot g(x) = AB + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция. Из этого следует, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = AB$, то есть

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$ ○

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют.

Отметим, что, используя метод математической индукции, правила вычисления пределов суммы и произведения можно обобщить для любого количества слагаемых или множителей.

Используя правило вычисления предела произведения, получаем: $\lim\limits_{x\to a}(cf(x)) = \lim\limits_{x\to a} c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x) = c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x),$$

то есть постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Для доказательства **теоремы о пределе частного** $\frac{f(x)}{g(x)}$ сначала рассмотрим случай, когда $f(x) = 1$, то есть докажем утверждение:

$$\boxed{\text{если } \lim_{x\to a} g(x) = B \text{ (где } B \neq 0\text{), то } \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}}\,.$$

● По условию $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ (где $B \neq 0$). Это эквивалентно тому, что $g(x) = B + \beta(x)$, где $\beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (кроме, возможно, $x = a$), выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}. \qquad (8)$$

Используя неравенство $|a+b| \geqslant |a| - |b|$ и неравенство (8), получаем $|g(x)| = |B + \beta(x)| \geqslant |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$. Следовательно, для выбранных значений x

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2}. \tag{9}$$

Рассмотрим для выбранных значений x выражение $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right|$ и учтем неравенство (9):

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)| \cdot |B|} = \frac{|\beta(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} < \frac{2}{|B|^2} \cdot |\beta(x)| = \left|\frac{2}{B^2} \cdot \beta(x)\right|.$$

Поскольку функция $\beta(x)$ — бесконечно малая (при $x \to a$), то функция $\frac{2}{B^2} \cdot \beta(x)$ также бесконечно малая $\left(\frac{2}{B^2} = \text{const}\right)$. Тогда по свойству 2 бесконечно малых функций (с. 96) получаем, что функция $\gamma(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}$ — бесконечно малая при $x \to a$, а значит, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

Отсюда, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ (где $B \neq 0$), то, используя формулу предела произведения и полученную формулу, имеем: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$. Следовательно,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \left(\text{где } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right).$$ ○

Предел частного двух функций равен частному их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.

Задача 6 Найдите $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 5x + 6)$.

Решение

▶ Используя теоремы о пределах суммы, разности и произведения, получаем:

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \to 1} (3x^2) - \lim_{x \to 1} (5x) + \lim_{x \to 1} 6 = 3 \lim_{x \to 1} x^2 - 5 \lim_{x \to 1} x + 6 =$$
$$= 3(\lim_{x \to 1} x) \cdot (\lim_{x \to 1} x) - 5 \cdot 1 + 6 = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 5 + 6 = 4.$$

Ответ: 4. ◁

Пример 7 Найдите $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

Решение

▶ Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя.

Разложим числитель на множители: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$.

Поскольку при нахождении предела в точке 3 рассматриваются только значения $x \neq 3$, то дробь можно сократить на $x - 3 \neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Ответ: 1. ◁

Теорема о единственности предела. ***Если функция $f(x)$ в точке a имеет предел, то этот предел единственный.***

● Доказательство (методом от противного). Пусть в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет два разных предела A и B. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_1$ $(x \neq a)$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \tag{10}$$

а для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_2$ $(x \neq a)$, выполняется неравенство

$$|f(x) - B| < \varepsilon. \tag{11}$$

Из чисел δ_1 и δ_2 можно выбрать наименьшее. Обозначим его буквой δ $(\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\})$. Если взять некоторое $x \neq a$, удовлетворяющее неравенству $|x - a| < \delta$, то для него выполняются оба неравенства (10) и (11). Вследствие того, что модуль суммы двух слагаемых не превышает суммы модулей этих слагаемых, имеем:

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leqslant |A - f(x)| + |f(x) - B| =$$
$$= |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Поскольку ε — любое положительное число, то возьмем $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4}$. Тогда получим $|A-B| < \frac{1}{2}|A-B|$, то есть $|A - B| < 0$. Но это неравенство не может выполняться. Следовательно, наше предположение о существовании двух пределов неверно, поэтому $A = B$. ○

При изучении пределов иногда приходится выполнять предельный переход в неравенствах с помощью следующей теоремы.

Теорема. ***Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$, причем в некоторой окрестности точки a (кроме, возможно, самой точки a) справедливо неравенство $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то $A \leqslant B$.***

● Доказательство (методом от противного). Допустим противоположное, то есть что $A > B$. Выберем две ε-окрестности точек A и B, а именно: $(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$ и $(B - \varepsilon;\ B + \varepsilon)$, которые не пересекаются, то есть

$$A - \varepsilon > B + \varepsilon. \tag{12}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то найдется δ_1-окрестность точки a, в которой $|f(x)-A|<\varepsilon$, то есть

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon. \tag{13}$$

Также существует δ_2-окрестность точки a, в которой $|\varphi(x)-B|<\varepsilon$, то есть

$$B-\varepsilon<\varphi(x)<B+\varepsilon. \tag{14}$$

Из чисел δ_1 и δ_2 выберем наименьшее и обозначим его через δ. Тогда, учитывая неравенства (12)—(14), в δ-окрестности точки a имеем:

$$\varphi(x)<B+\varepsilon<A-\varepsilon<f(x),$$

поэтому $f(x)>\varphi(x)$, но это противоречит условию. Значит, $A\leqslant B$. ○

Следствие (предел промежуточной функции). ***Если*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g(x)=B}$ ***и некоторой окрестности точки а (кроме, возможно, самой точки а) справедливо неравенство***

$$\boldsymbol{\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)} \tag{15}$$

и существует $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$**, то** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)=B}$**.**

● Доказательство. Поскольку все условия последней теоремы выполняются, то выполним предельный переход в неравенствах (15). Получаем $B\leqslant\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant B$. Но эти неравенства могут выполняться только в том случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$, что и требовалось доказать. ○

6.2. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

В приведенном в п. 6.1 определении предела функции в точке аргумент x принимает все значения из δ-окрестности точки a (кроме, возможно, $x=a$) как слева, так и справа от точки a.

Если при нахождении предела рассматривать значения x только слева от точки a, то такой предел называют ***левым***, или ***левосторонним***, и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$; а если рассматривать значения x только справа от точки a, то такой предел называют ***правым***, или ***правосторонним***, и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$.

Левосторонние и правосторонние пределы называются ***односторонними пределами***. Для случая, когда рассматривают односторонние пределы в точке $x=0$ (то есть при $x\to 0$), запись упрощают и записывают для левостороннего предела $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ или $f(-0)$, а для правостороннего — $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(+0)$.

Сформулируем теперь определение односторонних пределов.

Определение. **Число B_+ называется *правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке a*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x из области определения функции, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, выполняется неравенство**

$$|f(x) - B_+| < \varepsilon. \tag{1}$$

Аналогично определяется число $B_- = f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ — *левосторонний предел функции $f(x)$ в точке a*. Здесь неравенство

$$|f(x) - B_-| < \varepsilon \tag{2}$$

должно выполняться для всех x из левой части δ-окрестности точки a, то есть при $a - \delta < x < a$.

Отметим связь между односторонними пределами и пределом функции в некоторой точке a.

- Если число B является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, то неравенство

$$|f(x) - B| < \varepsilon \tag{3}$$

справедливо для всех значений x из δ-окрестности точки a ($x \neq a$). Тогда это неравенство справедливо для всех значений x из левой половины указанной δ-окрестности и для всех x из ее правой половины, то есть существуют левосторонний и правосторонний пределы в точке a и эти пределы равны B. Поэтому, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, то

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x), \text{ то есть } B_- = B_+ = B.$$

Имеет место и обратное утверждение: если выполняется равенство $B_- = B_+ = B$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Действительно, если $B_- = B_+ = B$, то неравенство (1), определяющее существование правостороннего предела функции, выполняется и слева от точки a (согласно неравенству (2)), но тогда неравенство (1) фактически обращается в неравенство (3), поэтому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

В связи с этим можно сформулировать такой критерий.

Критерий существования предела. **Для того чтобы в точке $x = a$ существовал предел B функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали левосторонний предел функции $f(x)$, то есть $B_- = f(a - 0)$, и правосторонний предел функции $f(x)$, то есть $B_+ = f(a + 0)$, и чтобы они равнялись друг другу: $B_- = B_+ = B$, при этом**

$$\lim_{x \to a} f(x) = B.$$

Задача 1 Выясните существование предела функции $f(x) = |x|$ в точке 0.

Решение

▶ Функция $f(x) = |x|$ определена на всей числовой прямой (см. рис. 2.8). Поскольку $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$, то при $x < 0$ $f(x) = -x$, поэтому

$f(-0)=\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(-x)=0.$ Аналогично $f(+0)=\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} x=0.$

Таким образом, $f(-0)=f(+0)=0$. Поскольку односторонние пределы в точке 0 совпадают, то предел функции $f(x)$ существует и равен их общему значению, то есть $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0.$ ◁

Задача 2 Выясните существование предела в точке 2 для функции $f(x)=\begin{cases}2x+3 \text{ при } x\leqslant 2,\\ 4 \text{ при } x>2.\end{cases}$

Решение

▶ Заданная функция определена на всей числовой прямой. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x=2$.

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}(2x+3)=7$ (см. задачу 1 из п. 6.1, с. 94);

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} 4=4$ (см. задачу 3 из п. 6.1, с. 95).

Значит, $f(2-0)\neq f(2+0)$, поэтому заданная функция не имеет предела в точке $x=2$ и не является непрерывной в этой точке. (График этой функции изображен на рис. 6.1) ◁

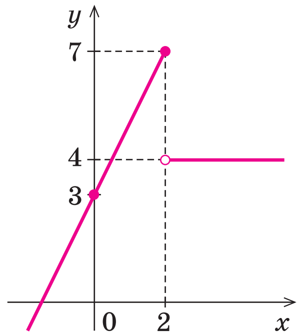


Рис. 6.1

6.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним, что функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Доказанные свойства предела функции позволяют обосновать **свойства непрерывных функций**, приведенные в табл. 1 (с. 6):

если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то **сумма, произведение и частное непрерывных в точке a функций непрерывны в точке a** (частное в случае, когда делитель $g(a)\neq 0$).

● Действительно, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ и } \lim_{x\to a} g(x)=g(a).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)$, а это и означает, что функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке a. Аналогично обосновывается непрерывность произведения и частного двух непрерывных функций. ○

Согласно определению, *непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает выполнение следующих условий:*

1) *функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;*
2) *у функции $f(x)$ должен существовать предел в точке x_0;*

3) *предел функции в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке.*

Например, функция $f(x) = x^2$ определена на всей числовой прямой и $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$. Поскольку $f(1) = 1$, то значение $f(x) = x^2$ в точке 1 совпадает с пределом этой функции при $x \to 1$, поэтому по определению функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 1$.

Используя определения левостороннего и правостороннего пределов, можно дать определения левосторонней и правосторонней непрерывности функции, а именно: функцию называют ***непрерывной слева*** в точке a, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$, и ***непрерывной справа*** в точке a, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$.

Например, функция $f(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x, непрерывна в любой точке, кроме целочисленных значений аргумента x, в которых она непрерывна справа (рис. 6.2).

Функцию называют *непрерывной на интервале* $(a; b)$, если она непрерывна в каждой его точке. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Если равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ в точке a не выполняется, функцию $f(x)$ называют ***разрывной*** в точке a (а сама точку — ***точкой разрыва*** функции $f(x)$).

Например, функция из задачи 2 является разрывной в точке 2.

Если рассмотреть функцию $y = [x]$ ($[x]$ — *целая часть* x, то есть наибольшее целое число, которое не превышает x), то эта функция является разрывной в каждой целочисленной точке (рис. 6.3).

Аналогично для функции $y = \{x\}$ ($\{x\}$ — *дробная часть* x, то есть разность $x - [x]$) точками разрыва являются все целочисленные значения аргумента x (см. рис. 6.2).

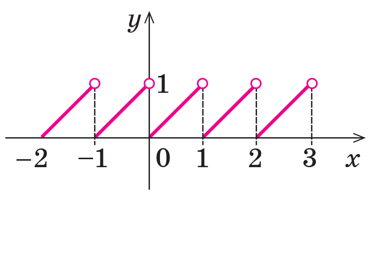


Рис. 6.2

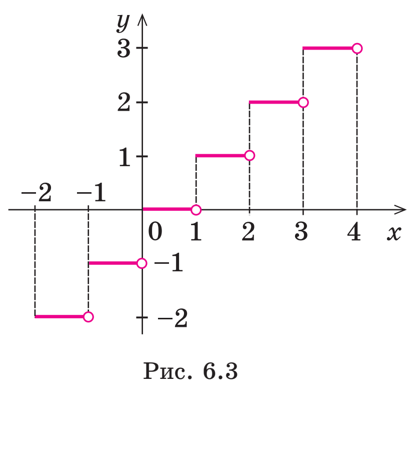


Рис. 6.3

Понятие непрерывности функции можно связать с понятиями приращения функции и аргумента.

Пусть задана функция $f(x)$ с областью определения $D(f) = (a;\ b)$ и пусть x_0 — некоторое значение аргумента из интервала $(a;\ b)$. Если $x \in (a;\ b)$ — другое фиксированное значение аргумента, то разность $x - x_0$ называют ***приращением аргумента*** и обозначают Δx, то есть $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

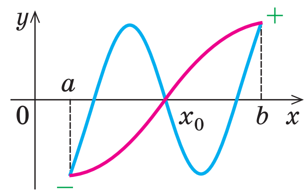
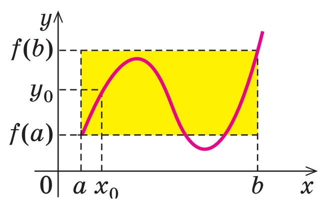
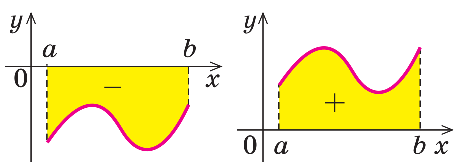
Разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют ***приращением функции f*** в точке x_0 и обозначают Δf.

Очевидно, что в случае, когда x стремится к x_0, приращение аргумента стремится к нулю: $\Delta x \to 0$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то по определению $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, а это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

Из последнего соотношения получаем, что в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. Учитывая это свойство, мы строим график непрерывной функции в виде сплошной линии.

Представление о непрерывной функции как о функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, хорошо подтверждается свойствами непрерывных функций, которые доказываются в курсах математического анализа. Приведем примеры таких свойств (табл. 11).

Таблица 11

Свойства непрерывных функций	Иллюстрация
1. Если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю.	
2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$, принимает все промежуточные значения между ее значениями $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка.	
3. Если на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале функция сохраняет постоянный знак.	

Отметим, что известные вам элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения. Графики таких функций изображаются сплошными кривыми на любом интервале, который полностью входит в область определения (именно на этом свойстве и основывается способ построения графика функции «по точкам»). Например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на любом интервале, который не содержит точку 0 (см. рис. 5.19).

Свойства непрерывных функций позволяют корректно обосновать метод интервалов решения неравенств, приведенный в учебнике для 10 класса. Поэтому метод интервалов можно использовать при решении любых неравенств вида $f(x) \gtrless 0$, где $f(x)$ — непрерывная в любой точке своей области определения функция (см. также с. 7–10).

6.4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Часто при изучении функций возникает необходимость найти предел функции на бесконечности, то есть найти такое число B (если оно существует), к которому стремится функция $f(x)$ при неограниченном возрастании аргумента x или когда x, увеличиваясь по абсолютной величине, остается отрицательным.

Рассмотрим функцию $f(x)=2+\frac{1}{x^2+1}$. Очевидно, что при увеличении x знаменатель дроби увеличивается, поэтому значение дроби становится как угодно малым по абсолютной величине. Таким образом, значение функции $f(x)$ при очень больших значениях аргумента x мало отличается от числа 2. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет своим пределом число 2 при $x \to \infty$, и пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$.

Определение. **Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Число B называют пределом $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число* $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.**

Это записывается так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$.

Поведение функции $f(x)$ может быть разное при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, поэтому при исследовании свойств функции иногда отдельно рассматривают $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Эти пределы определяются аналогично определению предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только условие $|x| > M$ заменяется соответственно на $x < -M$ и $x > M$.

* Заметим, что число M, вообще говоря, зависит от ε, и поэтому его часто обозначают $M(\varepsilon)$.

Кроме рассмотренных случаев конечных пределов функции $f(x)$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), иногда используется также понятие бесконечного предела. Например, функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$, которая определена для всех $x \neq 0$ (рис. 6.4), принимает сколь угодно большие значения при $x \to 0$. В этом случае говорят, что функция в точке $x = 0$ имеет бесконечный предел, и пишут: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

Определение. ***Будем считать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.***

Аналогично определяют обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ (только в первом случае условие $|f(x)|>M$ заменяют на $f(x) > M$, а во втором — на $f(x) < -M$).

В математике также используется понятие бесконечного предела при $x \to \infty$, то есть предела типа $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, который определяется так: *если для любого числа $M > 0$ существует такое число $M_0 > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M_0$, выполняется условие $|f(x)| > M$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет* ***бесконечный предел на бесконечности.***

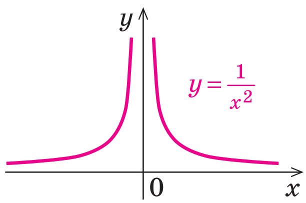


Рис. 6.4

Например, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$. Это равенство выражает известное свойство функции $f(x) = x^2$, которая неограниченно возрастает при увеличении значений $|x|$.

Задача 1 Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}$.

Решение

▶ Вынесем в числителе и знаменателе наивысшую степень переменной за скобки и сократим числитель и знаменатель на x^3. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Ответ: -2. ◁

Задача 2 Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

Решение

Умножим и разделим разность, которая стоит под знаком предела, на сумму $\sqrt{x^2+5}+x$. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}=0.$$

Ответ: 0. ◁

Напомним, что в случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, функция называется бесконечно малой при $x \to a$. Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция называется *бесконечно большой при* $x \to a$. Аналогично определяют ***бесконечно малые*** и ***бесконечно большие функции*** при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Отметим, что в случае, когда функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ для $x \neq a$ из некоторой окрестности точки a, функция $\frac{1}{f(x)}$ будет бесконечно большой при $x \to a$. И наоборот, если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$ (это свойство было использовано на последнем этапе вычисления предела в задаче 2).

Например, функция $f(x) = x$ — бесконечно малая при $x \to 0$ и бесконечно большая при $x \to \infty$ (а также при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$). Тогда функция $f(x)=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$) и бесконечно большой при $x \to 0$ (аналогично при $x \to -0$ и при $x \to +0$).

Предел последовательности

В математике достаточно распространены *бесконечные последовательности*, то есть *функции* $y = f(n)$, *заданные на множестве натуральных чисел* N. Чтобы подчеркнуть, что аргумент такой функции принимает значения только из множества натуральных чисел, его обозначают не x, а n. Для последовательности $f(n)$ довольно часто возникает необходимость найти ее предел при неограниченном возрастании аргумента n (при $n \to +\infty$). Определение этого предела в основном аналогично определению предела функции на бесконечности.

Определение. **Число *B* называют *пределом последовательности* $f(n)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n > M$ выполняется неравенство $|f(n) - B| < \varepsilon$.**

Обозначают это так: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = B$ (имея в виду $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = B$).

Для пределов последовательностей выполняются все известные вам теоремы о пределах (только в их формулировках слово «функция» следует заменить на слово «последовательность»).

Задача 3 Найдите предел последовательности $f(n) = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2}$.

Решение

▶ Как и в задаче 1, вынесем в числителе и знаменателе за скобки наивысшую степень переменной, сократим числитель и знаменатель на n, а затем используем теоремы о пределах. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Ответ: 1. ◁

6.5. ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ $\frac{\sin x}{x}$ ПРИ $x \to 0$

Этот предел обычно называют *замечательным пределом* (точнее *первым замечательным*), поскольку его часто используют при нахождении пределов тригонометрических функций.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

● Доказательство. Можно считать, что x принимает только положительные значения. Это следует из того, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ является четной, так как

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Поскольку $x \to 0$, то, начиная с некоторого значения, x попадает в первую четверть. Поэтому можно считать, что $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$. На рис. 6.5 изображена единичная окружность, на которой отложен угол в x радиан и проведена линия тангенсов CD. Учитывая определения синуса и тангенса через единичную окружность, получаем $AB = \sin x$, а $CD = \operatorname{tg} x$. Сравним площади треугольников OBC, ODC и сектора OBC. Они удовлетворяют неравенству

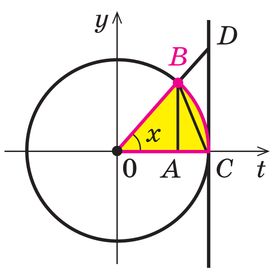


Рис. 6.5

$$S_{\triangle\, OBC} \leqslant S_{\text{сект. } OBC} \leqslant S_{\triangle\, ODC}.$$

(1)

Поскольку

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2};$$

$$S_{\Delta ODC} = \frac{1}{2} OC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

а площадь кругового сектора OBC равна: $S_{\text{сект. } OBC} = \frac{x}{2}$, то, подставив эти значения в неравенство (1), получим

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Так как $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем $\sin x > 0$ (и $\cos x > 0$). Поэтому, разделив неравенство (2) на $\sin x$, получим: $1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$. Отсюда $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ (учитывая четность функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$, получаем, что это неравенство выполняется и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0\Big)$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, то по теореме о пределе промежуточной функции имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ○

Кроме предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, часто используют некоторые его вариации.

Задача 4 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

► Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{(\cos x)\, x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. ◁

Задача 5 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

► Доказательство. Очевидно, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$. Действительно,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}} = 1.$$

Поскольку $\alpha \to 0$, то, начиная с некоторого значения, α попадает в интервал $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $(\alpha \neq 0)$. Обозначим $\sin\alpha = x$, тогда $\alpha = \arcsin x$. Если $\alpha \to 0$, то $x = \sin\alpha \to 0$. В этих обозначениях предел $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$ обращается в предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$. ◁

Задача 6 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

▶ Доказательство. Сначала рассмотрим предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1.$$

Поскольку $\alpha\to 0$, то, начиная с некоторого значения, α попадает в интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $(\alpha\neq 0)$. Обозначим $\operatorname{tg}\alpha = x$, тогда $\alpha=\operatorname{arctg} x$. Если $\alpha\to 0$, то $x=\operatorname{tg}\alpha\to 0$. В этих обозначениях из предела $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$ получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1. \ \triangleleft$$

6.6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

При вычислении предела функции обычно применяют не определение предела, а теоремы о пределах и приемы, которые мы использовали при нахождении пределов в приведенных выше задачах. Обобщим эти приемы, оформив результат в виде таблицы.

Таблица 12

Вычисление предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	
Основные этапы	Пример
1. Пользуясь непрерывностью функции $f(x)$, пробуем подставить значение $x=a$ в $f(x)$.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2}{x-1}=\dfrac{9-2^2}{2-1}=5$
2. Если вычисляется предел при $x\to\infty$, то пробуем в числителе и знаменателе вынести за скобки наивысшую степень переменной.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{9x^4+2x}}{x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0-\sqrt{9+0}}{1-0+0}=-3$

Окончание табл. 12

<table>
<tr><td colspan="2">3. Если в результате подстановки $x = a$ получаем выражение вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, то:</td></tr>
<tr><td>а) пробуем разложить на множители числитель и знаменатель</td><td>$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=$$ $$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6$$</td></tr>
<tr><td>б) если в числитель и знаменатель входят выражения с квадратным или кубическим корнями, то умножаем числитель и знаменатель на соответствующие выражения, чтобы избавиться от корней (иногда вводят замену: выражение с корнем обозначают новой переменной)</td><td><u>1-й способ</u> $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-16\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$ $$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=$$ $$=\lim_{x\to 4}(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)=(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)=32$$ <u>2-й способ</u>. Обозначим $\sqrt{x}=t$. Отсюда $x = t^2$. При $x \to 4$ значение $t \to 2$. Тогда $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(t^2-4)(t^2+4)}{t-2}=$$ $$=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=$$ $$=\lim_{t\to 2}(t+2)(t^2+4)=(2+2)(2^2+4)=32$$</td></tr>
<tr><td>в) если под знаком предела стоят тригонометрические или обратные тригонометрические функции, то такие пределы приводят к первому замечательному пределу или к его вариациям: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$</td><td>$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\cos 2x\cdot\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x\cdot\arcsin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$ $$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5x\cdot\cos 2x\cdot\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right)\cdot 3x}{\left(\frac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right)\cdot 7x\cdot\left(\frac{\arcsin 4x}{4x}\right)\cdot 4x}.$$ Сокращаем числитель и знаменатель на переменные, стоящие за скобками. Учитывая, что $\lim_{x\to 0}\cos 2x=1$, и воспользовавшись первым замечательным пределом и его вариациями, получаем, что искомый предел равен: $$\frac{1\cdot 5\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 7\cdot 1\cdot 4}=\frac{15}{28}.$$</td></tr>
</table>

Вопросы для контроля

1. Дайте определение предела функции в точке. Сформулируйте и докажите основные теоремы о пределе.
2. Дайте определение бесконечно малой функции при $x \to a$. Сформулируйте и докажите свойства бесконечно малых функций.
3. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела функции.
4. Сформулируйте и докажите свойство предела промежуточной функции.
5. Дайте определения правостороннего и левостороннего пределов функции $f(x)$ в точке a.
6. Сформулируйте и обоснуйте критерий существования предела.
7. Сформулируйте определение непрерывной функции.
   Сформулируйте и обоснуйте свойства суммы, произведения и частного непрерывных в точке a функций.
8. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах другие свойства непрерывных функций.
9. В каком случае точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$? Проиллюстрируйте это понятие на графиках функций.
10. Дайте определение предела функции на бесконечности и бесконечного предела функции. Приведите примеры.
11. Дайте определение предела последовательности. Приведите примеры.
12. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
13. Пользуясь табл. 12, предложите план вычисления следующих пределов:

    а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x}{x^3+2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$;

    г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

    Вычислите эти пределы.

Упражнения

1. Пользуясь определением предела функции, докажите справедливость равенства:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}(8-2x)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

2. Пользуясь определением предела последовательности, докажите справедливость равенства:

1) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{8n+7}{2n}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{9n-5}{3n}=3$.

3. Пользуясь теоремами о пределах, докажите, что:

1) многочлен $P(x)$ является непрерывной функцией при всех значениях x;

2) рациональная функция непрерывна при всех значениях x, для которых ее знаменатель не равен нулю.

4. В каких точках имеет разрыв функция (ответ обоснуйте):

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;

3) $\varphi(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $\psi(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$?

5. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+3)$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\sin 4x}{2x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x\arcsin 2x}{\sin 3x\cos 5x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-3x^2+4x-6}{7x^4-3x^3-5x+1}$.

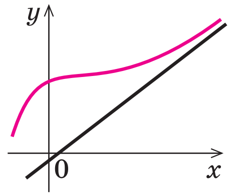
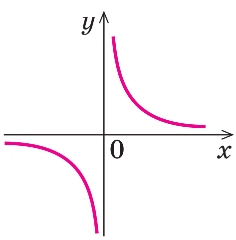
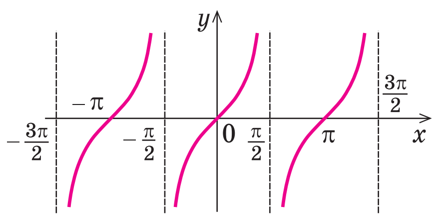
6. Решите неравенство методом интервалов:

1) $\dfrac{x^2-2x+1}{(2-x)x}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^3+2x^2-3x}{(x-1)(x-2)}\leqslant 0$; 3) $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{12+x-x^2}}\geqslant 0$;

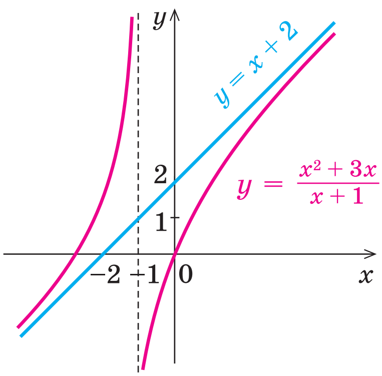
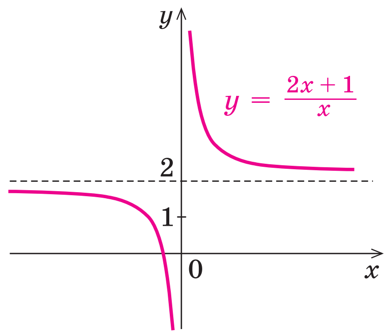
4) $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$; 5) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$; 6) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<3$.

§ 7 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Таблица 13

<table>
<tr><td colspan="2">1. Понятие асимптоты</td></tr>
<tr><td>Асимптота кривой — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при ее удалении в бесконечность.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вертикальные асимптоты ($x = a$) графика функции $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td>$x = a$ — вертикальная асимптота, если при $x \to a$ $f(x) \to \infty$</td><td>Вертикальная асимптота $x = a$ может быть в точке a, если точка a ограничивает открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции и вблизи точки a значения функции стремятся к бесконечности.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры вертикальных асимптот графиков функций</td></tr>
<tr><td>$y = \frac{1}{x}$</td><td>$\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$</td></tr>
<tr><td>$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
При $x \to +0$ $y \to +\infty$;
при $x \to -0$ $y \to -\infty$.
$x = 0$ — вертикальная асимптота
($y = 0$ — также асимптота, но горизонтальная)

</td><td>$D(y)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.
При $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ $y \to +\infty$;
при $x \to \frac{\pi}{2} + 0$ $y \to -\infty$.
$x = \frac{\pi}{2}$ — вертикальная асимптота
$\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right)$

</td></tr>
</table>

Окончание табл. 13

<table>
<tr><td colspan="2">3. Наклонные и горизонтальные асимптоты ($y = kx + b$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. Если $f(x)$ — дробно-рациональная функция, у которой степень числителя на единицу больше степени знаменателя (или равна ей), то выделяем целую часть дроби и используем определение асимптоты.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры</td></tr>
<tr><td>$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}=x+2-\frac{2}{x+1}.$
</td><td>$f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}.$
</td></tr>
<tr><td>При $x \to \infty$ $\frac{2}{x+1} \to 0$, тогда $f(x) \to x+2$.
Следовательно, $y = x + 2$ — наклонная асимптота (также $x = -1$ — вертикальная асимптота)</td><td>При $x \to \infty$ $\frac{1}{x} \to 0$, тогда $f(x) \to 2$.
Следовательно, $y = 2$ — горизонтальная асимптота (также $x = 0$ — вертикальная асимптота)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II. В общем случае уравнения наклонных и горизонтальных асимптот $y = kx + b$ можно получить с использованием формул
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Понятие асимптоты. Если кривая $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь, то асимптотой такой кривой называют прямую, к которой эта ветвь неограниченно приближается.

Другими словами, ***асимптота кривой* — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при ее удалении в бесконечность**

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными или наклонными.

Например, для графика функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 7.1) асимптотами будут оси координат, поскольку при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ график функции приближается к прямой $y = 0$: ось Ox — *горизонтальная асимптота*.

Когда функция стремится к $+\infty$ (или к $-\infty$), то кривая приближается к прямой $x = 0$: ось Oy — *вертикальная асимптота*.

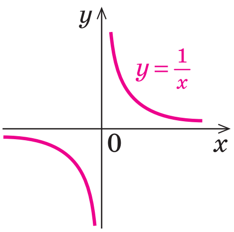


Рис. 7.1

Если рассмотреть функцию $y=x+\frac{1}{x}$, то при $x \to \infty$ выражение $\frac{1}{x}\to 0$. Вследствие этого график функции $y=x+\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ приближается к прямой $y = x$, поэтому эта прямая будет *наклонной асимптотой* графика функции $y=x+\frac{1}{x}$ (рис. 7.2) (график этой функции имеет также и вертикальную асимптоту $x=0$). Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту, поэтому не у каждого графика функции будет асимптота. Но исследование функции на наличие у ее графика асимптот позволяет уточнить свойства функции и поведение ее графика.

2. Вертикальные асимптоты. Если прямая $x = a$ — вертикальная асимптота, то по определению около точки a кривая должна иметь бесконечную ветвь, то есть предел данной функции при $x \to a$ (слева или справа) должен равняться бесконечности (∞). Исходя из непрерывности элементарных функций, которые рассматривались в школьном курсе математики, такими точками могут быть только точки, ограничивающие открытые (или полуоткрытые) промежутки области определения данной функции.

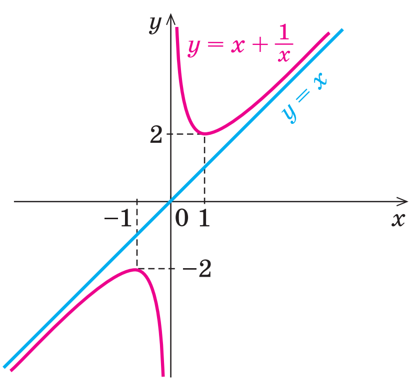


Рис. 7.2

Например, у функции $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ область определения ($x \neq 1$) имеет разрыв в точке $x = 1$ (область определения: $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ и точка 1 ограничивает открытые промежутки области определения). Можно предположить, что прямая $x = 1$ будет вертикальной асимптотой. Для того чтобы убедиться в этом, необходимо проверить, будет ли функция стремиться к бесконечности около точки 1 (слева или справа). Для этого рассмотрим

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Аналогично $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty$.

Таким образом, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, поскольку при стремлении функции к бесконечности ее график неограниченно приближается к прямой $x = 1$ (рис. 7.3).

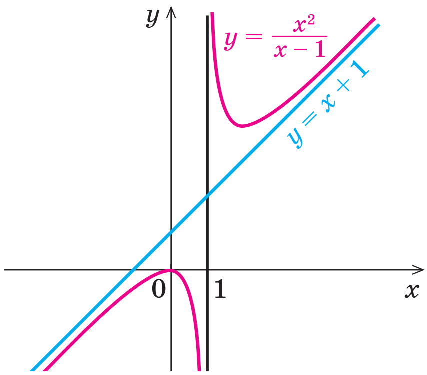


Рис. 7.3

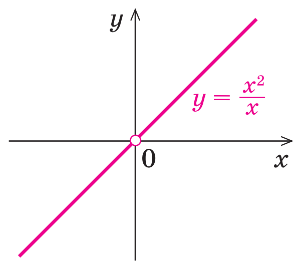


Рис. 7.4

Отметим, что не всегда в точке разрыва области определения функция будет иметь вертикальную асимптоту. Например, функция $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ имеет область определения $x \neq 0$, поэтому прямая $x = 0$ «подозрительна» на вертикальную асимптоту. Но $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to -0} x = 0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 0$. Следовательно, около прямой $x = 0$ функция $f(x)$ не стремится к бесконечности, и поэтому прямая $x = 0$ не является асимптотой графика данной функции (рис. 7.4).

3. Наклонные и горизонтальные асимптоты довольно просто находятся для графиков дробно-рациональных функций, у которых степень числителя на единицу больше степени знаменателя (или равна степени знаменателя). Для этого достаточно выделить целую часть заданной дроби и использовать определение асимптоты.

Например, еще раз рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Выделим целую часть: $f(x) = \dfrac{(x^2-1)+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

При $x \to \infty$ выражение $\dfrac{1}{x-1} \to 0$, то есть график нашей функции будет неограниченно приближаться к прямой $y = x + 1$ при $x \to \infty$. Из этого следует, что наклонной асимптотой графика данной функции* будет прямая $y = x + 1$ (рис. 7.3).

---

* Построение графиков таких функций рассмотрено в § 5.

Рассмотрим, как находятся наклонные и горизонтальные асимптоты в общем случае.

Пусть наклонной (или горизонтальной) асимптотой графика функции $y = f(x)$ является прямая $\boldsymbol{y = kx + b}$. По определению асимптоты при $x \to \infty$ график функции $f(x)$ неограниченно приближается к прямой $y = kx + b$. Другими словами, при $x \to \infty$ с любой точностью будет выполняться равенство

$$f(x) \approx kx + b. \tag{1}$$

Эта равенство не нарушится, если обе его части разделить на $x \neq 0$. Получим: $\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{b}{x}$.

При $x \to \infty$ отношение $\frac{b}{x} \to 0$, поэтому отношение $\frac{f(x)}{x} \to k$ при $x \to \infty$, то есть

$$\boldsymbol{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}. \tag{2}$$

Возвращаясь к формуле (1), получаем, что при $x \to \infty$ $b \approx f(x) - kx$, то есть

$$\boldsymbol{b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}. \ \bigcirc \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) дают возможность находить наклонные и горизонтальные асимптоты для графика любой функции $y = f(x)$ (при условии, что они существуют).

Отметим, что если у графика функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота, то ее уравнение будет $y = b$ (в этом случае $k = 0$). Но при $k = 0$ из формулы (3) получаем $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Следовательно, *если существует число* $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, *то график функции* $y = f(x)$ *имеет горизонтальную асимптоту* $y = b$.

Задача 1 Пользуясь общими формулами, найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение

▶ Будем искать наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$, где k и b находятся по формулам (2) и (3):

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Асимптотой графика данной функции будет прямая $y = kx + b$, то есть прямая $y = x + 1$. ◁

Задача 2 Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\sqrt{x^4+9}-x^2$.

Решение

▶ Область определения функции: x — любое действительное число, то есть $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$, или $D(f) = \boldsymbol{R}$. На всей области определения эта функция непрерывна, поэтому вертикальных асимптот график функции не имеет. Будем искать наклонные и горизонтальные асимптоты в виде $y = kx + b$. Тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+9}-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=0.$$

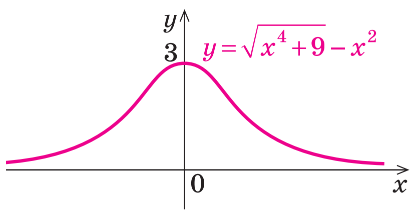


Рис. 7.5

Таким образом, заданная функция имеет только горизонтальную асимптоту $y = 0$ ($y = 0 \cdot x + 0$) (рис. 7.5). ◁

Иногда график функции $y = f(x)$ может иметь разные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. В этом случае при использовании формул (2) и (3) приходится отдельно находить значения k и b при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Вопросы для контроля

1. Объясните смысл понятия «асимптота кривой».
2. Приведите примеры графиков функций, имеющих вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Объясните, почему соответствующие прямые являются асимптотами.
3. Обоснуйте формулы для нахождения коэффициентов горизонтальных и наклонных асимптот ($y = kx + b$) графика функции $y = f(x)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Упражнения

Найдите асимптоты графиков функций (если они существуют) **(1–4)**.

1. 1) $y=\frac{3}{x}$; 2) $y=4-\frac{1}{x-3}$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$; 4) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

2. 1) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$; 4) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$.

3. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\frac{3x^2+5}{x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

4. 1) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$; 2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$; 3) $y=\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$; 4) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

§ 8 ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Таблица 14

1. Формулы производных обратных тригонометрических функций	
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$
$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
2. Доказательство тождеств с помощью производной	
Условие постоянства функции	
Функция $f(x)$ является постоянной ($f(x)=C$) на интервале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ во всех точках этого интервала (а если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то $f(x)=C$ на $[a;\ b]$).	
Схема доказательства тождеств вида $\varphi(x)=g(x)$ с помощью производной	Пример Доказать, что $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$.
1. Рассмотреть вспомогательную функцию $(x)=\varphi(x)-g(x)$ (на ее области определения или заданном интервале). **2. Проверить, что $f'(x)=0$ на этом интервале.** **3. Исходя из условия постоянства функции, сделать вывод, что функция $f(x)=C$ на рассматриваемом интервале.**	▶ Рассмотрим функцию $f(x)=\arccos x-\frac{\pi}{2}+\arcsin x.$ Ее область определения $D(f)=[-1;\ 1].$ На интервале $(-1;\ 1)$ $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$ Тогда по условию постоянства функции получаем, что $f(x)=C$ при всех значениях x из интервала $(-1;\ 1)$, а с учетом того, что функция $f(x)$ непрерывна

Окончание табл. 14

4. Чтобы найти постоянную C, нужно подставить вместо x любое значение x_0 из рассматриваемого интервала и доказать, что $C = f(x_0) = 0$. **5. Сделать следующий вывод: поскольку** $$f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0,$$ **то** $$\varphi(x) = g(x).$$	на своей области определения, и при всех значениях x из отрезка $[-1; 1]$. Чтобы найти значение C, подставим в равенство $f(x) = C$ вместо x, например, значение $x = 0$. Получаем: $$C = f(0) = \arccos 0 - \frac{\pi}{2} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 = 0.$$ Значит, при всех значениях x из отрезка $[-1; 1]$ $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x = 0$. Отсюда $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Формулы производных обратных тригонометрических функций докажем, используя определение этих функций (существование их производных примем без доказательства).

● Например, если $y = \arcsin x$, то согласно определению арксинуса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin y = x$. Продифференцируем обе части этого равенства, рассматривая производную $\sin y$ как производную сложной функции. Получаем $(\sin y)' = x'$, то есть $\cos y \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = \frac{1}{\cos y}$.

Но $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Учитывая, что $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где $\cos y \geqslant 0$, получаем $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Тогда при $-1 < x < 1$ (в этом случае $1 - x^2 \neq 0$ и $1 - x^2 > 0$) имеем $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Поэтому при $-1 < x < 1$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad ○$$

● Аналогично, если $y = \arccos x$, то согласно определению арккосинуса $y \in [0; \pi]$ и $\cos y = x$. Продифференцируем обе части этого равенства, рассматривая производную $\cos y$ как производную сложной функции. Получаем $(\cos y)' = x'$, то есть $(-\sin y) \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = -\frac{1}{\sin y}$. Но $\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Учитывая, что $y \in [0; \pi]$, где $\sin y \geqslant 0$, получаем $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. Тогда при $-1 < x < 1$ (в этом случае $1 - x^2 \neq 0$ и $1 - x^2 > 0$) имеем $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому при $-1 < x < 1$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$ ○

● Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. По определению арктангенса $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} y = x$. После дифференцирования последнего равенства получаем $(\operatorname{tg} y)' = x'$, то есть $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = \cos^2 y$. Но $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$. Тогда $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. Следовательно, при любых значениях x

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$ ○

● Аналогично, если $y = \operatorname{arcctg} x$, то согласно определению арккотангенса $y \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} y = x$. После дифференцирования последнего равенства получаем $(\operatorname{ctg} y)' = x'$, то есть $-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$. Отсюда $y' = -\sin^2 y$. Но $1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}$. Тогда $\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. Следовательно, при любых значениях x

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$ ○

2. Доказательства тождеств с помощью производной. В п. 5.1 (с. 47) рассмотрено условие постоянства функции: если на некотором интервале $(a; b)$ $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала, то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале. Если функция $f(x)$ также непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она постоянна и на отрезке $[a; b]$.

Это условие можно использовать для доказательства некоторых тождеств.

Задача Докажите тождество $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение

▶ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = 2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1)$$

и найдем ее производную при $0 < x < 1$:

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

По условию постоянства функции получаем, что $f(x) = C$ при всех значениях x из интервала $(0; 1)$, а учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения, — и при всех x из отрезка $[0; 1]$. Чтобы найти C, отметим, что равенство $f(x) = C$ выполняется тождественно, то есть при любом значении x. Подставляя в это равенство $x = 0$, получаем:

$$C = f(0) = 2\arccos 0 - \arccos(-1) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \pi = 0.$$

Поэтому $C = 0$ и, значит, $f(x) = 0$, то есть $2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) = 0$ или $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$. ◁

Приведенное решение позволяет предложить следующую *схему доказательства тождеств вида* $\varphi(x) = g(x)$ *с помощью производной.*

1. *Рассмотреть вспомогательную функцию* $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ *(на ее области определения или на заданном интервале).*
2. *Проверить, что* $f'(x) = 0$ *на этом интервале.*
3. *Пользуясь признаком постоянства функции, сделать вывод, что* $f(x) = C$ *на рассмотренном интервале (если функция* $f(x)$ *также непрерывна на отрезке, содержащем концы рассмотренного интервала, то* $f(x) = C$ *на этом отрезке).*
4. *Чтобы найти* C*, подставить вместо* x *любое значение* x_0 *из рассмотренного промежутка и доказать, что* $C = f(x_0) = 0$.
5. *Сделать вывод: поскольку* $f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0$*, то* $\varphi(x) = g(x)$.

Пример использования этой схемы приведен в п. 2 табл. 14 на с. 121.

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы нахождения производных обратных тригонометрических функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.
2. Обоснуйте формулы нахождения производных обратных тригонометрических функций.
3. Объясните на примере схему использования производной для доказательства тождеств.

Упражнения

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$; 2) $f(x) = \operatorname{arcctg}^2 x$;
3) $f(x) = x^4 \arcsin 2x$; 4) $f(x) = \arcsin 3x + \arccos 4x$;
5) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; 6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \arcsin 2x$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

3. Докажите тождество, используя производную:

1) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < x \leqslant 1$;

4) $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $-1 \leqslant x < 0$;

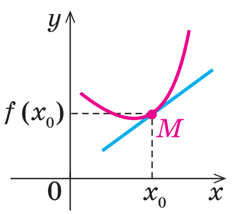
5) $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$;

6) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$, $x \geqslant 1$;

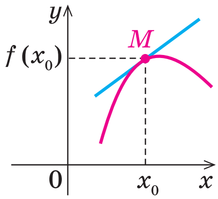
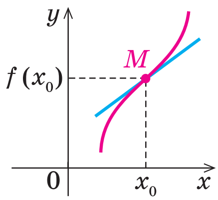
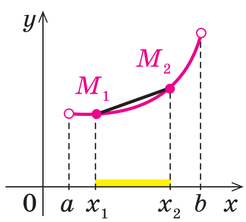
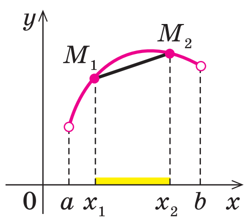
7) $(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$.

§ 9 ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПОНЯТИЕ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ

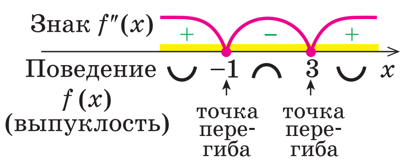
Таблица 15

<table>
<tr><td colspan="3">1. Понятие второй производной</td></tr>
<tr><td>Понятие</td><td>Запись</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка. Эта производная, в свою очередь, является функцией аргумента x. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют второй производной функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ (или y'')</td><td>$y = f(x)$,
$y' = f'(x)$,
$y'' = (f'(x))' = (y')'$.</td><td>$y = x^5$,
$y' = 5x^4$,
$y'' = (5x^4)' = 20x^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Понятие выпуклости и точек перегиба дифференцируемой на интервале $(a; b)$ функции</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Функцию $f(x)$ называют выпуклой вниз на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит выше касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 15

	Функцию $f\,(x)$ называют ***выпуклой вверх*** на интервале $(a;\ b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a;\ b)$ и $x \neq x_0$ **график функции лежит ниже касательной к этому графику** в точке $(x_0;\ f\,(x_0))$.
	Точку M графика непрерывной функции $f\,(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую **кривая меняет направление выпуклости,** называют ***точкой перегиба графика функции.*** В точке перегиба график функции переходит с одной стороны касательной на другую. Абсциссу x_0 точки M перегиба графика функции $f\,(x)$ называют ***точкой перегиба функции*** $f\,(x)$. Точка x_0 разделяет интервалы выпуклости функции.
3. Свойство графиков выпуклых функций	
	Если функция $f\,(x)$ **выпуклая вниз** на интервале $(a;\ b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале, то на интервале $(x_1;\ x_2)$ график функции $y = f\,(x)$ лежит ниже отрезка M_1M_2, то есть **график лежит ниже хорды.**
	Если функция $f\,(x)$ **выпуклая вверх** на интервале $(a;\ b)$, а точки M_1 и M_2 — точки ее графика на этом интервале, то на интервале $(x_1;\ x_2)$ график функции $y = f\,(x)$ лежит выше отрезка M_1M_2, то есть **график лежит выше хорды.**
4. Достаточные условия выпуклости функции, имеющей вторую производную на заданном интервале $(a;\ b)$	
Условие выпуклости вниз	Условие выпуклости вверх
Если на интервале $(a;\ b)$ дважды дифференцируемая функция $f\,(x)$ имеет положительную вторую производную (то есть $f''\,(x) > 0$ при всех $x \in (a;\ b)$), то ее **график на интервале $(a;\ b)$ направлен выпуклостью вниз.**	Если на интервале $(a;\ b)$ дважды дифференцируемая функция $f\,(x)$ имеет отрицательную вторую производную (то есть $f''\,(x) < 0$ при всех $x \in (a;\ b)$), то ее **график на интервале $(a;\ b)$ направлен выпуклостью вверх.**

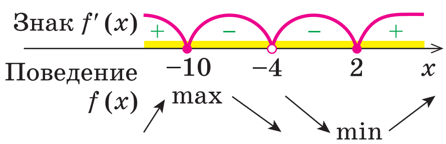
Продолжение табл. 15

<table>
<tr><td colspan="2">5. Нахождение точек перегиба функции,
имеющей вторую производную на заданном интервале</td></tr>
<tr><td>Необходимое условие</td><td>Достаточное условие</td></tr>
<tr><td>В точках перегиба функции $f\ (x)$ ее вторая производная равна нулю или не существует.</td><td>Пусть функция $f\ (x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную. Тогда, если $f''\ (x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a;\ b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f\ (x)$.</td></tr>
<tr><td>x_0 — точка перегиба функции $f\ (x)$ $\Rightarrow$ $f''\ (x_0) = 0$ или $f''\ (x_0)$ не существует</td><td>В точке x_0 знак $f''\ (x)$ меняется с «+» на «−» или с «−» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка перегиба функции $f\ (x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Исследование функции $y = f\ (x)$ на выпуклость и точки перегиба</td></tr>
<tr><td>Схема</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>1. Найти область определения функции.</td><td>Исследовать функцию $f\ (x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$ на выпуклость и точки перегиба.
▶ 1. Область определения: $D\ (f) = \mathbf{R}$. Функция $f\ (x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения (как многочлен).</td></tr>
<tr><td>2. Найти вторую производную.</td><td>2. $f'\ (x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$.
$f''\ (x) = 12x^2 - 24x - 36 =$
$= 12\ (x^2 - 2x - 3)$.</td></tr>
<tr><td>3. Найти внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует.</td><td>3. $f''\ (x)$ существует и непрерывна на всей области определения функции $f\ (x)$.
$f''\ (x) = 0;\ 12\ (x^2 - 2x - 3) = 0;$
$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$</td></tr>
<tr><td>4. Отметить полученные точки на области определения функции, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.</td><td>4.

</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 15

5. Записать нужный результат исследования (интервалы и характер выпуклости и точки перегиба).	5. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$ график функции направлен выпуклостью вниз ($f''(x) > 0$), а на интервале $(-1; 3)$ — выпуклостью вверх ($f''(x) < 0$). Точки перегиба: $x = -1$ и $x = 3$ (в этих точках $f''(x)$ меняет знак). ◁
7. Расширенная схема исследования функции для построения ее графика	
Схема	Пример
1. Найти область определения функции.	Постройте график функции $$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}.$$ ▶ 1. Область определения: $x \neq -4$ ($D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$).
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной (или периодической).	2. Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, и не периодическая.
3. Точки пересечения графика с осями координат (если их можно найти).	3. На оси Oy значение $x = 0$, тогда $y = 0$. На оси Ox значение $y = 0$: $\frac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$. Тогда $x = 0$, $x = 5$ — абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.
4. Производная и критические точки функции.	4. $f'(x) = \frac{(2x-5)(x+4) - (x^2 - 5x)}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 20}{(x+4)^2}$. Производная существует на всей области определения функции $f(x)$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения. $f'(x) = 0$. При $x \neq -4$ имеем $x^2 + 8x - 20 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -10$ — критические точки.
5. Промежутки возрастания и убывания, точки экстремума (и значения функции в этих точках).	5. Отметим критические точки на области определения и найдем знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (см. рисунок).

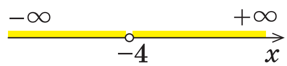
Продолжение табл. 15

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Следовательно, функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -10]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутках $[-10; -4)$ и $(-4; 2]$. Так как в критической точке (-10) производная меняет знак с «+» на «–», то $x = -10$ — точка максимума. В критической точке 2 производная меняет знак с «–» на «+», поэтому $x = 2$ — точка минимума. Итак,

$x_{max} = -10$, тогда $y_{max} = f(-10) = -25$;

$x_{min} = 2$, тогда $y_{min} = f(2) = -1$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

6. Поведение функции на концах промежутков области определения и асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные).
</td>
<td>
6.


При $x \to -4$ слева $f(x) \to \left(\frac{26}{-0}\right) \to -\infty$,

а при $x \to -4$ справа $f(x) \to \left(\frac{26}{+0}\right) \to +\infty$

(то есть $\lim\limits_{x \to -4-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -4+0} f(x) = +\infty$).

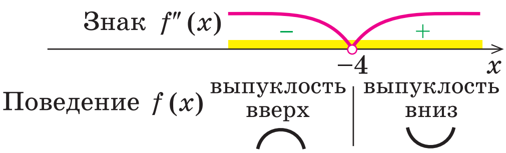
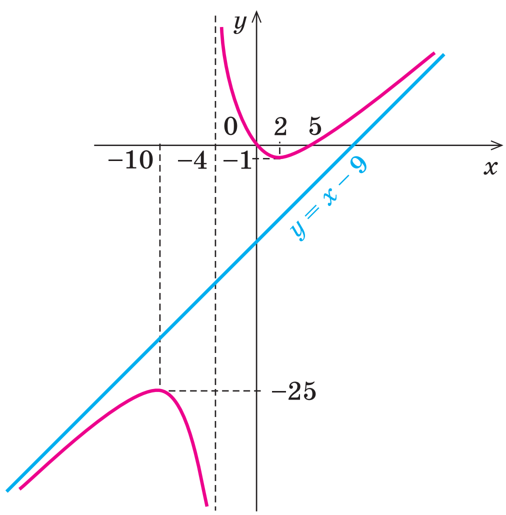
Следовательно, прямая $x = -4$ — *вертикальная асимптота*.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+4} = \frac{x(x+4) - 9(x+4) + 36}{x+4} =$$

$$= x - 9 + \frac{36}{x+4}.$$

При $x \to \infty$ $\frac{36}{x+4} \to 0$, тогда $f(x) \to x + 9$, то есть прямая $y = x + 9$ — *наклонная асимптота*.
</td>
</tr>
</table>

Окончание табл. 15

<table>
<tr>
<td>7. Вторая производная и исследование функции на выпуклость и точки перегиба (и значения функции в этих точках).</td>
<td>7. $$f''(x) = (f'(x))' =$$
$$= \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4} = \frac{72}{(x+4)^3}.$$
Поскольку $f''(x) \neq 0$, то знак второй производной может меняться только в точке $x = -4$. Получаем такие знаки второй производной и соответствующий характер выпуклости (см. рисунок).

</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Найти координаты дополнительных точек графика функции
(если нужно уточнить его поведение).</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-7</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-28</td><td>7</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>9. На основании проведенного исследования построить график функции.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Вторая производная и производные высших порядков. Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка, то эту производную можно рассматривать как функцию от аргумента x. Если функция $f'(x)$ является дифференцируемой, то ее производную называют *второй производной* от $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ (или y'').

Например, если $f(x) = 2x - \sin x$, то $f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x$, тогда $f''(x) = (2 - \cos x)' = \sin x$.

По аналогии со второй производной определяют и производные высших порядков. Производную от второй производной функции $f(x)$ называют *третьей производной*, или *производной третьего порядка* этой функции, и т. д. Таким образом, *производной n-го порядка функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка этой функции*. Производную n-го порядка функции $f(x)$ обозначают $f^{(n)}(x)$.

Например, если $f(x) = x^5$, то $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$; $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$; $f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2$; $f^{(4)}(x) = (60x^2)' = 120x$; $f^{(5)}(x) = (120x)' = 120$; $f^{(6)}(x) = (120)' = 0$*.

2. Выпуклость функции. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, а в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет конечную производную. Тогда к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ можно провести касательную. В зависимости от расположения графика функции относительно касательной функцию называют *выпуклой вниз*, если график расположен выше касательной (рис. 9.1), или *выпуклой вверх*, если график расположен ниже касательной (рис. 9.2). Соответственно и сам график в первом случае называют *выпуклым вниз*, а во втором — *выпуклым вверх*. Приведем соответствующие определения и свойства для функции $f(x)$, определенной и дифференцируемой дважды на интервале $(a; b)$.

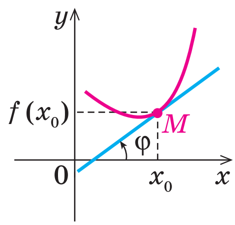


Рис. 9.1

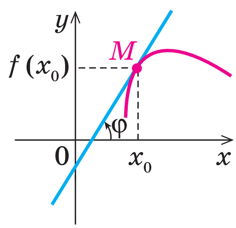


Рис. 9.2

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит выше касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* на интервале $(a; b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ график функции лежит ниже касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

---

* Четвертую, пятую и шестую производные функции $f(x)$ часто обозначают соответственно $f^{\mathrm{IV}}(x)$, $f^{\mathrm{V}}(x)$, $f^{\mathrm{VI}}(x)$.

Отметим, что на интервале, где функция $f(x)$ является выпуклой вниз, ее производная $f'(x)$ возрастает. Действительно, как видно из рис. 9.1, при возрастании аргумента x величина угла φ, который касательная к графику функции $f(x)$ образует с положительным направлением оси Ox, возрастает, принимая значения между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ также возрастает.

На интервале, где функция $f(x)$ является выпуклой вверх, ее производная $f'(x)$ убывает. Действительно, как видно из рис. 9.2, при возрастании аргумента x величина угла φ, который касательная к графику функции $f(x)$ образует с положительным направлением оси Ox, убывает, принимая значения между $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ также убывает.

Можно доказать, что имеют место и обратные утверждения.

1. *Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой вниз на этом интервале.*
2. *Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой вверх на этом интервале.*

Эти свойства позволяют сформулировать *достаточные условия выпуклости функции (и графика функции).*

1. **Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет положительную вторую производную (то есть $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$), то ее график на интервале $(a; b)$ направлен выпуклостью вниз.**
2. **Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $f(x)$ имеет отрицательную вторую производную (т. е. $f''(x) < 0$ при всех $x \in (a; b)$), то ее график на интервале $(a; b)$ направлен выпуклостью вверх.**

Действительно, пусть, например, $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$. Если рассматривать $f'(x)$ как функцию от x, то $f''(x)$ является производной этой функции ($f''(x) = (f'(x))'$). Тогда, имея положительную производную, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. Следовательно, по свойству 1 функция $f(x)$ является выпуклой вниз на этом интервале, а значит, и ее график будет выпуклым вниз на интервале $(a; b)$. Аналогично обосновывается и второе достаточное условие.

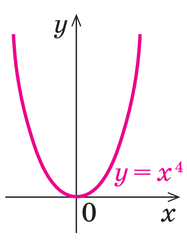


Рис. 9.3

Отметим, что эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми. Например, функция $y = x^4$ выпуклая вниз на всей числовой прямой (рис. 9.3), хотя в точке $x = 0$ ее вторая производная $y'' = 12x^2$ равна нулю.

Обратим внимание, что в случае, когда функция $f(x)$ *выпуклая вниз* на интервале $(a; b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале (рис. 9.4), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит ниже отрезка M_1M_2. Этот отрезок по аналогии с отрезком, соединяющим две точки дуги окружности, часто называют *хордой* кривой. Следовательно, в этом случае на интервале $(x_1; x_2)$ *график лежит ниже хорды*.

Если функция $f(x)$ *выпуклая вверх* на интервале $(a; b)$ и точки M_1 и M_2 являются точками ее графика на этом интервале (рис. 9.5), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит выше отрезка M_1M_2, то есть *график лежит выше хорды*.

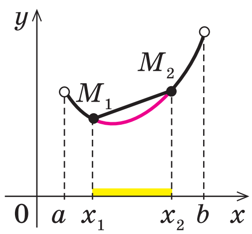


Рис. 9.4

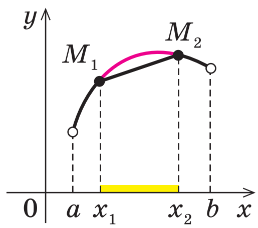


Рис. 9.5

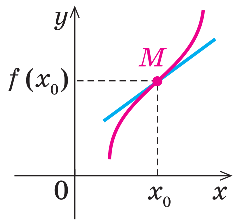


Рис. 9.6

3. Точки перегиба

Точку M графика непрерывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую кривая изменяет направление выпуклости, называют *точкой перегиба графика функции*.

Учитывая определения выпуклости функции вверх и выпуклости функции вниз (с. 131), получаем, что касательная к графику функции по одну сторону от точки касания расположена выше графика, а по другую сторону — ниже графика, то есть в точке перегиба касательная пересекает кривую (рис. 9.6), а сам график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Отметим, что абсциссу x_0 точки перегиба графика функции $f(x)$ называют *точкой перегиба функции*. Тогда x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз функции $f(x)$.

Точки перегиба дважды дифференцируемой функции можно находить с помощью ее второй производной. Приведем *достаточное условие существования точки перегиба*.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

● Действительно, если функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную, то она имеет на этом интервале и первую производную. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на заданном интервале и существует касательная к графику функции в точке с абсциссой x_0. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$ (на заданном интервале). Тогда, используя достаточные условия выпуклости функции, получаем, что при $x < x_0$ график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вверх, а при $x > x_0$ — выпуклостью вниз. Таким образом, точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$. Аналогично рассматривается и случай, когда $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$. И в этом случае x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$. ○

Для нахождения промежутков выпуклости функции и точек ее перегиба следует учесть следующее.

● Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a; b)$ и в каждой точке этого интервала имеет вторую производную $f''(x)$, которая является непрерывной функцией на заданном интервале. Если для точки x_0 из этого интервала $f''(x_0) > 0$, то, учитывая непрерывность функции $f''(x)$, получаем, что в некоторой δ-окрестности этой точки вторая производная также будет положительной, то есть для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ значения $f''(x) > 0$. Но тогда в интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ направлена выпуклостью вниз и точка x_0 не может быть точкой перегиба функции $f(x)$. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ направлена выпуклостью вверх и точка x_0 не может быть точкой перегиба функции $f(x)$. Следовательно, в рассмотренном случае точкой перегиба может быть только такая точка x_0, в которой вторая производная равна нулю. Получаем *необходимое условие существования точек перегиба* (для дважды дифференцируемой функции):

если функция $f(x)$ задана на интервале $(a; b)$, в каждой точке этого интервала имеет вторую производную $f''(x)$, которая является непрерывной функцией на заданном интервале, и имеет точку перегиба x_0, то $f''(x_0) = 0$. ○

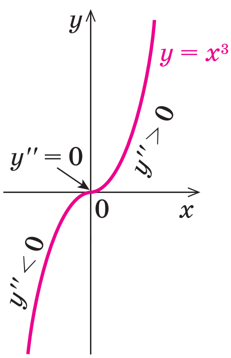


Рис. 9.7

Например, функция $y = x^3$ (рис. 9.7) имеет точку перегиба $x = 0$, в которой ее вторая производная равна нулю. Действительно, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''(0) = 0$. При $x > 0$ значение $y''(x) > 0$: график направлен выпуклостью вниз; при $x < 0$ значение $y''(x) < 0$: график направлен выпуклостью вверх. Следовательно, 0 — точка перегиба функции.

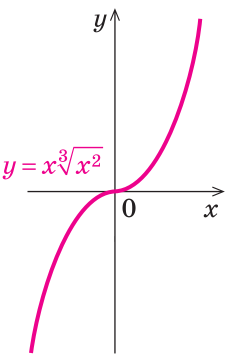


Рис. 9.8

Отметим, что *точка перегиба функции $f(x)$ может быть и в той точке x_0, в которой $f''(x_0)$ не существует* (но $f'(x_0)$ существует).

Например, функция $y = x\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 9.8) определена на всей числовой прямой, имеет перегиб в точке 0, в которой существует ее первая производная

$y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ ($y'(0) = 0$), но не существует вторая производная

$$y'' = \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} \quad (y''(0) \text{ не существует}).$$

При $x > 0$ значения $y''(x) > 0$ и график направлен выпуклостью вниз, а при $x < 0$ значения $y''(x) < 0$ и график направлен выпуклостью вверх. Следовательно, 0 — точка перегиба функции.

Для нахождения промежутков выпуклости функции $f(x)$ необходимо решить неравенства $f''(x) > 0$ и $f''(x) < 0$ на области определения функции $f(x)$. Поскольку $f''(x)$ также можно рассматривать как функцию переменной x, то в случае, когда функция $f''(x)$ является непрерывной в каждой точке своей области определения, для решения этих неравенств можно использовать метод интервалов, точнее, его обобщение, основанное на следующем свойстве: *точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, разбивают область определения функции $f(x)$ на промежутки, в каждом из которых $f''(x)$ сохраняет постоянный знак.*

Учитывая это свойство и рассмотренные условия выпуклости функции и существования ее точек перегиба, можно выделить такую *схему исследования функции $f(x)$ на выпуклость и точки перегиба.*

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти вторую производную.*
3. *Найти внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует**.
4. *Отметить полученные точки на области определения функции, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения.*
5. *Записать необходимый результат исследования (интервалы и характер выпуклости, точки перегиба).*

Применение этой схемы показано в табл. 15 (с. 128–130).

Использование второй производной позволяет более детально исследовать свойства функции для построения ее графика. В табл. 15 приведена расширенная схема (по сравнению со схемой в табл. 6 на с. 67, 68) исследования функции для построения ее графика и пример ее использования. В эту схему дополнительно включено нахождение интервалов выпуклости функции, точек перегиба и асимптот графика функции (см. также § 7).

---

* По аналогии с критическими точками (см. с. 53) те внутренние точки области определения, в которых вторая производная равна нулю или не существует, часто называют критическими точками второго рода, или критическими точками по второй производной.

Вопросы для контроля

1. Используя график функции, объясните, какая функция называется выпуклой вверх, а какая — выпуклой вниз.
2. Используя график функции, объясните, какая точка называется точкой перегиба графика функции. Что называют точкой перегиба функции?
3. Объясните, как располагаются на соответствующем интервале графики выпуклых вверх и выпуклых вниз функций относительно хорды, соединяющей две точки этого графика.
4. Сформулируйте достаточные условия выпуклости вверх и выпуклости вниз функции, имеющей вторую производную на заданном интервале. Приведите примеры.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования точек перегиба функции, которая имеет вторую производную на заданном интервале. Приведите примеры.
6. Охарактеризуйте схему исследования функции на выпуклость и точки перегиба.
7. Охарактеризуйте расширенную схему исследования функции для построения ее графика.

Упражнения

1. Найдите вторую производную данной функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

3) $f(x) = x \cos x$; 4) $f(x) = x^2 \sin x$.

2. Найдите интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз и точки перегиба для функции:

1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$; 2) $f(x) = \cos 2x$ при $-\pi < x < \pi$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$; 4) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

3. Исследуйте функцию по расширенной схеме и постройте ее график:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$; 6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$;

7) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$.

§ 10 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕРАВЕНСТВ

10.1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В учебнике для 10 класса было рассмотрено использование свойств функций для решения некоторых уравнений. Иногда для выяснения необходимых свойств функций целесообразно использовать производную. Это прежде всего нахождение промежутков возрастания и убывания функции и оценка области значений функции (приемы такого исследования приведены в табл. 16).

Таблица 16

<table>
<tr><td colspan="2">1. Оценка значений левой и правой частей уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ориентир</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$</td><td>Если нужно решить уравнение вида $f(x)=g(x)$ и выяснилось, что $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно только в случае, если $f(x)$ и $g(x)$ одновременно равны a.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Решите уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.
▶ Оценим значения левой и правой частей уравнения:
$g(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geqslant 2$, $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Исследуем функцию $f(x)$ на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. $D(f)$: $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 3-x\geqslant 0, \end{cases}$ то есть $1\leqslant x\leqslant 3$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Производная не существует в точках 1 и 3 из области определения функции $f(x)$, но эти точки не являются внутренними для $D(f)$, а следовательно, и критическими.
$$f'(x)=0,$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=0,$$
$$\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1},\ 3-x=x-1,$$
$$x=2 \text{ — критическая точка } (f'(2)=0).$$
Непрерывная функция* $f(x)$ задана на отрезке [1; 3], поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах этого отрезка,
</td></tr>
</table>

* В точке $x=1$ функция $f(x)$ непрерывна справа, а в точке $x=3$ — слева (см. с. 104).

Продолжение табл. 16

или в его критической точке. Поскольку $f(1) = f(3) = \sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 2$, то есть $f(x) \leqslant 2$*. Кроме того, $g(x) \geqslant 2$. Следовательно, заданное уравнение равносильно системе

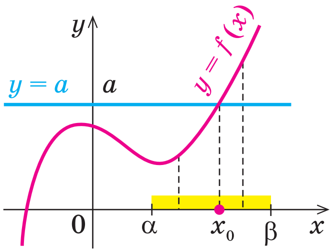
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2, \\ (x-2)^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2. ◁

2. Использование возрастания и убывания функций

Схема решения уравнения

1. *Подобрать один или несколько корней уравнения.*
2. *Доказать, что других корней это уравнение не имеет* (*используя теоремы о корнях уравнения, или оценку значений левой и правой частей уравнения, или следующее свойство функций: возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения*).

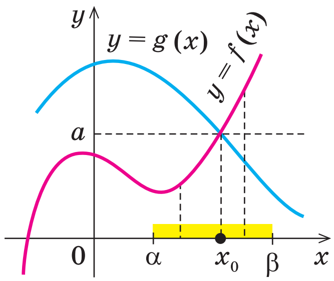
Теоремы о корнях уравнения	Пример
1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не больше чем один корень на этом промежутке.  	1. ▶ Уравнение $2x + \cos x = \pi$ имеет корень** $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \pi,\ \text{то есть } \pi = \pi\right)$. Других корней это уравнение не имеет, поскольку функция $f(x) = 2x + \cos x$ возрастающая (ее производная $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при всех значениях x из области определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$). *Ответ:* $\frac{\pi}{2}$.

---

* Мы могли бы точнее оценить область значений непрерывной функции $f(x)$: поскольку $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = f(3) = \sqrt{2}$, то $\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant 2$, но для приведенного решения достаточно оценки $f(x) \leqslant 2$.

** Корни в примерах 1 и 2 получены подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений: $x = 0, \pm 1, \pm 2$ …, которые подставляют в заданное уравнение, а для тригонометрических уравнений проверяют также «табличные» значения: $x = 0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \ldots$.

Окончание табл. 16

2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не больше одного корня на этом промежутке.  	2. ▶ Уравнение $3x^2-\frac{1}{x}=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ имеет корень $x = 1$ $\left(3-1=\frac{4}{\sqrt{1}+1}\right.$, то есть $2 = 2$). Других корней это уравнение не имеет, поскольку его ОДЗ: $x > 0$ и на этой ОДЗ функция $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}$ возрастающая $\left(f'(x)=6x+\frac{1}{x^2}>0\right.$ при $x > 0$), а функция $g(x)=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$ убывающая при $x > 0$ $\left(g'(x)=\frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}<0\right.$ при $x > 0$). *Ответ:* 1. ◁

Объяснение и обоснование

В табл. 16 показано применение производной для реализации способов решения уравнений, которые связаны с использованием свойств функций и были рассмотрены и обоснованы в учебнике для 10 класса. Напомним, что эти способы чаще используются в тех случаях, когда мы не можем решить заданное уравнение с помощью равносильных преобразований или уравнений-следствий (или если такое решение очень громоздкое). Отметим, что использование производной также позволяет при решении некоторых уравнений реализовать следующую схему рассуждений.

Допустим, мы смогли подобрать два корня заданного уравнения вида $f(x) = a$. Чтобы доказать, что уравнение не имеет других корней, достаточно убедиться, что функция $f(x)$ имеет только два промежутка возрастания или убывания (на каждом из которых уравнение $f(x) = a$ может иметь только один корень). Если функция $f(x)$ дифференцируема на каком-либо промежутке, то характер возрастания или убывания функции $f(x)$ на этом промежутке может измениться только в ее критических точках. Например, если в точке x_0 возрастание дифференцируемой (а следовательно, и непрерывной) функции изменилось на убывание, то это означает, что в точке x_0 функция имеет максимум, но тогда x_0 — критическая точка. Таким образом, *для того чтобы дифференцируемая на интервале функция имела на этом интервале не больше двух про-*

межутков возрастания или убывания, достаточно, чтобы на этом интервале она имела только одну критическую точку.

Пример Решим с помощью указанной выше схемы уравнение

$$x^8 - 255x + 254 = 0.$$

Решение

▶ Данное уравнение имеет корни $x = 1$ $(1^8 - 255 \cdot 1 + 254 = 0,\ 0 = 0)$ и $x = 2$ $(2^8 - 255 \cdot 2 + 254 = 0,\ 0 = 0)$. Докажем, что других корней это уравнение не имеет. Для этого достаточно доказать, что функция $f(x) = x^8 - 255x + 254$ имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Действительно, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = 8x^7 - 255$ существует на всей области определения функции $f(x)$. Если $f'(x) = 0$, то $8x^7 - 255 = 0$, $x = \sqrt[7]{\dfrac{255}{8}} = x_0$ — единственная критическая точка функции $f(x)$. Если отметить эту критическую точку на области определения функции $f(x)$ (на множестве $\boldsymbol{R}$), то область определения разобьется на два промежутка, в каждом из которых функция будет или возрастать, или убывать (на промежутке $(-\infty;\ x_0]$ функция $f(x)$ убывает, а на промежутке $[x_0;\ +\infty)$ — возрастает). Тогда в каждом из этих промежутков уравнение $f(x) = 0$ может иметь не больше одного корня, то есть всего заданное уравнение может иметь не больше двух корней. Два корня этого уравнения мы уже подобрали. Следовательно, данное уравнение имеет только эти два корня: $x = 1$ и $x = 2$.

Ответ: 1, 2. ◁

Аналогичные рассуждения для случая, когда для уравнения вида $f(x) = a$ удается подобрать три корня, приведены в задаче 2 на с. 142, 143.

При решении неравенств вида $f(x) \gtrless 0$ методом интервалов описанные выше приемы решения уравнений с использованием производной часто приходится применять для нахождения нулей функции $f(x)$ (см. задачу 5, с. 144).

Примеры решения задач

Задача 1 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 2(1 + \cos 2\pi x). \qquad (1)$$

Комментарий

Поскольку у нас нет формул, которые позволяли бы преобразовывать одновременно и иррациональные, и тригонометрические выражения, то попробуем решить заданное уравнение, используя свойства соответствующих функций. В частности, оценим область значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Для функции, стоящей в правой части уравнения, это легко сделать и без производной, а для исследования функции, стоящей в левой части уравнения, можно использовать производную (см. решение).

Решение

▶ ОДЗ заданного уравнения: $x > 0$. Оценим значения левой и правой частей уравнения. Поскольку $\cos 2\pi x$ принимает все значения от (-1) до 1, то выражение $1 + \cos 2\pi x$ принимает все значения от 0 до 2, а функция $g(x) = 2(1 + \cos 2\pi x)$ — все значения от 0 до 4. Значит, $0 \leqslant g(x) \leqslant 4$.

Функцию $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ исследуем с помощью производной.

$D(f) = (0; +\infty)$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$ — существует на всей области определения функции $f(x)$.

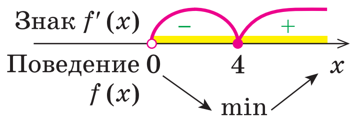


Рис. 10.1

$f'(x) = 0$, $\frac{x-4}{2x\sqrt{x}} = 0$, $x = 4$ — критическая точка. Отмечаем ее на области определения функции $f(x)$ и находим знаки производной в каждом из полученных промежутков (рис. 10.1).

Непрерывная функция $f(x)$ имеет на интервале $(0; +\infty)$ только одну критическую точку, и это точка минимума (в ней производная меняет знак с «−» на «+»). Следовательно, в этой точке функция принимает свое наименьшее значение: $f(4) = 4$. Таким образом, $f(x) \geqslant 4$.

Учитывая, что $g(x) \leqslant 4$, заданное уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = 4, \\ g(x) = 4. \end{cases}$ Но значение 4 функция $f(x)$ принимает только при $x = 4$, что удовлетворяет и второму уравнению системы ($g(4) = 2(1 + \cos 8\pi) = 4$).

Итак, полученная система (а значит, и заданное уравнение) имеет единственный корень: $x = 4$.

Ответ: 4. ◁

Отметим, что уравнение (1) можно решить еще одним способом, описанным в учебнике для 10 класса под названием «Ищи квадратный трехчлен», в котором предлагается по*пробовать рассмотреть заданное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или относительно какой-либо функции).*

▶ Заданное уравнение можно записать так: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 2(1 + \cos 2\pi x) = 0$.

Замена $\sqrt{x} = t$, где $t > 0$, дает уравнение $t + \frac{4}{t} - 2(1 + \cos 2\pi x) = 0$, которое при $t > 0$ равносильно уравнению

$$t^2 - 2(1 + \cos 2\pi x)t + 4 = 0. \qquad (2)$$

Если уравнение (2) рассмотреть как квадратное относительно переменной t, то для существования корней его дискриминант должен быть неотрицательным. Следовательно, $D = 4\ (1 + \cos 2\pi x)^2 - 16 \geqslant 0$. Тогда $(1 + \cos 2\pi x)^2 \geqslant 4$, а учитывая, что $1 + \cos 2\pi x \geqslant 0$ всегда, получаем $1 + \cos 2\pi x \geqslant 2$, тобто $\cos 2\pi x \geqslant 1$. Но в последнем неравенстве знак «больше» не может выполняться (значения косинуса не бывают больше 1), следовательно,

$$\cos 2\pi x = 1. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) преобразуется в уравнение $t^2 - 4t + 4 = 0$, откуда $(t - 2)^2 = 0$, $t = 2$. Обратная замена дает: $\sqrt{x} = 2$, следовательно, $x = 4$, что удовлетворяет уравнению (3).

Ответ: 4. ◁

Задача 2 Решите уравнение

$$x^7 - 42\, x^2 - x + 42 = 0. \tag{1}$$

Комментарий

Данное уравнение можно решить, используя методы приближенного вычисления корней, но сначала попробуем решить его, используя свойства соответствующих функций. В частности, *попробуем подобрать корни заданного уравнения* $f\,(x) = 0$ *и доказать, что других корней оно не имеет*. Последовательно подставляя $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$, выясняем, что $f\,(-1) = 0$, $f\,(1) = 0$, $f\,(2) = 0$, то есть уравнение $f\,(x) = 0$ имеет три корня. Чтобы доказать, что других корней нет, достаточно доказать, что у функции $f\,(x)$ не больше трех промежутков возрастания или убывания; если же учитывать непрерывность $f\,(x)$ на всей числовой прямой, то достаточно доказать, что у нее не больше двух критических точек, то есть уравнение $f'\,(x) = 0$ имеет не больше двух корней. Рассматривая теперь уравнение $f'\,(x) = 0$, мы после его преобразования можем провести аналогичные рассуждения для двух корней (как это было сделано в примере на с. 139).

Решение

▶ Обозначим $f\,(x) = x^7 - 42\, x^2 - x + 42$. Поскольку $f\,(-1) = 1 - 42 - 1 + 42 = 0$, $f\,(1) = -1 - 42 + 1 + 42 = 0$, $f\,(2) = 128 - 168 - 2 + 42 = 0$, то уравнение $f\,(x) = 0$ имеет три корня: 0, 1, 2. Докажем, что других корней уравнение (1) не имеет. Для этого достаточно доказать, что у функции $f\,(x)$ есть не больше трех промежутков возрастания или убывания, если же учитывать непрерывность функции $f\,(x)$ на всей числовой прямой, достаточно доказать, что функция имеет не больше двух критических точек.

Область определения: $D\,(f) = \boldsymbol{R}$.

Производная $f'\,(x) = 7x^6 - 84\, x - 1$ существует при всех значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть только те значения x, при которых $f'\,(x) = 0$. Получаем уравнение

$$7x^6 - 84\, x - 1 = 0. \tag{2}$$

Чтобы доказать, что уравнение (2) имеет не больше двух корней, достаточно доказать, что функция $\varphi(x) = 7x^6 - 84x - 1$, стоящая в левой части уравнения, имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Учитывая непрерывность этой функции на всей числовой прямой, достаточно доказать, что она имеет только одну критическую точку. Действительно, $\varphi'(x) = 42x^5 - 84$ существует при всех значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть только те значения x, при которых $\varphi'(x) = 0$. Получаем уравнение $42x^5 - 84 = 0$. Откуда $x^5 = 2$, $x = \sqrt[5]{2}$. Значит, последнее уравнение имеет единственный корень. Тогда функция $\varphi(x)$ имеет единственную критическую точку, и поэтому уравнение (2) имеет не больше двух корней. Это означает, что функция $f(x)$ имеет не больше двух критических точек. Тогда уравнение (1) имеет не больше трех корней. Но три корня заданного уравнения мы уже знаем: -1, 1, 2. Следовательно, других корней заданное уравнение не имеет. *Ответ:* -1, 1, 2. ◁

Задача 3 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 3y = \sin x - \sin y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$

Решение

▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases} 3x - \sin x = 3y - \sin y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$ (1)

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 3t - \sin t.$$

Поскольку $f'(t) = 3 - \cos t > 0$ всегда, то на своей области определения ($t \in \boldsymbol{R}$) функция $f(t)$ является возрастающей. Тогда первое уравнение системы (1), которое имеет вид $f(x) = f(y)$, равносильно уравнению $x = y$. Следовательно, система (1) равносильна системе $\begin{cases} x = y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$ Подставляя $x = y$ во второе уравнение системы, имеем

$$2y^3 - y^3 = 1,\ y^3 = 1,\ y = 1.$$

Тогда

$$x = y = 1.$$

Ответ: $(1; 1)$. ◁

Комментарий

Решить заданную систему с помощью равносильных преобразований не удается. Поэтому попробуем использовать свойства функций.

Если в первом уравнении системы члены с переменной x перенести в одну сторону, а с y — в другую, то получим в левой и правой частях уравнения значения одной и той же функции. С помощью производной легко проверить, что эта функция является возрастающей. Но *равенство $f(x) = f(y)$ для возрастающей функции возможно тогда и только тогда, когда $x = y$*, поскольку каждое свое значение возрастающая (или убывающая) функция может принимать только при одном значении аргумента. Коротко этот результат можно сформулировать так: **если функция $f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на определенном множестве, то на этом множестве $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.**

Задача 4 Решите неравенство $x^{11} - x^6 + 2x < -4$.

Решение

Заданное неравенство равносильно неравенству $x^{11} - x^6 + 2x + 4 < 0$. Функция $f(x) = x^{11} - x^6 + 2x + 4$ непрерывна в каждой точке своей области определения, поэтому для решения неравенства можно использовать метод интервалов.

1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нули функции: $f(x) = 0$. Найдем производную функции $f(x)$: $f'(x) = 11x^{10} - 6x^5 + 2$. Если обозначить $x^5 = t$, то $f' = 11t^2 - 6t + 2$. Но квадратный трехчлен $11t^2 - 6t + 2$ имеет отрицательный дискриминант, тогда для всех t $11t^2 - 6t + 2 > 0$. Следовательно, для всех x значение $f'(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой и уравнение $f(x) = 0$ может иметь только один корень. Поскольку $f(-1) = 0$, то $x = -1$ — единственный нуль функции $f(x)$.
3. Отмечаем нули на ОДЗ и находим знак в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (рис. 10.2).

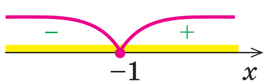


Рис. 10.2

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Комментарий

Заданное неравенство не удается решить с помощью равносильных преобразований, поэтому используем метод интервалов. Для этого неравенство необходимо привести к виду $f(x) \gtrless 0$, где $f(x)$ — непрерывная в каждой точке своей области определения функция, поскольку она является многочленом.

Напомним схему решения неравенств методом интервалов.

1. *Найти ОДЗ неравенства.*
2. *Найти нули функции:* $f(x) = 0$.
3. *Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции* $f(x)$ *в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.*
4. *Записать ответ, учитывая знак данного неравенства.*

Для нахождения нулей функции надо решить уравнение $f(x) = 0$, которое не удается решить с помощью равносильных преобразований. Поэтому для его решения целесообразно использовать свойства функции $f(x)$, в частности ее монотонность, которую можно обосновать с помощью производной.

Задача 5 Решите неравенство $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \geqslant 3 - \dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$.

Комментарий

Попробуем решить заданное неравенство методом интервалов (см. схему решения в задаче 4). Для этого его необходимо привести к виду $f(x) \geqslant 0$ (где функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения).

При нахождении нулей функции для решения уравнения $f(x) = 0$ целесообразно использовать свойства соответствующих функций, в частности оценку значений левой и правой частей уравнения вида $g(x) = \varphi(x)$. Значение функции $\varphi(x)=3-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ легко оценить и без применения производной, а для исследования функции $g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ используем производную. Отметим, что в данном случае внутри ОДЗ мы не найдем ни одного нуля функции $f(x)$ (см. решение: нулем является только крайняя точка ОДЗ). Но метод интервалов применим и в этом случае — мы получаем единственный интервал, в котором функция сохраняет свой знак.

Решение

Заданное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}\geqslant 0. \qquad (1)$$

Функция $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ непрерывна в каждой точке* своей области определения, поэтому для решения неравенства (1) можно использовать метод интервалов.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0, \\ -1\leqslant -\frac{x}{4}\leqslant 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 5, \\ -4\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$ $3 \leqslant x \leqslant 4.$

2. Нули: $f(x) = 0$. $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}=0.$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=3-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}=0. \qquad (2)$$

Оценим значения функций $g(x)$ и $\varphi(x)$, стоящих соответственно в левой и правой частях уравнения (2).

Поскольку $0\leqslant\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)\leqslant\pi$, то $0\leqslant\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}\leqslant 1.$

Тогда $2\leqslant 3-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}\leqslant 3.$

* Конечно, если учесть, что в точке 3 функция $f(x)$ непрерывна справа, а в точке 4 — слева (см. ее ОДЗ).

Исследуем функцию $g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ на ОДЗ неравенства (1), то есть при $x\in[3;\ 4]$.

Функция $g(x)$ непрерывна на отрезке [3; 4], поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах, или в критических точках этого отрезка.

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$ не существует в точке 3 отрезка [3; 4], но эта точка не является внутренней точкой этого отрезка, следовательно, она не является критической. Выясним, когда $g'(x)=0$.

$\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}=0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$, $\sqrt{5-x}=\sqrt{x-3}$, $5-x=x-3$, $x=4$.

Сравнивая значения $g(3)=\sqrt{2}$ и $g(4)=2$, получаем: $\min\limits_{[3;\ 4]} g(x)=g(3)=\sqrt{2}$, $\max\limits_{[3;\ 4]} g(x)=g(4)=2$. Следовательно, $\sqrt{2}\leqslant g(x)\leqslant 2$. Тогда уравнение (2) равносильно системе $\begin{cases}\varphi(x)=2,\\ g(x)=2.\end{cases}$ Поскольку 2 — наибольшее значение функции $g(x)$, которое достигается только при $x=4$, то уравнение $g(x)=2$ имеет единственный корень $x=4$, удовлетворяющий и уравнению $\varphi(x)=2$ $\left(\text{действительно, } \varphi(4)=3-\dfrac{\arccos(-1)}{\pi}=3-\dfrac{\pi}{\pi}=2\right)$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет только один нуль: $x=4$. Отмечаем нуль на ОДЗ и находим знак функции в полученном промежутке (рис. 10.3).

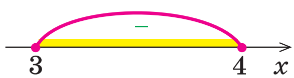


Рис. 10.3

Как видим, функция $f(x)$ не принимает положительных значений и в неравенстве (1) знак «больше» не может выполняться. Следовательно, может выполняться только знак «равно», но $f(x)=0$ только при $x=4$.

Ответ: 4. ◁

З а м е ч а н и е. Используя введенные обозначения, заданное неравенство можно записать так: $g(x)\geqslant\varphi(x)$. После выполнения оценки значений функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ имеем: $\sqrt{2}\leqslant g(x)\leqslant 2$, $2\leqslant\varphi(x)\leqslant 3$; и без метода интервалов можно сделать вывод, что неравенство $g(x)>\varphi(x)$ не может выполняться. Следовательно, заданное неравенство равносильно уравнению $g(x)=\varphi(x)$, которое равносильно системе $\begin{cases}\varphi(x)=2,\\ g(x)=2,\end{cases}$ имеющей единственное решение $x=4$. Но такие рассуждения можно провести только для этого неравенства, в то время как метод интервалов можно использовать для решения любого неравенства вида $f(x)\gtrless 0$ (где функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения). Поэтому основным способом решения таких неравенств мы выбрали метод интервалов.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях удается решить уравнение с помощью оценки значений его левой и правой частей. Приведите пример.
2. Объясните, как можно использовать возрастание и убывание функций для решения уравнений. Приведите примеры.

Упражнения

Решите уравнение **(1—7)**.

1. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29$.

2. 1) $x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{\pi x}{2}$; 2) $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=2\cos\frac{x}{3}$;

3) $\sqrt{2x}+\frac{4}{\sqrt{2x}}=1+3\sin\frac{\pi x}{4}$.

3. 1) $x^5-x^3+2x-28=0$; 2) $5x+3\cos x=3$;

3) $2x^3-3x^2+\sqrt{x-1}=5$.

4. 1) $\sin 5x-2\cos x-8x=x^5-2$; 2) $4\cos 3x+5\sin\frac{x}{2}+15x=4-x^3$.

5. 1) $x^6-63x+62=0$; 2) $x^6-364x+363=0$;

3) $x^6+63x+62=0$.

6. 1) $x^7-21x^2-64x+84=0$; 2) $x^7+21x^2-64x-84=0$;

3) $x^9-170x^2-x+170=0$.

7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}4x-\sin x=4y-\sin y,\\ 3x^2-y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-2y=\sin x-\sin y,\\ x+2y=9.\end{cases}$

Решите неравенство **(8, 9)**.

8. 1) $x^7-x^4+3x>-5$; 2) $2x^9-x^5+x>2$; 3) $\sqrt{x-1}+x^2-2x>17$.

9. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geqslant\frac{9}{2}-\frac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi}$; 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}\geqslant 7-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$.

10.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕРАВЕНСТВ

Производную иногда удается использовать при доказательстве неравенств с одной переменной. Приведем ориентировочную *схему доказательства неравенств вида* $\varphi(x)>g(x)$ (*или* $\varphi(x)<g(x)$) *с помощью производной.*

1. *Рассмотреть вспомогательную функцию* $f(x)=\varphi(x)-g(x)$ (на ее области определения или на заданном промежутке).
2. *Исследовать с помощью производной поведение функции* $f(x)$ (возрастание или убывание, ее наибольшее или наименьшее значение) *на рассматриваемом промежутке.*

3. *Обосновать* (опираясь на поведение функции $f(x)$), *что* $f(x) > 0$ (*или* $f(x) < 0$) *на рассматриваемом промежутке, и сделать вывод, что* $\varphi(x) > g(x)$ (*или* $\varphi(x) < g(x)$) *на этом промежутке.*

Обратим внимание, что при доказательстве некоторых неравенств эту схему приходится использовать несколько раз (см. решение задачи 2).

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите неравенство $x^2+3 \geqslant 4\sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$.

Решение

Для доказательства данного неравенства достаточно доказать неравенство $x^2+3-4\sqrt{x} \geqslant 0$ при $x \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+3-4\sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$ (ее область определения $x \geqslant 0$ содержит заданный промежуток). Производная $f'(x)=2x-\dfrac{4}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=$ $=\dfrac{2\left(\sqrt{x^3}-1\right)}{\sqrt{x}}>0$ при $x > 1$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(1; +\infty)$, а учитывая непрерывность функции $f(x)$ в точке 1 (она непрерывна и на всей области определения), получаем, что функция $f(x)$ возрастает и на промежутке $[1; +\infty)$. Но $f(1) = 0$. Тогда при $x \geqslant 1$ значения $f(x) \geqslant f(1) = 0$. Таким образом, $x^2+3-4\sqrt{x} \geqslant 0$, то есть $x^2+3 \geqslant 4\sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$, что и требовалось доказать. (Отметим, что при $x > 1$ значения $f(x) > f(1) = 0$, а при $x = 1$ заданное неравенство превращается в равенство.) ◁

Задача 2 Докажите неравенство $\sin x > x-\dfrac{2x^2}{\pi}$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение

Данное неравенство равносильно неравенству $\sin x - x+\dfrac{2x^2}{\pi}>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x - x+\dfrac{2x^2}{\pi}$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой и имеет производную $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{4x}{\pi}$. Теперь рассмотрим функцию $g(x)=\cos x-1+\dfrac{4x}{\pi}$ и докажем, что $g(x) > 0$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Функция $g(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и имеет производную $g'(x)=-\sin x+\dfrac{4}{\pi}$. Учитывая, что $\dfrac{4}{\pi}>1 \geqslant \sin x$, получаем $g'(x)=-\sin x+\dfrac{4}{\pi}>0$. Следовательно, функция $g(x)$ возрастает на всей числовой прямой, и в частности на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда согласно определению возрастающей функции при $x > 0$ получаем, что $g(x) > g(0)$. Но $g(0) = \cos 0 - 1 + \frac{4 \cdot 0}{\pi} = 0$, то есть при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = g(x) > 0$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а так как она непрерывна, то и на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда из неравенства $x > 0$ вытекает неравенство $f(x) > f(0)$. Но $f(0) = \sin 0 - 0 + \frac{2 \cdot 0^2}{\pi} = 0$, следовательно, $f(x) > 0$ при всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, на этом интервале выполняется неравенство $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$, а значит, и неравенство $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$. ◁

Задача 3 Докажите, что при всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

Решение

▶ Если $f(x) = \sin x$, то $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $f''(x) < 0$, следовательно, на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x) = \sin x$ выпукла вверх. Тогда на этом интервале ее график лежит выше хорды OA (рис. 10.4).

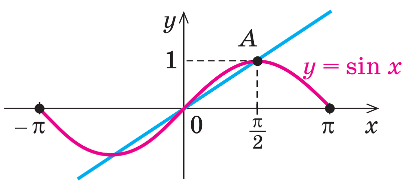
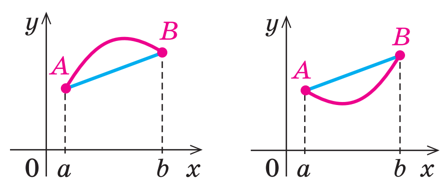


Рис. 10.4

Прямая OA имеет уравнение $y = kx$ и проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Комментарий

На тех интервалах, где функция $f(x) = \sin x$ выпукла вверх, график функции $f(x)$ лежит выше соответствующей хорды (рис. 10.5, *а*), а на тех интервалах, где эта функция выпукла вниз, график лежит ниже хорды (рис. 10.5, *б*).



а *б*

Рис. 10.5

Используем это при доказательстве данного неравенства: с помощью второй производной исследуем

Следовательно, $1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$, то есть $k = \frac{2}{\pi}$. Отсюда уравнение прямой OA: $y = \frac{2}{\pi}x$. Таким образом, при всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. ◁

функцию $f(x) = \sin x$ на выпуклость, рассмотрим уравнение соответствующей хорды AB и сравним уравнение хорды с уравнением прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ (где $\frac{2}{\pi}x$ — функция, стоящая в правой части неравенства).

Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно применить производную к доказательству неравенства с одной переменной. Приведите примеры.

Упражнения

Докажите неравенство **(1–4)**.

1. 1) $x^5 - 2x^3 + 2x > 20$ при $x > 2$; 2) $a^3 + 4 > a^2 + 3a$ при $a \geqslant 0$;
3) $2x + \frac{1}{x^2} > 5$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

2. 1) $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geqslant 6$ при $x > 0$; 2) $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geqslant 3$ при $x > 0$;
3) $4\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \geqslant 5$ при $x > 0$.

3. 1) $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. 1) $a^3 + 4 > a^2 + 3a$ при $a \geqslant 0$; 2) $a^3 + 3a^2 + 10 > 13a$ при $a \geqslant 0$.

§ 11 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

При решении задач с параметрами производная может использоваться для исследования функции на монотонность и экстремумы, для исследования функции и построения ее графика, для записи уравнений касательных к графикам функций, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Следует также помнить те ориентиры, которые использовались при решении заданий с параметрами в 10 классе. В частности, *если в задании с параметрами говорится о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа заданной ситуации удобно использовать графическую иллюстрацию решения* (см. пример 2 на с. 76, пример 3 на с. 153 и пример в п. 1 табл. 45).

Задача 1 Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = (a + 2)\,x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ убывает для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Решение

► Область определения функции:

$$D\,(y) = \boldsymbol{R}.$$

Функция дифференцируема на всей числовой прямой: $y' = 3\,(a + 2)x^2 - 6ax + 9a$. Заданная функция будет убывать при всех $x \in \boldsymbol{R}$, если $y' \leqslant 0$ на всей числовой прямой, причем уравнение $y' = 0$ имеет только конечное (или счетное) множество корней.

Если $a = -2$, то $y' = 12x - 18$ и неравенство $y' \leqslant 0$ не выполняется на всей числовой прямой ($12x - 18 \leqslant 0$ только при $x \leqslant 1{,}5$).

Если $a \neq -2$, то производная является квадратичной функцией относительно переменной x, она принимает значения $y' \leqslant 0$ на всей числовой прямой тогда и только тогда (см. таблицу в комментарии), когда выполняются условия $\begin{cases} a+2<0, \\ D \leqslant 0 \end{cases}$ (1)

(при этом уравнение $y' = 0$ может иметь не более одного корня).

Из неравенства $a + 2 < 0$ получаем

$$a < -2.$$

Из неравенства $D \leqslant 0$ имеем:

$$36a^2 - 4 \cdot 3\,(a + 2) \cdot 9a \leqslant 0,$$
$$36a\,(a - 3a - 6) \leqslant 0,$$
$$36a\,(-2a - 6) \leqslant 0,$$
$$-72a\,(a + 3) \leqslant 0. \qquad (2)$$

Учитывая полученное условие $a < -2$, получаем, что $(-72a) > 0$, тогда из неравенства (2) имеем $a + 3 \leqslant 0$, то есть $a \leqslant -3$. Следовательно, система (1) равносильна системе $\begin{cases} a<-2, \\ a \leqslant -3. \end{cases}$ Отсюда получаем $a \leqslant -3$.

Ответ: $(-\infty;\ -3]$. ◁

Комментарий

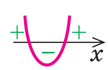
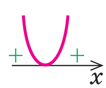
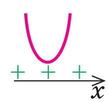
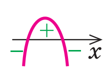
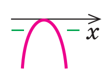
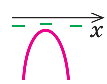
Используем уточненный вариант условия убывания функции (с. 59).

Если $f'(x) \leqslant 0$ в каждой точке интервала $(a;\ b)$, причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет только конечное (или счетное) множество корней, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Отметим, что это условие является не только достаточным, но и необходимым для дифференцируемой на интервале функции (*если на каком-либо интервале функция $f(x)$ дифференцируема и убывает, то на этом интервале $f'(x) \leqslant 0$* — см. с. 50). Следовательно, условию задачи могут удовлетворять те и только те значения параметра, которые мы найдем по этому условию.

Анализируя производную данной функции, учитываем, что она является квадратичной функцией только в случае, когда $a + 2 \neq 0$ (то есть $a \neq -2$). Поэтому случай $a + 2 = 0$ (то есть $a = -2$) следует рассмотреть отдельно.

Для квадратичной функции вспоминаем все возможные варианты расположения параболы относительно оси абсцисс (см. таблицу ниже) и выясняем, когда неравенство $y' \leqslant 0$ выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a+2>0$			
$a+2<0$			

Обратим внимание, что неравенство $D \leqslant 0$ (при $a \neq -2$), которое свелось к неравенству (2), можно было решать отдельно или методом интервалов, или с помощью графика квадратичной функции (исключая точку с абсциссой $a = -2$), а уже затем находить общее решение системы (1).

Задача 2 Найдите наименьшее значение k, при котором график функции $y = (k - 1)\,x^2 + 2kx + 3k - 2$ касается оси абсцисс.

Решение

▶ По условию ось абсцисс (имеющая уравнение $y = 0$ и угловой коэффициент 0) должна быть касательной к графику функции $y = f(x) = (k - 1)\,x^2 + 2kx + 3k - 2$.
Если x_0 — абсцисса точки касания, то, учитывая геометрический смысл производной, получаем $f'(x_0) = 0$.
Чтобы касательной была именно ось абсцисс (а не параллельная ей прямая, имеющая такой же угловой коэффициент), достаточно проверить, что $f(x_0) = 0$.
Поскольку $f'(x) = 2(k - 1)\,x + 2k$, то $f'(x) = 0$, если

$$2(k - 1)\,x + 2k = 0. \qquad (1)$$

При $k = 1$ уравнение (1) не имеет решения (получаем уравнение $0x + 2 = 0$).
При $k \neq 1$ получаем $(k - 1)\,x = -k$,

$$x = -\frac{k}{k-1} = x_0.$$

Тогда

$$f(x_0) = (k-1)\frac{k^2}{(k-1)^2} - \frac{2k^2}{k-1} + 3k - 2 =$$

$$= \frac{2k^2 - 5k + 2}{k-1}.$$

Выясним, при каких значениях k $f(x_0) = 0$. Учитывая, что $k \neq 1$, получаем

$$2k^2 - 5k + 2 = 0,$$
$$k_1 = 2,\ k_2 = 0{,}5.$$

Комментарий

Для того чтобы график функции касался оси абсцисс, необходимо, чтобы ось абсцисс была касательной к этому графику. Зная уравнение оси абсцисс: $y = 0$ (то есть $y = 0x + 0$), заданную ситуацию можно исследовать двумя способами.

1. Если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет уравнение $y = 0$, то угловой коэффициент касательной равен 0. Тогда по геометрическому смыслу производной $f'(x_0) = 0$. Но угловой коэффициент 0 имеет не только ось абсцисс, но и все прямые, параллельные оси Ox (рис. 11.1, *а*, *б*). Чтобы касательной была именно ось абсцисс, необходимо, чтобы точка касания M находилась на оси Ox (рис. 11.1, *а*), то есть чтобы ордината этой точки равнялась 0, следовательно, $f(x_0) = 0$.

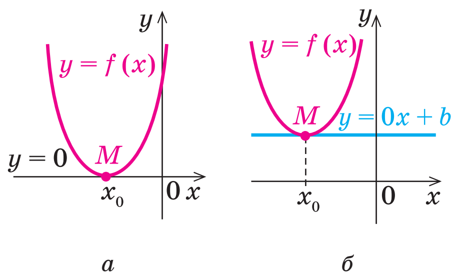


Рис. 11.1

Следовательно, при этих значениях k график функции $f(x)$ касается оси абсцисс. Наименьшее из значений $k = 0{,}5$.

Ответ: 0,5. ◁

2. Можно записать также уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

и сравнить полученное уравнение с уравнением оси абсцисс: $y = 0x + 0$ (снова получим те же условия $f'(x_0) = 0$ и $f(x_0) = 0$).

При исследовании уравнения $f'(x_0) = 0$ случай $k = 1$ необходимо рассмотреть отдельно.

Задача 3 Найдите все значения a, при которых уравнение $\cos 2x + \frac{a}{\sin x} = -7$ имеет хотя бы один корень.

Решение

▶ ОДЗ: $\sin x \neq 0$. На этой ОДЗ заданное уравнение равносильно уравнениям

$$1 - 2\sin^2 x + \frac{a}{\sin x} = -7,$$

$$a = 2\sin^3 x - 8\sin x.$$

Замена $\sin x = t$ (где $t \in [-1; 1]$ и $t \neq 0$ на ОДЗ) дает равносильное уравнение

$$2t^3 - 8t = a. \qquad (1)$$

Для заданного уравнения требование задачи будет выполняться тогда и только тогда, когда уравнение (1) будет иметь хотя бы один ненулевой корень в промежутке $[-1; 1]$.

Для этого достаточно обеспечить, чтобы число a входило в область значений функции $f(t) = 2t^3 - 8t$ при $t \in [-1; 1]$ и $t \neq 0$. Найдем эту область значений. Производная $f'(t) = 6t^2 - 8$ существует на всей числовой прямой, и $f'(t) = 0$ при $6t^2 - 8 = 0$, $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (то есть критические точки не входят в отрезок $[-1; 1]$, поскольку $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$).

Комментарий

Сначала начнем решать заданное уравнение по схеме решения тригонометрических уравнений: *попробуем привести все тригонометрические функции **к одному аргументу**; если это удалось, попробуем привести все тригонометрические выражения **к одной функции***. Указанные два этапа можно выполнить одновременно, используя формулу

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

После замены $\sin x = t$ для исследования существования корней у полученного кубического уравнения удобно использовать графическую иллюстрацию решений (приведя уравнение к виду $f(t) = a$). Также можно найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(t)$, заданной на отрезке, или воспользоваться свойствами функции $f(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, исследованными с помощью производной (см. решение).

Напомним, что после замены переменной требование задачи в задачах с параметрами чаще всего

Следовательно, на всем заданном отрезке $f'(t)$ сохраняет свой знак. Поскольку $f'(0) = -8 < 0$, то $f'(t) < 0$ при $t \in [-1; 1]$, то есть функция $f(t)$ убывает на отрезке $[-1; 1]$. Тогда ее наибольшее значение на этом отрезке равно $f(-1) = 6$, а наименьшее — $f(1) = -6$.

Учитывая, что $f(0) = 0$, получаем, что при $t \in [-1; 1]$ и $t \neq 0$ непрерывная функция $f(t)$ принимает все значения из промежутков $[-6; 0)$ и $(0; 6]$. Именно при этих значениях a и будет выполняться требование задачи.

Ответ: $[-6; 0) \cup (0; 6]$. ◁

изменяется, поэтому необходимо выяснить новое требование для уравнения (1).

Отметим, что достаточно наглядной является графическая иллюстрация решения (рис. 11.2), но исследование функции $f(t)$ для построения графика более громоздко, чем в приведенном решении.

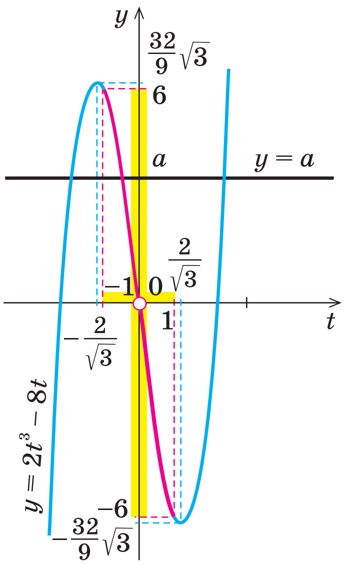


Рис. 11.2

Упражнения

1. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 - (a-1)x^2 + 2x + 1$ возрастает при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

2. При каком значении a прямая $16x + y - 13 = 0$ является касательной к графику функции $y = \frac{a + x^2}{x^2}$?

3. Найдите наибольшее значение k, при котором график функции $y = x^2 + 2(k+1)x + 2k^2 + k - 1$ касается оси абсцисс.

4. Зная, что уравнение $x^3 + 2 = ax$ при $x > 0$ имеет только один корень, найдите этот корень и соответствующее значение a.

5. График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -2$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 7$. Найдите точки локального минимума этой функции.

6. Найдите значения a и b, при которых прямая $y = 7x - 2$ касается графика функции $y = ax^2 + bx + 1$ в точке A (1; 5).

7. Найдите значение a, при котором касательная к параболе $y = 2x^2 + 3x + 5$ в точке $x_0 = -2$ является касательной к параболе $y = -x^2 + 4x + a$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{a - 2 - 3x - x^2}$$

не является убывающей ни на одном отрезке, принадлежащем ее области определения.

9. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + \frac{48}{x} = a$ имеет хотя бы один корень?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение $4\sin^3 x = a + 7\cos 2x$ не имеет корней.

11. Найдите все значения a, при которых уравнение $3\cos 2x + \frac{2a}{\sin x} = -17$ имеет хотя бы один корень.

12. Найдите все значения a, при которых уравнение $7 - 2\cos x = a(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

13. Стороны треугольника лежат на осях координат и касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + 4$ в точке, абсцисса a которой удовлетворяет условию $-1 \leqslant a \leqslant 0$. Найдите значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

§ 12 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называют произведение производной $f'(x_0)$ на приращение аргумента Δx в точке x_0.

Дифференциал функции обозначают символом $df(x_0)$, поэтому

$$\boldsymbol{df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x.} \qquad (1)$$

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала. На рис. 12.1 MB — касательная в точке M к графику функции $y = f(x)$, длина отрезка $MA = \Delta x$. Учитывая, что согласно

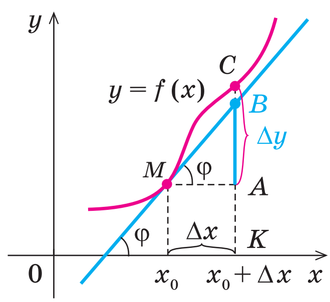


Рис. 12.1

геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, из прямоугольного треугольника AMB получаем $AB = AM \operatorname{tg}\varphi$, то есть $AB = f'(x_0)\,\Delta x$. Поэтому длина отрезка AB равна величине дифференциала функции $f(x)$ в точке x_0: $AB = df(x_0)$.

Исходя из того, что $AB = BK - AK$, можно сформулировать геометрический смысл дифференциала: $df(x_0) = BK - AK$.

С геометрической точки зрения, $df(x_0)$ является приращением ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, которому соответствует приращение аргумента Δx.

При нахождении дифференциала функции $f(x)$ в любой точке $x \in D(f)$ на основании формулы (1) получим

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \tag{2}$$

Это равенство справедливо для любой функции. В частности, для функции $f(x) = x$ равенство (2) обращается в равенство $df(x_0) = 1 \cdot \Delta x$. Отсюда получаем, что дифференциал аргумента dx равен приращению аргумента Δx: $dx = \Delta x$.

Подставляя dx вместо Δx в формулу (2), получаем

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{3}$$

Найденное равенство является основанием для нахождения дифференциала функции.

Задача 1 Найдите $df(x)$ для функции $f(x) = \sin x$.

Решение

▶ Поскольку $f'(x) = \cos x$, то $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$. ◁

Равенство (3) также показывает, что между понятием производной и понятием дифференциала существует тесная связь, поэтому **правила нахождения дифференциалов** аналогичны правилам дифференцирования функций, а именно:

1. $dC = 0$.
2. $d(Cu) = C\,du$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(uv) = (du)\cdot v + (dv)\cdot u$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{(du)\cdot v - (dv)\cdot u}{v^2}$.

Обоснуем, например, правило 2:

$$d(Cu) = (Cu)'\,dx = Cu'dx = Cdu.$$

Другие правила обосновываются аналогично (обоснуйте их самостоятельно).

Вспомним, что согласно определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Используя понятие бесконечно малой функции (табл. 11), это равенство можно записать так: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда приращение Δf дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В этом равенстве первое слагаемое правой части является дифференциалом функции, следовательно,

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(x)\Delta x. \tag{4}$$

Учитывая, что $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, получаем, что второе слагаемое при $\Delta x \to 0$ стремится к нулю быстрее, чем Δx. В этом случае говорят, что $\alpha(x)\Delta x$ является величиной более высокого порядка малости, чем Δx, то есть второе слагаемое значительно меньше первого. Это позволяет сделать следующий вывод:

дифференциал функции $df(x_0)$ является главной частью приращения функции.

С геометрической точки зрения (см. рис. 12.1), при $\Delta x \to 0$ расстояние BC становится значительно меньше, чем расстояние $AB = df(x_0)$, поэтому $AB = df(x_0)$ — главная (т. е. бóльшая) часть отрезка $AC = \Delta f$.

Если в равенстве (4) пренебречь вторым слагаемым (которое при малых значениях Δx значительно меньше первого), то получим приближенное равенство $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, то есть $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{5}$$

Последнее равенство используется для разных приближенных вычислений функций в тех случаях, когда $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ нетрудно вычислить.

Задача 2 Пользуясь формулой (5), найдите приближенное значение $\sqrt{9{,}06}$.

Решение	*Комментарий*
► Если рассмотреть функцию $f(x)=\sqrt{x}$, то $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Возьмем $x_0 = 9$. Тогда $f(x_0)=\sqrt{x_0}=\sqrt{9}=3$ и $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$. По формуле (5) имеем: $$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x.$$ При $\Delta x = 0{,}06$ и $x_0 = 9$ получаем $$\sqrt{9{,}06}\approx 3+\frac{1}{6}\cdot 0{,}06=3{,}01.$$ ◁	При вычислении значения $\sqrt{9{,}06}$ по формуле (5) $$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$$ естественно рассмотреть функцию $f(x)=\sqrt{x}$ и взять за x_0 число 9, поскольку 9,06 близко к 9. Тогда $\Delta x = 0{,}06$, и значения $f(x_0)=\sqrt{x_0}$ и $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ легко находятся при $x_0 = 9$.

Значение $\sqrt{9{,}06}$, вычисленное с помощью калькулятора, равно 3,00998… .

Упражнения

1. Найдите дифференциал функции:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 3) $f(x) = \arcsin x$;

4) $f(x) = \sin^2 3x$; 5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}\operatorname{ctg} x$; 6) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+1}$.

2. Вычислите с помощью формулы (5) приближенное значение:

1) $\sqrt{4{,}08}$; 2) $\sqrt{9{,}06}$;

3) $\sqrt{1{,}004}$; 4) $\sqrt{25{,}012}$.

3. Докажите приближенную формулу $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$.

4. Вычислите значение:

1) $1{,}001^{100}$; 2) $1{,}03^{200}$;

3) $0{,}995^6$; 4) $0{,}998^{20}$.

5. Вычислите с помощью формулы (5) приближенное значение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}04\right)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0{,}02\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}05\right)$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 1

1. К какому числу стремится значение функции, если:

1) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $x \to 1$; 2) $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $x \to 1$;

3) $f(x) = \cos x + \sin x$, $x \to \frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \to \frac{\pi}{4}$?

2. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y=\frac{2x^2+x}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^3+1}{x^3-2x+4}$.

3. Исследуйте на непрерывность функцию на указанном промежутке:

1) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $[-5;\ 0]$; 2) $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $[0;\ 5]$.

4. Найдите точки разрыва функции:

1) $\begin{cases}\frac{|x+2|}{x+2} \text{ при } x \neq -2,\\ 1 \text{ при } x=-2;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^2} \text{ при } x \neq 1,\\ 3 \text{ при } x=1.\end{cases}$

Исследуйте функцию и постройте ее график **(5, 6)**.

5. 1) $y=\frac{4x}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{2x}{x^2+2}$; 3) $y=\frac{x^3-x}{x^2-4}$; 4) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$;

5) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$; 6) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-25}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$; 8) $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

6. 1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 2) $y=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2-4x$; 3) $y = x^4 - 4x^2 + 4$;

4) $y = x^4 + 6x^2 + 9$; 5) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$;

7) $y=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$; 8) $y=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$.

7. Решите неравенство:

1) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$, $g(x)=5x+\dfrac{1}{x}$;

2) $f'(x) + g'(x) \leqslant 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.

8. Решите уравнение:

$1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, если $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

9. Найдите область определения функции и ее производную:

1) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; 2) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

10. Под каким углом* пересекается с осью Oy график функции:

1) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$?

11. 1) На кривой $y = x^2 - 7x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = -5x + 3$.

2) В каких точках касательные к кривой $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?

12. 1) В какой точке кривой $y = ax^2 + bx + c$ необходимо провести касательную к ней для того, чтобы касательная проходила через начало координат? Исследуйте, при каких значениях a, b и c задача имеет решение.

2) В какой точке кривой $y = x^2 - 5x + 6$ необходимо провести касательную, чтобы она проходила через точку $M(a; b)$? Исследуйте, при каких значениях a и b задача имеет решение.

13. 1) Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^3 - x$ в точках с абсциссами -1 и 0.

2) Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2$, проходящими через точку с координатами $(0; -1)$.

14. 1) Из точки $A(1; 6)$ проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Составьте уравнение этих касательных.

2) Составьте уравнение касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2; -5)$.

---

* Имеется в виду угол между осью Oy и касательной к графику функции, проведенной в точке пересечения графика и оси.

15. 1) Составьте уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проходящих через точки пересечения этих кривых.

2) Составьте уравнения касательных к графикам функций $y=\sqrt{2x}$ и $y=\frac{x^2}{2}$, проведенных через точку пересечения этих кривых.

16. 1) При каких значениях a функция $f(x) = x^3 + 3(a - 7)x^2 + 3(a^2 - 9)x + 1$ имеет точку максимума?

2) При каких значениях a функция $f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$ имеет точку минимума?

17. 1) Найдите наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0; -2)$ до точек $(x; y)$, таких, что $y=\frac{16}{\sqrt{3x^3}}-2,\ x > 0$.

2) Найдите расстояние от точки $M(1; 0)$ до графика функции $y = x^2 + 6x + 10$ (то есть наименьшее из всех расстояний от точки M до точек графика).

18. Найдите координаты точки M, лежащей на графике функции $y=1+\cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

19. 1) Найдите расстояние между графиками функций $y = x^2$ и $y = x - 1$ (то есть наименьшее из всех расстояний между точками этих графиков).

2) Найдите расстояние между графиками функций $y = -x$ и $y=\frac{1}{x}$.

20. 1) Фигура ограничена параболой $y = x^2 + 1$ и отрезками прямых $y = 0$, $x=1$, $x = 2$. В какой точке M данной кривой $y = x^2 + 1$, $x \in [1; 2]$, необходимо провести касательную, чтобы она отсекала от этой фигуры трапецию наибольшей площади?

2) В фигуру, ограниченную линиями $y = 3x$ и $y = x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие — на параболе. Найдите площадь этого прямоугольника.

21. 1) Найдите число, которое в сумме со значениями своего квадрата дает наименьшее значение этой суммы.

2) Найдите такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

22. Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найдите тот, который имеет:

1) наибольший объем;

2) наибольшую боковую поверхность.

23. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и образует с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций, называется *дифференциальным исчислением*. Приращения аргумента Δx и функции Δf, представляющие собой разности, играют заметную роль в работе с производными. Поэтому естественно появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculis differentialis* нового исчисления, которое переводится как *исчисление разностей*; это название появилось уже в конце XVII в., то есть во время возникновения нового метода.

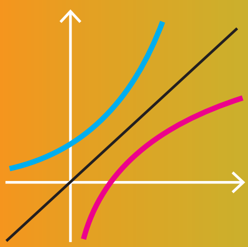
Термин «производная» является буквальным переводом французского слова *dérivée*, которое ввел в 1797 г. Ж. Лагранж (1736–1813) (он же ввел обозначения y', f' используемые и ныне). Такое название отражает смысл понятия: функция $f'(x)$ происходит от $f(x)$, является производной от $f(x)$.

Удивительно, что задолго до этого Архимед (ок. 287–212 гг. до н. э.) не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль (используя при этом предельные переходы), но и смог найти максимум функции $f(x) = x^2(a - x)$.

Развитию начал дифференциального исчисления способствовали работы математика и юриста П. Ферма (1601–1665), который в 1629 г. предложил способы нахождения экстремумов многочленов. Выводя эти правила, Ферма активно применял предельные переходы, имея простейшее дифференциальное условие максимума и минимума. Развитию нового исчисления способствовали также работы Р. Декарта (1596–1650), разработавшего метод координат и основания аналитической геометрии.

Систематическое учение о производных было развито И. Ньютоном (1643–1727) и Г. Лейбницем (1646–1716), которые независимо друг от друга создали теорию дифференциального исчисления. Ньютон исходил в основном из задач механики, а Лейбниц — преимущественно из геометрических задач. В частности, к определению производной Ньютон пришел, решая задачу о мгновенной скорости, а Лейбниц — рассматривая геометрическую задачу о проведении касательной к кривой.

В дальнейшем благодаря работам Л. Эйлера (1707–1783), О. Коши (1789–1857), К. Гаусса (1777–1855) и других математиков дифференциальное исчисление было превращено в целостную теорию для исследования функциональных зависимостей.



Раздел 2
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

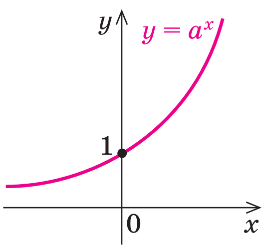
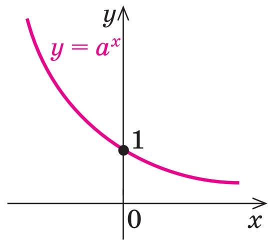
§ 13 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Таблица 17

1. Понятие показательной функции и ее график

Определение. ***Показательной функцией*** **называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.**

График показательной функции (экспонента)

$a > 1$	$0 < a < 1$
 	

2. Свойства показательной функции

1. *Область определения:* $\boldsymbol{R}$. $\boxed{D(a^x) = \boldsymbol{R}}$

2. *Область значений:* $y > 0$. $\boxed{E(a^x) = (0;\ +\infty)}$

3. *Функция* ***ни четная, ни нечетная.***

4. *Точки пересечения с осями координат*:

с осью Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}}$ с осью Ox $\boxed{\text{нет}}$

5. *Промежутки возрастания и убывания:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
функция $y = a^x$ возрастает на всей области определения	**функция $y = a^x$ убывает на всей области определения**

Окончание табл. 17

6. *Промежутки знакопостоянства:* $y > 0$ при всех значениях $x \in \boldsymbol{R}$

7. *Наибольшего и наименьшего значений* функция не имеет.

8. *Для любых действительных значений u* и *v* ($a > 0$, $b > 0$) *выполняются равенства:*

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v} \qquad \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

$$(ab)^u = a^u b^u \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

Объяснение и обоснование

1. Понятие показательной функции и ее график. *Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.*

Например, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, $y = \pi^x$ — показательные функции.

Отметим, что функция вида $y = a^x$ существует и при $a = 1$.

Тогда $y = a^x = 1^x$, то есть $y = 1$ при всех значениях $x \in \boldsymbol{R}$. Но в этом случае функция $y = 1^x$ не называется показательной. (График функции $y = 1^x$ — прямая, изображенная на рис. 13.1.)

Поскольку при $a > 0$ выражение a^x определено при всех действительных значениях x, то *областью определения показательной функции $y = a^x$ являются все действительные числа.*

Попытаемся сначала построить графики некоторых показательных функций, например $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, «по точкам», а затем перейдем к характеристике общих свойств показательной функции.

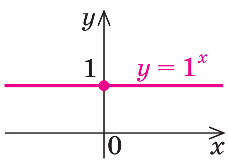


Рис. 13.1

Составим таблицу нескольких значений функции $y = 2^x$.

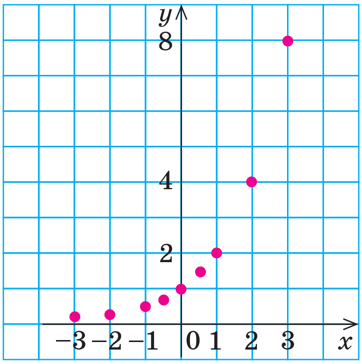
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	2	4	8

Построим на координатной плоскости соответствующие точки (рис. 13.2, *а*) и соединим их плавной линией, которую естественно считать графиком функции $y = 2^x$ (рис. 13.2, *б*).

Как видно из графика, $y = 2^x$ — возрастающая функция, которая принимает все значения на промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогично составим таблицу некоторых значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\sqrt{2}\approx 1{,}4$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



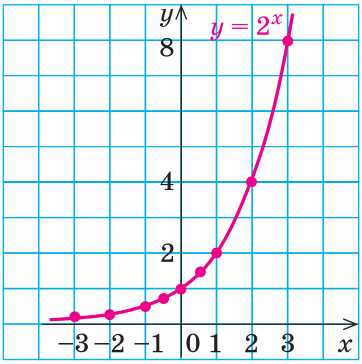
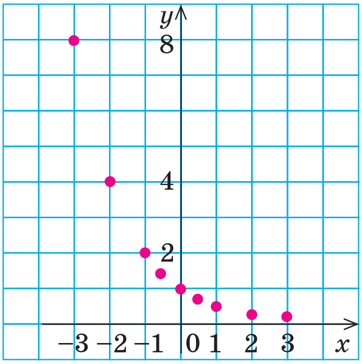


Рис. 13.2

Построим на координатной плоскости соответствующие точки (рис. 13.3, *а*) и соединим их плавной линией, которую естественно считать графиком функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 13.3, *б*). Как видно из графика, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, которая принимает все значения на промежутке $(0; +\infty)$.



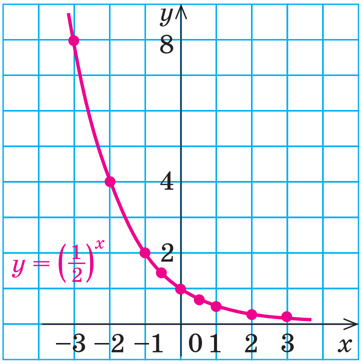
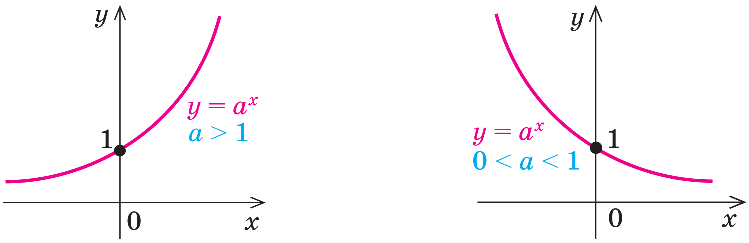


Рис. 13.3

Заметим, что график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можно получить из графика функции $y = f(x) = 2^x$ с помощью геометрических преобразований. Действительно, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} = f(-x)$. Таким образом, график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричен графику функции $y = 2^x$ относительно оси Oy (см. п. 2.3 учебника для 10 класса)), и поэтому, если функция $y = 2^x$ является возрастающей, функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ обязательно будет убывающей.

Оказывается, что всегда при $a > 1$ график функции $y = a^x$ похож на график функции $y = 2^x$, а при $0 < a < 1$ — на график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 13.4).

График показательной функции называется *экспонентой*.



а *б*

Рис. 13.4

2. Свойства показательной функции. Как отмечалось выше, *областью определения показательной* функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *являются все действительные числа*: $D(a^x) = \mathbf{R}$.

В курсе математического анализа доказывается, что *областью значений* функции $y = a^x$ является множество всех положительных чисел, иначе говоря, *функция $y = a^x$ принимает только положительные значения*, причем любое положительное число является значением функции, то есть

$$E(a^x) = (0;\ +\infty).$$

Это означает, что график показательной функции $y = a^x$ всегда расположен выше оси Ox и любая прямая, которая параллельна оси Ox и находится выше нее, пересекает этот график.

При $a > 1$ функция $y = ax$ возрастает на всей области определения, а при $0 < a < 1$ функция $y = ax$ убывает на всей области определения.

Обоснование области значений и промежутков возрастания и убывания показательной функции проводится так: эти свойства проверяют последовательно для натуральных, целых, рациональных показателей, а затем уже переносятся на любые действительные показатели. Следует учесть, что при введении понятия степени с иррациональным показателем мы уже пользовались возрастанием функции, когда проводили такие рассуждения: поскольку $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, то $2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$. Таким образом, в нашей системе изложения материала мы можем обосновать эти свойства только для рациональных показателей, но, учитывая громоздкость таких обоснований, примем их без доказательства. Остальные свойства показательной функции легко обосновать с помощью этих свойств.

Функция $y = a^x$ *не является ни четной, ни нечетной*, поскольку $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} \neq f(x) = a^x$ (по определению $a \neq 1$). Также $f(-x) \neq -f(x)$, поскольку $f(-x) = a^{-x} > 0$ (по свойству 1), а $-f(x) = -a^x < 0$.

Точки пересечения с осями координат. **График функции** $\boldsymbol{y = a^x}$ **пересекает ось** $\boldsymbol{Oy}$ **в точке** $\boldsymbol{y = 1}$. Действительно, на оси Oy значение $x = 0$, тогда $y = a^0 = 1$.

График показательной функции $\boldsymbol{y = a^x}$ $\boldsymbol{(a > 0,\ a \neq 1)}$ **не пересекает ось** $\boldsymbol{Ox}$, так как на оси Ox $y = 0$, но значение $y = 0$ не принадлежит области значений функции $y = a^x$ ($y = a^x = 0$ только при $a = 0$, хотя по определению $a > 0$).

Промежутки знакопостоянства. $y > 0$ при всех действительных значениях x, поскольку $y = a^x > 0$ при $a > 0$.

Отметим еще одно свойство показательной функции. График функции $y = a^x$ пересекает ось Oy в точке $y = 1$. Учитывая возрастание функции при $a > 1$ и убывание при $0 < a < 1$, получаем следующие соотношения между значениями функции и соответствующими значениями аргумента:

Значение функции	Значение аргумента	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 1$	$x \in (0;\ +\infty)$	$x \in (-\infty;\ 0)$
$0 < y < 1$	$x \in (-\infty;\ 0)$	$x \in (0;\ +\infty)$

Функция $y = a^x$ *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений*, поскольку ее область значений — промежуток $(0;\ +\infty)$, не содержащий ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Свойства показательной функции, приведенные в п. 8 табл. 17:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v};\ \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v};\ (a^u)^v = a^{uv};\ (ab)^u = a^u b^u;\ \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u},$$

были обоснованы в курсе 10 класса.

Рассмотрим одно из характерных свойств показательной функции, выделяющее ее из ряда других функций: *если* $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, *то* *при любых действительных значениях аргументов x_1 и x_2 выполняется равенство*

$$\boxed{f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)}.$$

Действительно, $f(x_1) \cdot f(x_2) = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} = f(x_1 + x_2)$. В курсах высшей математики это свойство (вместе со строгой монотонностью) является основой аксиоматического определения показательной функции. В этом случае дается определение, что *показательная функция $y = f(x)$ — это строго монотонная функция, определенная на всей числовой оси, которая удовлетворяет функциональному уравнению $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$*, а затем обосновывается, что функция $f(x)$ совпадает с функцией $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

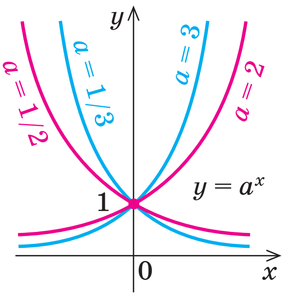


Рис. 13.5

Кроме общих свойств показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, отметим некоторые особенности поведения графиков показательных функций при конкретных значениях a. Так, на рис. 13.5 приведены графики показательных функций $y = a^x$ при значениях основания $a = 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$.

Сравнивая эти графики, можно сделать вывод: *чем больше основание* $a > 1$, *тем круче поднимается график функции $y = a^x$ при движении точки вправо и тем быстрее график приближается к оси Ox при движении точки влево. Аналогично, чем меньше основание $0 < a < 1$, тем круче поднимается график функции $y = a^x$ при движении точки влево и тем быстрее график приближается к оси Ox при движении точки вправо.*

Заканчивая разговор о показательной функции, укажем причины, по которым не рассматриваются показательные функции с отрицательным или нулевым основанием.

Отметим, что выражение a^x можно рассматривать и при $a = 0$, и при $a < 0$. Но в этих случаях оно уже будет определено не при всех действительных значениях x, как показательная функция $y = a^x$. В частности, выражение 0^x определено при всех $x > 0$ (и тогда $0^x = 0$), а выражение $(-2)^x$ — при всех целых значениях x (например, $\left((-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}\right)$.

По этой причине не берут основание показательной функции $a = 0$ (получаем постоянную функцию при $x > 0$) и $a < 0$ (получаем функцию, определенную только при $x \in \boldsymbol{Z}$). Приведенные рассуждения относительно целесообразности выбора основания показательной функции не влияют на область допустимых значений выражения a^x (например, как мы видели выше, пара значений $a = -2$, $x = -3$ принадлежит его ОДЗ, и это приходится учитывать при решении некоторых задач).

Примеры решения задач

Задача 1 Сравните значения выражений:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}$ и $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ убывающая $\left(\frac{2}{3}<1\right)$, поэтому из неравенства $-3>-5$ получаем $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$. ◁ 2) ▶ Функция $y=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{x}$ возрастающая $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}>1\right)$, поэтому из неравенства $4>3$ получаем $$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}>\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}.$$ ◁	Учтем, что функция $y=a^x$ при $a>1$ является возрастающей, а при $0<a<1$ — убывающей. Поэтому сначала сравним данное основание a с единицей, а затем, сравнивая аргументы, сделаем вывод о соотношении между данными значениями функции.

Задача 2 Сравните с единицей положительное основание a, если известно, что выполняется неравенство:

1) $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$; 2) $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Поскольку $\sqrt{5}<\sqrt{11}$ и по условию $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$, то функция a^x — убывающая, следовательно, $$0<a<1.$$ ◁ 2) ▶ Так как $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{5}$ и по условию $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$, то функция a^x — возрастающая, поэтому $a>1$. ◁	В каждом задании данные выражения — это два значения функции a^x. Проанализируем, какое значение функции соответствует большему значению аргумента (для этого сначала сравним аргументы). Если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция a^x является возрастающей и $a>1$. Если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция a^x — убывающая, тогда $0<a<1$.

Задача 3 Постройте график функции:

1) $y = 1{,}7^x$; 2) $y = 0{,}3^x$.

Комментарий

При $a > 0$ значение $a^x > 0$, следовательно, график функции $y = a^x$ всегда расположен выше оси Ox. Он пересекает ось Oy в точке $y = 1$ ($a^0 = 1$).

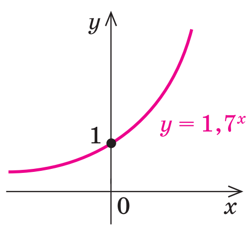
При $a > 1$ показательная функция ($y = 1{,}7^x$) возрастает, а значит, ее графиком будет кривая (экспонента), точки которой при увеличении аргумента поднимаются.

При $0 < a < 1$ показательная функция ($y = 0{,}3^x$) убывает, поэтому, графиком функции $y = a^x$ будет кривая, точки которой при увеличении аргумента опускаются. (Напомним, что, опускаясь, график приближается к оси Ox, но никогда ее не пересекает.)

Чтобы уточнить поведение графиков данных функций, найдем координаты нескольких дополнительных точек.

Решение

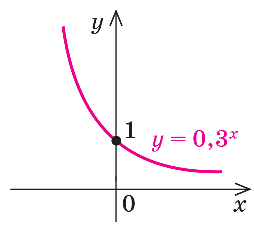
1) ▶ $y = 1{,}7^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{17}$	1	$1{,}7$	$2{,}89$

◁

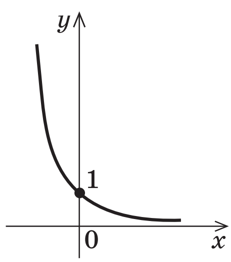
2) ▶ $y = 0{,}3^x$



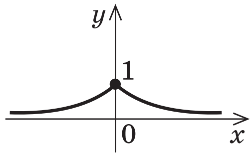
x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{3}$	1	$0{,}3$	$0{,}09$

◁

Задача 4* Изобразите схематически график функции $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 3\right|$.

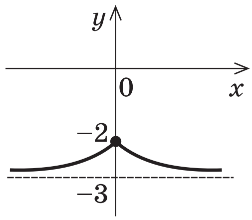
Решение	*Комментарий*
▶ Последовательно строим графики:	Составим план построения графика данной функции с помощью последовательных геометрических преобразований (п. 2.3 учебника для 10 класса).
1. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 	1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (основание $a = \frac{1}{3} < 1$, а значит, показательная функция убывает).

2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$



2. Затем можно построить график функции $y=g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=f(|x|)$: справа от оси Oy (и на самой оси) график функции $y=f(x)$ остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy.

3. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3$

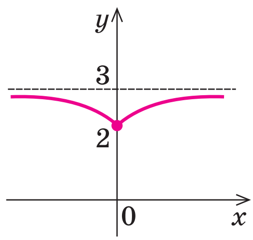


3. После этого можно построить график функции

$$y=\varphi(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3=g(x)-3:$$

параллельно перенести график функции $g(x)$ вдоль оси Oy на (-3) единицы.

4. $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$



◁

4. Далее можно построить график данной функции

$$y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|=|\varphi(x)|:$$

выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y=\varphi(x)$ должен остаться без изменений (но таких точек у графика функции $y=\varphi(x)$ нет), а график функции $y=\varphi(x)$ ниже оси Ox необходимо отобразить симметрично относительно оси Ox.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение показательной функции.
2. Постройте графики показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$ (выберите конкретные значения a). Через какую точку проходят графики всех показательных функций?
3. Пользуясь графиком показательной функции $y = a^x$ (при $a > 1$ и при $0 < a < 1$), охарактеризуйте ее свойства.

4*. Обоснуйте свойства функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

5. Используя возрастание или убывание соответствующей показательной функции, сравните значения: а) 7^5 и 7^9; б) $0{,}7^5$ и $0{,}7^9$.

Упражнения

1. Укажите, какие из данных функций возрастают, а какие убывают:

1°) $y = 4^x$; 2°) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; 3°) $y = \sqrt{3}^x$; 4°) $y = \pi^x$; 5) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$;

6*) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^x$; 7*) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; 8*) $y = 2^{-x}$; 9*) $y = -5^x$.

2°. Постройте график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 3) $y = 0{,}2^x$; 4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = 0{,}7^x$.

3. Зная, что $a > b > 1$, изобразите схематически в одной системе координат графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$.

4. Найдите область значений функции:

1) $y = 3^x + 1$; 2) $y = -5^x$; 3) $y = 7^x - 2$; 4) $y = -\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

5. Постройте график функции:

1°) $y = -3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 3$; 3*) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4*) $y = 5^{|x|}$; 5*) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$.

6. Сравните значения выражений:

1°) $3^{1,5}$ и $3^{1,4}$; 2°) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,3}$ и $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,8}$; 3°) $0{,}78^{-0,7}$ и $0{,}78^{-0,6}$;

4) $(\sqrt{2})^{-3}$ и $(\sqrt{2})^{-5}$; 5) $0{,}5^{\sqrt{3}}$ и $0{,}5^{\sqrt{7}}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$ и $2^{\sqrt{3}}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^8$ и $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9$; 8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^5$;

10) $0{,}2^{-10}$ и 5^{11}.

7. Сравните показатели m и n, если известно, что верно неравенство:

1) $3{,}2^m < 3{,}2^n$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n$; 3) $\left(\frac{7}{6}\right)^m > \left(\frac{7}{6}\right)^n$; 4) $0{,}99^m < 0{,}99^n$;

5) $(\sqrt{2})^m > (\sqrt{2})^n$; 6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$; 7) $(\sqrt{5} - 1)^m < (\sqrt{5} - 1)^n$;

8) $(\sqrt{2} - 1)^m < (\sqrt{2} - 1)^n$.

8. Сравните с единицей положительное основание a, если известно, что верно неравенство:

1) $a^{100} > a^{99}$; 2) $a^{0,2} < a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{7}}$;

4) $a^{\sqrt{17}} > a^4$; 5) $a^{-\frac{1}{17}} < a^{-\frac{1}{8}}$; 6) $a^{-0,25} > a^{-\sqrt{3}}$.

9. Сравните с единицей значение выражения:

1) $0{,}01^{1,2}$; 2) $0{,}99^{100}$; 3) $\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{30}{31}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

5) $0{,}007^{0}$; 6) $100^{-0,01}$; 7) $3^{-\sqrt{2}}$; 8) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}}$.

10. Какой вывод можно сделать о знаке числа x, если:

1) $3^x = 0{,}6$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$; 3) $10^x = 4$; 4) $0{,}3^x = 0{,}1$?

11. Расположите числа в порядке их возрастания:

1) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{-1,5}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{1,4}$, 1;

2) $0{,}3^{9}$, 1, $0{,}3^{-\sqrt{5}}$, $0{,}3^{\frac{1}{2}}$, $0{,}3^{-9}$, $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

12*. Известно, что когда при радиоактивном распаде количество вещества за сутки уменьшается вдвое, то через x суток от первоначальной массы M_0 остается масса M, которая вычисляется по формуле $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Отсюда $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (где $x > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$) Покажите графически, как с изменением x изменяется отношение $\frac{M}{M_0}$.

Используя в случае необходимости построенный график, дайте ответы (точные или приближенные) на вопросы:

а) Во сколько раз уменьшится масса радиоактивного вещества через 1,5 суток; 2,5 суток; 3 суток; 4 суток?

б) Сколько времени должно пройти, чтобы первоначальная масса радиоактивного вещества уменьшилась в 2,5 раза; в 3 раза; в 4 раза?

§ 14 РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

14.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Таблица 18

1. Основные формулы и соотношения

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

$$(ab)^u = a^u \cdot b^u$$

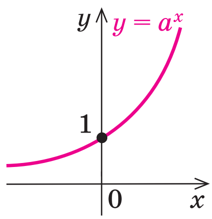
$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

$$(a^u)^v = a^{uv}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

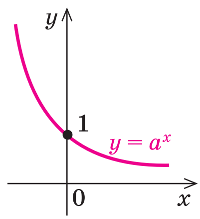
График функции $y = a^x$ $(a > 0)$

$a > 1$



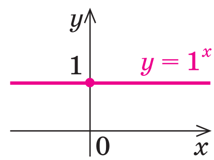
возрастает

$0 < a < 1$



убывает

$a = 1$



постоянная

2. Схема равносильных преобразований простейших показательных уравнений

Ориентир	Пример	
При $a > 0$ и $a \neq 1$ $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$	$3^{2x+4} = 9.$ ▶ $3^{2x+4} = 3^2,$ $2x + 4 = 2,$ $x = -1.$ *Ответ:* $-1.$ ◁	$6^{x+3} = -36.$ ▶ Корней нет (поскольку $6^t > 0$ для всех t) *Ответ:* корней нет. ◁

3. Приведение некоторых показательных уравнений к простейшим

Ориентир	Пример
1) *Если в левой и правой частях показательного уравнения стоят только произведения, частные, корни или степени, то целесообразно попытаться с помощью основных формул записать обе части уравнения как степени с одинаковыми основаниями.*	$2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}.$ ▶ $2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}}, \quad 2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2} - 4x},$ $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x, \ x = \frac{1}{2}.$ *Ответ:* $\frac{1}{2}.$ ◁

2) *Если в одной части показательного уравнения стоит число, а в другой все члены содержат выражение вида* a^{kx} (показатели степеней отличаются только свободными членами), *то удобно в этой части уравнения вынести за скобки наименьшую степень a.*	$5^x - 2\cdot 5^{x-2} = 23.$ ▶ $5^{x-2}\cdot(5^2 - 2) = 23,$ $5^{x-2}\cdot 23 = 23,\ 5^{x-2} = 1,$ $5^{x-2} = 5^0,\ x - 2 = 0,$ $x = 2.$ *Ответ:* 2. ◁

Объяснение и обоснование

Показательными уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменная входит в показатель степени (а основание этой степени не содержит переменной).

Рассмотрим простейшее показательное уравнение вида

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$. Поскольку при этих значениях a функция $y = a^x$ строго монотонна (возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$), то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Это означает, что **уравнение $a^x = b$ при $b > 0$ имеет единственный корень.** Чтобы его найти, достаточно представить b в виде $b = a^c$.

Очевидно, что $x = c$ является корнем уравнения $a^x = a^c$.

Графически это проиллюстрировано на рис. 14.1.

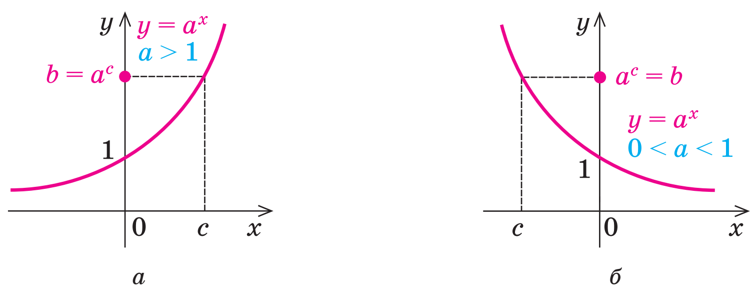


Рис. 14.1

Чтобы решить, например, уравнение $7^x = 49$, достаточно представить его в виде $7^x = 7^2$ и записать единственный корень — $x = 2$.

Если $b \leqslant 0$, то уравнение $a^x = b$ (при $a > 0$) корней не имеет, так как a^x всегда больше нуля. (На графиках, приведенных на рис. 14.2, прямая $y = b$ не пересекает график функции $y = a^x$ при $b \leqslant 0$.)

Например, уравнение $7^x = -7$ не имеет корней.

Обобщая приведенные выше рассуждения относительно решения простейших показательных уравнений, отметим, что **при $a > 0$ и $a \neq 1$ уравнение вида**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (2)$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \quad (3)$$

Коротко это утверждение можно записать так: **при $a > 0$ и $a \neq 1$**

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}\,.$$

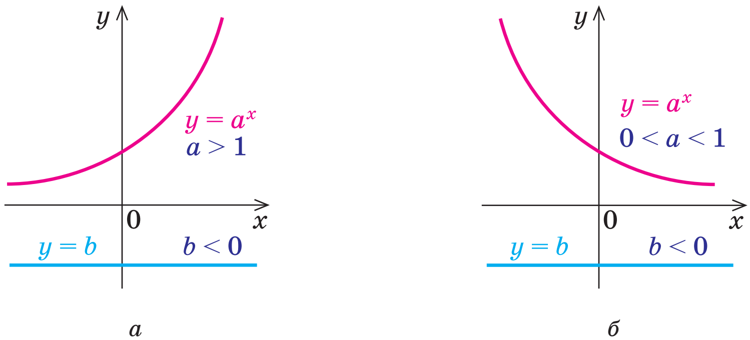


Рис. 14.2

Чтобы обосновать равносильность этих уравнений, достаточно заметить, что равенства (2) и (3) могут быть верными только одновременно, поскольку функция $y = a^t$ является строго монотонной и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента t (то есть из равенства степеней (2) обязательно вытекает равенство показателей (3)). Таким образом, все корни уравнения (2) (которые обращают это уравнение в верное равенство) будут корнями и уравнения (3), и наоборот, все корни уравнения (3) будут корнями уравнения (2). А это и означает, что уравнения (2) и (3) равносильны.

В простейших случаях при решении показательных уравнений пытаются с помощью основных формул действий над степенями (см. табл. 18) привести (если это возможно) данное уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для решения более сложных показательных уравнений чаще всего используют замену переменных (применение этого метода рассмотрено в табл. 19, с. 178) или свойства соответствующих функций (применение этих методов рассмотрено в табл. 27, с. 251).

Заметим, что все равносильные преобразования уравнения всегда выполняются на его области допустимых значений (то есть на общей области определения для всех функций, входящих в запись этого уравнения). Областью допустимых значений (ОДЗ) показательных уравнениях чаще всего является множество всех действительных чисел. В этих случаях, как правило, ОДЗ явно не находят и не записывают в решении уравнения (см. далее решение задач 1–3). Но если в ходе решения показательных уравнений равносильные преобразования выполняются не на всем множестве действительных чисел, то в этом случае приходится вспоминать об ОДЗ (задача 4^* на с. 177).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение:

1) $4^x = 64$; 2) $5^x = -1$; 3) $12^{x^2-4} = 1$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $4^x = 64$, $4^x = 4^3$, $x = 3$. ◁ 2) ▶ $5^x = -1$ — корней нет, поскольку $5^x > 0$ всегда. ◁ 3) ▶ $12^{x^2-4} = 1$, $12^{x^2-4} = 12^0$, $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$. ◁	При $a > 0$ всегда $a^x > 0$, поэтому уравнение $5^x = -1$ не имеет корней. Другие уравнения приведем к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) и перейдем к равносильному уравнению $f(x) = g(x)$.

Задача 2 Решите уравнение:

1) $\frac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot (0{,}04)^{x-2}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Данное уравнение равносильно уравнениям: $\frac{(5^{-1})^{x-0{,}5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2}$, $\frac{5^{-x+0{,}5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^1 \cdot 5^{-2x+4}$, $5^{-x+0{,}5-\frac{1}{2}} = 5^{1+(-2x+4)}$, $5^{-x} = 5^{5-2x}$, $-x = 5 - 2x$, $x = 5$. *Ответ:* 5. ◁ 2) ▶ Данное уравнение равносильно уравнениям: $(2 \cdot 3)^x = (6^{-1})^{2x-3}$, $6^x = 6^{-2x+3}$, $x = -2x + 3$, $x = 1$. *Ответ:* 1. ◁	*В левой и правой частях данных уравнений стоят только произведения, частные, корни или степени. В этом случае для приведения уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ попробуем применить основные формулы действий над степенями, чтобы записать обе части уравнения как степени с одинаковыми основаниями.* В уравнении 1 следует обратить внимание на то, что $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, а $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ и $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, таким образом, левую и правую части этого уравнения можно записать как степени числа 5. Для преобразования уравнения 2 напомним, что все формулы можно применять как слева направо, так и справа налево. Например, для левой части этого уравнения воспользуемся формулой $a^u \cdot b^u = (ab)^u$ и запишем $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$.

Задача 3 Решите уравнение $3^{2x+2} + 5 \cdot 3^{2x-2} = 86$.

Решение	*Комментарий*
▶ Данное уравнение равносильно уравнениям: $3^{2x-2} \cdot (3^4 + 5) = 86$, $3^{2x-2} \cdot 86 = 86$, $3^{2x-2} = 1$, $3^{2x-2} = 3^0$, $2x - 2 = 0$, $x = 1$. *Ответ:* 1. ◁	В левой части уравнения все члены содержат выражения вида 3^{2x} (показатели степеней отличаются только свободными членами). В этом случае в левой части уравнения удобно вынести за скобки наименьшую степень числа 3, то есть 3^{2x-2}.

Задача 4* Решите уравнение $(1+b^2)^{\sqrt{x}} = (1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$.

Решение	*Комментарий*
▶ ОДЗ: $x \geqslant 0$, любое $b \in \boldsymbol{R}$. Рассмотрим два случая. 1) При $b = 0$ получаем уравнение $1^{\sqrt{x}} = 1^{4-\sqrt{x}}$, корни которого — все действительные числа из ОДЗ, то есть $x \geqslant 0$. 2) При $b \neq 0$ значение $1 + b^2 > 1$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{x}$. Отсюда $\sqrt{x} = 2$, тогда $x = 4$. *Ответ:* 1) при $b = 0$ $x \in [0;+\infty)$; 2) при $b \neq 0$ $x = 4$. ◁	Это уравнение относительно переменной x содержит параметр b. Анализируя основания степеней в уравнении, делаем вывод, что при любых значениях b основание $1 + b^2 \geqslant 1$. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ — возрастающая, а при $a = 1$ — постоянная (см. графики функции $y = a^x$ в табл. 18). Основание $1 + b^2 = 1$ при $b = 0$, а при всех других значениях b основание $1 + b^2 > 1$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно: $b = 0$ и $b \neq 0$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях показательное уравнение $a^x = b$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) имеет корни. В каких случаях это уравнение не имеет корней? Приведите примеры. Проиллюстрируйте эти примеры графически.
2. Какому уравнению равносильно показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$ и $a \neq 1$? Приведите примеры.
3*. Изменится ли ответ на вопрос 2, если для основания степеней будет дано только одно ограничение $a > 0$?

Упражнения

Решите уравнение **(1—5)**.

1. 1°) $4^x = 8$; 2°) $3^x = 9^{x+1}$; 3°) $5^{3x-1} = 0{,}2$; 4°) $7^{1-4x} = 1$; 5°) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$;

6°) $3^{x^2-4x} = 9$; 7) $4^x = 2^{6+x-x^2}$; 8) $2^{2^x} = 2$; 9°) $2^x = 4$; 10°) $2^x = 16$;

11°) $3^x = -1$; 12°) $2^x = 32$; 13°) $3^x = 0$; 14°) $5^x = 1$; 15) $3^x - 3 = 0$;

16) $3^{2x} = 81$; 17°) $2^{3x} = 8$; 18) $3^{x^2-5x+8} = 9$; 19) $7^x = 7^{2-x}$; 20) $25^x = 5^{3-x}$;

21*) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$; 22*) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^x = \frac{2}{5}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

3. 1) $2^{x^2} = \frac{16^2}{4^x}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$; 3) $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$;

4) $\frac{3^{x^2}}{27} = 9^x$; 5) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$.

4. 1°) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; 2°) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; 3°) $4^{x+1} + 4^x = 320$;

4°) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$; 5°) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4{,}8$;

7) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$; 8) $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$.

5*. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2x-3} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{x+5}$; 2) $(1 + |a|)^x = (1 + |a|)^{2-x}$;

3) $\left(1+\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\sqrt{a}\right)^{6-\frac{2}{x}}$.

14.2. РЕШЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Таблица 19

Схема поиска плана решения показательных уравнений	
Ориентир	Пример
1. **Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней** (используя справа налево основные формулы действий над степенями, приведенные в табл. 53).	$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$. ▶ $4^x \cdot 4^1 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$. Учитывая, что $4^x = 2^{2x}$, приводим все степени к одному основанию 2: $4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$.
2. **Если возможно, приводим все степени (с переменной в показателе) к одному основанию** *и выполняем замену переменной.*	*Замена* $2^x = t$ дает уравнение $4t^2 - 3t - 10 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{5}{4}$. Обратная замена дает $2^x = 2$, тогда $x = 1$ или $2^x = -\frac{5}{4}$ — корней нет. *Ответ:* 1. ◁

Окончание табл. 19

3. Если нельзя привести к одному основанию, то пытаемся привести все степени **к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение** (*которое решается делением обеих частей уравнения на наибольшую степень одного из видов переменных*).	$4^x + 3\cdot 6^x - 4\cdot 9^x = 0.$ ▶ Приведем все степени к основаниям 2 и 3: $2^{2x} + 3\cdot 2^x\cdot 3^x - 4\cdot 3^{2x} = 0.$ Имеем однородное уравнение (у всех членов одинаковая суммарная степень — $2x$). Для его решения разделим обе части на $3^{2x} \neq 0$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0.$ *Замена* $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ дает уравнение $t^2 + 3t - 4 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -4.$ Обратная замена дает уравнения: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -4$ — корней нет или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1,$ тогда $x = 0.$ *Ответ:* 0. ◁
4. В других случаях **переносим все члены уравнения в одну сторону и пробуем разложить полученное выражение на множители** или применяем специальные приемы решения, в которых **используются свойства соответствующих функций.**	$6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0.$ ▶ Если попарно сгруппировать члены в левой части уравнения и в каждой паре вынести за скобки общий множитель, то получаем $2^x(3^x - 9) - 2(3^x - 9) = 0.$ Теперь можно вынести за скобки общий множитель $3^x - 9$: $(3^x - 9)(2^x - 2) = 0.$ Отсюда $3^x - 9 = 0$ или $2^x - 2 = 0.$ Получаем два уравнения: 1) $3^x = 9$, тогда $x = 2$; 2) $2^x = 2$, тогда $x = 1$. *Ответ:* 2; 1. ◁

Объяснение и обоснование

Для решения более сложных показательных уравнений (в сравнении с теми, которые были рассмотрены в п. 14.1) чаще всего используют замену переменных. Чтобы сориентироваться, можно ли ввести замену переменных в данном показательном уравнении, часто бывает полезно в начале решения *избавиться от числовых слагаемых в показателях степеней,* используя формулы: $a^{u+v} = a^u\cdot a^v$; $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$.

Например, в уравнении

$$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \qquad (1)$$

вместо 4^{x+1} записываем произведение $4^x \cdot 4^1$ и получаем уравнение

$$4^x \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0, \qquad (2)$$

равносильное данному.

Затем пробуем *все степени* (с переменной в показателе) *привести к одному основанию и выполнить замену переменной*. Например, в уравнении (2) степень с основанием 4 можно записать как степень с основанием 2: $4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$ и получить уравнение

$$2^{2x} \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0. \qquad (3)$$

Напомним общий ориентир: **если в уравнение, неравенство или тождество переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).** Обращаем внимание на то, что $2^{2x} = \left(2^x\right)^2$. Таким образом, в уравнение (3) переменная входит фактически в одном виде — 2^x, поэтому удобно ввести замену $2^x = t$. Получаем квадратное уравнение

$$4t^2 - 3t - 10 = 0, \qquad (4)$$

для которого находим корни, а затем выполняем обратную замену (см. решение в табл. 19).

Отметим, что как использование основных формул действий над степенями, так и использование замены и обратной замены всегда приводит к уравнению, равносильному данному на его ОДЗ (в уравнении (1) — на множестве всех действительных чисел). Это обусловлено тем, что все указанные преобразования мы можем выполнить и в прямом, и в обратном направлениях. (Таким образом, мы всегда сможем доказать, что каждый корень первого уравнения является корнем второго, и наоборот, аналогично тому, как был обоснован равносильный переход для простейших показательных уравнений на с. 175).

В тех случаях, когда все степени (с переменной в показателе) в показательном уравнении, которое не приводится непосредственно к простейшему, не удается привести к одному основанию, следует *попытаться привести все степени к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение*.

Например, рассмотрим уравнение

$$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0. \qquad (5)$$

Все степени в этом уравнении можно записать через основания 2 и 3, поскольку

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x},\ 9^x = (3^2)^x = 3^{2x},\ 6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x.$$

Получаем уравнение

$$2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0. \qquad (6)$$

Все одночлены, стоящие в левой части этого уравнения, имеют степень $2x$ (степень одночлена $2^x \cdot 3^x$ также равна $x + x = 2x$).

Напомним ориентир:

Если все члены уравнения, в левой и правой частях которого стоят многочлены от двух переменных (или от двух функций одной переменной), имеют одинаковую суммарную степень*, то уравнение называется однородным.

Решается однородное уравнение делением обеих его частей на наибольшую степень одной из переменных.

Следовательно, уравнение (6) является однородным и его можно решить делением обеих частей или на 2^{2x}, или на 3^{2x}. Отметим, что при всех значениях x выражения 2^{2x} и 3^{2x} не равны нулю. Таким образом, при делении на эти выражения не может произойти потери корней (как это могло быть, например, для однородных тригонометрических уравнений). В результате деления обеих частей уравнения на любое из этих выражений всегда получается уравнение, равносильное данному. Например, если разделить обе части уравнения (6) на $3^{2x} \neq 0$, получаем

$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}-\frac{4\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0$ или после сокращения $\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{2^x}{3^x}-4=0.$

В последнем уравнении все члены можно представить как степени с одним основанием $\frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-4=0$ и выполнить замену $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t.$ Далее решение полученного уравнения полностью аналогично решению уравнения (2). Полное решение этого уравнения приведено в табл. 19.

Составляя план решения показательного уравнения, необходимо учитывать, что при решении некоторых из них целесообразно *перенести все члены уравнения в одну сторону и попытаться разложить* полученное выражение *на множители*, например, с использованием группировки членов, как это сделано в табл. 19 для уравнения

$$6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0.$$

Для решения некоторых показательных уравнений можно применить свойства соответствующих функций (эти методы рассмотрены в § 20).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\frac{6}{3^x}-\frac{4}{3^x+1}=1.$

Решение	*Комментарий*
▶ *Замена* $3^x = t$. Получаем $\frac{6}{t}-\frac{4}{t+1}=1.$ Тогда $6(t+1) - 4t = t(t+1)$, $t^2 - t - 6 = 0$. Отсюда $t_1 = -2,\ t_2 = 3.$	В данное уравнение переменная входит только в одном виде 3^x, поэтому удобно ввести замену $3^x = t$ и, получив дробное уравнение, найти его корни, а затем выполнить обратную замену.

* Конечно, если уравнение имеет вид $f = 0$ (где f — многочлен), то речь идет только о степени членов многочлена f, поскольку нуль-многочлен степени не имеет.

Обратная замена дает уравнения:
$3^x = -2$ — корней нет или
$3^x = 3$, тогда $x = 1$.
Ответ: 1. ◁

Как уже отмечалось, замена и обратная замена — это равносильные преобразования данного уравнения, но при решении полученного дробного уравнения следует позаботиться о том, чтобы не получить посторонних корней (для этого, например, достаточно учесть, что $t = 3^x > 0$, и поэтому ОДЗ полученного уравнения: $t \neq -1$ и $t \neq 0$ будет учтена автоматически).

Задача 2 Решите уравнение $25^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0.$

Решение	*Комментарий*
▶ $25^x \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot \frac{5^x}{5^1} - 3 = 0,$ $5^{2x} \cdot 5 - 2 \cdot 5^x - 3 = 0.$ *Замена* $5^x = t$ дает уравнение $5t^2 - 2t - 3 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{3}{5}.$ Обратная замена дает $5^x = 1$, тогда $x = 0$ или $5^x = -\frac{3}{5}$ — корней нет. *Ответ:* 0. ◁	1. Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней. 2. Приводим все степени (с переменной в показателе) к одному основанию 5. 3. Выполняем замену $5^x = t$, решаем полученное уравнение, производим обратную замену и решаем полученные простейшие показательные уравнения (а также учитываем, что все преобразования были равносильными).

Задача 3 Решите уравнение $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x.$

Решение	*Комментарий*
▶ $2^x \cdot 2^3 - 3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2^x = 0,$ $9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0 \mid : 3^x \neq 0,$ $9 \cdot \frac{2^x}{3^x} - \frac{4 \cdot 3^x}{3^x} = 0,$ $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0,$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9},$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$ $x = 2.$ *Ответ:* 2. ◁	1. Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней, переносим все члены уравнения в одну сторону и приводим подобные члены. 2. Замечаем, что степени всех членов полученного уравнения $9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0$ (с основаниями 2 и 3) одинаковые — x, следовательно, это уравнение однородное. Его можно решить делением обеих частей на наибольшую степень одного из видов выражений

с переменной — или на 2^x, или на 3^x. Учитывая, что $3^x \neq 0$ при всех значениях x, в результате деления на 3^x получаем уравнение, равносильное предыдущему (а значит, и данному).

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используются традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных.

Задача 4 Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ 4^x+4^y=5. \end{cases}$

Решение	*Комментарий*
▶ Из первого уравнения системы $y = 1 - x$. Тогда из второго уравнения получаем $4^x + 4^{1-x} = 5$, то есть $4^x+\frac{4^1}{4^x}=5$. *Замена* $4^x = t$ дает уравнение $t+\frac{4}{t}=5$, из которого получаем уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$, имеющее корни: $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Обратная замена дает $4^x = 1$, тогда $x_1 = 0$, или $4^x = 4$, откуда $x_2 = 1$. Находим соответствующие значения $y = 1 - x$: если $x_1 = 0$, то $y_1 = 1$; если $x_2 = 1$, то $y_2 = 0$. *Ответ:* (0; 1), (1; 0). ◁	Если из первого уравнения выразить y через x и подставить во второе уравнение, то получим показательное уравнение, которое мы умеем решать (аналогично решению задачи 2). Выполняя замену, учитываем, что $t = 4^x \neq 0$. Тогда в полученном дробном уравнении $t+\frac{4}{t}=5$ знаменатель $t \neq 0$. Таким образом, это дробное уравнение равносильно уравнению $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Задача 5* Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^x-3^y=16, \\ 5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=2. \end{cases}$

Решение	*Комментарий*
▶ Замена $5^{\frac{x}{2}}=u$ и $3^{\frac{y}{2}}=v$ дает систему уравнений $\begin{cases} u^2-v^2=16, \\ u-v=2. \end{cases}$	Если обозначить $5^{\frac{x}{2}}=u$ и $3^{\frac{y}{2}}=v$, то $5^x = u^2$ и $3^y = v^2$. Тогда данная система будет равносильна алгебраической системе, которую легко решить.

Из второго уравнения этой системы имеем $u = 2 + v$. Далее из первого уравнения получаем $(2 + v)^2 - v^2 = 16$. Отсюда $v = 3$, тогда $u = 5$.
Обратная замена дает уравнения:

$3^{\frac{y}{2}} = 3$, тогда $\frac{y}{2} = 1$, отсюда $y = 2$;

$5^{\frac{x}{2}} = 5$, тогда $\frac{x}{2} = 1$, отсюда $x = 2$.

Ответ: (2; 2). ◁

После обратной замены получаем систему простейших показательных уравнений.

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как составить план решения показательных уравнений, которые не приводятся непосредственно к простейшим.
2. Какую замену переменных можно выполнить при решении уравнения $4^{2x} + 2 \cdot 4^x - 3 = 0$? Какое уравнение получается после замены?
3. Объясните, почему уравнения $5^x = 7^x$ и $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 5^x - 4 \cdot 5^{2x} = 0$ являются однородными. Как можно решить эти однородные уравнения?

Упражнения

Решите уравнение **(1–5)**.

1°. 1) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$; 2) $6^{2x} - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$; 3) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$;

4) $\frac{8}{5^x - 3} - \frac{6}{5^x + 1} = 3$; 5) $\frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2$.

2. 1) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$; 2) $64^x - 7 \cdot 8^x - 8 = 0$; 3) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

4) $3^x + 3^{2-x} = 10$; 5) $2^{x+1} + 4^x = 80$; 6) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$;

7) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$; 8*) $10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11$.

3. 1°) $7^x = 9^x$; 2°) $5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x = 0$;

3) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$; 4) $4^{x+1} + 4 \cdot 3^x = 3^{x+2} - 4^x$;

5) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2 \cdot 5^x + 5^{x+1}$; 6) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

4. 1) $2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$; 2) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0$;

3) $4^x = 3 \cdot 49^x - 2 \cdot 14^x$; 4) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

5) $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

5*. 1) $6^x - 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 36 = 0$; 2) $5 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{x+1} - 3^x + 3 = 0$;

3) $4 \cdot 20^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 5 \cdot 4^{x+1} - 20 = 0$; 4) $8^x - 4^x - 2^{x+3} + 8 = 0$.

6. Решите графически уравнение:

1) $2^x = 3 - x$; 2) $3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

Проверьте подстановкой, действительно ли найденное значение x является корнем уравнения.

7*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 6, не имеют других корней, кроме найденных графически.

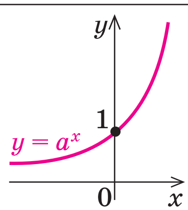
8. Решите систему уравнений:

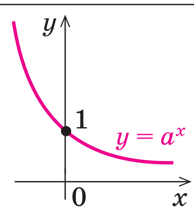
1) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 5^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2^x + 2^y = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^x - 3^y = 24; \end{cases}$ 5*) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$ 6*) $\begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31. \end{cases}$

14.3. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

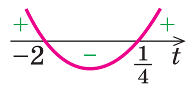
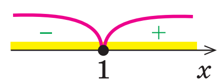
Таблица 20

<table>
<tr><td colspan="2">1. График показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$ и $a \neq 1$)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>

возрастает</td><td>

убывает</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Схема равносильных преобразований простейших показательных неравенств</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$
знак неравенства сохраняется</td><td>$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$
знак неравенства меняется на противоположный</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры</td></tr>
<tr><td>$2^{x-3} > 4$.
▶ $2^{x-3} > 2^2$. Функция $y = 2^t$ является возрастающей, следовательно:
$x - 3 > 2$, $x > 5$.
Ответ: $(5; +\infty)$. ◁</td><td>$(0,7)^{x-3} > 0,49$.
▶ $(0,7)^{x-3} > (0,7)^2$. Функция $y = 0,7^t$ убывающая, следовательно:
$x - 3 < 2$, $x < 5$.
Ответ: $(-\infty; 5)$. ◁</td></tr>
</table>

Окончание табл. 20

3. Решение более сложных показательных неравенств	
Ориентир	Пример
I. **С помощью равносильных преобразований** (по схеме решения показательных уравнений, табл. 54) **данное неравенство приводится к неравенству известного вида** (квадратному, дробному и др.). После решения полученного неравенства приходим к простейшим показательным неравенствам.	$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ ▶ $4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ *Замена* $2^x = t$ дает неравенство $4t^2 + 7t - 2 > 0$, решения которого $t < -2$ или $t > \frac{1}{4}$  (см. рисунок). Обратная замена дает $2^x < -2$ (решений нет) или $2^x > \frac{1}{4}$, откуда $2^x > 2^{-2}$, то есть $x > -2$. *Ответ:* $(-2; +\infty)$. ◁
II. **Применяем *метод интервалов*,** приводя данное неравенство к виду $f(x) \gtrless 0$ и используя схему: 1. **Найти ОДЗ.** 2. **Найти нули $f(x)$.** 3. **Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** 4. **Записать ответ, учитывая знак неравенства.**	$3^x + 4^x > 7.$ ▶ Решим неравенство методом интервалов. Данное неравенство равносильно неравенству $3^x + 4^x - 7 > 0.$ Обозначим $f(x) = 3^x + 4^x - 7.$ 1. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$. 2. Нули функции: $f(x) = 0$. $3^x + 4^x - 7 = 0$. Поскольку функция $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), то значение, равное нулю, она принимает только в одной точке области определения: $x = 1$ $(f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0)$. 3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решение неравенства $f(x) > 0$.  *Ответ:* $(1; +\infty)$. ◁

Объяснение и обоснование

Решение простейших показательных неравенств вида $a^x > b$ (или $a^x < b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$) основывается на свойствах функции $y = a^x$, которая возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Например, чтобы найти решение неравенства $a^x > b$ при $b > 0$, достаточно представить b в виде $b = a^c$. Получаем неравенство

$$a^x > a^c. \qquad (1)$$

При $a > 1$ функция a^x возрастает, следовательно, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, поэтому из неравенства (1) получаем $x > c$ (знак этого неравенства совпадает со знаком неравенства (1)).

При $0 < a < 1$ функция a^x убывает, следовательно, большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, поэтому из неравенства (1) получаем $x < c$ (знак этого неравенства противоположен знаку неравенства (1)).

Графически это проиллюстрировано на рис. 14.3.

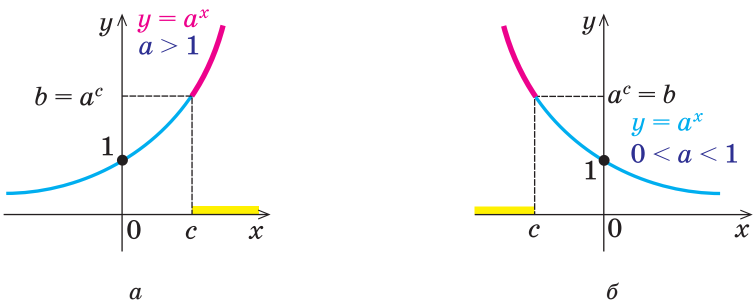


Рис. 14.3

Например, чтобы решить неравенство $5^x > 25$, достаточно представить это неравенство в виде $5^x > 5^2$, учесть, что $5 > 1$ (функция 5^x возрастающая, следовательно, при переходе к аргументам знак неравенства не меняется), и записать решение: $x > 2$.

Решение данного неравенства можно записывать в виде $x > 2$ или в виде промежутка $(2; +\infty)$.

Аналогично, чтобы решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, достаточно представить это неравенство в виде $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, учесть, что $\frac{1}{4} < 1$ (функция $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ убывающая, таким образом, при переходе к аргументам знак неравенства меняется на противоположный), и записать решение: $x < 2$.

Учитывая, что при любых положительных значениях a значение a^x всегда больше нуля, получаем, что **при $b \leqslant 0$ неравенство $a^x < b$ решений не имеет, а неравенство $a^x > b$ выполняется при всех действительных значениях x.**

Например, неравенство $7^x < -7$ не имеет решений, а решениями неравенства $7^x > -7$ являются все действительные числа.

Обобщая приведенные выше рассуждения относительно решения простейших показательных неравенств, отметим, что

при $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — неравенству $f(x) < g(x)$.

Коротко это утверждение можно записать так.

При $a > 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (*знак неравенства сохраняется*).
При $0 < a < 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (*знак неравенства меняется на противоположный*).

Чтобы обосновать равносильность соответствующих неравенств, достаточно заметить, что при $a > 1$ неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{2}$$

$$f(x) > g(x) \tag{3}$$

могут быть верными только одновременно, поскольку функция $y = a^t$ при $a > 1$ возрастающая и большему значению функции соответствует большее значение аргумента (и наоборот: большему значению аргумента соответствует большее значение функции). Таким образом, все решения неравенства (2) (которые обращают его в верное числовое неравенство) будут и решениями неравенства (3), и наоборот: все решения неравенства (3) будут решениями неравенства (2). А это и означает, что неравенства (2) и (3) равносильны.

Аналогично обосновывается равносильность неравенств $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$.

В простейших случаях при решении показательных неравенств, как и при решении показательных уравнений, пытаются с помощью основных формул действий над степенями привести (если это возможно) данное неравенство к виду $a^{f(x)} \gtrless a^{g(x)}$.

Для решения более сложных показательных неравенств чаще всего используют замену переменных или свойства соответствующих функций (эти методы рассмотрены в § 20).

Заметим, что аналогично решению показательных уравнений все равносильные преобразования неравенства всегда выполняются на его области допустимых значений (общей области определения для всех функций, входящих в запись этого неравенства). Для показательных неравенств достаточно часто областью допустимых значений (ОДЗ) является множество всех действительных чисел. В этих случаях, как правило, ОДЗ явно не находят и не записывают в решение неравенства (см. далее задачу 1). Но если в процессе решения показательного неравенства равносильные преобразования выполняются не на всем множестве действительных чисел, то в этом случае приходится учитывать ОДЗ (см. далее задачу 2).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите неравенство $(0{,}6)^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Решение

▶ $(0{,}6)^{x^2-7x+6} \geqslant (0{,}6)^0$.

Поскольку функция $y = (0{,}6)^t$ убывающая, то $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Отсюда $1 \leqslant x \leqslant 6$ (см. рисунок).

Ответ: [1; 6]. ◁

Комментарий

Запишем правую часть неравенства как степень числа 0,6: $1 = (0{,}6)^0$.

Поскольку $0{,}6 < 1$, то при переходе от степеней к показателям знак неравенства меняется на противоположный (получаем неравенство, равносильное данному).

Для решения полученного квадратного неравенства используем графическую иллюстрацию.

Задача 2 Решите неравенство $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

Решение

▶ ОДЗ: $x \geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leqslant 8.$$

Замена $3^{\sqrt{x}} = t$ $(t > 0)$ дает неравенство $t - \frac{9}{t} \leqslant 8$, равносильное неравенству $\frac{t^2 - 8t - 9}{t} \leqslant 0$.

Поскольку $t > 0$, получаем $t^2 - 8t - 9 \leqslant 0$. Отсюда $-1 \leqslant t \leqslant 9$.

Учитывая, что $t > 0$, имеем

$$0 < t \leqslant 9.$$

Выполняя обратную замену, получаем $0 < 3^{\sqrt{x}} \leqslant 9$. Тогда $3^{\sqrt{x}} \leqslant 3^2$.

Функция $y = 3^t$ возрастающая, таким образом, $\sqrt{x} \leqslant 2$. Учитывая ОДЗ, получаем

$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: [0; 4]. ◁

Комментарий

Поскольку равносильные преобразования неравенств выполняются на ОДЗ исходного неравенства, то зафиксируем эту ОДЗ. Используя формулу $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$, избавляемся от числового слагаемого в показателе степени и получаем степени с одним основанием 3, что позволяет ввести замену $3^{\sqrt{x}} = t$, где $t > 0$.

В полученном неравенстве знаменатель положителен, поэтому это дробное неравенство можно привести к равносильному ему квадратному.

После выполнения обратной замены следует учесть не только возрастание функции $y = 3^t$, но и ОДЗ исходного неравенства.

Задача 3* Решите неравенство $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} > 0$.

Решение

Решим неравенство методом интервалов. Обозначим $f(x) = 2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1}$.

1. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$.
2. Нули функции: $f(x) = 0$.

$$2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0,$$

$$2^{2x}\cdot 2 - 5\cdot 6^x + 3^{2x}\cdot 3 = 0,$$

$$2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0 \quad \big| : 3^{2x} \neq 0,$$

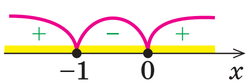
$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 = 0.$$

Замена $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t$. Получаем

$2t^2 - 5t + 3 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Обратная замена дает: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{3}{2}$.

Отсюда $x = 0$ или $x = -1$.

3. Отметим нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из полученных промежутков и записываем решения неравенства $f(x) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. ◁

Комментарий

Данное неравенство можно решать или приведением к алгебраическому неравенству, или методом интервалов. Для решения его методом интервалов используем схему, приведенную в табл. 20.

При нахождении нулей функции приведем все степени к двум основаниям (2 и 3), чтобы получить однородное уравнение. Это уравнение решается делением обеих частей на наивысшую степень одного из видов переменных — на 3^{2x}.

Учитывая, что $3^{2x} \neq 0$ при всех значениях x, в результате деления на 3^{2x} получаем уравнение, равносильное предыдущему.

Разумеется, для решения данного неравенства можно было учесть, что $3^{2x} > 0$ всегда, и после деления данного неравенства на 3^{2x} и замены $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t$ получить алгебраическое неравенство.

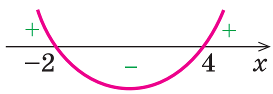
Задача 4* Решите неравенство $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

Комментарий

Данное нестрогое неравенство также удобно решать методом интервалов. При этом следует учитывать, что *в случае, когда мы решаем нестрогое неравенство $f(x) \leqslant 0$, все нули функции $f(x)$ должны войти в ответ.*

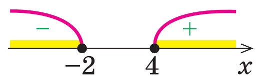
Решение

▶ Обозначим $f(x) = (3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8}$.



1. ОДЗ: $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$. Тогда $x \leqslant -2$ или $x \geqslant 4$ (см. рисунок).
2. Нули функции: $f(x) = 0$.

   $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$. Тогда $3^x - 9 = 0$ или $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$. Из первого уравнения: $x = 2$ — не принадлежит ОДЗ, а из второго: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.



3. Отмечаем нули $f(x)$ на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решение неравенства $f(x) \leqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; -2]$ или $x = 4$. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каких случаях показательные неравенства $a^x > b$ и $a^x < b$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) имеют решения. В каких случаях данные неравенства не имеют решений? Приведите примеры, проиллюстрируйте их графически.
2. Какому неравенству равносильно показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$? Приведите примеры.

Упражнения

1. Решите неравенство **(1–4)**.

1°) $2^x > 1$; 2°) $2^x > \frac{1}{2}$; 3) $3^x > 0$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$;

5°) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leqslant 4$; 7°) $5^x \geqslant 25\sqrt{5}$; 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} < 16$;

9*) $(0{,}3)^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leqslant 1$; 10*) $(1{,}3)^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geqslant 1$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$; 2°) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 3) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 \geqslant 0$;

4) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$; 5) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; 6) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leqslant 0$.

3. 1) $3^x > 5^x$; 2) $7^{x-1} \leqslant 2^{x-1}$;

3*) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geqslant 0$; 4*) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leqslant 8 \cdot 15^x$.

4*. 1) $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$; 2) $(3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$;

3) $\sqrt{6 \cdot 3^x - 2} > 3^x + 1$; 4) $\sqrt{2 \cdot 5^{x+1} - 1} > 5^x + 2$.

§ 15 ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Таблица 21

1. Логарифм числа	
Определение	Примеры
***Логарифмом положительного числа b по основанию a (a > 0, a ≠ 1)* называется показатель степени, в которую необходимо возвести *a*, чтобы получить *b*.** Обозначение: $\log_a b$.	1) $\log_4 16 = 2$, поскольку $4^2 = 16$; 2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, так как $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; 3) $\lg 1000 = 3$, поскольку $10^3 = 1000$.
Десятичный логарифм — *это логарифм по основанию* 10. Обозначение: $\log_{10} b = \lg b$.	
Натуральный логарифм — *это логарифм по основанию e* (*e* — иррациональное число, приближенное значение которого: $e \approx 2{,}7$). Обозначение: $\log_e b = \ln b$.	4) $\ln \frac{1}{e^2} = -2$, так как $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.
2. Основное логарифмическое тождество	
$\boxed{a^{\log_a b} = b}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$; 2) $10^{\lg 2} = 2$.
3. Свойства логарифмов и формулы логарифмирования ($a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$)	
1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$	*Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.*
2) $\boxed{\log_a a = 1}$	
3) $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$	*Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.*
4) $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	*Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.*
5) $\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}$	*Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени.*

Окончание табл. 21

4. Формула перехода к логарифмам с другим основанием	
$\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$
Следствия	
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Объяснение и обоснование

1. Логарифм числа. Если рассмотреть равенство $2^3 = 8$, то, зная любые два числа из этого равенства, мы можем найти третье:

Данное равенство	Что известно	Что находим	Запись	Название
$2^3 = 8$	числа 2 и 3	**число 8**	$8 = 2^3$	**степень**
	числа 8 и 3	**число 2**	$2 = \sqrt[3]{8}$	**корень третьей степени**
	числа 8 и 2	**число 3**	$3 = \log_2 8$	**логарифм**

Первые две операции, представленные в этой таблице (возведение в степень и извлечение корня n-й степени), нам уже известны, а с третьей — логарифмированием, то есть нахождением логарифма данного числа, мы ознакомимся в этом параграфе.

В общем виде операция логарифмирования позволяет из равенства $a^x = b$ (где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) найти показатель степени x. Результат выполнения этой операции обозначается $\log_a b$. Таким образом,

логарифмом положительного числа b по основанию a **($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b.**

Например: 1) $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) = 2$, поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

3) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$, потому что $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Отметим, что при положительных a и b ($a \neq 1$) уравнение $a^x = b$ всегда имеет единственное решение, поскольку функция $y = a^x$ принимает все значения из промежутка $(0; +\infty)$ и при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей (рис. 15.1).

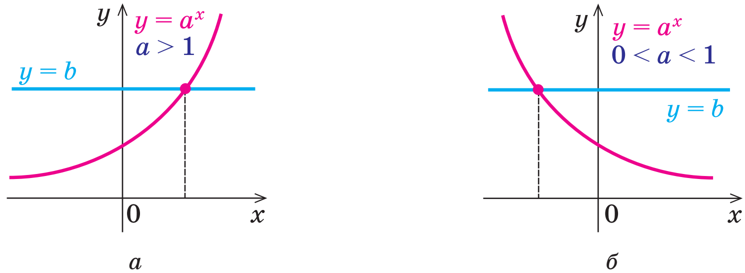


Рис. 15.1

Итак, каждое свое значение $b > 0$ функция a^x принимает только при одном значении x. Следовательно, *для любых положительных чисел* b *и* a ($a \neq 1$) *уравнение* $a^x = b$ *имеет единственный корень* $x = \log_a b$.

При $b \leqslant 0$ уравнение $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не имеет корней, таким образом, *при* $b \leqslant 0$ *значение выражения* $\log_a b$ *не существует*.

Например, не существуют значения $\log_3(-9)$, $\log_{\frac{1}{2}}(-7)$, $\log_2 0$.

Отметим, что *логарифм по основанию* 10 *называется десятичным логарифмом и обозначается* lg.

Например, $\log_{10} 7 = \lg 7$, $\lg 100 = \log_{10} 100 = 2$.

В недалеком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпочтение и составляли очень подробные таблицы их значений, которые использовались в различных вычислениях. В эпоху всеобщей компьютеризации десятичные логарифмы утратили свою ведущую роль. В современной науке и технике широко используются логарифмы, основанием которых является особенное число e (такое же знаменитое, как и число π). Число e, как и число π, — иррациональное, $e = 2{,}718281828459045...$.

Логарифм по основанию e *называется натуральным логарифмом и обозначается* ln.

Например, $\log_e 7 = \ln 7$, $\ln\frac{1}{e} = \log_e \frac{1}{e} = -1$.

2. Основное логарифмическое тождество. По определению логарифма, если $\log_a b = x$, то $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Подставляя в последнее равенство вместо x его значение, получаем равенство, которое называется *основным логарифмическим тождеством*:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}, \quad \text{где } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Например: 1) $5^{\log_5 9} = 9$; 2) $10^{\lg 7} = 7$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = 2$.

3. Свойства логарифмов и формулы логарифмирования. Во всех приведенных ниже формулах $a > 0$ и $a \neq 1$.

1) Из определения логарифма получаем, что

$$\boxed{\log_a 1 = 0},$$

поскольку $a^0 = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$). Таким образом, *логарифм единицы по любому основанию равен нулю.*

2) Поскольку $a^1 = a$, то

$$\boxed{\log_a a = 1}.$$

3) Чтобы получить формулу логарифма произведения xy ($x > 0$, $y > 0$), обозначим $\log_a x = u$ и $\log_a y = v$. Тогда по определению логарифма

$$x = a^u \text{ и } y = a^v. \tag{1}$$

Перемножив почленно два последних равенства, имеем $xy = a^{u+v}$. По определению логарифма и с учетом введенных обозначений из последнего равенства получаем $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$. Таким образом,

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}}. \tag{2}$$

Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.

4) Аналогично, чтобы получить формулу логарифма частного $\frac{x}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$), достаточно разделить почленно равенства (1). Тогда $\frac{x}{y} = a^{u-v}$. По определению логарифма и с учетом введенных обозначений из последнего равенства получаем $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$. Таким образом,

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}}. \tag{3}$$

Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

5) Чтобы получить формулу логарифма степени x^n (где $x > 0$), обозначим $\log_a x = u$. По определению логарифма $x = a^u$. Тогда $x^n = a^{nu}$, и по определению логарифма с учетом обозначения для u имеем $\log_a x^n = nu = n \log_a x$. Таким образом,

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a x^n = n \log_a x}}. \tag{4}$$

Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени. ○

Учитывая, что при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, по формуле (4) имеем: $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$. Иными словами, при $x > 0$ можно воспользоваться формулой

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}}$$

(запоминать эту формулу не обязательно, при необходимости можно записывать корень из положительного числа как соответствующую степень).

Замечание. Иногда приходится находить логарифм произведения xy и в том случае, когда оба числа x и y отрицательны ($x < 0$, $y < 0$). Тогда $xy > 0$ и $\log_a(xy)$ существует, но формулой (2) воспользоваться нельзя — она обоснована только для положительных значений x и y. В случае $xy > 0$ имеем $xy = |x| \cdot |y|$, и теперь $|x| > 0$ и $|y| > 0$. Таким образом, для логарифма произведения $|x| \cdot |y|$ можно воспользоваться формулой (2). Поэтому при $x < 0$ и $y < 0$ можем записать:

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|.$$

Отметим, что полученная формула справедлива и при $x > 0$ и $y > 0$, поскольку в этом случае $|x| = x$ и $|y| = y$. Таким образом,

при $xy > 0$ $$\boxed{\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|}. \quad (2')$$

Аналогично можно обобщить и формулы (3) и (4):

при $\frac{x}{y} > 0$ $$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|}, \quad (3')$$

при $x \neq 0$ $$\boxed{\log_a x^{2k} = 2k \log_a|x|}. \quad (4')$$

4. Формула перехода к логарифмам с другим основанием

Пусть $\log_a x = u$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$). Тогда по определению логарифма $a^u = x$. Прологарифмируем обе части последнего равенства по основанию b ($b > 0$, $b \neq 1$). Получим $\log_b a^u = \log_b x$.

Используя в левой части этого равенства формулу логарифма степени, имеем $u \log_b a = \log_b x$. Тогда $u = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Учитывая, что $u = \log_a x$, получаем

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Таким образом, *логарифм положительного числа x по одному основанию a равен логарифму этого же числа x по новому основанию b, деленному на логарифм прежнего основания a по новому основанию b.*

С помощью последней формулы можно получить следующие следствия.

1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$. Учитывая, что $\log_b b = 1$, имеем

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

2) Аналогично, учитывая формулу перехода от одного основания логарифма к другому и формулу логарифма степени, получаем (при $k \neq 0$)

$$\log_{a^k} b^k = \frac{\log_a b^k}{\log_a a^k} = \frac{k \log_a b}{k} = \log_a b.$$

Записав полученную формулу справа налево, имеем

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^k} b^k},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $k \neq 0$.

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите: 1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{27}} 3$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\log_5 125 = 3$, поскольку $5^3 = 125$; ◁ 2) ▶ $\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, так как $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. ◁	Исходя из определения логарифма, необходимо подобрать такой показатель степени, чтобы при возведении основания логарифма в эту степень получить число, стоящее под знаком логарифма.

Задача 2 Запишите решение простейшего показательного уравнения:

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Решение	*Комментарий*
По определению логарифма: 1) ▶ $x = \log_5 3$. ◁ 2) ▶ $x = \log_{\frac{1}{3}} 10$. ◁ 3) ▶ $x = \lg \frac{1}{3}$. ◁	Для любых положительных чисел b и a ($a \neq 1$) уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень. Показатель степени x, в которую необходимо возвести основание a, чтобы получить b, называется логарифмом b по основанию a, поэтому $x = \log_a b$.

Задача 3 Выразите логарифм по основанию 3 выражения $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$ (где $a > 0$ и $b > 0$) через логарифмы по основанию 3 чисел a и b. (Коротко говорят так: «Прологарифмируйте данное выражение по основанию 3».)

Решение	*Комментарий*
▶ $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} = \log_3 \frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}} =$ $= \log_3 (3^3 a^2) - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$ $= \log_3 (3^3) + \log_3 a^2 - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$ $= 3\log_3 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b =$ $= 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b.$ ◁	Сначала запишем выражения, стоящие в числителе и знаменателе данного выражения, как степени чисел и букв. Далее учтем, что логарифм частного $\frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}}$ положительных чисел равен разности логарифмов числителя и знаменателя, а затем то, что логарифм произведения $(3^3 a^2)$ равен сумме логарифмов множителей.

Задача 4 Известно, что $\log_2 5 = a$, $\log_2 7 = b$. Выразите $\log_2 700$ через a и b.

Решение	*Комментарий*
▶ $\log_2 700 = \log_2 (7 \cdot 5^2 \cdot 2^2) =$ $= \log_2 7 + \log_2 5^2 + \log_2 2^2 =$ $= \log_2 7 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 =$ $= b + 2a + 2.$ ◁	Сначала представим число 700 как произведение степеней данных чисел 5 и 7 и основания логарифма 2, а далее используем свойства логарифмов и подставим в полученное выражение значения $\log_2 5$ и $\log_2 7$.

Задача 5* Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{ab^3}{c^2}$.

Решение	*Комментарий*
▶ Если $\frac{ab^3}{c^2} > 0$, то $\lg \frac{ab^3}{c^2} = \lg\lvert ab^3 \rvert - \lg\lvert c^2 \rvert =$ $= \lg (\lvert a \rvert \cdot \lvert b^3 \rvert) - \lg \lvert c \rvert^2 =$ $= \lg \lvert a \rvert + \lg \lvert b^3 \rvert - 2\lg \lvert c \rvert =$ $= \lg \lvert a \rvert + 3\lg \lvert b \rvert - 2\lg \lvert c \rvert.$ ◁	Поскольку логарифмы существуют только для положительных чисел, то мы можем прологарифмировать данное выражение только в случае, когда $\frac{ab^3}{c^2} > 0$. Из условия не следует, что в данном выражении значения a, b, c положительны. Поэтому будем пользоваться обобщенными формулами логарифмирования (2′–4′), а также учтем, что $\lvert ab^3 \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b^3 \rvert$, $\lvert b^3 \rvert = \lvert b \rvert^3$, $\lvert c^2 \rvert = \lvert c \rvert^2$.

Иногда приходится искать выражение, зная его логарифм. Такую операцию называют *потенцированием*.

Задача 6 Найдите x по его логарифму:

1) $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$;

2) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$, $\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$, $\lg x = \lg\frac{5\cdot 2^3}{3^2}$, $x = \frac{5\cdot 2^3}{3^2} = \frac{40}{9}$. ◁ 2) ▶ $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$, $\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$, $\log_a x = \log_a \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$, $x = \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$. ◁	Пользуясь формулами логарифмирования справа налево, запишем правые части данных равенств в виде логарифма какого-либо выражения. Из полученного равенства $\log_a x = \log_a M$ (1) получаем $x = M$ (как будет показано в § 34, значение x, удовлетворяющее равенству (1), — единственное).

Задача 7* Вычислите значение выражения $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

Решение	*Комментарий*
▶ Поскольку $\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 \sqrt{3}} =$ $= \frac{1}{\frac{1}{2}\log_5 3} = \frac{2}{\log_5 3}$, то $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5} = \frac{4}{\frac{2}{\log_5 3}} = 2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$. Кроме того, $\frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 4^{\frac{1}{2}} = \log_5\sqrt{4} = \log_5 2$. Тогда $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5} + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 9 + \log_5 2 =$ $= \log_5(9\cdot 2) = \log_5 18$. Итак, $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5} + \frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\log_5 18} = 18$. ◁	Попытаемся привести показатель степени данного выражения к виду $\log_5 b$, чтобы можно было воспользоваться основным логарифмическим тождеством: $5^{\log_5 b} = b$. Для этого перейдем в показателе степени к одному основанию логарифма — 5.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение логарифма положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$).
2. Какой логарифм называют десятичным логарифмом? какой натуральным логарифмом? Приведите примеры записи и вычисления таких логарифмов.
3. 1) Запишите основное логарифмическое тождество. Приведите примеры его использования. 2*) Обоснуйте основное логарифмическое тождество.
4. 1) Запишите и сформулируйте формулы логарифмирования. Приведите примеры их использования. 2*) Обоснуйте формулы логарифмирования.
5. 1) Запишите формулу перехода от одного основания логарифма к другому. Приведите примеры ее использования. 2*) Обоснуйте формулу перехода от одного основания логарифма к другому.

6*. Можно ли в том случае, когда значения x и y оба отрицательны, прологарифмировать выражения: xy, $\frac{x}{y}$, x^4? Как это сделать? Обоснуйте соответствующие формулы.

Упражнения

1°. Проверьте, верно ли равенство:

1) $\log_2 16 = 4$; 2) $\log_3 27 = 3$; 3) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$;

4) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$; 6) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$.

2. Вычислите:

1°) $\log_5 25$; 2°) $\log_4 64$; 3°) $\log_3 \frac{1}{9}$; 4°) $\log_6 \sqrt{6}$;

5) $\log_9 \frac{1}{27}$; 6°) $\log_{\frac{1}{7}} 1$; 7*) $\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$; 8*) $\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$;

9*) $\log_{7+4\sqrt{3}} (7-4\sqrt{3})$ 10*) $\log_{9-4\sqrt{5}} (9+4\sqrt{5})$.

3°. Пользуясь определением логарифма, запишите решение простейшего показательного уравнения:

1) $4^x = 9$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 15$; 3) $10^x = 11$; 4) $5^x = 19$; 5) $0{,}2^x = 0{,}7$; 6) $e^x = 3$.

4. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, упростите выражение:

1) $5^{\log_5 7}$; 2) $3^{\log_3 4}$; 3) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}}$; 4) $3{,}5^{\log_{3,5} 13}$; 5*) $7^{1+\log_7 2}$; 6*) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6 - 2}$.

5. Прологарифмируйте данное выражение по заданному основанию, зная, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

1°) $10a^3c^4$ по основанию 10; 2) $\dfrac{0{,}1a^2b^5}{c^7}$ по основанию 10;

3°) $a^2c\sqrt{b}$ по основанию e; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^2}$ по основанию e;

5°) $9a^7\sqrt[3]{b}$ по основанию 3; 6) $\dfrac{a^{\frac{2}{5}}b^4}{c^{\frac{1}{2}}}$ по основанию 3.

6*. Прологарифмируйте данное выражение по основанию 10, зная, что $ab > 0$ и $c \neq 0$:

1) $a^3b^5c^8$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{c^2}$; 3) $\dfrac{c^4}{(ab)^{\frac{2}{5}}}$; 4) $100\sqrt[5]{abc^2}$.

7. Известно, что $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Выразите через a и b:
1) $\log_5 15$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 30$; 4) $\log_5 72$.

8. Найдите x, если:
1) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - 2\log_6 3$;

2) $\lg x = \dfrac{1}{3}\lg(5a) - 2\lg b + 5\lg c$;

3) $\lg x = 3\lg m + \dfrac{2}{7}\lg n - \dfrac{1}{5}\lg p$;

4) $\log_3 x = \dfrac{1}{3}\log_3 8 - 2\log_3 20 - 3\log_3 2$.

9. Замените данный логарифм логарифмом по основанию 3:
1) $\log_{\frac{1}{3}} a$; 2) $\log_9 a$; 3) $\log_{\frac{1}{9}} a$; 4) $\log_{\sqrt{3}} a$; 5) $\log_2 a$.

10*. Вычислите значение выражения:

1) $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{4}\log_3 16}$;

3) $\log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 32$; 4) $\log_9 10 \lg 11 \log_{11} 12 \log_{12} 27$;

5) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$; 6) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7} \cdot \dfrac{1}{49} \cdot 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{49}}\right)$.

11*. Найдите:
1) $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$;
2) $\log_9 15$, если $\log_{45} 25 = a$;
3) $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7 = a$ и $\log_5 14 = b$;
4) $\log_{150} 200$, если $\log_{20} 50 = a$ и $\log_3 20 = b$.

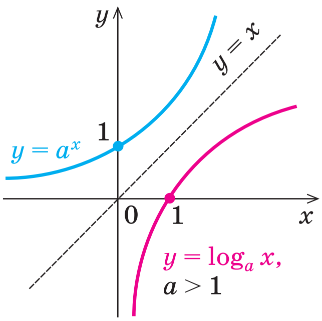
§ 16 ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

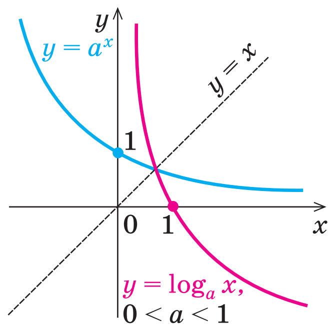
Таблица 22

Определение. ***Логарифмической функцией* называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.**

1. График логарифмической функции

Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) — взаимно обратные функции, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$.





2. Свойства логарифмической функции

1. *Область определения:* $x > 0$. $\boxed{D(\log_a x) = (0;\ +\infty)}$

2. *Область значений:* $\boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\log_a x) = \boldsymbol{R}}$

3. *Функция* ***ни четная, ни нечетная.***

4. *Точки пересечения с осями координат:*

с осью Oy $\boxed{\text{нет}}$ с осью Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = 1 \end{cases}}$

5. *Промежутки возрастания и убывания:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
функция $\log_a x$ возрастает на всей области определения	*функция $\log_a x$ убывает на всей области определения*

6. *Промежутки знакопостоянства:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$, $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$, $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$

7. *Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет*

Окончание табл. 22

8.	$\log_a a = 1$ $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v \ (u > 0,\ v > 0)$ $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v \ (u > 0,\ v > 0)$ $\log_a u^n = n \log_a u \ (u > 0)$

Объяснение и обоснование

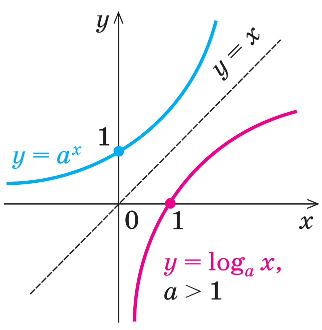
1. Понятие логарифмической функции и ее график. *Логарифмической функцией называется функция вида* $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Покажем, что эта функция является обратной функции $y = a^x$.

Действительно, показательная функция $f(x) = a^x$ при $a > 1$ возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$, а при $0 < a < 1$ — убывает на множестве $\boldsymbol{R}$. Область значений функции $f(x) = a^x$ — промежуток $(0;\ +\infty)$. Таким образом, функция $f(x)$ обратима и имеет обратную функцию с областью определения $(0;\ +\infty)$ и областью значений $\boldsymbol{R}$. Напомним, что для записи формулы обратной функции достаточно из равенства $y = f(x)$ выразить x через y и в полученной формуле $x = g(y)$ аргумент обозначить через x, а функцию — через y.

Тогда из уравнения $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ по определению логарифма получаем $x = \log_a y$ — формулу обратной функции, в которой аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, имеем формулу $y = \log_a x$ — функции, обратной функции $y = a^x$.

Как известно, графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Таким образом, график функции $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ можно получить из графика функции $y = a^x$ симметричным отображением его относительно прямой $y = x$. На рис. 16.1 приведены графики логарифмических функций при $a > 1$ и при $0 < a < 1$. График логарифмической функции называют *логарифмической кривой*.



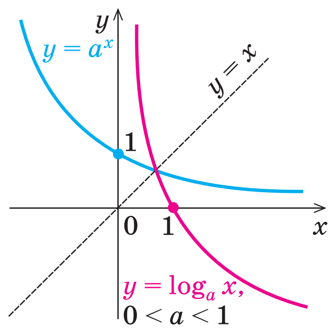


Рис. 16.1

2. Свойства логарифмической функции. Свойства логарифмической функции, указанные в п. 8 табл. 22, были обоснованы в § 15. Другие свойства прочитаем из полученного графика функции $y = \log_a x$ и обоснуем, опираясь на свойства функции $y = a^x$.

Поскольку область определения прямой функции является областью значений обратной, а область значений прямой функции — областью определения обратной, то, зная эти характеристики для функции $y = a^x$, получаем соответствующие характеристики для функции $y = \log_a x$:

Характеристика	Функция	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$(0; +\infty)$
Область значений	$(0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$

1. ***Областью определения* функции $y = \log_a x$ является множество R_+ всех положительных чисел** ($x > 0$).
2. *Областью значений функции $y = \log_a x$ является множество **R** всех действительных чисел* (тогда функция $y = \log_a x$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений).
3. Функция $y = \log_a x$ не может быть *ни четной, ни нечетной*, поскольку ее область определения не симметрична относительно точки 0.
4. **График функции $y = \log_a x$ не пересекает ось Oy**, так как на оси Oy $x = 0$, а это значение не принадлежит области определения функции $y = \log_a x$.
   График функции $y = \log_a x$ пересекает ось Ox в точке $x = 1$, поскольку $\log_a 1 = 0$ при всех значениях a ($a > 0$, $a \neq 1$).
5. Из графиков функции $y = \log_a x$, приведенных на рис. 16.1, видно, что

   при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области определения, а при $0 < a < 1$ убывает на всей области определения.

Обоснуем это, опираясь на свойства функции $y = a^x$.
Например, при $a > 1$ возьмем $x_2 > x_1 > 0$. По основному логарифмическому тождеству можно записать: $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. Тогда, учитывая, что $x_2 > x_1$, имеем $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. Поскольку при $a > 1$ функция $y = a^x$ является возрастающей, то из последнего неравенства получаем $\log_a x_2 > \log_a x_1$. А это и означает, что при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области определения.
Аналогично можно обосновать, что при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает на всей области определения.

6) *Промежутки знакопостоянства.* Поскольку график функции $y = \log_a x$ пересекает ось Ox в точке $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$), то, учитывая возрастание функции при $a > 1$ и убывание при $0 < a < 1$, имеем:

Значение функции	Значение аргумента	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите область определения функции:

1) $y = \log_5(3 - x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3)$; 3) $y = \log_7(x^2 - x)$.

Решение

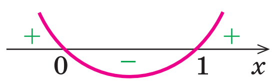
1) ▶ Область определения функции $y = \log_5(3 - x)$ задается неравенством $3 - x > 0$. Отсюда $x < 3$, то есть $D(y) = (-\infty; 3)$. ◁

2) ▶ Область определения функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3)$ задается неравенством $x^2 + 3 > 0$. Это неравенство выполняется при всех действительных значениях x. Таким образом, $D(y) = \boldsymbol{R}$. ◁

3) ▶ Область определения функции $y = \log_7(x^2 - x)$ задается квадратным неравенством $x^2 - x > 0$. Решая его, получаем $x < 0$ или $x > 1$ (см. рисунок), То есть $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. ◁

Комментарий

Поскольку выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, то для нахождения области определения данной функции необходимо найти те значения аргумента x, при которых выражение, стоящее под знаком логарифма, будет положительным.



Задача 2 Изобразите схематически график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Комментарий

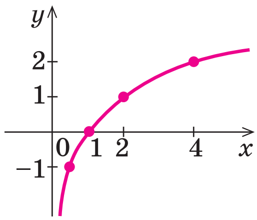
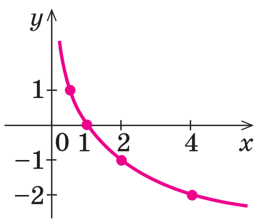
Область определения функции $y = \log_a x$ — значения $x > 0$, следовательно, график этой функции всегда расположен справа от оси Oy. Этот график пересекает ось Ox в точке $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$).

При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, таким образом, графиком функции $y = \log_2 x$ будет логарифмическая кривая, точки которой при увеличении аргумента поднимаются.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, таким образом, графиком функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ будет логарифмическая кривая, точки которой при увеличении аргумента опускаются.

Чтобы уточнить поведение графиков данных функций, найдем координаты нескольких дополнительных точек.

Решение

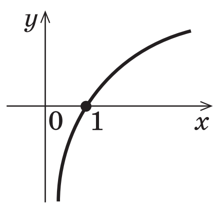
▶ $y = \log_2 x$		x	1	$\frac{1}{2}$	2	4	
		y	0	−1	1	2	◁
▶ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$		x	1	$\frac{1}{2}$	2	4	
		y	0	1	−1	−2	◁

Задача 3* Изобразите схематически график функции $y = \log_3 |x - 2|$.

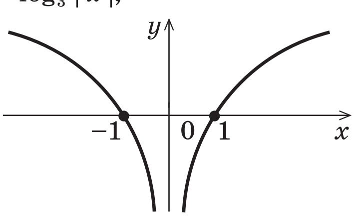
Решение

▶ Последовательно строим графики:

1. $y = \log_3 x$



2. $y = \log_3 |x|$;



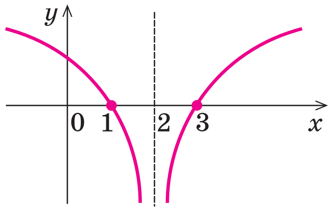
Комментарий

Составим план последовательного построения графика данной функции с помощью геометрических преобразований.

1. Можно построить график функции $y = f(x) = \log_3 x$ (основание логарифма $a = 3 > 1$ — логарифмическая функция возрастает).

2. Затем можно построить график функции
$$y = g(x) = \log_3 |x| = f(|x|)$$
(справа от оси Oy график функции $f(x)$ остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy).

3. $y = \log_3 |x - 2|$



◁

3. После этого можно построить график данной функции

$$y = \log_3 |x - 2| = g(x - 2)$$

параллельным переносом графика функции $g(x)$ вдоль оси Ox на 2 единицы.

Задача 4 Сравните положительные числа b и c, зная, что:
1) $\log_3 b > \log_3 c$; 2) $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Поскольку функция $y = \log_3 x$ возрастающая, то для положительных чисел b и c из неравенства $\log_3 b > \log_3 c$ получаем $b > c$. ◁ 2) ▶ Так как функция $y = \log_{0,3} x$ убывающая, то для положительных чисел b и c из неравенства $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$ получаем $b < c$. ◁	В каждом задании данные выражения — это значения логарифмической функции $y = \log_a x$ в точках b и c. Используем возрастание или убывание соответствующей функции: 1) при $a = 3 > 1$ функция $y = \log_3 x$ возрастающая, и поэтому большему значению функции соответствует большее значение аргумента; 2) при $a = 0,3 < 1$ функция $y = \log_{0,3} x$ убывающая, следовательно, большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Задача 5 Сравните с единицей положительное число a, зная, что $\log_a 6 < 0$.

Решение	*Комментарий*
▶ Поскольку $6 > 1$, а из условия получаем, что $\log_a 6 < 0 = \log_a 1$ (то есть $\log_a 6 < \log_a 1$), то функция $y = \log_a x$ убывающая, поэтому $0 < a < 1$. ◁	Числа $\log_a 6$ и 0 — это два значения функции $\log_a x$. Исходя из данного неравенства, выясняем, является эта функция возрастающей или убывающей, и учитываем, что она возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение логарифмической функции.
2. Как расположены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) относительно прямой $y = x$? Ответ объясните. Постройте эти графики при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

3. Используя график функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), охарактеризуйте ее свойства.
4*. Обоснуйте свойства функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).
5. Учитывая возрастание или убывание соответствующей логарифмической функции, сравните значения: а) $\log_5 7$ и $\log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ и $\log_{\frac{1}{5}} 3$.

Упражнения

1. Найдите область определения функции:

1°) $y = \log_{11}(2x + 6)$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x-3)$; 3) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2-1)$;

4) $y = \log_{5,2}(3x - x^2)$; 5) $y = \log_{\frac{3}{8}}(2x^2+1)$; 6) $y = \log_{\pi}(x^2 + x + 1)$;

7*) $y = \log_{0,4}\dfrac{2x-6}{x+2}$; 8*) $y = \log_{\sqrt{7}}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; 9*) $y = \log_{3,1}\dfrac{|x|+5}{|x|-3}$;

10*) $y = \log_x(2x - x^2)$; 11*) $y = \log_{2x-3}(5x - x^2)$.

Изобразите схематически график функции **(2, 3)**.

2. 1°) $y = \log_3 x$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3°) $y = \log_{0,3} x$;

4) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 5) $y = \log_{\frac{1}{6}} x$; 6) $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

3. 1) $y = \log_2(-x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x-1)$; 3) $y = \log_4(x + 3)$;

4) $y = \log_4 x + 3$; 5) $y = -\log_6 x$; 6*) $y = |\log_3|x||$;

7*) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)\right|$; 8*) $y = \log_4\dfrac{x^2}{|x|}$; 9*) $y = \log_3 \log_3 x$.

4. Сравните числа:

1) $\log_2 3,5$ и $\log_2 4,5$; 2) $\log_{0,1} 1,3$ и $\log_{0,1} 1,1$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 2$ и $\log_{\frac{1}{5}} 5$;

4) $\log_{\sqrt{3}} 2,3$ и $\log_{\sqrt{3}} 0,2$; 5) $\log_{\pi} 5$ и $\log_{\pi} 7$; 6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ и $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 20$;

7) $\log_2 3$ и 0; 8) $\log_7 \dfrac{1}{3}$ и 0; 9) $\log_3 4$ и 1; 10) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{5}$ и 1.

5. Сравните положительные числа b и c, зная, что:

1) $\log_5 b > \log_5 c$; 2) $\log_{0,5} b > \log_{0,5} c$;

3) $\log_{\sqrt{7}} b < \log_{\sqrt{7}} c$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} b < \log_{\frac{1}{3}} c$.

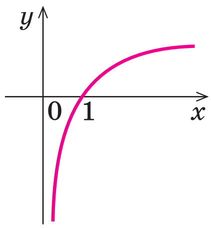
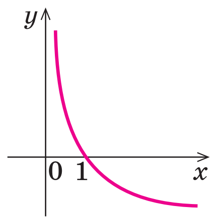
6. Сравните с единицей положительное число a, зная, что:

1) $\log_a 5 > 0$; 2) $\log_a \dfrac{1}{3} > 0$; 3) $\log_a 2,3 < 0$; 4) $\log_a 0,2 < 0$.

§ 17 РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

17.1. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Таблица 23

<table>
<tr><td colspan="3">1. Основные определения и соотношения</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b.
$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c}$</td><td colspan="2">График функции $y = \log_a x$
($a > 0$, $a \neq 1$)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
возрастает</td><td>
убывает</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Решение простейших логарифмических уравнений</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td>Если a — число ($a > 0$ и $a \neq 1$), то
$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}$
(используем определение логарифма)</td><td colspan="2">$\log_3(x - 1) = 2.$
▶ $x - 1 = 3^2$,
$x = 10.$
Ответ: 10. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Использование уравнений-следствий</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td>Если из предположения, что первое равенство верно, следует, что каждое следующее верно, то гарантируем, что получаются уравнения-следствия. При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.</td><td colspan="2">$\log_x(x + 2) = 2.$
▶ По определению логарифма получаем
$x + 2 = x^2$,
$x^2 - x - 2 = 0$,
$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Проверка. $x = -1$ — посторонний корень (в основании логарифма получаем отрицательное число);
$x = 2$ — корень ($\log_2(2 + 2) = 2$,
$\log_2 4 = 2$, $2 = 2$).
Ответ: 2. ◁</td></tr>
</table>

Окончание табл. 23

<table>
<tr><td colspan="2">4. Равносильные преобразования логарифмических уравнений</td></tr>
<tr><td colspan="2">Замена переменных</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то соответствующее выражение с переменной удобно обозначить одной буквой (новой переменной).</td><td>$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0.$
▶ Замена: $\lg x = t,$
$t^2 - 2t - 3 = 0,\ \ t_1 = -1,\ t_2 = 3.$
Следовательно, $\lg x = -1$ или $\lg x = 3$. Тогда $x = 10^{-1} = 0{,}1$ или $x = 10^3 = 1000.$
Ответ: 0,1; 1000. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$ и $a \ne 1$)</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ОДЗ}}$$
(учитываем ОДЗ и приравниваем выражения, стоящие под знаками логарифмов)</td><td>$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5).$
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$
На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:
$x^2 - 2 = 4x - 5,\ x^2 - 4x + 3 = 0,$
$x_1 = 1,\ x_2 = 3,$
$x = 1$ — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ); $x = 3$ — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ).
Ответ: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">Равносильные преобразования уравнений в других случаях</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>1. Учитываем ОДЗ данного уравнения (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ);
2. Следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного равенства.</td><td>$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3).$
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$
На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:
$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3,$
$\log_2((x + 1)(x + 3)) = 3,$
$(x + 1)(x + 3) = 2^3,$
$x^2 + 4x - 5 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -5.$
$x = 1$ — корень (удовлетворяет условиям ОДЗ); $x = -5$ — посторонний корень (не удовлетворяет условиям ОДЗ).
Ответ: 1. ◁</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Решение простейших логарифмических уравнений. Простейшим логарифмическим уравнением обычно считают уравнение

$$\log_a x = c \ (a > 0 \text{ и } a \neq 1).$$

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на всей своей области определения, то есть при $x > 0$ (см. графики в п. 1 табл. 23), и поэтому каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Учитывая, что логарифмическая функция принимает все действительные значения, уравнение

$$\log_a x = c \qquad (1)$$

всегда имеет единственный корень, который можно записать, исходя из определения логарифма: $x = a^c$.

Если рассмотреть уравнение

$$\log_a f(x) = c \qquad (2)$$

и выполнить замену переменной: $f(x) = t$, то получим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a t = c$, имеющее единственный корень $t = a^c$. Выполняя обратную замену, получаем, что решения уравнения (2) совпадают с корнями уравнения

$$f(x) = a^c. \qquad (3)$$

Следовательно, уравнения (2) и (3) равносильны. Таким образом, мы обосновали, что *для равносильного преобразования простейшего логарифмического уравнения* (1) или уравнения (2) (которое мы также будем относить к простейшим при условии, что основание a — число) *достаточно применить определение логарифма*. Если обозначить равносильность уравнений значком $\Leftrightarrow$, то коротко этот результат можно записать так:

$$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}.$$

Напомним, что все равносильные преобразования уравнения выполняются на его области допустимых значений (ОДЗ). Для уравнения (2) ОДЗ задается условием $f(x) > 0$. Но для всех корней уравнения (3) это условие выполняется автоматически (потому что $a > 0$). Поэтому *в явном виде ОДЗ для простейших логарифмических уравнений можно не записывать* (поскольку оно учитывается автоматически при переходе от уравнения (2) к уравнению (3)). Например, уравнение $\log_5(2x - 3) = 2$ равносильно уравнению $2x - 3 = 5^2$, корень которого $x = 14$ и является корнем данного уравнения. Аналогично записано и решение простейшего уравнения $\log_3(x - 1) = 2$ в табл. 23.

2. Использование уравнений-следствий при решении логарифмических уравнений. При решении уравнения главное — не потерять его корни, и поэтому важно следить за тем, чтобы каждый корень первого уравнения оставался корнем следующего уравнения — в этом случае получаем уравнения-следствия. Напомним, что каждый корень данного уравнения обращает его в верное числовое равенство. Используя это определение, можно обосновать, что в случае, когда преобразования уравнений проводятся так: *если из предположения, что первое равенство верно, следует, что каждое следующее верно, то мы получаем уравнения-следствия* (поскольку каждый корень первого уравнения будет и корнем следующего уравнения). Хотя при использовании уравнений-следствий и не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому *проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составляющей решения при использовании уравнений-следствий.*

Пример решения логарифмического уравнения с помощью уравнений-следствий и оформление такого решения приведены в п. 3 табл. 23.

3. Равносильные преобразования логарифмических уравнений. Одним из часто используемых способов равносильных преобразований уравнений является **замена переменной.**

Напомним общий ориентир, которого мы придерживались при решении уравнений из других разделов: *если в уравнение* (неравенство или тождество) *переменная входит в одном и том же виде, то соответствующее выражение с переменной удобно обозначить одной буквой (новой переменной).*

Например, в уравнение $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$ переменная входит только в виде $\lg x$, поэтому для его решения целесообразно применить замену $\lg x = t$, получить квадратное уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$, а затем выполнить обратную замену и получить простейшие логарифмические уравнения: $\lg x = -1$ и $\lg x = 3$. Тогда, по определению логарифма, корнями данных уравнений являются $x = 10^{-1} = 0{,}1$ и $x = 10^3 = 1000$.

Принимая во внимание то, что замена переменной (вместе с обратной заменой) является равносильным преобразованием уравнения на любом множестве, для выполнения замены не обязательно находить ОДЗ данного уравнения. После выполнения обратной замены мы получили простейшие логарифмические уравнения, ОДЗ которых (как было показано выше) учитываются автоматически и могут также не записываться. Таким образом, в приведенном решении ОДЗ данного уравнения учтена автоматически, и поэтому в явном виде ОДЗ можно не записывать в решение. Именно так и оформлено решение этого уравнения в п. 4 табл. 23.

Рассмотрим также **равносильные преобразования уравнения вида**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a > 0 \text{ и } a \neq 1). \qquad (4)$$

Как уже отмечалось, все равносильные преобразования уравнения выполняются на его области допустимых значений. Для уравнения (4) ОДЗ задается системой неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Поскольку логарифмическая функция $\log_a t$ возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$) на всей своей области определения и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, то равенство (4) может выполняться (на ОДЗ) тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$. Учитывая ОДЗ, получаем, что уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (6) \\ g(x) > 0. & (7) \end{cases}$$

Полученный результат символично зафиксирован в п. 4 табл. 23, а коротко его можно сформулировать так:

чтобы решить уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ с помощью равносильных преобразований, учитываем ОДЗ этого уравнения и приравниваем выражения, стоящие под знаками логарифмов. ○

Пример использования этого ориентира приведен в табл. 23.

Замечание 1. Полученную систему (5)–(7) можно несколько упростить. Если в этой системе выполняется равенство (5), то значения $f(x)$ и $g(x)$ между собой равны, поэтому если одно из них будет положительным, то второе также будет положительным. Таким образом, уравнение (4) равносильно системе, состоящей из уравнения (5) и одного из неравенств (6) или (7) (обычно выбирают простейшее из этих неравенств).

Например, уравнение $\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$, рассмотренное в табл. 23, равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 2 = 4x - 5, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ Но учитывая, что ограничения ОДЗ этого уравнения: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0, \end{cases}$ мы не решали, а только проверяли, удовлетворяют ли найденные корни этим ограничениям, приведенное упрощение не дает существенного выигрыша при решении.

Замечание 2. Как было обосновано выше, если выполняется равенство (4), то обязательно выполняется и равенство (5). Таким образом, уравнение (5) является следствием уравнения (4). Поэтому для нахождения корней уравнения (4): $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ достаточно найти корни уравнения-следствия (5): $f(x) = g(x)$ и выполнить проверку найденных корней подстановкой в данное уравнение. (При таком способе решения ОДЗ уравнения (4) будет учтено опосредствованно, в момент проверки полученных корней, и его не придется явно записывать.)

Выполняя **равносильные преобразования логарифмических уравнений в более сложных случаях,** можно придерживаться следующего ориентира (он следует из определения равносильных уравнений и обоснован в курсе 10 класса):

1) Учитываем ОДЗ данного уравнения.

2) Следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного равенства.

Например, решим уравнение

$$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3) \qquad (8)$$

с помощью равносильных преобразований.

Для этого достаточно учесть ОДЗ уравнения $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases}$ а затем, выполняя каждое преобразование уравнения, все время следить за тем, можно ли на ОДЗ выполнить это преобразование и в обратном направлении. Если ответ положителен, то выполненные преобразования равносильны. Если же какое-то преобразование для всех значений переменной из ОДЗ можно выполнить только в одном направлении (от исходного уравнения к следующему), а для его выполнения в обратном направлении необходимы какие-то дополнительные ограничения, то мы получим только уравнение-следствие, и полученные корни придется проверять подстановкой в исходное уравнение.

Применим этот план к решению уравнения (8).

Чтобы привести это уравнение к простейшему, перенесем все члены уравнения с логарифмами влево. Получим равносильное уравнение

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3. \qquad (9)$$

(Равносильность уравнений (8) и (9) следует из известной теоремы: если из одной части уравнения перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное данному на любом множестве. Равносильность этих уравнений следует также из того, что мы можем не только перейти от равенства (8) к равенству (9), но и выполнить обратное преобразование, пользуясь свойствами числовых равенств.)

Учитывая, что сумма логарифмов положительных (на ОДЗ) чисел равна логарифму произведения, получаем уравнение

$$\log_2\big((x+1)(x+3)\big) = 3. \qquad (10)$$

На ОДЗ данного уравнения можно выполнить и обратное преобразование: поскольку $x + 1 > 0$ и $x + 3 > 0$, то логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей. Таким образом, от равенства (10) можно вернуться к равенству (9), то есть этот переход также приводит к равносильному уравнению. Уравнение (10) — это простейшее логарифмическое уравнение. Оно равносильно уравнению, которое получается по определению логарифма:

$$(x + 1)(x + 3) = 2^3.$$

Выполняя равносильные преобразования полученного уравнения, имеем:

$$x^2 + 4x - 5 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -5.$$

Поскольку все равносильные преобразования выполнялись на ОДЗ данного уравнения, учтем ее, подставляя полученные корни в ограничения ОДЗ:

$x = 1$ — корень, поскольку удовлетворяет условиям ОДЗ;

$x = -5$ не является корнем (посторонний корень), потому что не удовлетворяет условиям ОДЗ. Таким образом, данное уравнение имеет только один корень $x = 1$.

Замечание. Рассмотренное уравнение можно было решить и с использованием уравнений-следствий, не учитывая явно ОДЗ, но проверив полученные решения подстановкой их в исходное уравнение. Поэтому каждый имеет право выбирать способ решения: использовать уравнения-следствия или равносильные преобразования данного уравнения. Однако для многих уравнений проверку полученных корней выполнить достаточно непросто, а для неравенств вообще нельзя использовать следствия. Это обусловлено тем, что не удается проверить все решения — их количество у неравенств, как правило, бесконечно. Таким образом, для неравенств приходится выполнять только равносильные преобразования (по ориентирам, аналогичным приведенным выше).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2.$ (1)

Решение	*Комментарий*
▶ $2\lg(x-2)-\lg(3x-6)=2\lg 2,$ (2) $\lg(x-2)^2-\lg(3x-6)=\lg 2^2,$ (3) $\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\lg 4,$ (4) $\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4,$ (5) $(x-2)^2=4(3x-6),$ (6) $x^2-16x+28=0,$ (7) $x_1=2,\ x_2=14.$ Проверка. $x = 2$ — посторонний корень (под знаком логарифма получаем 0), $x = 14$ — корень, поскольку имеем $\lg(14-2)-\frac{1}{2}\lg(3\cdot 14-6)=\lg 2,$ $\lg 12-\frac{1}{2}\lg 36=\lg 2,$ $\lg 12-\lg\sqrt{36}=\lg 2,$ $\lg\frac{12}{6}=\lg 2,\quad \lg 2=\lg 2.$ *Ответ:* 14. ◁	Решим данное уравнение с помощью уравнений-следствий. *При использовании уравнений-следствий главное — гарантировать, что в случае, когда первое равенство верно, то и все последующие также будут верны.* Чтобы избавиться от дробного коэффициента, умножим обе части уравнения (1) на 2 (если равенство (1) верно, то и равенство (2) верно). Если равенства (1) и (2) верны (при значениях x, которые являются корнями этих уравнений), то при таких значениях x существуют все записанные логарифмы. Тогда выражения $x-2$ и $3x-6$ — положительны. Следовательно, для положительных a, b, c можно воспользоваться формулами: $2\lg a=\lg a^2,\ \lg b-\lg c=\lg\frac{b}{c},$ таким образом, равенства (3) и (4) также верны.

Учитывая, что функция $y = \lg t$ возрастающая, а значит, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, из равенства логарифмов (4) получаем равенство соответствующих аргументов (5).

Если равенство (5) верно, то знаменатель дроби не равен нулю, и после умножения обеих его частей на $3x - 6 \neq 0$ получаем верное равенство (6) (а значит, и верное равенство (7)).

Поскольку мы использовали уравнения-следствия, то в конце необходимо выполнить проверку.

Задача 2 Решите уравнение

$$\log_2(x-5)^2 - 2 = 2\log_2(2x). \qquad (1)$$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)^2 > 0,\\ 2x > 0.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}x \neq 5,\\ x > 0.\end{cases}$

На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$\log_2(x-5)^2 - \log_2 2^2 = 2\log_2(2x),$$

$$\log_2\frac{(x-5)^2}{2^2} = \log_2(2x)^2, \qquad (2)$$

$$\frac{(x-5)^2}{2^2} = (2x)^2, \qquad (3)$$

$$(x-5)^2 = 4\cdot 4x^2,\ 15x^2 + 10x - 25 = 0,$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0.$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем, что $x = 1$ входит в ОДЗ, таким образом, является корнем; $x = -\frac{5}{3}$ не входит в ОДЗ, следовательно, не является корнем данного уравнения.

Ответ: 1. ◁

Комментарий

Решим данное уравнение с помощью равносильных преобразований. Для этого достаточно *учесть ОДЗ данного уравнения и следить за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного равенства.*

Заметим, что на ОДЗ выражение $x - 5$ может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому мы не имеем права применять к выражению $\log_2(x-5)^2$ формулу: $\log_2(x-5)^2 = 2\log_2(x-5)$ (это приведет к потере корня). Применение обобщенной формулы логарифмирования приведет к уравнению с модулем. Используем другой способ преобразований, учтя, что $2 = \log_2 2^2$. Поскольку на ОДЗ все выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны, то все преобразования от уравнения (1) к уравнению (2) равносильны. Выполнить равносильные преобразования уравнения (2) можно с использованием ориентира, приведенного на с. 213.

Равносильность уравнений (2) и (3) можно обосновать также через возрастание функции $y = \log_2 t$, которая каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента.

Задача 3* Решите уравнение $\log_4 x + 6\log_x 4 = 5$.

Решение	*Комментарий*
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению $$\log_4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_4 x} = 5.$$ *Замена*: $\log_4 x = t$. Получаем: $$t + \frac{6}{t} = 5, \qquad (1)$$ $$t^2 - 5t + 6 = 0, \qquad (2)$$ $$t_1 = 2,\ t_2 = 3;$$ $\log_4 x = 2$ или $\log_4 x = 3$; $x = 4^2 = 16$ или $x = 4^3 = 64$ (оба корня входят в ОДЗ). *Ответ:* 16; 64. ◁	Выполним равносильные преобразования данного уравнения. Для этого найдем его ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$). Поскольку в уравнение входят логарифмы с разными основаниями, то приведем их к одному и тому же основанию (желательно числовому, иначе можно потерять корни уравнения). В данном случае приводим к основанию 4 по формуле $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$ После приведения логарифмов к одному основанию переменная входит в уравнение только в одном виде $\log_4 x$. Выполним замену $\log_4 x = t$. Поскольку по ограничениям ОДЗ $x \neq 1$, то $t \neq 0$. Тогда полученное дробное уравнение (1) равносильно квадратному уравнению (2). Поскольку замена и обратная замена являются равносильными преобразованиями на ОДЗ, то для полученных решений достаточно проверить, входят ли они в ОДЗ.

Задача 4* Решите уравнение

$$x^{\lg x-2}=1000. \quad (1)$$

Решение	*Комментарий*
▶ ОДЗ: $x>0$. На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям: $\lg(x^{\lg x-2})=\lg 1000, \quad (2)$ $(\lg x-2)\lg x=3. \quad (3)$ *Замена*: $\lg x=t$. Получаем: $(t-2)t=3,\ t^2-2t-3=0,$ $t_1=-1,\ t_2=3.$ Обратная замена дает $\lg x=-1$ или $\lg x=3$. Отсюда $x=10^{-1}=0{,}1$ или $x=10^3=1000.$ *Ответ:* 0,1; 1000. ◁	Выполним равносильные преобразования данного уравнения. Для этого найдем его ОДЗ и используем ориентир: *если переменная входит и в основание, и в показатель степени, то для решения такого уравнения можно попытаться прологарифмировать обе его части* (только если они положительны). В запись уравнения входит десятичный логарифм, поэтому прологарифмируем обе части по основанию 10 (на ОДЗ они обе положительны). Поскольку функция $y=\lg t$ возрастающая, то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Следовательно, если выполняется равенство (1), то выполняется и равенство (2), и наоборот: если выполняется равенство (2), то выполняется и равенство (1). Таким образом, уравнения (1) и (2) равносильны на ОДЗ. При $x>0$ применение формулы $\lg x^{\alpha}=\alpha\lg x$ является равносильным преобразованием, а значит, уравнения (2) и (3) также равносильны. Обоснование равносильности дальнейших преобразований полностью совпадает с аналогичным обоснованием в предыдущей задаче.

Задача 5 Решите уравнение $\log_3(3^x-8)=2-x$.

Решение	*Комментарий*
▶ $3^x-8=3^{2-x}, \quad (1)$ $3^x-8=\frac{3^2}{3^x}.$ *Замена*: $3^x=t$. Получаем	Если сначала рассмотреть данное уравнение как простейшее логарифмическое, то по определению логарифма оно равносильно уравнению $3^x-8=3^{2-x}$. Как уже отме-

$$t-8=\frac{9}{t}, \qquad (2)$$

$$t^2-8t-9=0, \qquad (3)$$

$$t_1=9,\ t_2=-1.$$

Обратная замена дает

$3^x=9$, $x=2$ или $3^x=-1$ — корней нет.

Ответ: 2. ◁

чалось (с. 211), ОДЗ данного уравнения $3^x-8>0$ для всех корней уравнения (1) учитывается автоматически, поскольку $3^{2-x}>0$ всегда. После этого уравнение (1) решается по схеме решения показательных уравнений (табл. 19, с. 178).

Поскольку $t=3^x>0$, то $t\neq 0$, поэтому уравнение (2) равносильно уравнению (3).

Задача 6 Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2,\\ \log_3(y-x)=1.\end{cases}$

Решение	*Комментарий*

▶ $\begin{cases}\log_2(xy)=2,\\ \log_3(y-x)=1.\end{cases}$

По определению логарифма имеем

$$\begin{cases}xy=2^2,\\ y-x=3.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы получаем $y=x+3$ и подставляем в первое уравнение:

$$x(x+3)=4,$$

$$x^2+3x-4=0,$$

$$x_1=1,\ x_2=-4.$$

Тогда $y_1=4$, $y_2=-1$.

Проверка. $\begin{cases}x=1,\\ y=4\end{cases}$ — решение данной системы.

$$\left(\begin{cases}\log_2 1+\log_2 4=2,\\ \log_3(4-1)=1;\end{cases}\quad \begin{cases}2=2,\\ 1=1\end{cases}\right)$$

$\begin{cases}x=-4,\\ y=-1\end{cases}$ — постороннее решение (под знаком логарифма получаем отрицательные числа).

Ответ: (1; 4). ◁

Как и логарифмические уравнения, системы логарифмических уравнений можно решать как с помощью *систем-следствий* (*каждое решение первой системы является решением второй*), так и с помощью равносильных преобразований систем (все решения каждой из них являются решениями другой).

Кроме того, при решении логарифмических систем можно применить те же способы, что и при решении других видов систем (способ алгебраического сложения, подстановка некоторого выражения из одного уравнения в другое, замена переменных).

Решим данную систему с помощью систем-следствий. Для этого достаточно гарантировать, что если данная система состоит из верных равенств, каждая следующая система также будет содержать верные равенства.

Как и для уравнений, *при использовании систем-следствий необходимо выполнить проверку полученных решений подстановкой в исходную систему.*

Замечание. Данную систему можно было решить и с помощью равносильных преобразований систем. При этом пришлось бы учесть ОДЗ данной системы $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ y-x>0, \end{cases}$ следить за равносильностью выполненных преобразований (в данном случае все написанные преобразования являются равносильными на ОДЗ), а в конце проверить, удовлетворяют ли полученные решения условиям ОДЗ (пара чисел $\begin{cases} x=1, \\ y=4 \end{cases}$ удовлетворяет условиям ОДЗ, а пара $\begin{cases} x=-4, \\ y=-1 \end{cases}$ не удовлетворяет условиям ОДЗ).

Задача 7 Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$

Тогда из первого уравнения имеем

$$\frac{1}{\log_x y}+\log_x y=2.$$

Замена $t=\log_x y$ дает уравнения

$\frac{1}{t}+t=2$, $t^2-2t+1=0$, $t=1$.

Обратная замена дает

$\log_x y=1$, то есть $y=x$.

Тогда из второго уравнения системы имеем $x^2-x-20=0$,

$x_1=-4$ (не принадлежит ОДЗ),

$x_2=5$ (принадлежит ОДЗ).

Таким образом, решение данной системы

$$\begin{cases} x=5, \\ y=5. \end{cases}$$

Ответ: (5; 5). ◁

Комментарий

Решим данную систему с помощью равносильных преобразований. Для этого достаточно учесть ее ОДЗ ($x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$) и гарантировать, что на каждом шагу были выполнены именно равносильные преобразования уравнения или всей системы. В первом уравнении системы все логарифмы приведем к одному основанию x (на ОДЗ $x>0$, $x\neq 1$): $\log_y x=\frac{\log_x x}{\log_x y}=\frac{1}{\log_x y}$.

На ОДЗ $y\neq 1$, следовательно, $\log_x y\neq 0$. Тогда после замены $t=\log_x y$ имеем $t\neq 0$, и поэтому переход в решении от дробного уравнения к квадратному является равносильным.

Поскольку замена (вместе с обратной заменой) является равносильным преобразованием, то, заменяя первое уравнение системы равносильным ему (на ОДЗ) уравнением $y=x$, получаем систему, равносильную данной (на ее ОДЗ).

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно решать простейшие логарифмические уравнения, используя определение логарифма.

2*. Обоснуйте справедливость равносильного перехода:
$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

3. Объясните, как можно решить уравнение $\log_5(x-2) = \log_5(x^2-2)$:
а) с помощью уравнений-следствий;
б*) с помощью равносильных преобразований.

4. Объясните на примере применение замены переменных при решении логарифмических уравнений. В каких случаях целесообразно применять замену переменных?

Упражнения

Решите уравнение **(1—5)**.

1°. 1) $\log_2 x = 4$; 2) $\log_{0,2} x = -1$; 3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\lg x = 2$.

2. 1°) $\log_3(2x-1) = 2$; 2°) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-21) = -2$;
3) $\log_\pi(x^2+2x-2) = 0$; 4) $\lg(3-x) = -1$.

3. 1°) $\lg(x+9) + \lg(2x+8) = 2$; 2°) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$;
3) $2\log_2 x - \log_2(3x-4) = 1$; 4) $\frac{1}{2}\log_5(x-4) + \frac{1}{2}\log_5(2x-1) = \log_5 3$.

4. 1°) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$; 2°) $\frac{1}{3-\lg x} + \frac{1}{1+\lg x} = 1$;
3) $\log_3^2 x + \log_3 x^2 = 8$; 4) $\lg^3 x^2 = 8\lg x$.

5. 1) $\log_2(10-2^x) = x+2$; 2) $\lg 2 + \lg(4^{x-2}+9) = 1 + \lg(2^{x-2}+1)$;
3) $\log_7(6+7^{-x}) = 1+x$; 4) $\log_2 2\,(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

6. Решите графически уравнение:
1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 4) $\lg x = 11 - x$.

Проверьте подстановкой, что найденное значение x действительно является корнем уравнения.

7*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 6, не имеют других корней, кроме найденных графически.

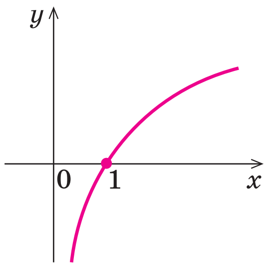
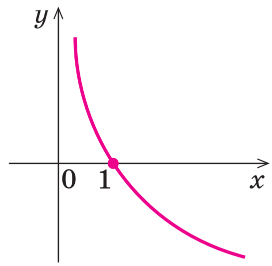
8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg(xy) = 3, \\ \lg x \cdot \lg y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y-1) = 3, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_2(x+y-3) = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$

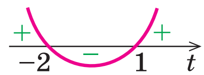
17.2. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Таблица 24

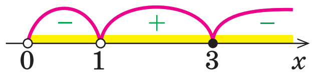
1. График функции $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 возрастает	 убывает
2. Равносильные преобразования простейших логарифмических неравенств	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ *Знак неравенства не меняется, и учитывается ОДЗ.*	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$ *Знак неравенства меняется, и учитывается ОДЗ.*
Примеры	
$\log_2(x-5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $\log_2(x-5) > \log_2 2^3.$ Функция $y = \log_2 t$ возрастающая, тогда $x - 5 > 2^3,$ $x > 13.$ Учитывая ОДЗ, имеем $x > 13$. *Ответ:* $(13;\ +\infty)$. ◁	$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > 3.$ ▶*ОДЗ:* $x - 5 > 0$, *то есть* $x > 5$. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$ *Функция* $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ *убывающая,* *тогда* $x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x < 5\frac{1}{8}$. *Учитывая ОДЗ, имеем* $5 < x < 5\frac{1}{8}$. *Ответ:* $\left(5;\ 5\frac{1}{8}\right)$. ◁

Продолжение табл. 24

3. Решение более сложных логарифмических неравенств

Ориентир	Пример
I. С помощью равносильных преобразований данное неравенство приводится к неравенству известного вида. *Схема равносильных преобразований неравенства* 1. **Учитываем ОДЗ** данного неравенства (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ). 2. Следим за тем, чтобы **на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.**	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x > 0$. На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенствам: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$. *Замена* $\lg x = t$. Тогда $(1 + t)^2 - t \geqslant 3$, то есть $t^2 + t - 2 \geqslant 0$. Решение этого неравенства $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 1$ (см. рисунок).  Обратная замена дает $\lg x \leqslant -2$ или $\lg x \geqslant 1$. Тогда $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ или $\lg x \geqslant \lg 10$. Учитывая, что функция $y = \lg x$ возрастающая, получаем: $x \leqslant 10^{-2}$ или $x \geqslant 10$. С учетом ОДЗ имеем: $0 < x \leqslant 0{,}01$ или $x \geqslant 10$. *Ответ:* $(0;\ 0{,}01] \cup [10;\ +\infty)$. ◁
II. Применяется метод интервалов (данное неравенство приводится к неравенству $f(x) \gtrless 0$) и используется схема: 1. **Найти ОДЗ.** 2. **Найти нули $f(x)$.** 3. **Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** 4. **Записать ответ, учитывая знак неравенства.**	$\log_x(2x + 3) < 2.$ ▶ Решим неравенство методом интервалов. Оно равносильно неравенству $\log_x(2x + 3) - 2 < 0.$ Обозначим $f(x) = \log_x(2x + 3) - 2.$ 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ 2. Нули функции: $f(x) = 0$. $\log_x(2x + 3) - 2 = 0$. Тогда $\log_x(2x + 3) = 2$. На ОДЗ это уравнение равносильно уравнению $2x + 3 = x^2$ (полученному по определению логарифма). То есть $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. В ОДЗ входит только $x = 3$. Итак, $f(x)$ имеет единственный нуль функции $x = 3$. 3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ на каждом из промежутков,

Окончание табл. 24

	на которые разбивается ОДЗ, и записываем решения неравенства $f(x) < 0$.  *Ответ:* $x \in (0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Решение простейших логарифмических неравенств. *Простейшими логарифмическими неравенствами* обычно считают неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (где } a > 0 \text{ и } a \neq 1). \qquad (1)$$

● Для решения такого неравенства можно применять равносильные преобразования. Для этого необходимо учесть его ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ и рассмотреть два случая: основание логарифма больше 1 и основание меньше 1 (но больше 0).

I. При $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a t$ возрастает на всей своей области определения (при $t > 0$), поэтому большему значению функции соответствует большее значение аргумента. Таким образом, переходя в неравенстве (1) от значений функции к значениям аргумента (в данном случае переходя к выражениям, стоящим под знаком логарифма), мы должны оставить тот же знак неравенства, то есть

$$f(x) > g(x). \qquad (2)$$

Учитывая, что на ОДЗ указанный переход можно выполнить и в обратном направлении (большему положительному значению аргумента соответствует большее значение функции), получаем, что на ОДЗ неравенство (1) равносильно неравенству (2). Коротко это можно записать так:

$$\text{при } a > 1 \qquad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), & (2) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$$

II. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция $y = \log_a t$ убывает на всей области определения (при $t > 0$), поэтому большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Следовательно, переходя в неравенстве (1) от значений функции к значениям аргумента, мы должны знак неравенства изменить на противоположный, то есть

$$f(x) < g(x). \qquad (5)$$

Учитывая, что на ОДЗ указанный переход можно выполнить и в обратном направлении (меньшему положительному значению аргумента соответствует большее значение функции), получаем, что при $0 < a < 1$ неравенство (1) на его ОДЗ равносильно неравенству (5). Коротко это можно записать так:

$$\text{при } 0 < a < 1 \qquad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$$

Суммируя полученные результаты, отметим, что

для решения неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ с помощью равносильных преобразований необходимо учесть его ОДЗ, а при переходе от значений функции к значениям аргумента (выражениям, стоящим под знаком логарифма) — значение a:
при $a > 1$ знак неравенства не меняется,
при $0 < a < 1$ знак неравенства меняется на противоположный. ○

Примеры использования этих ориентиров приведены в табл. 24.

Замечание. Системы неравенств, полученные для случаев I и II, можно несколько упростить. Например, если в системе выполняются неравенство (2): $f(x) > g(x)$ и неравенство (4): $g(x) > 0$, то из этих неравенств следует, что $f(x) > 0$. Следовательно, неравенство (3) этой системы выполняется автоматически, когда выполняются неравенства (2) и (4), и его можно не записывать в эту систему (см. п. 2 табл. 24).

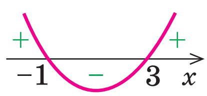
Аналогично обосновывается, что в случае II неравенство (4) в системе является следствием неравенств (3) и (5), и его также можно не записывать в систему.

Например, решим неравенство $\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3$.

▶ $$\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3.$$

(ОДЗ данного неравенства $x^2 - 2x > 0$ учтено автоматически, поскольку, если $x^2 - 2x > 3$, то выполняется и неравенство $x^2 - 2x > 0$.)

Решаем неравенство $x^2 - 2x > 3$. Тогда $x^2 - 2x - 3 > 0$, отсюда (см. рисунок) $x < -1$ или $x > 3$ — решение данного неравенства (его можно записать и так: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$). ◁



2. Решение более сложных логарифмических неравенств выполняется или с помощью равносильных преобразований данного неравенства (и приведения его к известному виду неравенств), или с помощью метода интервалов. Схема равносильных преобразований логарифмических неравенств полностью аналогична схеме равносильных преобразований логарифмических уравнений:

1) учитываем ОДЗ данного неравенства;
2) следим за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.

В этом случае на ОДЗ каждое решение данного неравенства будет решением второго и, наоборот, каждое решение второго неравенства будет решением первого, то есть эти неравенства равносильны (на ОДЗ).

Примеры решения логарифмических неравенств с помощью равносильных преобразований и методом интервалов и оформления такого решения приведены в табл. 24. Рассмотрим еще несколько примеров.

Примеры решения задач

Задача 1 Решите неравенство $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$.

Комментарий

Решим данное неравенство с помощью равносильных преобразований. Как и для уравнений, для этого достаточно *учесть ОДЗ данного неравенства и следить за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.* Поскольку на ОДЗ выражения, стоящие под знаком логарифмов, положительны, то формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ для положительных b и c можно применить как в прямом, так и в обратном направлениях. Таким образом, выполняя преобразование неравенства по этой формуле, получим неравенство, равносильное данному (на его ОДЗ).

Чтобы применить свойства логарифмической функции, запишем число (-1) как значение логарифмической функции: $-1=\log_{0,2}(0,2)^{-1}$ (разумеется, эту формулу можно применить как в прямом, так и в обратном направлениях) и учтем, что $(0,2)^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$.

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\ x+3>0.\end{cases}$ Тогда $x>1$.

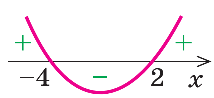
На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{0,2}\big((x-1)(x+3)\big)\geqslant\log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функция $y=\log_{0,2}t$ убывающая, поэтому

$$(x-1)(x+3)\leqslant(0,2)^{-1}.$$

Получаем $x^2+2x-3\leqslant 5$, $x^2+2x-8\leqslant 0$.



Последнее неравенство имеет решения:

$-4\leqslant x\leqslant 2$ (см. рисунок).

Учитывая ОДЗ, получаем $1<x\leqslant 2$.

Ответ: (1; 2]. ◁

Задача 2* Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>-1$.

Решение	*Комментарий*
▶ $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$. (1)	ОДЗ данного неравенства задается системой

Учитывая ОДЗ данного неравенства и то, что функция $y=\log_{\frac{1}{3}} t$ убывающая, получаем

$$0<\log_2\frac{x-1}{2-x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

то есть $0<\log_2\frac{x-1}{2-x}<3.$

Тогда $\log_2 1<\log_2\frac{x-1}{2-x}<\log_2 2^3.$

Так как функция $y=\log_2 t$ возрастающая, получаем

$$1<\frac{x-1}{2-x}<2^3. \qquad (3)$$

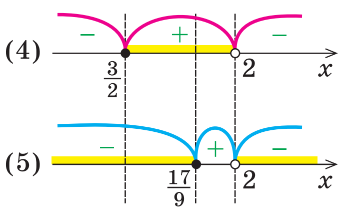
Это неравенство равносильно системе $\begin{cases}\frac{x-1}{2-x}>1,\\ \frac{x-1}{2-x}<8,\end{cases}$ которая равносильна системе

$$\begin{cases}\frac{2x-3}{2-x}>0, & (4)\\ \frac{9x-17}{2-x}<0. & (5)\end{cases}$$

Решаем неравенства (4) и (5) методом интервалов и находим их общее решение (см. рисунок).

Для неравенства (4) ОДЗ: $x\neq 2$, нуль функции $f(x)=\frac{2x-3}{2-x}$: $x=\frac{3}{2}$.

Для неравенства (5) ОДЗ: $x\neq 2$, нуль функции $g(x)=\frac{9x-17}{2-x}$: $x=\frac{17}{9}$.



Ответ: $\left(\frac{3}{2};\ \frac{17}{9}\right)$. ◁

$$\begin{cases}\log_2\frac{x-1}{2-x}>0, & (6)\\ \frac{x-1}{2-x}>0. & (7)\end{cases}$$

При выполнении равносильных преобразований главное — учесть ОДЗ в ходе решения. При переходе от неравенства (1) к неравенству (2) в записи последнего остается выражение $\log_2\frac{x-1}{2-x}$, для которого ОДЗ: $\frac{x-1}{2-x}>0$. Следовательно, при таком переходе ограничение (7) будет неявно учтено, поэтому достаточно учесть только ограничение (6) (что и сделано в левой части неравенства (2)).

Чтобы применить свойства соответствующих логарифмических функций, записываем сначала

$$-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

(и учитываем, что $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$), а затем — $0=\log_2 1$ и $3=\log_2 2^3$.

При переходе от неравенства (2) к неравенству (3) получаем $\frac{x-1}{2-x}>1$, таким образом, и в этом случае неравенство (7) учтено автоматически.

Для нахождения общих решений неравенств (4) и (5) удобно их решения методом интервалов разместить одно над другим так, чтобы одинаково обозначенные точки находились одна над другой. Тогда из приведенного рисунка легко увидеть общее решение системы неравенств.

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно решать простейшие логарифмические неравенства, используя свойства логарифмической функции.

2*. Обоснуйте справедливость равносильных переходов:

1) при $a > 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}$

2) при $0 < a < 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3. Объясните на примере применение метода интервалов к решению логарифмических неравенств.

Упражнения

Решите неравенство **(1–6)**.

1°. 1) $\log_3 x > 2$; 2) $\log_{0,2} x > -1$;
3) $\log_{0,5} x < 1$; 4) $\lg x < 2$.

2. 1) $\log_2(3x - 2) > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > -2$;
3) $\log_5(3x - 2) < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) > -1$;

3°. 1) $\lg(2x - 1) > \lg(x + 2)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;
3) $\log_{0,2} x < \log_{0,2}(3x - 6)$; 4) $\log_4(2x - 1) \leqslant \log_4(x + 3)$.

4. 1) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 0$; 2) $\dfrac{1}{3-\lg x} + \dfrac{1}{1+\lg x} > 1$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 \leqslant 0$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geqslant 0$.

5. 1) $\lg x + \lg(x - 9) > 1$; 2) $\log_{0,1}(x + 4) + \log_{0,1}(x - 5) \leqslant -1$;
3) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$; 4) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x \geqslant \log_\pi 2$.

6*. 1) $\log_3 \log_2 \log_{0,5} x \geqslant 0$; 2) $\log_x \sqrt{x+12} > 1$;
3) $\log_2 x + \log_x 2 \leqslant 2,5$; 4) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3 < 0$.

7*. В прямоугольной системе координат на плоскости постройте график данного уравнения или неравенства:

1) $\log_{y-2x}(3-x^2) = 1$; 2) $\log_{2y}(3x^2 + y^2) = 2$;
3) $\log_{1-x}(1+y) > 1$; 4) $\log_{0,3}(x+x^2) \geqslant \log_{0,3}(x+y)$.

§ 18 ПРОИЗВОДНЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Таблица 25

$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0,$ a — постоянная)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(x > 0,\ a > 0,$ $a \neq 1,$ a — постоянная)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правой части формулы)

Объяснение и обоснование

Чтобы обосновать *формулы производных показательных и логарифмических функций*, используем без доказательства свойство функции e^x, которое обосновывается в курсе высшей математики*:

производная функции e^x равна самой функции e^x, то есть

$$(e^x)' = e^x.$$

- При $a > 0$ по основному логарифмическому тождеству имеем $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$. Тогда по правилу нахождения производной сложной функции:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a, \text{ то есть}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$ ○

По полученной формуле мы можем найти значение производной показательной функции для любого значения x. Следовательно, *показательная функция дифференцируема в каждой точке области определения,* а значит, *и непрерывна в каждой точке своей области определения* (при всех действительных значениях x).

- Для логарифмической функции сначала найдем производную функции $\ln x$ (принимая без доказательства существование ее производной). Область определения этой функции — $x > 0$, то есть $(0; +\infty)$. При $x > 0$ по основному логарифмическому тождеству имеем $e^{\ln x} = x$. Это равенство означает, что при $x > 0$ функции $e^{\ln x}$ и x совпадают (это одна и та же функция, заданная на множестве $(0; +\infty)$), а значит, совпадают и их производные. Используя для левой части равенства правило нахождения производной сложной функции, получаем: $(e^{\ln x})' = (x)'$; $e^{\ln x}(\ln x)' = 1$, то есть $x(\ln x)' = 1$. Отсюда

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{где } x > 0).$$

Поскольку $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$, то

---

* Напомним, что e — иррациональное число, первые знаки которого следующие: $e = 2{,}71828182...$.

$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$. Следовательно,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$ (где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — постоянная). ○

Замечание. Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ была обоснована в § 3 только для целых значений n. Докажем, что она выполняется при любых действительных значениях n.

● Если n — любое нецелое число, то функция x^n определена только при $x > 0$. Тогда по основному логарифмическому тождеству $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n\ln x}$. По правилу вычисления производной сложной функции получаем:

$$(x^n)' = \left(e^{n\ln x}\right)' = e^{n\ln x}(n\ln x)' = x^n\cdot n\cdot(\ln x)' = x^n\cdot n\cdot\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$ ○

Следовательно, далее формулой $(x^n)' = nx^{n-1}$ можно пользоваться при любых действительных значениях n (в этом случае только при тех значениях x, при которых определена ее правая часть).

Опираясь на полученный результат, обоснуем также формулу

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \qquad (1)$$

которую можно использовать при тех значениях x, при которых определена ее правая часть.

● Если n — четное число, то ОДЗ правой части формулы (1): $x > 0$. Но при этом условии

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \qquad (2)$$

Если n — нечетное число, то ОДЗ правой части формулы (1) задается условием: $x \neq 0$. При $x > 0$ остается справедливым равенство (2). При $x < 0$ учтем, что $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ и $-x > 0$, а также то, что при нечетном n число $1 - n$ будет четным (поэтому $(-1)^{1-n} = 1$). Тогда

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)' = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)' = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(-x)^{1-n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Следовательно, и для нечетного n при всех $x \neq 0$ формула (1) также выполняется. ○

В последнем случае такие громоздкие преобразования пришлось выполнить вследствие того, что при $x < 0$ выражение $x^{\frac{1}{n}}$ не определено, а выражение $(-x)^{\frac{1}{n}}$ существует, поскольку $-x > 0$ при $x < 0$.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите производную функции:

1) $f(x) = \sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{\cos 3x}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $f'(x) = \left(\sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}\right)' = (\sin^2 x)' + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = 2\sin x\,(\sin x)' + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' = 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$. ◁ 2) ▶ $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\cos 3x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \cos 3x - (\cos 3x)' \cdot \ln x}{(\cos 3x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \cos 3x - (-\sin 3x)(3x)' \cdot \ln x}{\cos^2 3x} = \frac{\cos 3x + 3x \cdot \sin 3x \cdot \ln x}{x\cos^2 3x}$. ◁	Последовательно определяем, от какого выражения берется производная (ориентируясь на результат последнего действия). В задании 1 сначала берется производная суммы: $(u + v)' = u' + v'$. Затем для каждого из слагаемых используется правило вычисления производной сложной функции: берется производная от u^2 и e^u и умножается на u'. Полученный результат желательно упростить по формуле: $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. В задании 2 сначала берется производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, а для производной знаменателя используется правило вычисления производной сложной функции (производная cos u умножается на u').

Задача 2 Найдите уравнение касательной к графику функции $y = xe^x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение	*Комментарий*
▶ Если $f(x) = xe^x$, то $f(x_0) = f(1) = e$. $f'(x) = x' \cdot e^x + (e^x)' \cdot x = e^x + xe^x$. Тогда $f'(x_0) = f'(1) = 2e$. Подставляя эти значения в уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, получаем: $y = e + 2e(x - 1)$. То есть $y = 2ex - e$ — искомое уравнение касательной. ◁	Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 в общем виде записывается так: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Чтобы записать это уравнение для данной функции, необходимо найти $f(x_0)$, производную $f'(x)$ и значение $f'(x_0)$. Для выполнения соответствующих вычислений удобно обозначить данную функцию через $f(x)$, а для нахождения ее производной

воспользоваться формулой производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Задача 3 1) Постройте график функции $y=\frac{\ln x}{x}$.

2*) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\ln x = ax$ имеет единственный корень.

Комментарий

Для выполнения задания 1 исследуем функцию $y=\frac{\ln x}{x}$ по общей схеме и по результатам исследования строим ее график. При исследовании функции на четность и нечетность можно воспользоваться тем, что *у четной или нечетной функции* в область определения входят точки x и $(-x)$. Следовательно, для таких функций *область определения должна быть симметричной относительно точки* 0. Если же это условие не выполняется, то функция не может быть ни четной, ни нечетной.

Для лучшего представления о виде графика целесообразно уточнить поведение функции на концах области определения ($D(y) = (0;\ +\infty)$). При $x \to 0$ справа (при $x \to +0$) значение $\ln x \to -\infty$. Тогда $y=\frac{\ln x}{x}\to\left(\frac{-\infty}{+0}\right)\to-\infty$ (рис. 18.2). Но при $x \to +\infty$ мы не можем выполнить такую оценку (получаем неопределенность вида $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$). В таком случае поведение функции при $x \to +\infty$ можно уточнить с помощью дополнительных точек.

При выполнении задания 2 целесообразно использовать графическую иллюстрацию решения. Это можно сделать двумя способами:

I. С помощью равносильных преобразований привести данное уравнение к виду $f(x) = a$ $\left(\text{где } f(x)=\frac{\ln x}{x}\right)$ и, используя график, построенный в задании 1, выяснить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при разных значениях параметра a.

II. Применить графическое решение непосредственно к уравнению $\ln x = ax$ (графики функций $y = \ln x$ и $y = ax$ нам известны), а для исследования единственности корня использовать геометрический смысл производной.

Решение

▶ 1) Исследуем функцию $y=\frac{\ln x}{x}$.

1. Область определения: $x > 0$, то есть $D(y) = (0;\ +\infty)$.

2. Функция ни четная, ни нечетная, поскольку ее область определения не симметрична относительно точки 0.
3. Точки пересечения графика с осями координат. График не пересекает ось Oy $(x \neq 0)$.

   На оси Ox $y = 0$, то есть $\frac{\ln x}{x} = 0$. Тогда при $x > 0$ получаем: $\ln x = 0$; $x = 1$ — абсцисса точки пересечения графика с осью Ox.
4. Производная и критические точки.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

   Производная существует на всей области определения функции $f(x)$ (то есть при $x > 0$), следовательно, функция непрерывна на всей области определения.

   $y' = 0$. Тогда $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$. Отсюда при $x > 0$ получаем $\ln x = 1$, следовательно, $x = e$ — критическая точка.
5. Отмечаем критические точки на области определения функции и находим знак $y'(x)$ в каждом из полученных промежутков (рис. 18.1).

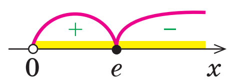


Рис. 18.1

   Составляем таблицу, в которой отмечаем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции.

x	$(0; e)$	e	$(e; +\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$
		max	

6. Найдем координаты еще нескольких точек графика функции:

x	$\frac{1}{e} \approx 0{,}4$	$e^2 \approx 7{,}4$	$e^3 \approx 20{,}1$
$y(x)$	$-e \approx -2{,}7$	$\frac{2}{e^2} \approx 0{,}3$	$\frac{3}{e^3} \approx 0{,}1$

Заметим, что при $x \to 0$ справа (при $x \to +0$)) значение $\ln x \to -\infty$. Действительно, $y = \frac{\ln x}{x} \to \left(\frac{-\infty}{+0}\right) \to -\infty$.

7. Используя результаты исследования, строим график функции $y=\frac{\ln x}{x}$ (см. рис. 18.2). ◁

I способ решения задания 2

▶ Область допустимых значений данного уравнения $\ln x = ax$ задается неравенством $x > 0$. Но тогда $x \neq 0$ и данное уравнение на его ОДЗ равносильно уравнению $\frac{\ln x}{x}=a$.

Решим последнее уравнение графически. Для этого построим график функции $y=\frac{\ln x}{x}$ (см. задание 1) и график функции $y = a$ (18.3).

Как видим, уравнение $\frac{\ln x}{x}=a$ имеет единственный корень только при $a \leqslant 0$ и при $a=\frac{1}{e}$ (при $0<a<\frac{1}{e}$ уравнение имеет два корня, а при $a>\frac{1}{e}$ уравнение не имеет корней).

Следовательно, наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\ln x = ax$ имеет единственный корень, — это $a=\frac{1}{e}$. ◁

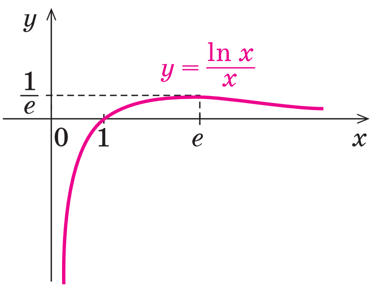


Рис. 18.2

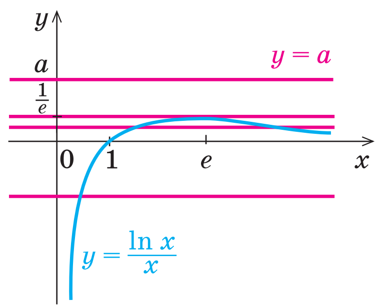


Рис. 18.3

II способ решения задания 2

Решение

▶ Рассмотрим графическую иллюстрацию (рис. 18.4) решения данного уравнения

$$\ln x = ax. \qquad (1)$$

Функция $y = \ln x$ возрастающая и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

График функции $y = ax$ — прямая, проходящая через начало координат.

При $a < 0$ прямая $y = ax$ пересекает график функции $y = \ln x$ только в одной точке (прямая *1* на рис. 18.4). Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень (действительно, функция $y = \ln x$ возрастающая, а функция $y = ax$ убывающая, поэтому уравнение (1) может иметь только один корень).

При $a = 0$ уравнение (1) имеет вид $\ln x = 0$ и также имеет единственный корень ($x = 1$).

При $a > 0$ прямая $y = ax$ может касаться графика функции $y = \ln x$ (прямая *2* на рис. 18.4). Тогда уравнение (1) будет иметь единственный корень. Также прямая $y = ax$ может проходить в первой четверти ниже касательной (прямая *3* на рис. 18.4). Тогда уравнение (1) будет иметь два корня. Если же прямая $y = ax$ будет проходить в первой четверти выше касательной (прямая *4* на рис. 18.4), то уравнение (1) не будет иметь корней.

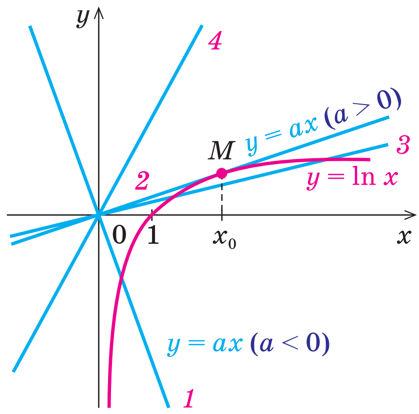


Рис. 18.4

Выясним, когда прямая $y = ax$ будет касательной к графику функции $y = f(x) = \ln x$. Пусть точка касания M имеет абсциссу x_0. Учитывая геометрический смысл производной, получаем, что $f'(x_0) = a$ (значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной через точку M). Поскольку $f'(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Тогда из равенства $f'(x_0) = a$ имеем $\frac{1}{x_0} = a$. Отсюда $x_0 = \frac{1}{a}$. Тогда $y_0 = \ln\frac{1}{a}$. С другой стороны, поскольку точка касания M лежит на касательной $y = ax$, то ее координаты удовлетворяют и уравнению касательной. Получаем $\ln\frac{1}{a} = a\cdot\frac{1}{a}$, то есть $\ln\frac{1}{a} = 1$. Тогда $\frac{1}{a} = e$, следовательно, $a = \frac{1}{e}$.

Таким образом, данное уравнение будет иметь единственный корень только при $a \leqslant 0$ и при $a = \frac{1}{e}$. Тогда наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\ln x = ax$ имеет единственный корень, — это $a = \frac{1}{e}$. ◁

Задача 4 Докажите, что при всех действительных значениях x выполняется неравенство $e^x \geqslant 1 + x$.

Решение	*Комментарий*
▶ Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.	Используем производную для доказательства данного неравенства. Для этого исследуем функцию $f(x)$,

Производная $f'(x) = e^x - 1$ существует на всей области определения. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой;

$$f'(x) = 0,\ e^x - 1 = 0,\ e^x = 1,$$
$x = 0$ — критическая точка.

Отмечаем критическую точку на области определения функции $f(x)$, определяем знаки производной и поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 18.5).

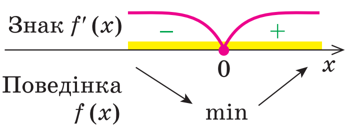


Рис. 18.5

Как видим, непрерывная функция $f(x)$ имеет на интервале $(-\infty;\ +\infty)$ только одну критическую точку, — точку минимума, в которой функция принимает наименьшее значение на этом интервале. Тогда при всех действительных значениях x значения $f(x) \geqslant f(0) = 0$, то есть $e^x - 1 - x \geqslant 0$. Следовательно, $e^x \geqslant 1 + x$ при всех действительных значениях x. ◁

которая является разностью левой и правой частей неравенства. При всех действительных значениях x эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей, поэтому рассуждения, приведенные при решении предыдущих задач, нельзя использовать.

Тогда в результате исследования попробуем найти наибольшее или наименьшее значение функции $f(x)$ на всей числовой прямой. Для этого можно использовать свойство: *если непрерывная функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну точку экстремума x_0 и это точка минимума, то на этом интервале функция принимает свое наименьшее значение в точке x_0.*

Далее воспользуемся тем, что когда в точке x_0 функция принимает наименьшее значение на заданном интервале, то для всех значений x из этого интервала $f(x) \geqslant f(x_0)$ (если необходимо, то можно также уточнить, что знак равенства достигается только в точке x_0).

При доказательстве числовых неравенств или для сравнения двух чисел часто бывает удобно перейти к более общему функциональному неравенству.

Задача 5* Сравните числа π^e и e^π.

Комментарий

Чтобы составить план решения, можно рассуждать следующим образом. Мы не знаем, какое из данных чисел больше: π^e или e^π, поэтому в ходе анализа поставим между ними знак «$\vee$». Этот знак неравенства, направленный вниз острым концом, свидетельствует о том, что мы не знаем, в какую сторону его следует направить. Будем выполнять преобразование неравенства до тех пор, пока не выясним, какое число больше. Затем заменим знак «$\vee$» соответствующим знаком неравенства: «>» или «<», которое и запишем в решении. (В ходе анализа, если необходимо поменять знак неравенства, знак «$\vee$» меняем на знак «$\wedge$», а в записи решения в соответствующем месте меняем знак неравенства.) При анализе запись вида $\pi^e \vee e^\pi$ также будем называть неравенством (но, конечно, не в решении).

Рассмотрим неравенство $\pi^e \vee e^\pi$. Это неравенство с положительными членами ($\pi > 0$ и $e > 0$), следовательно, обе его части можно прологарифмировать. Поскольку функция $\ln t$ является возрастающей, то после логарифмирования обеих частей по основанию e знак неравенства не изменится, и мы получим неравенство $\ln(\pi^e) \vee \ln(e^\pi)$, то есть неравенство $e\ln\pi \vee \pi\ln e$. Так как $e\pi > 0$, то после деления обеих частей последнего неравенства на $e\pi$ знак неравенства не изменится, и мы получим неравенство $\frac{\ln\pi}{\pi} \vee \frac{\ln e}{e}$. Замечаем, что в левой и правой частях этого неравенства стоят значения одной и той же функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Исследуем эту функцию с помощью производной на возрастание и убывание.

Далее, учитывая, что $\pi > e$, сравним полученные выражения, а затем и данные выражения (выполняя все те преобразования, что и в ходе анализа, только в обратном порядке).

Решение

▶ Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Ее область определения: $x > 0$. Производная $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ существует на всей области определения. Выясним, когда $f'(x) = 0$: $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$. Тогда на области определения получаем равносильное уравнение $\ln x = 1$, то есть $x = e$ — критическая точка. Отмечаем критическую точку на области определения функции $f(x)$ и определяем знаки производной и поведение функции в каждом из полученных промежутков (рис. 18.6).

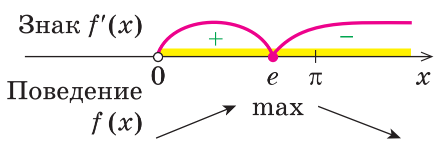


Рис. 18.6

Функция $f(x)$ убывает на интервале $(e; +\infty)$, а так как она непрерывна на всей области определения, то убывает и на промежутке $[e; +\infty)$.

Поскольку $\pi > e$, то $f(\pi) < f(e)$, то есть $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$. Умножив обе части этого неравенства на положительное число πe (знак неравенства не меняется), получаем неравенство $e\ln\pi < \pi\ln e$. Тогда $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Так как функция $\ln t$ возрастающая ($e > 1$), то $\pi^e < e^\pi$.

Ответ: $\pi^e < e^\pi$. ◁

Задача 6* Решите уравнение $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$.

Комментарий

Если попытаться применить к данному уравнению схему решения показательных уравнений (см. с. 178), то удается реализовать только первый ее пункт — избавиться от числовых слагаемых в показателях степеней. А привести все степени к одному основанию (с удобными показателями) или к двум основаниям так, чтобы получить однородное уравнение, или перенести все члены в одну сторону и разложить полученное выражение на множители — не удается. Попробуем применить свойства соответствующих функций. Но и на этом пути (см., например, учебник для 10 класса, раздел 1, или § 10 и § 20 этого учебника) нам не удается использовать конечность ОДЗ (она бесконечна), оценку значений левой и правой частей уравнения (они обе в пределах от 0 до $+\infty$). Также не получается использовать теоремы о корнях уравнений (в обеих частях данного уравнения стоят возрастающие функции).

Тогда *попробуем подобрать корни этого уравнения и доказать, что других корней оно не имеет* (удобно предварительно привести уравнение к виду $f(x) = 0$). Последовательно подставляя $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, выясняем, что $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, то есть уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня. Чтобы убедиться, что других корней нет, достаточно доказать, что у функции $f(x)$ не больше трех промежутков возрастания или убывания; а учитывая непрерывность $f(x)$ на всей числовой прямой, для этого достаточно доказать, что у нее не больше двух критических точек, то есть уравнение $f'(x) = 0$ имеет не больше двух корней. Рассматривая теперь уравнение $f'(x) = 0$, мы после его преобразования можем провести аналогичные рассуждения, но уже для двух корней (как это было сделано в примере на с. 139). Выполняя преобразования уравнения $f'(x) = 0$, учтем, что все его члены имеют одинаковую степень — x (то есть оно является однородным относительно трех функций от переменной x, а именно: 2^x, 3^x, 4^x). Делением обеих частей уравнения $f'(x) = 0$ на степень с основанием 2, 3 или 4 удается уменьшить количество выражений с переменной на одно.

Решение

▶ Данное уравнение равносильно уравнению $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$, то есть

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \quad (1)$$

Обозначим $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$. Так как $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$, $f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$, $f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня: 0, 1, 3. Докажем, что других корней уравнение (1) не имеет. Для этого достаточно доказать, что у функции $f(x)$ есть не больше трех промежутков возрастания или убывания, а учитывая непрерывность функции $f(x)$ на всей числовой прямой, достаточно доказать, что функция имеет не больше двух критических точек.

Область определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Производная $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ существует при всех значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть только те значения x, при которых $f'(x) = 0$. Получаем уравнение

$$8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0.$$

Поскольку $3^x \neq 0$, то после деления обеих частей последнего уравнения на 3^x получаем равносильное уравнение

$$8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3 = 0. \qquad (2)$$

Чтобы доказать, что уравнение (2) имеет не больше двух корней, достаточно доказать, что функция $\varphi(x) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3$, стоящая в левой части уравнения, имеет не больше двух промежутков возрастания или убывания. Учитывая непрерывность этой функции на всей числовой прямой, достаточно доказать, что она имеет только одну критическую точку. Действительно, $\varphi'(x) = (8 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} + (2 \ln 4) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{3}$ существует при всех значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть только те значения x, при которых $\varphi'(x) = 0$. Получаем однородное уравнение

$$(8 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} + (4 \ln 2) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{3} = 0.$$

Поскольку $(4 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, то после деления обеих частей уравнения на это выражение получаем равносильное уравнение $2 \ln \frac{2}{3} + 2^x \cdot \ln \frac{4}{3} = 0$. Отсюда $2^x = \dfrac{-2 \ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{4}{3}}$. Учитывая, что $\ln \frac{2}{3} < 0$, а $\ln \frac{4}{3} > 0$, получаем: $\dfrac{-2 \ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{4}{3}} > 0$. Следовательно, последнее уравнение имеет единственный корень. Тогда функция $\varphi(x)$ имеет единственную критическую точку, поэтому уравнение (2) имеет не больше двух корней. Это означает, что функция $f(x)$ имеет не больше двух критических точек. Тогда уравнение (1) (а значит, и данное уравнение) имеет не больше трех корней. Но три корня данного уравнения мы уже знаем: 0, 1, 3, следовательно, других корней данное уравнение не имеет.

Ответ: 0, 1, 3. ◁

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы нахождения производных:
   а) показательной и логарифмической функций;
   б) функции $\sqrt[n]{x}$.
2*. Обоснуйте формулы нахождения производных, указанных в вопросе 1.

Упражнения

Найдите производную функции **(1, 2)**.

1°. 1) $y = 3e^x + 4$; 2) $y = e^x - \ln x$; 3) $y = e^{-x} + x^5$; 4) $y = \ln(2x - 1)$.

2. 1) $y = e^{5x}\cos x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}\lg x$; 4) $y = x^3\log_2 x$.

3. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:
1°) $f(x) = e^{2x} - x$; 2°) $f(x) = 2x - \ln x$;
3) $f(x) = x\ln x$; 4) $f(x) = (1 - x)e^{-2x}$.

4. Найдите значения x, при которых значение производной функции $f(x)$: а) равно нулю, б) положительно, в) отрицательно.
1) $f(x) = x^2\ln x$; 2) $f(x) = x^3 - 3\ln x$;
3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

5. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:
1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$;
3) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \ln x - x$, $x_0 = 1$.

6. Найдите абсциссы x_0 точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему образует угол φ с положительным направлением оси Ox:
1) $f(x) = \sin 2x$, $\varphi = 0°$; 2) $f(x) = \ln 2x$, $\varphi = 45°$; 3) $f(x) = e^{-x}$, $\varphi = 135°$.

7*. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{5x+1}$, которая параллельна прямой $y = 5x - 8$.

8*. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{3x-2}$, которая параллельна прямой $y = 3x + 17$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:
1) $f(x) = x + e^{-x}$, $[-1; 2]$; 2) $f(x) = \ln(2x) - 6x^2 + 11x$, $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$;
3) $f(x) = |x^2 - x - 2| + \ln x$, $[1; 3]$.

10. а) Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график.
б) Найдите область значений функции $f(x)$.
в*) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a?
1) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; 2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

11*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^6 = e^x$ имеет один положительный корень.

12*. Докажите, что уравнение имеет один корень, и найдите этот корень.

1) $e^x + 2x - 1 = 0$; 2) $\frac{1}{x} - \ln x = 1$.

Решите уравнения **(13–15)**.

13*. 1) $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$; 2) $4^x + 4^{1-x} = 1 + 3\sin \pi x$; 3) $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$.

14*. 1) $2^{x+1} - 4x = 0$; 2) $3^{x-1} - 4x = -3$; 3) $5^{x+2} - 12x = 25$.

15*. 1) $3 \cdot 2^{x+2} + 5^x = 8 \cdot 3^x + 5$; 2) $3 \cdot 2^x - 3^{x+1} + 4^x = 1$;

3) $3 \cdot 2^{x+4} + 6 \cdot 7^{x+1} = 3 \cdot 5^{x+2} + 15$. 4) $3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$.

16*. Докажите неравенство:

1) $e^{-x} > 1 - x$ при $x < 0$; 2) $e^x > ex$ при $x > 1$;

3) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ при $x \geqslant 0$; 4) $\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{x+1}$ при $x > -1$;

5) $2x \ln x \leqslant x^2 - 1$ при $x \geqslant 1$.

17*. Сравните числа:

1) 1000^{1001} и 1001^{1000}; 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ и $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $(\lg 5)^3$ и $3^{\lg 5}$.

§ 19 РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Таблица 26

Показательно-степенные уравнения	
Показательно-степенными уравнениями обычно называют уравнения, содержащие выражения вида $(f(x))^{g(x)}$, то есть уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ (основанием степеней, стоящих в левой и правой частях показательно-степенного уравнения, является $f(x)$ — выражение с переменной).	
Основные способы решения уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$	
Ориентир	Пример
I. $f(x) > 0$	
Используем (если возможно) **основное логарифмическое тождество** в виде $a^{\log_a N} = N$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$.	**1.** ▶ $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x_1 = -1 \text{ или } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$ *Ответ:* 2. ◁

Окончание табл. 26

<table>
<tr>
<td>**Логарифмируем** (если возможно) **обе части уравнения по числовому основанию или представляем все степени как степени с одним и тем же числовым основанием по формуле**
$$U(x) = a^{\log_a U(x)},$$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ U(x) > 0)$.</td>
<td>**2.** $x^{2\lg x + 1} = 100x$.
▶ На ОДЗ ($x > 0$) обе части уравнения положительны, поэтому после логарифмирования по основанию 10 получаем уравнение, равносильное данному:
$$\lg\left(x^{2\lg x + 1}\right) = \lg(100x).$$
Отсюда
$(2\lg x + 1)\lg x = \lg 100 + \lg x$.
Замена: $\lg x = t$. $(2t + 1)t = 2 + t$, $t^2 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тогда $\lg x = 1$ или $\lg x = -1$, то есть $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$ (оба корня входят в ОДЗ).
Ответ: 10; 0,1. ◁</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">**II. $f(x)$ — произвольное выражение**</td>
</tr>
<tr>
<td>*Две степени с одинаковыми основаниями* $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *могут быть равными в одном из четырех случаев:*
1) $f(x) = -1$, *для корней этого уравнения* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— целые числа одинаковой четности*;
2) $f(x) = 0$, *для корней этого уравнения* $g(x) > 0$ *и* $\varphi(x) > 0$;
3) $f(x) = 1$, *для корней этого уравнения* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *существуют*;
4) $g(x) = \varphi(x)$, *для корней этого уравнения существуют* $(f(x))^{g(x)}$ *и* $(f(x))^{\varphi(x)}$.</td>
<td>**3.** $x^{2x + 4} = x^{20}$.
▶ Если предположить, что основание степени x является числом, то *сначала рассмотрим три особых случая (основание степени равно* -1; 0; 1*), а затем приравняем показатели степеней*:
1) при $x = -1$ получаем верное равенство $(-1)^2 = (-1)^{20}$;
2) при $x = 0$
$0^4 = 0^{20}$ — верное равенство;
3) при $x = 1$
$1^6 = 1^{20}$ — верное равенство;
4) при $2x + 4 = 20$, то есть $x = 8$,
$8^{20} = 8^{20}$ — верное равенство.
Ответ: -1; 0; 1; 8.
Замечание. Если предположить, что основание x является переменной, то функция $f(x) = x^{2x + 4}$ считается определенной только при $x > 0$. В этом случае данное уравнение имеет только корни 1 и 8, и получаем *ответ:* 1; 8. ◁
Таким образом, ответ к такому уравнению нельзя записать однозначно.</td>
</tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Показательно-степенными уравнениями и неравенствами обычно называют уравнения и неравенства, содержащие выражения вида $f(x)^{g(x)}$ (в которых переменная входит и в основание, и в показатель степени).

Анализируя показательно-степенные уравнения, представленные в табл. 26, следует помнить, что в школьном курсе математики понятие уравнения на разных этапах вводилось по-разному. В 4–5 классах уравнением называлось *числовое равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой*. Значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство, называлось *корнем*, или *решением* этого уравнения. Например, для уравнения $2x = 6$ корнем является значение $x = 3$.

С точки зрения приведенного определения, в уравнении $2x = 6$ буквой x обозначено хотя и неизвестное нам, но конкретное число, поэтому x может принимать единственное значение $x = 3$. Но такое определение затрудняет в дальнейшем работу с уравнением. Когда x принимает единственное значение, мы не можем применять, например, графическое решение уравнения (имея только одно значение x, невозможно получить график $y = 2x$ как прямую линию на плоскости). Поэтому, начиная с 6–7 классов, *уравнение* определяется как *равенство с переменной* (а корнем, или решением уравнения соответственно называется такое значение переменной, при котором это уравнение обращается в верное числовое равенство). Тогда x в уравнении $2x = 6$ — это переменная, для которой нет ни одного ограничения, и поэтому x может быть любым числом (ОДЗ уравнения: $\boldsymbol{R}$). При таком подходе каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной $2x$. Таким образом, это уравнение можно решить графически, построив графики функций $y = 2x$ и $y = 6$. Кроме того, можно записать уравнение в общем виде как равенство $f(x) = \varphi(x)$ и обоснованно применить свойства функций для решения уравнений.

Для всех видов уравнений, которые рассматривались в курсе алгебры или алгебры и начал анализа, приведенные два определения уравнения приводят к одному и тому же результату при решении уравнений. Но в случае показательно-степенного уравнения иногда можно получить разные ответы, используя разные подходы к определению уравнения.

Например, решим уравнение $x^{2x+1} = x^5$.

▶ Если рассматривать такое уравнение как числовое равенство, то две степени с одинаковым основанием x могут быть равными только в одном из четырех случаев. А именно: если основанием степени является одно из значений -1, 0, 1 ($x = -1$, $x = 0$, $x = 1$), то степени могут быть равными даже тогда, когда их показатели будут разными (при условии, что эти степени существуют). Во всех остальных случаях степени с одинаковым основанием будут равными только тогда, когда показатели этих степеней будут равными ($2x + 1 = 5$, то есть

$x = 2$). Следовательно, для получения всех корней данного уравнения достаточно проверить значения x, равные -1, 0, 1, 2. Все эти числа являются корнями, так как при подстановке каждого из них в данное уравнение оно обращается в верное числовое равенство.

Если же рассматривать это уравнение как равенство с переменной и встать на функциональную точку зрения, то функция $f(x) = x^{2x+1}$, как правило, считается определенной только при $x > 0$, тогда данное уравнение имеет только два корня: 1 и 2. ◁

Таким образом, в рассмотренном уравнении ответ нельзя записать однозначно (поскольку каждый из указанных подходов к определению уравнения имеет право на существование и реально используется в математике). Поэтому в подобных ситуациях приходится приводить оба варианта ответа.

Аналогичный пример приведен в табл. 26.

Обобщая приведенные выше рассуждения, заметим, что в том случае, когда при решении уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *из условия не следует, что основание степени* $f(x) > 0$, *необходимо рассмотреть три особых случая: основание* $f(x)$ *равно* -1, 0, 1 (при этом степени $(f(x))^{g(x)}$ и $(f(x))^{\varphi(x)}$ могут быть равными даже тогда, когда показатели $g(x)$ и $\varphi(x)$ разные), *а затем приравнять показатели* ($g(x) = \varphi(x)$). Если же из условия следует, что $f(x) > 0$, то рассматриваем только один особый случай — основание степени равно 1 ($f(x) = 1$) — и приравниваем показатели степеней ($g(x) = \varphi(x)$).

Например, решим уравнение $(x^2 - 1)^{3x-7} = (x^2 - 1)^8$.

▶ Из условия не следует, что основание степени $x^2 - 1 > 0$, следовательно, приходится рассматривать все случаи.

1) Если $x^2 - 1 = -1$, то $x^2 = 0$, и тогда $x = 0$.

   Подставляя это значение в данное уравнение, имеем $(-1)^{-7} = (-1)^8$, то есть $-1 = 1$ (неверное равенство). Таким образом, $x = 0$ не является корнем данного уравнения.

2) Если $x^2 - 1 = 0$, то есть $x = \pm 1$, то при этих значениях x данное уравнение обращается в неверное числовое равенство (поскольку значения выражений 0^{-4} и 0^{-10} не существуют). Таким образом, числа 1 и -1 не являются корнями данного уравнения.

3) Если $x^2 - 1 = 1$, то есть $x = \pm\sqrt{2}$, то данное уравнение обращается в верное равенство ($1 = 1$), следовательно, $x = \pm\sqrt{2}$ — корни данного уравнения.

4) Приравняем показатели степеней данного уравнения (основания степеней в левой и правой частях уравнения одинаковы): $3x - 7 = 8$, тогда $x = 5$ (при подстановке получаем верное равенство $24^8 = 24^8$).

   Объединяя полученные результаты, получаем ответ.

Ответ: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 5. ◁

Замечание. При $f(x) > 0$ для решения уравнения $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ можно прологарифмировать обе его части по любому числовому основанию, получить равносильное уравнение, в котором уже не придется рассматривать особый случай — он будет учтен автоматически. Это связано с тем, что функция $y = a^x$ при $a > 0$ имеет особый случай, если $a = 1$ (см. график функции $y = a^x$ при $a > 0$), а функция $y = \log_b x$ (где $b > 0$, $b \neq 1$) особых случаев не имеет.

Также отметим, что *при решении неравенств вида* $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{\varphi(x)}$ *обычно* используют функциональный подход и *считают, что* $f(x) > 0$.

Когда в показательно-степенное уравнение входят выражения вида $a^{\log_a N}$, *для его решения можно воспользоваться основным логарифмическим тождеством*. В этом случае следует учитывать ОДЗ данного уравнения (см. пример 1 в табл. 26).

Достаточно часто при решении показательно-степенных уравнений логарифмируют обе его части. Это можно сделать только тогда, когда обе части уравнения положительны на его ОДЗ (см. пример 2 в табл. 26).

Приведем еще несколько примеров решения показательно-степенных уравнений и неравенств.

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$.

Решение	*Комментарий*
▶ Поскольку $x = 3$ не является корнем данного уравнения (0^0 не существует), то при $x \neq 3$ обе его части положительны. После логарифмирования (по основанию 10) обеих частей данного уравнения получаем равносильные ему уравнения: $\lg\|x-3\|^{3x^2-10x+3} = \lg 1$, $(3x^2 - 10x + 3)\lg\|x - 3\| = 0$, $3x^2 - 10x + 3 = 0$ или $\lg\|x - 3\| = 0$. Из первого полученного уравнения имеем $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$ (не является корнем), а из второго — $\|x - 3\| = 1$. Тогда $x - 3 = 1$ или $x - 3 = -1$, то есть $x = 4$ или $x = 2$. *Ответ*: $\frac{1}{3}$; 2; 4. ◁	Поскольку $\|x - 3\| \geqslant 0$, то из особых случаев можно рассмотреть только один — основание равно 0 ($\|x - 3\| = 0$, то есть $x = 3$). Чтобы не рассматривать случай, когда основание равно 1, достаточно при $x \neq 3$ прологарифмировать обе части уравнения по числовому основанию (например, по основанию 10). При $x \neq 3$ обе части данного уравнения положительны, поэтому после логарифмирования получаем уравнение, равносильное данному. Поскольку все дальнейшие преобразования равносильны (при $x \neq 3$), то все полученные решения (не равные 3) являются корнями данного уравнения.

Задача 2 Решите уравнение $5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10$.

Комментарий

Прологарифмировать обе части данного уравнения не удается (в левой части стоит сумма), поэтому попытаемся представить все степени в виде степеней с одним и тем же числовым основанием. Так как в уравнении есть логарифм по основанию 2, представим все данные степени в виде степеней с основанием 2 по формуле $u = a^{\log_a u}$, где $u > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда

$$5^{\log_2 x} = 2^{\log_2\left(5^{\log_2 x}\right)} = 2^{\log_2 x \log_2 5}, \qquad (1)$$
$$x^{\log_2 5} = 2^{\log_2\left(x^{\log_2 5}\right)} = 2^{\log_2 5 \log_2 x}$$

(то есть слагаемые, стоящие в левой части данного уравнения, одинаковы).

После получения уравнения (2) (см. решение) можно использовать равенство (1) справа налево, а также записать правую часть уравнения (2) как степень числа 2 или прологарифмировать обе его части по основанию 2.

Решение

▶ ОДЗ: $x > 0$. На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям:

$$2^{\log_2 x \log_2 5} + 2^{\log_2 5 \log_2 x} = 10, \quad 2 \cdot 2^{\log_2 x \log_2 5} = 10,$$
$$2^{\log_2 x \log_2 5} = 5, \qquad (2)$$
$$5^{\log_2 x} = 5, \quad \log_2 x = 1,\ x = 2 \text{ (принадлежит ОДЗ).}$$

Ответ: 2. ◁

Задача 3 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Комментарий

Используем равносильные преобразования системы. Для этого учтем ОДЗ и проследим, чтобы на этой ОДЗ преобразования уравнений как в прямом, так и в обратном направлениях сохраняли верные равенства.

В первом уравнении данной системы запишем все степени как степени с основанием 3 (см. комментарий к задаче 2). После равносильных (на ОДЗ) преобразований первого уравнения получаем систему (1) (см. решение), в которую переменные входят только в виде $\log_3 x$ и $\log_3 y$, поэтому удобно произвести замену переменных. После обратной замены применяем определение логарифма.

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$ На этой ОДЗ первое уравнение данной системы равносильно уравнениям: $3^{\log_3\left(x^{\log_3 y}\right)} + 3^{\log_3\left(y^{\log_3 x}\right)} = 18$, $3^{\log_3 y \log_3 x} + 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18$,

$$2 \cdot 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18, \quad 3^{\log_3 x \log_3 y} = 9, \quad 3^{\log_3 x \log_3 y} = 3^2, \quad \log_3 x \log_3 y = 2.$$

Тогда данная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases}\log_3 x \log_3 y = 2,\\ \log_3 x + \log_3 y = 3.\end{cases} \qquad (1)$$

Замена $\log_3 x = u$, $\log_3 y = v$ дает систему уравнений $\begin{cases}uv = 2,\\ u + v = 3.\end{cases}$

Из второго уравнения последней системы $v = 3 - u$, из первого уравнения получаем $u(3 - u) = 2$, то есть $u^2 - 3u + 2 = 0$. Отсюда $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Тогда $v_1 = 2$, $v_2 = 1$.

Обратная замена дает $\begin{cases}\log_3 x = 1,\\ \log_3 y = 2\end{cases}$ или $\begin{cases}\log_3 x = 2,\\ \log_3 y = 1.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}x = 3,\\ y = 9\end{cases}$ или $\begin{cases}x = 9,\\ y = 3\end{cases}$ (найденные решения входят в ОДЗ).

Ответ: (3; 9), (9; 3). ◁

Задача 4 Решите неравенство $|x - 4|^{\lg(x-2)} \geqslant |x - 4|^{\lg(6-x)}$.

I способ

Комментарий

Попытаемся выполнить равносильные преобразования данного неравенства, применив рассуждения, аналогичные тем, что приводились при решении показательно-степенных уравнений (см. пункт II табл. 60). Поскольку $|x - 4| \geqslant 0$, то из особых случаев следует рассмотреть только два: основание равно 0 ($x = 4$) и основание равно 1 ($|x - 4| = 1$). При других значениях x основание — положительное число, не равное 1.

Рассмотрим два случая: 1) основание больше 1 (при переходе от степеней к показателям в данном неравенстве знак неравенства не меняется); 2) основание меньше 1, но больше 0 (при переходе от степеней к показателям знак неравенства меняется на противоположный). При таких преобразованиях получаем неравенства, равносильные данному (на его ОДЗ), поскольку можем гарантировать правильность не только прямых, но и обратных переходов.

При решении полученных простейших логарифмических неравенств учитываем, что функция $y = \lg t$ возрастающая.

В ответ следует включить все решения полученных систем неравенств и все особые значения, которые являются решениями данного неравенства.

Решение

► ОДЗ: $\begin{cases}x - 2 > 0,\\ 6 - x > 0,\end{cases}$ то есть $2 < x < 6$.

При $x = 4$ данное неравенство выполняется ($0^{\lg 2} \geqslant 0^{\lg 2}$, $0 \geqslant 0$ — верное неравенство), таким образом, $x = 4$ — одно из его решений.

Если $|x - 4| = 1$ (то есть $x - 4 = 1$ или $x - 4 = -1$, тогда $x = 5$ или $x = 3$ — эти значения входят в ОДЗ), то данное неравенство также выполняется. При $x = 5$ и $x = 3$ получаем верное неравенство $1 \geqslant 1$. Таким образом, эти числа также являются решениями данного неравенства.

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ и $x \neq 3$ на ОДЗ данное неравенство равносильно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} |x-4|>1, \\ \lg(x-2)\geqslant\lg(6-x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<|x-4|<1, \\ \lg(x-2)\leqslant\lg(6-x), \end{cases}$$

$$\text{то есть} \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 5, \\ x\neq 3, \\ 2<x<6, \\ x-4<-1 \text{ или } x-4>1, \\ x-2\geqslant 6-x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 5, \\ x\neq 3, \\ 2<x<6, \\ -1<x-4<1, \\ x-2\leqslant 6-x. \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 5, \\ x\neq 3, \\ 2<x<6, \\ x<3 \text{ или } x>5, \\ x\geqslant 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 5, \\ x\neq 3, \\ 2<x<6, \\ 3<x<5, \\ x\leqslant 4. \end{cases}$$

Таким образом, $5 < x < 6$ или $3 < x < 4$. Учитывая особые значения, которые являются решениями, получаем: $3 \leqslant x \leqslant 4$ или $5 \leqslant x < 6$.

Ответ: $[3; 4] \cup [5; 6)$. ◁

II способ

Комментарий

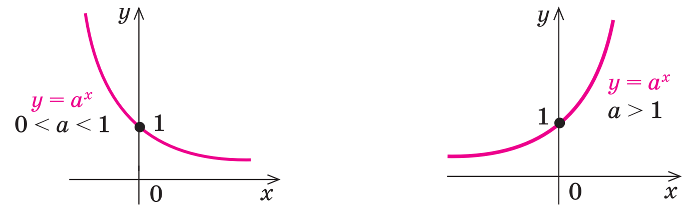
Решим данное неравенство методом интервалов, для этого приведем его к виду $f(x) \geqslant 0$.

Для нахождения нулей $f(x)$ необходимо решить показательно-степенное уравнение (2) (см. решение ниже). Поскольку $|x - 4| \geqslant 0$, то из особых случаев необходимо рассмотреть только два — основание равно 0 ($x = 4$) или основание равно 1 ($|x - 4| = 1$). При других значениях x из ОДЗ в уравнении (3) (см. решение ниже) основание — положительное число, не равное 1. Тогда можно приравнять показатели степеней (получаем уравнение, равносильное данному).

Для нахождения знаков $f(x)$ удобно использовать графики функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ и при $a > 1$.

Решение

▶ 1. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ 6-x>0, \end{cases}$ то есть $2 < x < 6$.



На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

$$|x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)} \geqslant 0. \qquad (1)$$

2. Пусть $f(x) = |x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)}$. Нули $f(x)$:

$$|x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)} = 0. \qquad (2)$$

На ОДЗ уравнение (2) равносильно уравнению

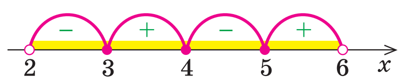
$$|x-4|^{\lg(x-2)} = |x-4|^{\lg(6-x)}. \qquad (3)$$

При $x = 4$ равенство (3) выполняется ($0^{\lg 2} = 0^{\lg 2}$; $0 = 0$ — верное равенство), таким образом, $x = 4$ — корень уравнения (3).

Если $|x-4| = 1$ (то есть $x - 4 = 1$ или $x - 4 = -1$, тогда $x = 5$ или $x = 3$), то равенство (3) также выполняется. При $x = 5$ и $x = 3$ получаем верное равенство $1 = 1$. Таким образом, эти числа также являются корнями уравнения (3).

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ и $x \neq 3$ на ОДЗ уравнение (3) равносильно уравнению $\lg(x-2) = \lg(6-x)$. Тогда $x - 2 = 6 - x$, то есть $x = 4$ — не удовлетворяет условию $x \neq 4$. Следовательно, на последнем множестве уравнение (3) корней не имеет.

3. Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ (см. рисунок).



Ответ: $[3; 4] \cup [5; 6)$. ◁

Задача 5 Решите неравенство $x^{\log_a x + 1} > a^2 x$.

Комментарий

На ОДЗ обе части неравенства положительны, поэтому попытаемся прологарифмировать обе его части. Поскольку в данное неравенство уже входит $\log_a x$, то удобно прологарифмировать по основанию a. Но при логарифмировании по основанию больше 1 знак неравенства не меняется, а при логарифмировании по основанию меньше 1 — меняется. Необходимо рассмотреть два случая (в каждом из них получаем неравенство, равносильное данному на его ОДЗ).

Решение

▶ ОДЗ: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Прологарифмируем обе части неравенства.

1) При $a > 1$ данное неравенство на его ОДЗ равносильно неравенствам:

$$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) > \log_a\left(a^2x\right),\ (\log_a x + 1)\log_a x > \log_a a^2 + \log_a x,$$

$$\log_a^2 x + \log_a x > 2 + \log_a x,\ \ \log_a^2 x > 2.$$

Таким образом, $\log_a x < -\sqrt{2}$ или $\log_a x > \sqrt{2}$, то есть $\log_a x < \log_a a^{-\sqrt{2}}$ или $\log_a x > \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Учитывая ОДЗ ($x > 0$) и то, что $a > 1$, получаем $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ или $x > a^{\sqrt{2}}$.

2) При $0 < a < 1$ данное неравенство на его ОДЗ равносильно неравенствам:

$$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) < \log_a\left(a^2x\right),\ (\log_a x + 1)\log_a x < \log_a a^2 + \log_a x,$$

$$\log_a^2 x + \log_a x < 2 + \log_a x,\ \ \log_a^2 x < 2.$$

Таким образом, $-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}$, то есть $\log_a a^{-\sqrt{2}} < \log_a x < \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Учитывая ОДЗ ($x > 0$) и то, что $0 < a < 1$, получаем $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

Ответ: 1) при $a > 1$ $x \in \left(0; a^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(a^{\sqrt{2}}; +\infty\right)$;

2) при $0 < a < 1$ $x \in \left(a^{\sqrt{2}}; a^{-\sqrt{2}}\right)$. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, какими способами можно решать показательно-степенные уравнения.
2. Объясните, почему при переходе от уравнения $x^{\lg x} = x^2$ к уравнению $\lg x = 2$ (основания равны — приравняли показатели) теряется корень данного уравнения.

Упражнения

1. Решите уравнение:

1) $x^{\lg x} = x^3$; 2) $x^{2\lg x} - 10x = 0$; 3) $x^{2\log_{16} x} = \dfrac{64}{\sqrt{x}}$; 4) $x^{\log_x (x^2-3)} = 2x$;

5) $x^{x+2} = x^6$: а) при $x > 0$; б) при $x \in \boldsymbol{R}$; 6) $|x-1|^{x^2-1} = 1$;

7) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3 (x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$; 8) $4^{\log_4^2 x} + x^{\log_4 x} = 8$;

9) $2x^{2\lg(x-1)} = 1 + (x-1)^{\lg x}$.

2. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50, \\ \log_{25} x + \log_{25} y = 1{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

3. Решите неравенство:

1) $(x^2 - x + 1)^{x^2-2{,}5x+1} < 1$; 2) $|x+1|^{x^2-2x} \geqslant |x+1|^3$;

3) $|x-2|^{\log_3 (x-2)} \leqslant |x-2|^{\log_3 (8-x)}$; 4) $x^{\log_a x + 4} < a^4 x$;

5) $x^{3+\log_a x} > a^2x^2$.

§ 20 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

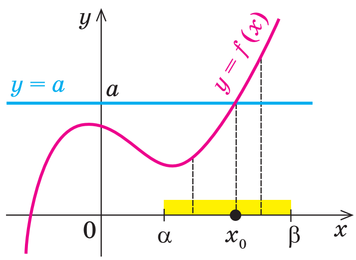
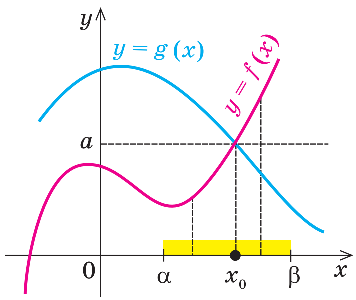
Некоторые показательные и логарифмические уравнения можно решить, используя свойства соответствующих функций. Напомним основные приемы, которые применяются при решении уравнений с помощью свойств функций, и приведем примеры решения уравнений и неравенств, содержащих показательные, логарифмические и другие функции.

Таблица 27

<table>
<tr><th>Ориентир</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td colspan="2">Конечная ОДЗ</td></tr>
<tr><td>Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.</td><td>$$2^{\sqrt{x-1}}+3^x=4^{1-\sqrt{2-2x}}.$$
► ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 2-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\leqslant 1. \end{cases}$
Итак, ОДЗ: $x = 1$.

Проверка. $x = 1$ — корень
$\left(2^{\sqrt{1-1}}+3^1=4^{1-\sqrt{2-2}},\ 4 = 4\right).$
Других корней нет, поскольку в ОДЗ входит только одно число.
Ответ: 1. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Оценка значений левой и правой частей уравнения</td></tr>
<tr><td>$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$
Если требуется решить уравнение вида $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ одновременно будут равны a.</td><td>$$2^{x^2}=\cos\frac{x}{2}.$$
► Оценим значения левой и правой частей данного уравнения:
$f(x)=2^{x^2}\geqslant 1$ (поскольку $x^2\geqslant 0$);
если $g(x)=\cos\frac{x}{2}$, то $-1\leqslant g(x)\leqslant 1$.
Итак, $f(x)\geqslant 1$, $g(x)\leqslant 1$. Тогда данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2^{x^2}=1, \\ \cos\frac{x}{2}=1. \end{cases}$
Из первого уравнения получаем $x^2=0$, то есть $x = 0$, что удовлетворяет и второму уравнению.
Ответ: 0. ◁</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 27

<table>
<tr><td colspan="2">3. Использование монотонности функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема решения уравнения
1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку значений левой и правой частей уравнения).</td></tr>
<tr><td></td><td>Теоремы о корнях уравнения</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.
Пример
Уравнение $2^x + 3^x = 5$ имеет единственный корень $x = 1$ ($2^1 + 3^1 = 5$, то есть $5 = 5$), поскольку функция $f(x) = 2^x + 3^x$ возрастает (на всей области определения $\boldsymbol{R}$) как сумма двух возрастающих функций.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ на некотором промежутке возрастает, а функция $g(x)$ — убывает (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.
Пример
Уравнение $5^x = 27 - x$ имеет единственный корень $x = 2$ ($5^2 = 27 - 2$, то есть $25 = 25$), так как $f(x) = 5^x$ возрастает, а $g(x) = 27 - x$ убывает (при всех $x \in \boldsymbol{R}$).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. «Ищи квадратный трехчлен»</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Попытайтесь рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно некоторой переменной (или некоторой функции).</td><td>$$4^x - (7 - x)\cdot 2^x + 12 - 4x = 0.$$
▶ Запишем $4^x = 2^{2x}$ и введем замену $2^x = t$. Получаем
$$t^2 - (7 - x)t + 12 - 4x = 0.$$
Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно t. Его дискриминант
$$D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$
Тогда $t_{1,2} = \frac{7 - x \pm (x + 1)}{2}$, то есть $t_1 = 4$, $t_2 = 3 - x$.</td></tr>
</table>

Окончание табл. 27

	Обратная замена дает $2^x = 4$ (отсюда $x = 2$) или $2^x = 3 - x$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x = 1$, так как $f(x) = 2^x$ возрастает, а $g(x) = 3 - x$ убывает (при всех $x \in \boldsymbol{R}$). *Ответ:* 1; 2. ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Решение

▶ Если $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{t}$. Получаем $t + \frac{1}{t} = 4$.

Отсюда $t^2 - 4t + 1 = 0$. Тогда

$$t_1 = 2-\sqrt{3},\quad t_2 = 2+\sqrt{3}.$$

Обратная замена дает

$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}$ (отсюда $x = 2$) или $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$ (отсюда $x = -2$).

Ответ: -2; 2. ◁

Комментарий

Замечаем, что

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$$

Таким образом, если $\sqrt{2-\sqrt{3}} = a$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{a}$, то есть данное уравнение имеет вид $a^x + \frac{1}{a^x} = 4$. Его можно решить с помощью замены $a^x = t$. Но теперь эту замену можно непосредственно применить для данного уравнения, не вводя промежуточные обозначения. После обратной замены учитываем, что

$$2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}.$$

Задача 2 Решите уравнение $4^x + \frac{1}{4^x} + 2^x - \frac{1}{2^x} - 4$.

Комментарий

Если привести все степени к одному основанию 2 и обозначить $2^x = t$, то получим уравнение (1) (см. решение), в котором можно ввести *замену* $t - \frac{1}{t} = u$ $\left(\text{тогда } u^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}, \text{ отсюда } t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 + 2\right)$. На ОДЗ данного уравнения ($x \in \boldsymbol{R}$) все замены и обратные замены являются равносильными преобразованиями этого уравнения. Таким образом, решив уравнения, полученные в результате замен, и выполнив обратные замены, мы получим корни данного уравнения.

Решение

$$2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}+2^x-\frac{1}{2^x}=4.$$

Замена $2^x = t$ дает уравнение

$$t^2+\frac{1}{t^2}+t-\frac{1}{t}=4. \qquad (1)$$

Обозначим $t-\frac{1}{t}=u$, тогда $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$, таким образом, из уравнения (1) получаем уравнение $u^2 + u - 2 = 0$, которое имеет корни: $u_1 = 1$, $u_2 = -2$.

Обратная замена дает $t-\frac{1}{t}=1$ или $t-\frac{1}{t}=-2$.

Тогда $t^2 - t - 1 = 0$ или $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Получаем $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $t_3=-1+\sqrt{2}$, $t_4=-1-\sqrt{2}$.

Тогда $2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (отсюда $x=\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) или $2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (корней нет, поскольку $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$), или $2^x=-1+\sqrt{2}$ (отсюда $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$), или $2^x=-1-\sqrt{2}$ (корней нет, так как $-1-\sqrt{2}<0$).

Ответ: $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_2(\sqrt{2}-1)$. ◁

Задача 3 Решите уравнение $4^x+\frac{1}{4^x}=2\cos 2x$.

I способ

Комментарий

Поскольку $4^x > 0$, получаем, что в левой части уравнения стоит *сумма двух взаимно обратных положительных чисел, которая всегда больше или равна* 2. (Действительно, если $a > 0$, то

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0,$$

следовательно, при всех $a > 0$ $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.)

Для оценки значений правой части достаточно вспомнить, что областью значений функции $\cos 2x$ является промежуток $[-1; 1]$, таким образом, $-2 \leqslant 2\cos 2x \leqslant 2$.

Решение

▶ Оценим значения левой и правой частей уравнения. $f(x)=4^x+\frac{1}{4^x}\geqslant 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных чисел. Если $g(x) = 2\cos 2x$, то $-2 \leqslant g(x) \leqslant 2$. Таким образом, $f(x) \geqslant 2$, $g(x) \leqslant 2$, тогда данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4^x + \dfrac{1}{4^x} = 2, \\ 2\cos 2x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения, используя *замену* $4^x = t$, получаем

$$t + \frac{1}{t} = 2, \text{ то есть } t^2 - 2t + 1 = 0. \text{ Отсюда } t = 1.$$

Тогда $4^x = 1$, отсюда $x = 0$, что удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: 0. ◁

II способ

Комментарий

Если обозначить $4^x = t$, то данное уравнение приводится к уравнению (2) (см. решение), которое можно рассматривать как квадратное относительно переменной t. Заметим, что $t = 4^x \neq 0$, поэтому при таких значениях t уравнения (1) и (2) равносильны. Далее используем условие существования корней квадратного уравнения.

Решение

▶ После *замены* $4^x = t$ $(t > 0)$ из данного уравнения получаем равносильное уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 2\cos 2x, \tag{1}$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$t^2 - (2\cos 2x)\,t + 1 = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение (2) как квадратное относительно переменной t. Тогда его дискриминант $D = 4\cos^2 2x - 4$. Уравнение (2) может иметь корни только тогда, когда $D \geqslant 0$, то есть когда

$$4\cos^2 2x - 4 \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\cos^2 2x \geqslant 1. \tag{3}$$

У этого неравенства знак «больше» не может выполняться ($\cos^2 2x \leqslant 1$ всегда), таким образом, неравенство (3) равносильно уравнению $\cos^2 2x = 1$. Тогда $\cos 2x = 1$ или $\cos 2x = -1$. Подставляя эти значения в уравнение (2), получаем две системы: $\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ t^2 + 2t + 1 = 0. \end{cases}$

Во второй системе из второго уравнения имеем $t = -1$, что не удовлетворяет условию $t > 0$. Таким образом, данное уравнение равносильно только первой системе. Из второго уравнения первой системы имеем $t = 1$, тогда $4^x = 1$, то есть $x = 0$, что удовлетворяет и первому уравнению этой системы.

Ответ: 0. ◁

Задача 4 Решите уравнение $2^{|x|} - \left|2^{x+1} - 2\right| = 2^{x+1}$.

Комментарий

Для решения уравнения с несколькими модулями можем применить общую схему, рассмотренную в 10 классе (см. также табл. 43 на с. 391):

1) найти ОДЗ;
2) найти нули всех подмодульных функций;
3) отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки;
4) найти решения уравнения в каждом из промежутков.

Решение

▶ ОДЗ: $\boldsymbol{R}$.

Нули подмодульных функций: $x = 0$ и $2^{x+1} - 2 = 0$, $2^{x+1} = 2$, $x + 1 = 1$, $x = 0$.

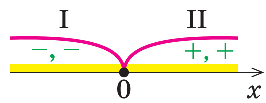


Рис. 20.1

Этот нуль ($x = 0$) разбивает ОДЗ на два промежутка, в каждом из которых каждая подмодульная функция имеет постоянный знак (рис. 20.1).

<u>Промежуток I.</u> При $x \in (-\infty; 0]$ имеем уравнение $2^{-x} + 2^{x+1} - 2 = 2^{x+1}$. Тогда $2^{-x} = 2$, таким образом, $x = -1 \in (-\infty; 0]$.

<u>Промежуток II.</u> При $x \in [0; +\infty)$ имеем уравнение $2^{x} - (2^{x+1} - 2) = 2^{x+1}$. Тогда $2^x = \frac{2}{3}$, отсюда $x = \log_2 \frac{2}{3}$. Но $\log_2 \frac{2}{3} < 0$, таким образом, в промежутке II данное уравнение корней не имеет.

Ответ: -1. ◁

Задача 5 Решите уравнение

$$\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1).$$

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1>0, \end{cases}$ то есть $x > 1$.

Поскольку $x = 2$ не является корнем данного уравнения, то при делении обеих частей уравнения на $\lg^2(x-1) \neq 0$ получаем равносильное (на ОДЗ при $x \neq 2$) уравнение

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)} = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} + 2.$$

После *замены* $t = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$ имеем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, корни которого: $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Комментарий

Если выполнить *замену* $\lg(x+1) = u$, $\lg(x-1) = v$, то получим *уравнение* $u^2 = uv + 2v^2$, *все члены которого имеют одинаковую суммарную степень* — два. Напомним, что такое уравнение *называется однородным и решается делением обеих частей на наибольшую степень одной из переменных*. Разделим, например, обе части на v^2 (то есть на $\lg^2(x-1)$).

Чтобы не потерять корни уравнения при делении на выражение с переменной, необходимо значения переменной, при которых это

Выполнив обратную замену, получаем

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1 \text{ или } \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2.$$

Тогда на ОДЗ (при $x \neq 2$) имеем равносильные уравнения:

$\lg(x+1) = -\lg(x-1)$ или $\lg(x+1) = 2\lg(x-1)$,

$\lg(x+1) = \lg(x-1)^{-1}$ или $\lg(x+1) = \lg(x-1)^2$,

$x+1=\frac{1}{x-1}$ или $x+1=(x-1)^2$,

$x^2-1=1$ или $x+1=x^2-2x+1$,

$x^2=2$ или $x^2-3x=0$,

$x=\pm\sqrt{2}$ или $x=0$, или $x=3$.

Учитывая ОДЗ, получаем

$x=\sqrt{2}$ или $x=3$.

Ответ: $\sqrt{2}$; 3. ◁

выражение равно нулю, рассмотреть отдельно. Значение x, при котором $\lg(x-1)=0$ (тогда $x-1=1$), то есть $x=2$, подставляем в данное уравнение.

Для реализации полученного плана решения не обязательно вводить переменные u и v, достаточно заметить, что данное уравнение однородное, разделить обе части на $\lg^2(x-1)$, а затем ввести новую переменную t.

В конце учитываем, что все преобразования были равносильными на ОДЗ, следовательно, необходимо выбирать только те из найденных корней, которые входят в ОДЗ.

Задача 6 Решите уравнение $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.$

Комментарий

Логарифмические функции, стоящие в левой части данного уравнения, принимают только неотрицательные значения.

Действительно, на всей области определения $1+\sqrt{x-2}\geqslant 1$, таким образом, $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$; аналогично, поскольку $1-\left|x^2-4\right|\leqslant 1$, на своей области определения $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$. *В этом случае сумма двух неотрицательных функций может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждая из этих функций равна нулю.*

Заметим, что при переходе от данного уравнения к системе уравнений ОДЗ не изменяется, таким образом, ее можно не записывать в явном виде. При решении полученных простейших логарифмических уравнений ОДЗ также учитывается автоматически, поэтому ее можно вообще не записывать в решение.

Решение

▶ Поскольку на всей области определения $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$ и $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)=0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $1+\sqrt{x-2}=2^0$. Тогда $\sqrt{x-2}=0$, то есть $x = 2$, что удовлетворяет и второму уравнению системы.

Ответ: 2. ◁

Задача 7 При каких значениях параметра a неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$ выполняется для любых значений x?

Комментарий

Сначала воспользуемся формулой $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Далее запишем правую часть неравенства как значение логарифмической функции и, переходя к аргументу, учтем, что в случае, когда основание этой функции больше 1, функция возрастает, а когда меньше 1 (но больше 0) — убывает.

При дальнейшем анализе полученных неравенств учитываем, что неравенство $\sin t > b$ выполняется для любых значений t тогда и только тогда, когда $b < -1$, а неравенство $\sin t < c$ — когда $c > 1$.

Решение

▶ Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}\right)>\log_{\frac{2a-15}{5}}1.$$

Это неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}\dfrac{2a-15}{5}>1,\\[2mm] \dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}0<\dfrac{2a-15}{5}<1,\\[2mm] 0<\dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}<1.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}a>10,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>5-\frac{a}{2}\end{cases}$ или $\begin{cases}7,5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<5-\frac{a}{2}.\end{cases}$

Неравенства с переменной x в последней совокупности систем будут выполняться для любых значений x при условии:

$$\begin{cases}a>10,\\ 5-\frac{a}{2}<-1\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}7,5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<-1,\\ 5-\frac{a}{2}>1,\end{cases} \quad\text{то есть}\quad \begin{cases}a>10,\\ a>12\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}7,5<a<10,\\ a>7,\\ a<8.\end{cases}$$

Тогда $a > 12$ или $7{,}5 < a < 8$.

Ответ: при любом $a \in (7{,}5;\ 8) \cup (12;\ +\infty)$. ◁

Задача 8 При каких значениях параметра a уравнение $\log_2 (4^x - a) = x$ имеет единственный корень?

Комментарий

Выполняя равносильные преобразования данного уравнения, учитываем, что при использовании определения логарифма для решения этого простейшего логарифмического уравнения его ОДЗ учитывается автоматически.

При выполнении замены переменной в задании с параметром учитываем, что после замены требование задачи может измениться.

Исследуя расположение корней квадратного трехчлена $f(t) = t^2 - t - a$, применим условия, приведенные в учебнике для 10 класса (для записи соответствующих условий используем обозначения: D — дискриминант, t_0 — абсцисса вершины параболы). Как известно, *для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(t)$ (с положительным коэффициентом при t^2) были расположены по разные стороны от числа A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(A) < 0$.*

Решение

▶ Данное уравнение равносильно уравнению

$$4^x - a = 2^x, \tag{1}$$

то есть $2^{2x} - a = 2^x$. *Замена* $2^x = t$ $(t > 0)$ дает уравнение

$$t^2 - t - a = 0. \tag{2}$$

Требование задачи будет выполняться тогда и только тогда, когда уравнение (2) будет иметь единственный положительный корень. Это будет в одном из двух случаев:

1) уравнение (2) имеет единственный корень, и он положительный;
2) уравнение (2) имеет два корня, из которых только один положительный, а второй — отрицательный или нуль.

Для первого случая получаем $\begin{cases} D = 0, \\ t_0 > 0, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} 1 + 4a = 0, \\ t_0 = \dfrac{1}{2} > 0. \end{cases}$

Таким образом, $a = -\dfrac{1}{4}$.

Для второго случая значение $t = 0$ исследуем отдельно.

При $t = 0$ из уравнения (2) получаем $a = 0$. При $a = 0$ уравнение (2) имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Таким образом, условие задачи при $a = 0$ выполняется.

Остается еще один случай — корни уравнения (2) имеют разные знаки (расположены по разные стороны от нуля). Это будет тогда и только тогда, когда будет выполняться условие $f(0) < 0$ (где $f(t) = t^2 - t - a$), то есть условие $-a<0$, тогда $a>0$. Объединяя все результаты, получаем ответ.

Ответ: при $a=-\frac{1}{4}$ или $a \geqslant 0$ уравнение имеет единственный корень. ◁

Вопрос для контроля

Объясните на примерах, как можно применить свойства функций к решению показательных и логарифмических уравнений.

Упражнения

Решите уравнение **(1–5)**.

1. 1) $2^{2x}=5-x$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$; 3) $3^x+4^x=5^x$; 4) $2^x+2^{-x}=2\cos\frac{x}{3}$;
5) $\log_3(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}x+4$; 6) $\log_2(3^x+4)=2-5^x$; 7) $\log_2|x|=5-x^2$;
8) $\log_2(1+x^2)=\log_2 x+2x-x^2$; 9) $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$.

2. 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$;
3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

3. 1) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$;
2) $x^2+(x-3)\log_2 x=4x-3$;
3) $2\lg^2(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\lg(2x+1)$.

4. 1) $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$; 2) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}}x\right|+3=|1+\log_5 x|$.

5. 1) $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$; 2) $\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+1}=2^x-a$.

6. Решите систему уравнений:
1) $\begin{cases} x+2^x=y+2^y, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=y-x, \\ x^3+y^3=54. \end{cases}$

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4^x+a\cdot 2^{x+1}-a=0$ не имеет корней.

8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a\cdot 9^x+4(a-1)\cdot 3^x+a>1$ выполняется при всех x.

9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3^x+3^{-x}=2\cos x+a+4$ имеет единственный корень.

10. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_3(9^x+a)=x$ имеет единственный корень.

11. Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения $|\lg x|=-(x-1)^2+a$.

12. Сколько корней имеет уравнение $(\log_2(x+1)-3)\sqrt{x-a}=0$ в зависимости от значения параметра a?

13. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \lg(4+y)=\lg x, \\ a-y=\frac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases}$ имеет решения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 2

Вычислите **(1–4)**.

1. 1) $10\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$; 2) $9^{\log_{16}2+\log_3\sqrt{5}}$; 3) $81^{0,5\log_9 7}$; 4) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. 1) $\sqrt[4]{25^{-3\log_{\sqrt{5}}0,1}}+64^{\log_4 5}$; 2) $(15+3^{1+\log_3 4})\log_2\sqrt{3}\log_3 4$;

3. 1) $\dfrac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3$; 2) $\log_2 27-2\log_2 3+\log_2\dfrac{2}{3}$.

4. 1) $20^{\frac{1}{2\log_{81}5}}\cdot(0,25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;

5. 1) Найдите $\log_{b^{-\frac{1}{4}}}\left(\dfrac{a^4}{b^6}\right)$, если $\log_a b=-5$.

2) Найдите $\log_{b^5}(a^5b^5)$, если $\log_a b=5$.

3) Найдите $\log_{b^6}(a^6b^6)$, если $\log_a b=6$.

6. 1) Найдите $\log_4 20$, если $\lg 2=a$.

2) Найдите $\log_{70}32$, если $\log_{70}5=a$, $\log_{70}7=b$.

Сравните значения данных числовых выражений **(7, 8)**.

7. 1) $\log_{0,5}\dfrac{7}{4}$ и $\log_{0,125}\dfrac{7}{164}$; 2) $\sqrt{15}$ и $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)\cdot 2\log_{27}3}$.

8. 1) $7^{\log_5 2}-0,1$ и $2^{\log_5 7}$; 2) $5^{\log_3 7}+0,1$ и $7^{\log_3 5}$; 3) $2^{\log_7 3}+0,1$ и $3^{\log_7 2}$.

Найдите область определения функции **(9, 10)**.

9. 1) $y=\sqrt{\log_2(x^2-2x-2)}$; 2) $y=\sqrt{\log_4(x^2-4x-4)}$;

3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}$;

4) $y=\sqrt{1-\log_4(x^2-3x)}$.

10. 1) $f(x)=\sqrt{2\cdot 3^{1-x}+1-3^x}$; 2) $f(x)=\lg\left((1,25)^{1-x^2}-(0,4096)^{1+x}\right)$;

3) $f(x)=\sqrt{27^x-9^{x^2+0,5}}$; 4) $f(x)=\sqrt{(4-x)(3^x-9)}$.

11. Найдите множество значений функции:

1) $y=\log_{0,1}\left(\dfrac{300}{1+\lg(100+x^2)}\right)$; 2) $y=\log_{0,5}\left(\dfrac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}\right)$;

Решите уравнение **(12, 13).**

12. 1) $2^{5x-1}\cdot 3^{4x+1}\cdot 7^{3x+3}=504^{x-2}$; 2) $2^{9x+9}\cdot 3^{7x+3}\cdot 5^{6x}=720^{x+3}$;
3) $2^{13-x}\cdot 3^{11-2x}\cdot 5^{9-3x}=360^{x+2}$; 4) $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

13. 1) $3\log_6\left(3-\dfrac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)+3$;

2) $\sqrt{33+\dfrac{8}{\log_x 4}}=3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$; 3) $\sqrt{7-\dfrac{1}{\log_x 4}}=2\log_4\left(0{,}5\sqrt{x}\right)$.

14. При каких значениях a выражение $\left(1-|x|\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ при всех допустимых значениях x?

15. При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

16. При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

17. При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right)+\log_7 a}$ при всех допустимых значениях x?

18. При каких значениях a выражение $(1-2^x)^{\log_2(1-2^x)-2^a}$ больше выражения $0{,}5^{3-\sqrt{a}-\log_4\left(1+4^x-2^{x+1}\right)}$ при всех допустимых значениях x?

19. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\lg\left(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{18}\right)$ содержит только одно целое число.

20. Из области определения функции $y=\log_3\left(a^a-a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

21. Найдите все значения a, при которых функция
$f(x)=a\cdot 8^x-(3a-2)\cdot 4^x+3(3a-2)\cdot 2^x$ не имеет экстремумов.

22. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю OP, где точка O — начало координат, а P — точка на графике функции $y=49xe^{2-7x}+\dfrac{9}{x}$ и $0{,}2\leqslant x\leqslant 1$.

23. Найдите наибольшее значение площади треугольника OPK, где O — начало координат, а P — точка на графике функции $y=\dfrac{5}{x}+64x^5e^{6-4x}$, $0{,}7\leqslant x\leqslant 2$, а K — точка на оси Ox, абсцисса которой равна абсциссе точки P.

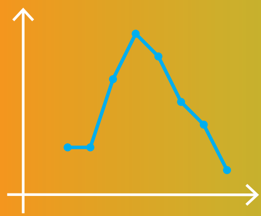
СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Понятие показательной функции было введено, опираясь на степенную функцию с рациональным показателем, которая имеет давнюю историю. В частности, дробные показатели степени и простейшие правила действий над степенями с дробными показателями встречаются в XIV в. у французского математика Н. Орема (ок. 1323—1382). Известно, что Н. Шюке (ок. 1445—ок. 1500) рассматривал степени с отрицательными и нулевым показателями. С. Стевин предложил понимать под $a^{\frac{1}{n}}$ корень $\sqrt[n]{a}$. Однако систематически дробные и отрицательные показатели первым стал применять И. Ньютон (1643—1727).

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) ввел обозначение $a^0=1$, если $a \neq 0$, и название *показатель* (это перевод с немецкого *Exponent*). Немецкое potenzieren означает *возвести в степень.* (Отсюда происходит и слово *потенцировать,* которое применяется для обозначения переходов от логарифмов (log) выражений $f(x)$ и $g(x)$ к соответствующим степеням, то есть от равенства $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к равенству $a^{\log_a f(x)}=a^{\log_a g(x)}$. В свою очередь, термин *exponenten* возник вследствие не совсем точного перевода с греческого слова, которым Диофант Александрийский (около III в.) обозначал квадрат неизвестной величины.

Термин *логарифм* происходит от сочетания греческих слов «логос» (в значении «отношение») и «аритмос» (число) и переводится как *отношение чисел.* Выбор изобретателем логарифмов Дж. Непером такого названия (1594 г.) поясняется тем, что логарифмы возникли вследствие сопоставления двух чисел, одно из которых является членом арифметической прогрессии, а второе — геометрической. Логарифмы по основанию e ввел Спейдел (1619 г.), который составил первые таблицы для функции $\ln x$. Название *натуральный* (естественный) для этого логарифма предложил Н. Меркатор (1620—1687), который выяснил, что $\ln x$ — это площадь под гиперболой $y=\frac{1}{x}$.

Близкое к современному пониманию понятие логарифмирования — как операции, обратной возведению в степень, — впервые появилось в работах Дж. Валлиса и И. Бернулли, а окончательно было уточнено Л. Эйлером в XVIII в. В книге «Введение в анализ бесконечных» (1748) Ейлер дал современное определение как показательной, так и логарифмической функций и привел их разложение в степенные ряды, отметил особую роль натурального логарифма.



Раздел 3
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

§ 21 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И БИНОМ НЬЮТОНА

21.1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Таблица 28

<table>
<tr><th colspan="2">Комбинаторика</th></tr>
<tr><td colspan="2">Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются способы выбора и размещения элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий. Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называются соединениями.
Если все элементы полученного множества разные, получаем соединения без повторений, а если элементы повторяются — соединения с повторениями*.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Перестановки</th></tr>
<tr><td colspan="2">Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество из n данных элементов.
Иными словами, это такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой — на втором, ..., какой — на n-м.</td></tr>
<tr><th>Формула числа перестановок (P_n)</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>$(P_n) = n!$,
где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
(читается: «эн факториал»)</td><td>Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторяя эти цифры в одном числе, равно $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Размещения</th></tr>
<tr><td colspan="2">Размещением из n элементов по k называется любое упорядоченное множество из k элементов, состоящее из элементов данного n-элементного множества.</td></tr>
</table>

* Формулы для нахождения количества соединений с повторениями обязательны только для классов физико-математического профиля.

Продолжение табл. 28

<table>
<tr><td>Формула
числа размещений $\left(A_n^k\right)$</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$</td><td>Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться, равно
$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сочетания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сочетанием без повторений из n элементов по k называется любое k-элементное подмножество данного n-элементного множества.</td></tr>
<tr><td>Формула
числа сочетаний $\left(C_n^k\right)$</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
(по определению считают, что $C_n^0 = 1$)</td><td>Из 25 учащихся одного класса можно выделить пятерых для дежурства по школе C_{25}^5 способами, то есть
$$C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$$
способами.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Некоторые свойства числа сочетаний без повторений</td></tr>
<tr><td>$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
(в частности, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)</td><td>$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема поиска плана решения простейших комбинаторных задач</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выбор правила</td></tr>
<tr><td>Правило суммы</td><td>Правило произведения</td></tr>
<tr><td>Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами (при этом выбор элемента A исключает одновременный выбор элемента B), то A или B можно выбрать $m + n$ способами.</td><td>Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.</td></tr>
</table>

Окончание табл. 28

Выбор формулы

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Да — Все ли элементы входят в соединение?

Да — Перестановки; Нет — Размещения

Нет — Сочетания

Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

21.1.1. Правила суммы и произведения. Упорядоченные множества. Размещения

Объяснение и обоснование

1. Понятие соединения. Правило суммы и произведения. При решении многих практических задач приходится выбирать из определенной совокупности объектов элементы, имеющие те или иные свойства, размещать их в определенном порядке и т. д. Поскольку в этих задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то такие задачи называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором рассматриваются методы решения комбинаторных задач, называется *комбинаторикой*. В комбинаторике рассматривается выбор и размещение элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий.

Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называют *соединениями*. Если все элементы полученного множества разные, получаем размещения без повторений, а если элементы могут повторяться — размещения с повторениями. В этом параграфе мы рассмотрим соединения без повторений.

Решение многих комбинаторных задач базируется на двух основных правилах — правиле суммы и правиле произведения.

Правило суммы. Если на тарелке лежат 5 груш и 4 яблока, то выбрать один фрукт (грушу или яблоко) можно 9 способами ($5 + 4 = 9$). В общем виде справедливо такое утверждение:

если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами (при этом выбор элемента A исключает одновременный выбор элемента B), ***то A или B можно выбрать $m + n$ способами.***

Уточним содержание этого правила, используя понятие множеств и операций над ними.

Пусть множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов. Если множества A и B не пересекаются (то есть $A \cap B = \varnothing$), то множество $A \cup B$ состоит из $m + n$ элементов.

Правило произведения. Если в киоске продают ручки 5 видов и тетради 4 видов, то выбрать набор из ручки и тетради (то есть пару — ручка и тетрадь) можно $5 \cdot 4 = 20$ способами (поскольку с каждой из 5 ручек можно взять любую из 4 тетрадей). В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать m · n способами.

Это утверждение означает, что если для каждого из m элементов A можно взять в пару любой из n элементов B, то количество пар равно произведению $m \cdot n$.

В терминах множеств полученный результат можно сформулировать следующим образом. Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов, то множество всех упорядоченных пар* $(a; b)$, где первый элемент принадлежит множеству A $(a \in A)$, а второй — множеству B $(b \in B)$, состоит из $m \cdot n$ элементов.

Повторяя приведенные рассуждения несколько раз (или, более строго, используя метод математической индукции), получаем, что правила суммы и произведения можно применять при выборе произвольного конечного количества элементов.

2. Упорядоченные множества. При решении комбинаторных задач приходится рассматривать не только множества, в которых элементы можно записывать в любом порядке, но и так называемые *упорядоченные множества*. Для упорядоченных множеств существенным является порядок следования их элементов, то есть то, какой элемент записан на первом месте, какой на втором и т. д. В частности, если одни и те же элементы записать в разном порядке, то мы получим различные упорядоченные множества. Чтобы различить записи упорядоченного и неупорядоченного множеств, элементы упорядоченного множества часто записывают в круглых скобках, например $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$.

Рассматривая упорядоченные множества, следует учитывать, что одно и то же множество можно упорядочить по-разному. Например, множество из трех чисел $\{-5; 1; 3\}$ можно упорядочить по возрастанию: $(-5; 1; 3)$, по убыванию: $(3; 1; -5)$, по возрастанию абсолютной величины числа: $(1; 3; -5)$ и т. д.

---

* Множество всех упорядоченных пар $(a; b)$, где первый элемент принадлежит множеству A $(a \in A)$, а второй — множеству B $(b \in B)$, называют *декартовым произведением множеств* A и B и обозначают $A \times B$. Отметим, что декартово произведение $B \times A$ также состоит из $m \cdot n$ элементов.

Заметим следующее: *для того чтобы задать конечное упорядоченное множество из n элементов, достаточно указать, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на n-м.*

3. Размещения

Размещением из n элементов по k **называется любое упорядоченное множество из k элементов, состоящее из элементов заданного n-элементного множества.**

Например, из множества, содержащего три цифры {1; 5; 7}, можно составить следующие размещения из двух элементов без повторений:

(1; 5), (1; 7), (5; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).

Количество размещений из n элементов по k обозначается A_n^k (читается: «A из n по k», A — первая буква французского слова *arrangement*, что означает «размещение, приведение в порядок»). Как видим, $A_3^2 = 6$.

Выясним, сколько всего можно составить размещений из n элементов по k без повторений. Составление размещения представим себе как последовательное заполнение k мест, которые будем изображать в виде клеточек (рис. 21.1). На первое место можем выбрать один из n элементов данного множества (то есть элемент для первой клеточки можно выбрать n способами).

Если элементы нельзя повторять, то на второе место можно выбрать только один элемент из оставшихся, то есть из $n - 1$ элементов. Теперь уже два элемента использованы и на третье место можно выбрать только один из $n - 2$ элементов и т. д. На k-е место можно выбрать только один из $n - (k - 1) = n - k + 1$ элементов (см. рис. 21.1).

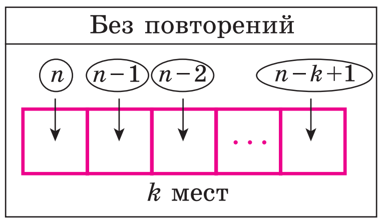


Рис. 21.1

Поскольку требуется выбрать элементы и на первое место, и на второе, ..., и на k-е, то используем правило произведения и получим следующую **формулу числа размещений из n элементов по k:**

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}}.$$

Например, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

Аналогично можно обосновать формулу для нахождения числа размещений с повторениями.

При решении простейших комбинаторных задач важно правильно выбрать формулу, по которой будут проводиться вычисления. Для этого нужно выяснить следующее:

1. *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*
2. *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?*

Если, например, порядок следования элементов учитывается и из n данных элементов в соединении используется только k элементов, то по определению это — размещение из n элементов по k.

После определения вида соединения следует также выяснить, *могут ли элементы в соединении повторяться*, то есть выяснить, какую формулу необходимо использовать — для количества соединений без повторений или с повторениями.

Примеры решения задач

Задача 1 На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение	*Комментарий*
▶ Количество способов выбрать из 12 спортсменок четырех для участия в эстафете равно количеству размещений из 12 элементов по 4 (без повторений), то есть $A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$. ◁	Для выбора формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку для спортсменок важно, в каком порядке они будут бежать, то порядок при выборе элементов учитывается. В полученное соединение входят не все 12 заданных элементов. Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 12 элементов по 4 (без повторений, поскольку каждая спортсменка может бежать только на одном этапе эстафеты).

Задача 2 Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе не повторяются.

Решение	*Комментарий*
▶ Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. ◁	Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования цифр учитывается и не все элементы выбираются (только 3 из заданных семи). Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 7 элементов по 3 (без повторений).

Задача 3* Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, если цифры в числе не повторяются.

Комментарий

Выбор формулы проводится таким же образом, как и в задаче 2. Следует учесть, что если число, составленное из трех цифр, начинается цифрой 0, то оно не считается трехзначным. Следовательно, для ответа на вопрос задачи можно сначала из заданных 7 цифр записать все числа, состоящие из 3 цифр (см. задачу 2). Затем из количества полученных чисел вычесть количество чисел, составленных из трех цифр, но начинающихся цифрой 0. В последнем случае мы фактически будем из всех цифр без нуля (их 6) составлять двузначные числа. Тогда их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2 (см. решение).

Можно выполнить также непосредственное вычисление, последовательно заполняя три места в трехзначном числе и используя правило произведения. В этом случае для наглядности удобно изображать соответствующие разряды в трехзначном числе в виде клеточек, например так:

6 возможностей	6 возможностей	5 возможностей

Решение

▶Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр (среди которых нет цифры 0), если цифры в числе не повторяются, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть A_7^3.

Но среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 необходимо исключить те размещения, в которых первым элементом является цифра 0. Их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2, то есть A_6^2. Следовательно, искомое количество трехзначных чисел равно

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180. \ \triangleleft$$

Задача 4 Решите уравнение $\dfrac{A_x^4}{A_x^2} = 6.$

Решение	*Комментарий*
▶ОДЗ: $x \in N$, $x \geqslant 4$. Тогда получаем: $\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)} = 6.$ На ОДЗ это уравнение равносильно уравнениям: $(x-2)(x-3) = 6,$ $x^2 - 5x = 0,$ $x(x-5) = 0.$	*Уравнения, в запись которых входят выражения, обозначающие количество соответствующих соединений из x элементов, считаются определенными только при натуральных значениях переменной x.* Чтобы выражение A_x^4 имело смысл, следует выбирать нату-

Тогда $x = 0$ или $x = 5$.
В ОДЗ входит только $x = 5$.

Ответ: 5. ◁

ральные значения $x \geqslant 4$ (в этом случае A_x^2 также существует и, конечно, $A_x^2 \neq 0$).

Для преобразования уравнения используем формулы:

$$A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$A_x^2 = x(x-1).$$

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте и объясните на примерах правило суммы и правило произведения для решения комбинаторных задач.
2. Объясните, какое конечное множество считается упорядоченным. Приведите примеры упорядоченных конечных множеств.
3. Объясните, что называется размещением из n элементов по k без повторений. Приведите примеры.
4. Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k без повторений. Приведите примеры ее использования.
5*. Обоснуйте формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k без повторений.

Упражнения

1°. Имеем 4 разных конверта без марок и 3 разные марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправления письма?

2°. В коробке находится 10 белых и 6 черных шаров.
1) Сколькими способами из коробки можно вынуть один шар любого цвета?
2) Сколькими способами из коробки можно вынуть два шара разного цвета?

3. В корзине лежат 12 яблок и 9 апельсинов (все разные). Петя выбирает или яблоко, или апельсин, после него из оставшихся фруктов Надя выбирает яблоко и апельсин. Сколько возможно таких выборов? При каком выборе Пети у Нади больше возможностей выбора?

4*. Ученику необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами может быть составлено расписание его экзаменов (если в один день он может сдавать только один экзамен)?

5*. Сколькими способами может расположиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

6. Из 30 участников собрания необходимо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

7. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м (предположительно, все они покажут разное время)?

8. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг из трех горизонтальных полос, если имеется ткань 7 разных цветов?

9. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?

10. На плоскости отметили 5 точек. Необходимо обозначить их латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать, если в латинском алфавите 26 букв?

11. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в числе не повторяются?

12*. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8, если цифры в числе не повторяются?

13. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные и первая цифра отлична от нуля?

14*. Сколько разных трехзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы полученные числа были: 1) четными; 2) кратными 5?

15*. Решите уравнение: 1) $A_x^2 = 20$; 2) $\frac{A_x^5}{A_x^3} = 6$.

21.1.2. Перестановки

Объяснение и обоснование

***Перестановкой из n элементов* называется любое упорядоченное множество из *n* заданных элементов.**

Напомним, что упорядоченное множество — это *такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на n-м*.

Например, переставляя цифры в числе 236 (в котором множество цифр {2; 3; 6} уже упорядоченное), можно составить такие *перестановки без повторений*: (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2) — всего 6 перестановок*.

Количество перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Как видим, $P_3 = 6$.

Фактически перестановки без повторений из n элементов являются размещениями из n элементов по n без повторений, поэтому $P_n = A_n^n = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ множителей}}$. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначается $n!$. Поэтому полученная **формула числа перестановок без повторений из *n* элементов** может быть записана следующим образом:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

* Отметим, что каждая из перестановок определяет трехзначное число, составленное из цифр 2, 3, 6 таким образом, что цифры в числе не повторяются.

Например, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

С помощью факториалов формулу для числа размещений без повторений

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}} \qquad (1)$$

запишем в другом виде. Для этого умножим и разделим выражение в формуле (1) на произведение $(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-k)!$, тогда $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Следовательно, **формула числа размещений без повторений из n элементов по k** может быть записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Для того чтобы этой формулой можно было пользоваться при всех значениях k, в частности при $k = n-1$ и $k = n$, договорились считать, что

$1! = 1$ и $0! = 1$.

Например, по формуле (2) $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720.$

Обратим внимание, что в тех случаях, когда значение $n!$ оказывается очень большим, ответы оставляют записанными с помощью факториалов. Например, $A_{30}^{25} = \frac{30!}{(30-25)!} = \frac{30!}{5!}.$

Примеры решения задач

Для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно выяснить следующее:

1. *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*
2. *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение*?

Если, например, порядок следования элементов учитывается и все n заданных элементов используются в соединении, то по определению это перестановки из n элементов.

Задача 1 Найдите, сколькими способами можно восемь учащихся построить в колонну по одному.

Решение	*Комментарий*
▶ Количество способов равно числу перестановок из 8 элементов, то есть $P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40\,320$. ◁	Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов учитывается и все 8 заданных элементов выбираются, то искомые соеди-

нения — это перестановки из 8 элементов без повторений. Их количество можно вычислить по формуле
$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Задача 2 Найдите количество различных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 3, 7, 9 (цифры в числе не повторяются).

Решение	*Комментарий*
▶Из четырех цифр 0, 3, 7, 9, не повторяя заданные цифры, можно получить P_4 перестановок. Перестановки, начинающиеся с цифры 0, не являются записью четырехзначного числа — их количество P_3. Тогда искомое количество четырехзначных чисел равно $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18$. ◁	Поскольку порядок следования элементов учитывается и для получения четырехзначного числа надо использовать все элементы, то искомые соединения — это перестановки из 4 элементов. Их количество — P_4. При этом необходимо учесть, что в четырехзначном числе на первом месте не может стоять цифра 0. Таких чисел будет столько, сколько раз мы сможем выполнить перестановки из 3 оставшихся цифр, то есть P_3.

Задача 3* Имеется десять книг, из которых четыре — учебники. Сколькими способами можно поставить эти книги на полку так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение	*Комментарий*
▶ Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 10, а 7 книг. Это можно сделать P_7 способами. В каждом из полученных наборов книг можно выполнить еще P_4 перестановок учебников. По правилу умножения искомое количество способов равно $P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 24 = 120\,960$. ◁	Задачу можно решать в два этапа. На первом будем условно считать все учебники одной книгой. Тогда получим 7 книг (6 не учебников + 1 условная книга — учебник). Порядок следования элементов учитывается и используются все элементы (поставить на полку необходимо все книги). Следовательно, соответствующие соединения — это перестановки из 7 элементов. Их количество — P_7. На втором этапе решения будем переставлять между собой только учебники. Это можно сделать P_4 спо-

собами. Поскольку нам надо переставить и учебники, и другие книги, то используем правило произведения.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется перестановкой из n элементов без повторений. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов без повторений. Приведите примеры ее использования.
3*. Обоснуйте формулу для вычисления числа перестановок из n элементов без повторений.

Упражнения

1. Сколькими способами 4 мужчин могут расположиться на четырехместной скамейке?

2. Курьер должен разнести пакеты в 7 разных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

3. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $abcde$, которые получаются из него перестановкой множителей?

4. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге (если она помнит все остальные цифры номера).

5. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр:
1) 1, 2, 5, 6, 7, 8; 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

6. Сколько среди четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, 9 (без повторения цифр), есть таких, которые:
1) начинаются с цифры 3; 2) кратны 5?

7. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 (без повторения цифр в числе).

8. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, иностранный язык, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли подряд?

9. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг — это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом в случайном порядке?

10. В театре в одном ряду могут занять места с 1 по 10 пять мальчиков и пять девочек. Сколькими способами дети могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки — на четных?

21.1.3. Сочетания

Объяснение и обоснование

1. Сочетания без повторений

***Сочетанием без повторений из n элементов по k* называется любое *k*-элементное подмножество заданного *n*-элементного множества.**

Например, из множества $\{a, b, c, d\}$ можно составить следующие сочетания без повторений из трех элементов: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Количество сочетаний без повторений из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «це из n по k», C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание). Как видим, $C_4^3 = 4$.

- Выясним, сколько всего можно составить сочетаний без повторений из n элементов по k. Для этого используем известные нам формулы числа размещений и перестановок.

Составление размещения без повторений из n элементов по k проведем в два этапа. Сначала выберем k разных элементов из заданного n-элементного множества, не учитывая порядок выбора этих элементов (то есть выберем k-элементное подмножество из n-элементного множества — сочетание без повторений из n-элементов по k). По нашему обозначению это можно сделать C_n^k способами. После этого полученное множество из k разных элементов упорядочим. Его можно упорядочить $P_k = k!$ способами. Получим размещения без повторений из n элементов по k. Следовательно, количество размещений без повторений из n элементов по k в $k!$ раз больше числа сочетаний без повторений из n элементов по k, то есть $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$.

Учитывая, что по формуле (2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, получаем:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Например, $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = 4$, что совпадает со значением, полученным выше.

Используя формулу (3), можно легко обосновать *свойство* 1 *числа сочетаний без повторений*, приведенное в табл. 28.

- 1) Поскольку $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для того чтобы формулу (4) можно было использовать и при $k = n$, договорились считать, что $C_n^0 = 1$. Тогда $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Заметим, что формулу (4) можно получить без вычислений с помощью достаточно простых комбинаторных рассуждений.

Когда мы выбираем k предметов из n, то $n - k$ предметов мы оставляем. Если же, напротив, выбранные предметы оставим, а другие $n - k$ — выберем, то получим способ выбора $n - k$ предметов из n. Мы получили *взаимно-однозначное соответствие* способов выбора k и $n - k$ предметов из n. Значит, количество одних и других способов одинаково. Но количество одних — C_n^k, а других — C_n^{n-k}, поэтому $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Если в формуле (3) сократить числитель и знаменатель на $(n - k)!$, то получим формулу, по которой удобно вычислять C_n^k при малых значениях k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ множителей}}}. \quad (5)$$

Например, $C_{25}^2 = \dfrac{\overbrace{25 \cdot 24}^{2 \text{ множителя}}}{1 \cdot 2} = 25 \cdot 12 = 300$, $C_8^3 = \dfrac{\overbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}^{3 \text{ множителя}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56$.

2. Вычисление числа сочетаний без повторений с помощью треугольника Паскаля. Для вычисления числа сочетаний без повторений можно применять формулу (3): $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, а можно последовательно вычислять соответствующие значения, пользуясь следующим свойством:

$$\boldsymbol{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}. \quad (6)$$

● Для обоснования равенства (6) можно записать сумму $C_n^k + C_n^{k+1}$, используя формулу (3), и после приведения полученных дробей к общему знаменателю получить формулу для правой части равенства (6) (проделайте это самостоятельно).

Также формулу (6) можно получить без вычислений с помощью комбинаторных рассуждений.

C_{n+1}^{k+1} — это количество способов выбрать $k + 1$ предмет из $n + 1$. Подсчитаем это количество, зафиксировав один предмет (назовем его «фиксированным»). Если мы не берем фиксированный предмет, то нам нужно выбрать $k + 1$ предмет из n тех, что остались, а если мы его берем, то нужно выбрать из n тех, что остались, еще k предметов. Первое можно сделать C_n^{k+1} способами, второе — C_n^k способами. Всего как раз $C_n^k + C_n^{k+1}$ способов, следовательно,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \quad ○$$

Это равенство позволяет последовательно вычислять значения C_n^k с помощью специальной таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*. Если считать, что $C_0^0 = 1$, то он будет иметь вид, представленный в табл. 29.

Таблица 29

Значення C_n^k

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…			•	•	•			
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	…

Каждая строка этой таблицы начинается с единицы и заканчивается единицей $\left(C_n^0 = C_n^n = 1\right)$.

Если какая-либо строка уже заполнена, например третья, то в четвертой строке надо записать на первом месте единицу. На втором месте запишем число, равное сумме двух чисел третьей строки, стоящих над ним левее и правее (поскольку по формуле (6) $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 1 + 3 = 4$). На третьем месте запишем число, равное сумме двух следующих чисел третьей строки, стоящих над ним левее и правее $\left(C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6\right)$, и т. д. (а на последнем месте снова запишем единицу).

Примеры решения задач

Обратим внимание, что, как и раньше, для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно ответить на вопросы:

1. *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*
2. *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?*

Чтобы выяснить, является ли заданное соединение сочетанием, достаточно ответить только на первый вопрос (см. схему в табл. 28). Если порядок следования элементов не учитывается, то по определению это сочетание из n элементов по k элементов.

Задача 1 Из 12 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение	*Комментарий*
▶ Количество способов выбрать из 12 туристов трех дежурных равно количеству сочетаний из 12 элементов по 3 (без повторений), то есть $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$ ◁	Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов не учитывается (для дежурных неважно, в каком порядке их выберут), то соответствующее соединение является сочетанием из 12 элементов по 3 (без повторений). Для вычисления можно использовать формулы (3) или (5), в данном случае применяем формулу (3): $\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}.$

Задача 2 Из вазы с фруктами, в которой лежат 10 разных яблок и 5 разных груш, требуется выбрать 2 яблока и 3 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Решение	*Комментарий*
▶ Выбрать 2 яблока из 10 можно C_{10}^2 способами. При каждом выборе яблок груши можно выбрать C_5^3 способами. Тогда по правилу произведения выбор требуемых фруктов можно выполнить $C_{10}^2\cdot C_5^3$ способами. Получаем $C_{10}^2\cdot C_5^3 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 450.$ ◁	Сначала отдельно выберем 2 яблока из 10 и 3 груши из 5. Поскольку при выборе яблок или груш порядок следования элементов не учитывается, то соответствующие соединения — сочетания без повторений. Учитывая, что требуется выбрать 2 яблока и 3 груши, используем правило произведения и перемножим полученные возможности выбора яблок $\left(C_{10}^2\right)$ и груш $\left(C_5^3\right)$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется сочетаниями из n элементов по k без повторений. Приведите примеры.
2. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k без повторений. Приведите примеры ее использования.
3*. Обоснуйте формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по k без повторений.
4*. Обоснуйте свойство $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
5*. Объясните, как можно последовательно вычислять значение C_n^k с помощью специальной таблицы — треугольника Паскаля.
6. Объясните на примерах, как можно выбрать соответствующую формулу при решении простейших комбинаторных задач.

Упражнения

1°. В классе 7 учащихся успешно занимаются математикой. Сколькими способами из них можно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде?

2°. В магазине «Филателия» продается 8 разных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

3°. Ученикам дали список из 10 книг, которые рекомедуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

4. На полке стоят 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:
1) словарь ему нужен обязательно; 2) словарь ему не нужен?

5°. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории необходимо выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Решите упражнения **(6–20)**, используя известные вам формулы и правила комбинаторики.

6. Во время встречи 16 человек пожали друг другу руки. Сколько всего сделано рукопожатий?

7. Группа учащихся из 30 человек решила обменяться фотографиями. Сколько всего фотографий необходимо для этого?

8°. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Харьков»?

9°. Из 12 рабочих-бурильщиков нужно командировать 5 для работы в соседней области. Сколькими способами можно сформировать такую бригаду для командировки?

10. Сколькими разными способами собрание из 40 человек может выбрать из числа своих членов председателя собрания, его заместителя и секретаря?

11. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой (так, чтобы каждая прямая проходила через две данные точки)?

12. Сколько разных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без их повторения?

13. Определите число всех диагоналей правильного: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двенадцатиугольника; 4) пятнадцатиугольника.

14. Сколько разных трехцветных флагов, состоящих из трех горизонтальных полос, можно сшить, комбинируя синий, красный и белый цвета?

15. Сколько разных плоскостей можно провести через 10 точек (так, чтобы каждая плоскость проходила через три данные точки), если никакие четыре точки не лежат в одной плоскости?

16*. Сколько разных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8 без их повторения?

17. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрой 5? числом 12? числом 123?

18. Среди сочетаний из 10 букв a, b, c, ... по 4 сколько таких, которые не содержат букву a? буквы a и b?

19. Среди размещений из 12 букв a, b, c, ... по 5 сколько таких, которые не содержат букву a? буквы a и b?

20*. Сколько необходимо взять элементов, чтобы число размещений из них по 4 было в 12 раз больше, чем число размещений из них по 2?

Решите уравнение **(21—24)**.

21. 1) $A_x^2 = 42$; 2) $A_x^3 = 56x$; 3) $A_{x+1}^2 = 30$; 4) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.

22. 1) $C_{x-3}^2 = 21$; 2) $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$; 3) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$; 4) $C_x^4 = \frac{15A_x^2}{4}$.

23*. 1) $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 2) $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$; 3) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; 4) $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$.

24*. 1) $\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; 2) $\frac{A_{x+1}^{n+1} P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; 3) $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$; 4) $\frac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110$.

25*. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} C_x^y : C_x^{y+2} = 1, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6. \end{cases}$

21.2. БИНОМ НЬЮТОНА

Таблица 30

Бином Ньютона

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + x^n$$

Поскольку $1 = C_n^0 = C_n^n$ и $x^0 = 1$, $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ и $a \neq 0$), то формулу бинома Ньютона можно записать еще и так:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n$$

Общий член разложения степени бинома имеет вид

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}x^k$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Коэффициенты C_n^k называют **биномиальными коэффициентами.**

Свойства биномиальных коэффициентов

1. **Число биномиальных коэффициентов** (а следовательно, и число слагаемых) **в разложении n-й степени бинома равно $n + 1$.**
2. **Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой** (поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$).
3. **Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n:**

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

4. **Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.**
5. Для вычисления биномиальных коэффициентов можно воспользоваться треугольником Паскаля, в котором вычисления коэффициентов основываются на формуле $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Треугольник Паскаля

Степень	Коэффициенты разложения	Ориентир
$(a+x)^0$	1	*В каждом ряду по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ним справа и слева.*
$(a+x)^1$	1 1	
$(a+x)^2$	1 2 1	
$(a+x)^3$	1 3 3 1	
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
…	…	

Например, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Объяснение и обоснование

1. Бином Ньютона. Двучлен вида $a + x$ также называют биномом. Из курса алгебры известно, что:

$(a + x)^1 = a + x = 1 \cdot a + 1 \cdot x$;

$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ax + 1 \cdot x^2$;

$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2x + 3 \cdot ax^2 + 1 \cdot x^3$.

Можно заметить, что коэффициенты разложения степени бинома $(a + x)^n$ при $n = 1, 2, 3$ совпадают с числами в соответствующей строке треугольника Паскаля. Оказывается, что это свойство выполняется для любого натурального n, то есть справедлива формула

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n x^n. \quad (7)$$

Формулу (7) называют *биномом Ньютона*. Правая часть этого равенства называется разложением степени бинома $(a + x)^n$, а числа C_n^k (при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) называют *биномиальными коэффициентами*.

Общий член разложения степени бинома имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \text{ (где } k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{)}.$$

Обосновать формулу (7) можно, например, с помощью метода математической индукции (содержание и алгоритм использования метода см. в учебнике для 10 класса). (Проведите такое обоснование самостоятельно.)

Приведем также комбинаторные рассуждения для обоснования формулы бинома Ньютона.

По определению степени с натуральным показателем $(a + x)^n = (a + x) \times \times (a + x)\ldots(a + x)$ (всего n скобок). Раскрывая скобки, получаем в каждом слагаемом произведение n букв, каждая из которых — a или x. Если, например, в каком-либо слагаемом количество букв x равно k, то количество букв a в нем — $n - k$, то есть каждое слагаемое имеет вид $a^{n-k} x^k$ при некотором k от 0 до n. Покажем, что для каждого такого k число слагаемых $a^{n-k} x^k$ равно C_n^k, откуда после приведения подобных членов и получаем формулу бинома. Произведение $a^{n-k} x^k$ получаем, взяв букву x из k скобок и букву a из $n - k$ тех скобок, которые остались. Разные такие слагаемые получим путем разного выбора первых k скобок, а k скобок из n можно выбрать именно C_n^k способами. Следовательно, общий член разложения бинома $(a + x)^n$ действительно имеет вид $C_n^k a^{n-k} x^k$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. ○

Именно из-за бинома Ньютона числа C_n^k часто называют *биномиальными коэффициентами*.

Записывая степень двучлена по формуле бинома Ньютона для небольших значений n, биномиальные коэффициенты можно вычислять с помощью треугольника Паскаля (см. табл. 30).

Например, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Так как $C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу бинома Ньютона можно записать в виде:

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n. \quad (8)$$

Если в формуле бинома Ньютона (8) заменить x на $(-x)$, то получим *формулу возведения в степень разности $a - x$*:

$$(a-x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 - C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Например, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ (знаки членов разложения чередуются!).

2. Свойства биномиальных коэффициентов

1. **Число биномиальных коэффициентов** (а следовательно, и число слагаемых) в разложении n-й степени бинома **равно $n + 1$,** поскольку разложение содержит все степени x от 0 до n (и других слагаемых не содержит).
2. **Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой,** поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. **Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.**

● Для обоснования полагаем в равенстве (7) значения $a = x = 1$ и получаем:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n. \quad ○$$

Например, $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

4. **Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.**

● Для обоснования возьмем в равенстве (7) значения $a = 1$, $x = -1$:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Тогда

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots . \quad ○$$

Примеры решения задач

Задача 1 По формуле бинома Ньютона найдите разложение степени $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

Комментарий

Для нахождения коэффициентов разложения можно использовать треугольник Паскаля (табл. 30) или вычислять их по общей формуле. По треугольнику Паскаля коэффициенты равны: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Учитывая, что при возведении разности в степень знаки членов разложения чередуются, получаем:

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Для упрощения записи ответа можно избавиться от иррациональности в знаменателях полученных выражений (см. решение) или сначала учесть, что ОДЗ данного выражения: $x > 0$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, то есть данное выражение можно записать так: $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x - x^{-\frac{1}{2}}\right)^6$ и возвести в степень последнее выражение.

Решение

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - 6x^5\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + 15x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 20x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 15x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 - 6x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 +$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - \frac{6x^5}{\sqrt{x}} + 15x^3 - \frac{20x^3}{x\sqrt{x}} + 15 - \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} = x^6 - 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 -$$
$$-20x\sqrt{x} + 15 - \frac{6\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^3}. \triangleleft$$

Задача 2 В разложении степени $\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}$ найдите член, содержащий b^3.

Решение	*Комментарий*
ОДЗ: $b > 0$. Тогда $\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16} = \left(b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}$. Общий член разложения: $T_{k+1} = C_{16}^k \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k} \left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{16}^k b^{\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3}}$. По условию член разложения должен содержать b^3, следовательно, $\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3} = 3$. Отсюда $k = 6$. Тогда член разложения, содержащий b^3, равен $T_{k+1} = T_7 = C_{16}^6 b^{\frac{16-6}{2} - \frac{6}{3}} = C_{16}^6 b^3 = \frac{16!}{6!(16-6)!} b^3 = \frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 8008b^3$. $\triangleleft$	На ОДЗ ($b > 0$) каждое слагаемое в данном двучлене можно записать как степень с дробным показателем. Это позволит проще записать общий член разложения степени $(a + x)^n$: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$, (где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$), выяснить, какой из членов разложения содержит b^3, и записать его. Чтобы упростить запись общего члена разложения, запишем: $a = \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = b^{-\frac{1}{3}}$, $n = 16$.

Вопросы для контроля

1. а) Запишите формулу бинома Ньютона. Приведите примеры ее использования.
   б*) Докажите формулу бинома Ньютона.
2*. Сформулируйте и докажите свойства биномиальных коэффициентов.

Упражнения

Найдите разложение степени бинома **(1–3)**.

1. 1) $(x+a)^6$; 2) $(x+c)^4$; 3) $(x+2)^5$; 4*) $(1+a)^{12}$.

2. 1) $(x-a)^7$; 2) $(x^2-a)^6$; 3) $(a^2+1)^8$; 4*) $\left(a+\sqrt{b}\right)^{11}$.

3. 1) $\left(\sqrt{m}-n\right)^5$; 2) $(x-2y)^5$; 3) $(3x+2y)^4$;

4) $(2a^2-3a)^5$; 5) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$.

4. Найдите:

1) четвертый член разложения $(a+3)^7$;

2) девятый член разложения $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$;

3) шестой член разложения $(a^2+b^3)^{13}$;

4) средний член разложения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$.

5. Найдите член разложения бинома:

1) $(x+y)^9$, содержащий x^7; 2) $\left(\sqrt{a}+b\right)^9$, содержащий a^3;

3) $\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{20}$, содержащий a^7; 4) $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8}\right)^{12}$, содержащий $x^{\frac{22}{3}}$;

5) член разложения $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, не содержащий a;

6) член разложения $\left(\sqrt[3]{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, не содержащий a.

6*. Найдите показатель степени бинома, если:

1) третий член разложения $\left(\sqrt[3]{a^2}+a^{-1}\right)^n$ содержит a^0;

2) биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения $(1+x)^{n+1}$ равны между собой;

3) биномиальные коэффициенты четвертого и шестого членов разложения равны соответственно 120 и 252.

7*. Найдите показатель степени бинома, если:

1) шестой член разложения $\left(a^{-\frac{1}{30}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ не содержит a;

3) шестой член разложения $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}-\sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не зависит от a.

§ 22 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

22.1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Таблица 31

1. Случайные события	
Понятия	Примеры
Под экспериментами со случайными результатами (или, коротко говоря, случайными экспериментами) понимают различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить много раз в одинаковых условиях.	Эксперименты с рулеткой, бросанием игрального кубика, подбрасыванием монеты, серия выстрелов одного и того же стрелка по одной и той же мишени, участие в лотерее и др.
Любой результат случайного эксперимента называют случайным событием. Вследствие такого эксперимента это событие может или произойти, или не произойти. Случайные события обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \dots$.	Выпадение «герба», выпадение «числа» при подбрасывании монеты; выигрыш в лотерею, выпадение определенного количества очков при бросании игрального кубика и т. п.
2. Понятия, связанные со случайными событиями в некотором эксперименте	
События $B_1, B_2, \dots, B_n$ называют *равновозможными*, если в данном эксперименте нет никаких оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем любое другое.	В эксперименте с однократным подбрасыванием однородной монеты правильной формы равновозможными являются события: A — выпал «герб», B — выпало «число».
События A и B называют *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в данном эксперименте.	В эксперименте с подбрасыванием монеты события A — выпал «герб» и B — выпало «число» — несовместные.
События $C_1, C_2, \dots, C_n$ называют несовместными, если каждая пара из них несовместна в данном эксперименте.	Для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика события C_1 — выпадение 1 очка, C_2 — выпадение 3 очков, C_3 — выпадение 5 очков, C_4 — выпадение четного числа очков — несовместные.

Продолжение табл. 31

Событие U называют *достоверным*, если в результате данного эксперимента оно обязательно произойдет.	Выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков).
Событие $\varnothing$ называют *невозможным*, если оно не может произойти в данном эксперименте.	Выпадение 7 очков при бросании игрального кубика.
3. Пространство элементарных событий	
Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из несовместных событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Назовем их *элементарными событиями*, а множество всех этих событий $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — ***пространством элементарных событий.*** ***Случайным событием A*** **назовем любое подмножество пространства элементарных событий U.**	1. Для эксперимента с подбрасыванием монеты элементарными будут события u_1 — выпал «герб», u_2 — выпало «число». Тогда пространство элементарных событий будут состоять из двух событий: $U = \{u_1, u_2\}$. (Эти события несовместные, и в результате эксперимента одно из них обязательно произойдет.) 2. Для эксперимента с бросанием игрального кубика элементарными могут быть события u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, где u_k — выпадение k очков, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. В этом случае пространство элементарных событий будет состоять из шести событий: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.
4. Классическое определение вероятности (для равновозможных элементарных событий)	
Пусть дано пространство элементарных событий, все из которых равновозможные. Вероятность события A — это отношение количества m элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к количеству n всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте: $$P(A) = \frac{m}{n}.$$	Пример Найдите вероятность выпадения больше четырех очков при бросании игрального кубика. ▶ Рассмотрим как элементарные события шесть равновозможных результатов бросания кубика — выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (следовательно, $n = 6$). Событие A — выпало больше 4 очков. Благоприятствуют событию A только два элементарных

Окончание табл. 31

	события — выпало 5 или 6 очков ($m = 2$) . Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁
Вероятность достоверного (U) и невозможного ($\varnothing$) событий $\boldsymbol{P(U) = 1}$ $\boldsymbol{P(\varnothing) = 0}$	

Объяснение и обоснование

1. Случайные эксперименты и случайные события. Нам часто приходится проводить различные наблюдения, опыты, принимать участие в экспериментах или испытаниях. Такие эксперименты могут завершаться результатом, который заранее предусмотреть невозможно. Например, мы покупаем лотерейный билет и не знаем, выиграет ли он; подбрасываем монету и не знаем, что выпадет — число или герб. Можно ли каким-то образом оценить шансы появления результата, который нас интересует? Ответ на этот вопрос дает раздел математики, который называется *теорией вероятностей*. Мы ознакомимся только с основами этой теории.

Одним из основных понятий, которые рассматриваются в теории вероятностей, является понятие *эксперимента со случайными результатами*. Примером такого эксперимента может служить подбрасывание монеты судьей футбольного матча перед его началом, чтобы определить, какая из команд начнет матч с центра поля.

Под экспериментами со случайными результатами (или, коротко говоря, случайными экспериментами) понимают различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить много раз в одинаковых условиях. Например, это серия выстрелов одного и того же стрелка по одной и той же мишени, участие в лотерее, вынимание пронумерованных шаров из коробки, эксперименты с рулеткой, бросанием игрального кубика, подбрасыванием монеты.

Любой результат случайного эксперимента называется случайным событием. В результате проводимого эксперимента это событие может произойти или не произойти. Заметим, что для каждого случайного эксперимента обычно заранее уславливаются, какие его результаты рассматриваются как элементарные события, а затем случайное событие рассматривается как подмножество получившегося множества (см. с. 288).

Далее, как правило, будем обозначать случайные события прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$.

Говоря о случайных событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным случайным экспериментом.

Заметим, что много важных и нужных фактов теории вероятностей сначала были получены с помощью очень простых экспериментов. Большую роль в развитии теории вероятностей как науки сыграли обычные монеты и игральные кубики. Но те монеты и кубики, которые рассматривают в теории вероятностей, являются математическими образами настоящих монет и кубиков (потому о них иногда говорят, что это математическая монета и математический игральный кубик).

Например, *математическая монета,* которую используют в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. У математической монеты нет цвета, размера, веса и стоимости. Она не сделана ни из какого материала и не может служить платежным средством. Монета, с точки зрения теории вероятностей, имеет только две стороны, одна из которых называется «герб*», а другая — «число». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх. Никаких других свойств у математической монеты нет. Математическая монета считается *симметричной.* Это означает, что *брошенная на стол монета имеет равные шансы выпасть «гербом» или «числом».* При этом имеется в виду, что никакой другой результат бросания монеты невозможен — она не может потеряться, закатившись в угол, и, тем более, не может «встать на ребро».

Рис. 22.1

Настоящая металлическая монета (рис. 22.1) служит лишь иллюстрацией математической монеты. Настоящая монета может быть немного вогнутой, может иметь другие дефекты, которые влияют на результаты бросания. Однако, чтобы проверить на практике опыты с бросанием математической монеты, мы бросаем обычную монету (без явных дефектов).

Игральный кубик также служит прекрасным средством для получения случайных событий. Игральный кубик имеет удивительную историю. Игра с кубиками — одна из древнейших. Она была известна в глубокой древности в Индии, Китае, Лидии, Египте, Греции и Риме. Игральные кубики находили в Египте (XX в. до н. э.) и в Китае (VI в. до н. э.) при раскопках древних захоронений. *Правильные (симметричные) кубики* обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь одинаковую площадь, быть плоскими

* Часто в российских учебниках по теории вероятностей вместо термина «герб» для обозначения оборотной стороны (так называемого реверса) монеты употребляют термин «орел», а вместо термина «число» — термин «решка». Это связано с тем, что на реверсе монет Российской империи был изображен двуглавый орел, а на лицевой стороне монеты (аверсе) ее номинал (официально объявленная стоимость) был написан на фоне рисунка, который напоминал решетку.

и одинаково гладкими. Кубик должен иметь кубическую форму, и его центр тяжести должен совпадать с геометрическим центром. Вершины и ребра кубика должны иметь правильную форму. Если они округлены, то все округления должны быть одинаковыми. Отверстия, которыми маркируют количество очков на гранях, должны быть просверлены на одинаковую глубину. Сумма очков на противоположных гранях правильного кубика равняется 7 (рис. 22.2).

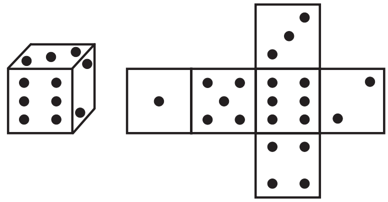


Рис. 22.2

Математический игральный кубик, который обсуждается в теории вероятностей, — это математический образ правильного кубика. Выпадение всех граней равновозможно. Подобно математической монете, математический кубик не имеет ни цвета, ни размера, ни веса, ни других материальных качеств.

2. Некоторые понятия, связанные со случайными событиями. Пусть проведен какой-то случайный эксперимент. Как отмечалось выше, его результатами являются некоторые случайные события. В результате такого эксперимента каждое из событий может или произойти, или не произойти. Говоря о случайных событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным экспериментом.

События называют *равновозможными*, если в данном эксперименте нет никаких оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем любое другое. Например, в эксперименте с однократным подбрасыванием однородной монеты правильной формы равновозможными являются события: A — выпал «герб» и B — выпало «число».

События A и B называют *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в данном эксперименте. Так, в эксперименте с однократным подбрасыванием монеты события: A — выпал «герб» и B — выпало «число» — несовместные.

События C_1, C_2, ..., C_n называют несовместными, если каждая пара из них несовместна в данном эксперименте. Для эксперимента с однократным подбрасыванием игрального кубика события: C_1 — выпадение 1 очка, C_2 — выпадение 2 очков, C_3 — выпадение 3 очков, C_4 — выпадение 4 очков, C_5 — выпадение 5 очков, C_6 — выпадение 6 очков — несовместные (и равновозможные).

Событие U называют *достоверным*, если в результате данного эксперимента оно обязательно произойдет. Например, выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков) является достоверным событием.

Событие $\varnothing$ называют *невозможным*, если оно не может произойти в данном эксперименте. Например, выпадение 7 очков при бросании игрального кубика — невозможное событие.

3. Пространство элементарных событий. Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из несовместных событий u_1, u_2, ..., u_n. Назовем их *элементарными событиями*, а множество всех этих событий $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ — *пространством элементарных событий*.

Например, для эксперимента с подбрасыванием монеты элементарными будут события: u_1 — выпадение «герба», u_2 — выпадение «числа». Тогда пространство элементарных событий будет состоять из двух событий: $U = \{u_1, u_2\}$. (Эти события несовместные, и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий.)

Для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика элементарными событиями могут быть следующие события: u_1 — выпадение 1 очка, u_2 — выпадение 2 очков, u_3 — выпадение 3 очков, u_4 — выпадение 4 очков, u_5 — выпадение 5 очков, u_6 — выпадение 6 очков. В этом случае пространство элементарных событий будет состоять из шести событий: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Случайным событием A назовем любое подмножество пространства элементарных событий U.

Например, для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика случайным является событие A — выпадение четного числа очков, поскольку $A = \{u_2, u_4, u_6\}$ — подмножество U.

4. Классическое определение вероятности. Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть одно и только одно из n попарно несовместных и равновозможных элементарных событий u_1, u_2, ..., u_n (то есть пространство U элементарных событий данного случайного эксперимента состоит из элементарных событий u_1, u_2, ..., u_n). И пусть в рассматриваемом эксперименте событие A состоит в том, что происходит одно из m заранее выделенных элементарных событий $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$, то есть $A = \left\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\right\}$ (в этом случае говорят, что элементарные события $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ *благоприятствуют событию* A).

Вероятность события A определим как отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу n элементарных событий в данном эксперименте, то есть как отношение $\frac{m}{n}$.

Вероятность события A принято обозначать $P(A)$ (буква P — первая буква французского слова *probabilité* или латинского слова *probabilitas*, что в переводе означает «вероятность»). Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Этим равенством выражается *классическое определение вероятности*, которое можно сформулировать следующим образом.

Если рассматривается пространство равновозможных элементарных событий, то вероятность события A — это отношение числа благоприятствующих ему элементарных событий к числу всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте.

Например, в эксперименте с подбрасыванием монеты равновозможными элементарными событиями являются два ($n = 2$) события: A — выпал «герб» и B — выпало «число». Событию A благоприятствует только один случай ($m = 1$), поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что вероятность события B также равна $\frac{1}{2}$: $P(B) = \frac{1}{2}$. Следовательно, в эксперименте с однократным подбрасыванием монеты вероятность выпадения «герба» (или «числа») равна $\frac{1}{2}$.

Аналогично обосновывается, что в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика вероятность события A_i — выпало i очков ($i = 1$, 2, 3, 4, 5, 6) равна $\frac{1}{6}$ (обоснуйте это самостоятельно).

Заметим, что если в любом эксперименте рассмотреть невозможное событие $\varnothing$, то нет элементарных событий, благоприятствующих данному событию, то есть число элементарных событий, ему благоприятствующих, равно нулю ($m = 0$), и тогда $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$. Следовательно,

вероятность невозможного события равна 0.

Например, в эксперименте с бросанием игрального кубика вероятность невозможного события A — выпало 7 очков — равна 0.

Если в любом эксперименте рассмотреть достоверное событие U, то ему благоприятствуют все элементарные события в этом эксперименте ($m = n$), тогда $P(U) = \frac{n}{n} = 1$. Следовательно,

вероятность достоверного события равна 1.

Например, в эксперименте с бросанием игрального кубика событие A — выпало 1 очко, или 2 очка, или 3 очка, или 4 очка, или 5 очков, или 6 очков, достоверное, и его вероятность равна 1.

Задача 1 Пользуясь приведенным определением, найдем вероятность события A — выпало число очков, кратное 3, при бросании игрального кубика.

▶ Как отмечалось выше, в эксперименте с бросанием кубика существует шесть попарно несовместных равновозможных элементарных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков (также можно сказать, что пространство элементарных событий состоит из шести указанных попарно несовместных равновозможных событий). Благоприятствуют событию A только два элементарных события: выпало 3 очка и выпало 6 очков. Следовательно, вероятность события A равна: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Петя и Паша бросают желтый и синий игральные кубики (рис. 22.3) и каждый раз подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что в случае, когда в очередной попытке в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Петя, а когда в сумме выпадет 7 очков — выигрывает Паша. Является ли эта игра справедливой?

▶ При бросании кубиков на каждом из них может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на желтом кубике (1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков), отвечает шесть вариантов числа очков, выпавших на синем кубике. Следовательно, всего получаем 36 попарно несовместных равновозможных элементарных событий. Результаты этого эксперимента приведены в таблице:

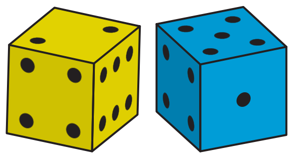


Рис. 22.3

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

Здесь в каждой паре чисел на первом месте записано число очков, выпавшее на желтом кубике, а на втором месте — число очков, выпавшее на синем кубике.

Пусть событие A состоит в том, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие B — при бросании кубиков в сумме выпало 7 очков. Событию A благоприятствуют следующие 5 результатов (элементарных событий):

(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).

Событию B благоприятствуют следующие 6 результатов (элементарных событий):

(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).

Тогда

$$P(A)=\frac{5}{36},\ P(B)=\frac{6}{36}.$$

Таким образом, шансов выиграть у Паши больше, чем у Пети, значит, такая игра не будет справедливой. ◁

Отметим, что результаты эксперимента с бросанием двух игральных кубиков, приведенные в задаче 2, позволяют вычислить вероятности появления той или иной суммы очков, выпадающих при бросании двух игральных кубиков.

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Задача 3* Из 15 произведенных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

▶ Пусть событие A состоит в том, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов. Из 15 велосипедов выбрать 2 можно C_{15}^2 способами (число соединений из 15 элементов по 2). Все эти выборы являются равновозможными и попарно несовместными. Следовательно, общее количество равновозможных результатов (то есть общее количество элементарных событий) равно C_{15}^2. Событием, благоприятствующим событию A, является выбор 2 бездефектных велосипедов из 12 бездефектных ($15 - 3 = 12$). Следовательно, число результатов (событий), благоприятствующих событию A, равно C_{12}^2. Отсюда получаем

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{\dfrac{12!}{2!(12-2)!}}{\dfrac{15!}{2!(15-2)!}} = \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{22}{35}. \ \triangleleft$$

Задача 4* Группа туристов, в которой 6 юношей и 4 девушки, выбирает по жребию четырех дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

▶Число результатов (элементарных событий) при выборе четырех дежурных из 10 туристов равно C_{10}^4. Все эти события — равновозможные и попарно несовместные.

Пусть событие A состоит в том, что среди 4 дежурных есть 2 юноши и 2 девушки. Выбрать двоих юношей из 6 можно C_6^2 способами, а выбрать двух девушек из 4 можно C_4^2 способами. По правилу произведения выбор и двоих юношей, и двух девушек можно выполнить $C_6^2 \cdot C_4^2$ способами — это и есть количество событий, благоприятствующих событию A. Тогда

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{\dfrac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \dfrac{4!}{2!(4-2)!}}{\dfrac{10!}{4!(10-4)!}} = \frac{\dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{3}{7}. \ \triangleleft$$

Обратим внимание, что в зависимости от рассматриваемой задачи для одного и того же эксперимента пространство элементарных событий можно вводить по-разному. Для этого независимые элементарные события подбираются таким образом, чтобы событие, вероятность которого требуется найти, само было элементарным или выражалось через сумму элементарных событий. Но для того чтобы воспользоваться классическим определением вероятности, необходимо быть уверенным, что все выделенные элементарные события — равновозможные.

Например, как уже отмечалось в задаче о бросании игрального кубика, пространство элементарных событий может состоять из 6 независимых равновозможных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Однако если в задаче требуется найти вероятность выпадения четного числа очков, то пространством элементарных событий для этого эксперимента может быть множество только двух событий: u_1 — выпало четное число очков и u_2 — выпало нечетное число очков (поскольку эти события попарно несовместны и результатом эксперимента обязательно будет одно из этих событий). Эти события равновозможны (поскольку среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 ровно половина четных и половина нечетных). Следовательно, по классическому определению вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$. Конечно, если бы мы рассмотрели первое из указанных пространств элементарных событий, то также смогли бы решить эту задачу: всего событий — 6, а благоприятствующих — 3 (выпадение четного числа очков: 2, 4, 6). Тогда вероятность выпадения четного числа очков равна $\frac{3}{6}$, то есть $\frac{1}{2}$.

Попробуем ввести для решения этой задачи следующее пространство элементарных событий: u_1 — выпало четное число очков, u_2 — выпало 1 очко, u_3 — выпало 3 очка, u_4 — выпало 5 очков. Эти события действительно образуют пространство элементарных событий эксперимента с бросанием игрального кубика, поскольку они попарно несовместны и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий. Но, пользуясь таким пространством элементарных событий, мы не сможем применить классическое определение вероятности, потому что, как мы уже видели, указанные элементарные события не являются равновозможными: $P(u_1)=\frac{1}{2}$, $P(u_2)=\frac{1}{6}$, $P(u_3)=\frac{1}{6}$, $P(u_4)=\frac{1}{6}$.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что такое случайный эксперимент и случайное событие. Приведите примеры.
2. Объясните, какие события считаются равновозможными. Приведите примеры равновозможных и неравновозможных событий. Какие события считаются несовместными? Приведите примеры.

3. Объясните смысл классического определения вероятности. Приведите примеры. Как обозначается вероятность события A?
4. Какое событие считается достоверным? какое невозможным? Приведите примеры. Чему равны вероятности достоверного и невозможного событий?

Упражнения

1°. Укажите, какие из событий в приведенных экспериментах (табл. 32) являются достоверными, невозможными и просто случайными.

Таблица 32

№	Эксперимент	Событие
1	Выполнение выстрела	Попадание в цель
2	Нагревание воды (при обычных условиях)	Превращение воды в лед
3	Участие в лотерее	Вы выиграете, если примете участие в лотерее
4	Участие в беспроигрышной лотерее	Вы не выиграете, если примете участие в беспроигрышной лотерее
5	Бросание игрального кубика	Выпало 5 очков
6	Бросание игрального кубика	Выпало 8 очков
7	Проверка работы звонка	Вы нажали на кнопку звонка, а он не зазвонил
8	Вынимание шара из коробки с белыми шарами	Вынули черный шар
9	Вынимание шара из коробки с белыми шарами	Вынули белый шар
10	Вынимание двух шаров из коробки с 10 белыми и 5 черными шарами	Вынули белый и черный шары
11	Вынимание карты из колоды	Вынули туз

2. Придумайте по три примера достоверных, невозможных и просто случайных событий. Примеры запишите в виде таблицы, как это сделано в упражнении 1.

3°. Известно, что на 100 батареек встречаются 3 бракованных. Какова вероятность купить бракованную батарейку?

4°. В магазине подсчитали, что обычно из тысячи телевизоров оказывается 2 бракованных. Какова вероятность того, что телевизор, выбранный наугад в этом магазине, будет бракованным?

5°. По статистике в городе N в среднем за год из 1000 автомобилистов 2 попадают в аварию. Какова вероятность того, что автомобилист в этом городе весь год проездит без аварий?

6°. Какова вероятность того, что в Киеве Солнце зайдет на востоке?

7°. Какова вероятность того, что после 31 декабря наступит 1 января?

8°. В пакете лежат 20 зеленых и 10 желтых груш. Какова вероятность вынуть из пакета грушу? Какова вероятность вынуть из пакета яблоко?

9°. На экзамене предлагают 24 билета. Андрей не разобрался в одном билете и очень боится его вытянуть. Какова вероятность, что Андрею достанется «несчастливый» билет?

10°. На вопросы викторины было получено 1250 открыток с правильными ответами, в том числе и ваша. Для определения призера ведущий должен наугад вытянуть одну открытку. Какова вероятность того, что приз достанется вам?

11. В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

12. *Задача Даламбера*. Какова вероятность того, что при двух подбрасываниях монеты хотя бы один раз выпадет «герб»?

13. За победу в телеигре Яна получит главный приз — путешествие, если с первой попытки угадает, в каком из 12 секторов табло (рис. 22.4) спрятан приз. Какова вероятность того, что Яна отправится в путешествие?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 22.4

14. В лотерее 100 билетов, из них 5 выигрышных. Какова вероятность проигрыша?

15. В кармане жителя некой страны лежат 6 монет (рис. 22.5). Какова вероятность вынуть наугад монету: 1) с четным числом копеек; 2) с нечетным числом копеек; 3) меньше 20 копеек?

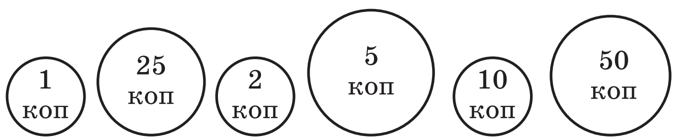


Рис. 22.5

16. На карточке спортлото (6 из 49) Даниил отметил номера: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наташа на своей карточке отметила номера: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Как вы думаете, выигрыш какого набора чисел более вероятен? Объясните свой ответ.

17. Илья отметил в карточке спортлото (6 из 49) номера: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — и выиграл. Тогда он решил, что эта комбинация чисел счастливая и он будет отмечать ее во всех тиражах. Действительно ли он увеличит свои шансы на выигрыш? Объясните свой ответ.

18. В сумке лежат 12 красных, 10 зеленых и 3 желтых яблока. 1) Яблоко какого цвета вероятнее всего вынуть наугад из сумки? 2) Какова вероятность вынуть наугад: а) яблоко; б) грушу; в) зеленое яблоко; г) не красное яблоко?

19. Вы выиграете, если шар, вынутый наугад из коробки, белый. Какую из коробок выгоднее выбрать для игры, чтобы вероятность выигрыша была большей: 1) в коробке 15 белых шаров из 45; 2) в коробке 40 белых шаров из 120; 3) в коробке 22 белых шара и 44 красных; 4) в коробке поровну белых, красных и черных шаров?

20. Грани обычного игрального кубика окрашены в красный и желтый цвета. Вероятность того, что выпадет красная грань, равна $1/6$, вероятность того, что выпадет желтая грань, — $5/6$. Сколько красных и желтых граней у кубика?

21. В коробке половина конфет в красных обертках, треть — в синих обертках, остальные — в зеленых. Наугад вынули одну конфету. Какого цвета обертка наименее вероятна у этой конфеты? Найдите эту вероятность.

22. В ящике лежат 8 красных, 2 синих и 20 зеленых карандашей. Вы наугад вынимаете карандаш. Какова вероятность того, что это: 1) красный карандаш? 2) желтый карандаш? 3) не зеленый карандаш? 4) Какое наименьшее количество карандашей необходимо вынуть, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них был зеленый карандаш?

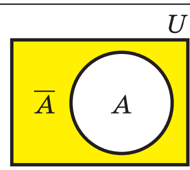
23. Бросают одновременно два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков будет равна 12?

24. На скамейку случайным образом садятся двое мужчин и женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?

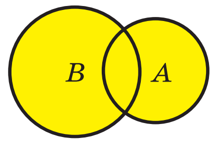
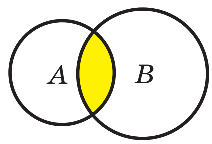
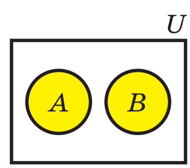
25. Из 5 карточек с буквами M, P, O, A, E наугад выбираем 4 карточки. Найдите вероятность того, что, положив их в ряд в том порядке, в котором их выбирали, получится слово «море».

22.2. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ. СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

Таблица 33

Определение	Пример	Теоретико-множественная иллюстрация
1. Противоположное событие		
Событие $\bar{A}$ называется *противоположным событию* A, если оно состоит в том, что в рассматриваемом случайном эксперименте не происходит событие A.	Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты, тогда событие $\bar{A}$ — не выпал «герб» при подбрасывании монеты (то есть выпало «число»).	

Окончание табл. 33

<table>
<tr><td>Вероятность противоположного события:
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$</td><td colspan="2">Если вероятность купить исправный прибор равна 0,95, то вероятность купить неисправный прибор равна: 1− 0,95 = 0,05.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Сумма событий</td></tr>
<tr><td>Суммой (или объединением) событий A и B называется событие $A + B$ (другое обозначение $A \cup B$), которое состоит в том, что происходит событие A или событие B (или A, или B, или оба события).</td><td>Из колоды карт наугад вынимают 1 карту. Рассмотрим события: A — вынули бубновую карту, B — вынули червовую карту.
Тогда событие $A + B$ — вынули или бубновую, или червовую карту (то есть карту красной масти).</td><td>
$A + B$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Произведение событий</td></tr>
<tr><td>Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие $A \cdot B$ (другое обозначение $A \cap B$), которое состоит в том, что происходят оба события A и B.</td><td>При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало число очков, кратное 3.
Тогда событие $A \cdot B$ — выпало число очков, одновременно четное и кратное 3 (то есть выпало 6 очков).</td><td>
$A \cdot B$</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Несовместные события</td></tr>
<tr><td>Два случайных события A и B называются несовместными, если их произведение является невозможным событием, то есть
$A \cdot B = \varnothing$
(другое обозначение
$A \cap B = \varnothing$).</td><td>При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало 1 очко, C — выпало число очков, кратное 3. События A и B и события B и C — несовместные (не могут происходить одновременно).
События A и C — совместные (могут происходить одновременно, если выпадет 6 очков, то есть $A \cdot C \neq \varnothing$).</td><td>
$A \cdot B = \varnothing$</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Вероятность суммы двух несовместных событий</td></tr>
<tr><td colspan="3">Если события A и B несовместные, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$,
то есть вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Иногда приходится, зная вероятности одних случайных событий, вычислять вероятности других событий, которые получаются из данных с помощью определенных операций. Рассмотрим простейшие операции над случайными событиями, которые далее будем называть просто событиями.

1. Нахождение противоположного события. Пусть дано случайное событие A.

Событие $\bar{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно состоит в том, что в рассматриваемом случайном эксперименте не происходит событие A.

Например, если событие A состоит в том, что выпал «герб» при подбрасывании монеты, то событие $\bar{A}$ (читается: «не A») означает, что «герб» не выпал, а следовательно, выпало «число». Если событие B состоит в том, что при бросании игрального кубика выпало 1 очко, то событие $\bar{B}$ означает, что 1 очко не выпало, а следовательно, выпало или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков.

Учитывая, что в каждом эксперименте происходит одно и только одно из событий — A или $\bar{A}$, получаем, что в пространстве равновозможных элементарных событий сумма количества m элементарных событий, благоприятствующих событию A, и количества k элементарных событий, благоприятствующих событию $\bar{A}$, равна количеству n всех элементарных событий: $m + k = n$. Тогда $\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=\frac{m+k}{n}=\frac{n}{n}=1$.

Следовательно, $P(A)+P(\bar{A})=1$. Отсюда

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

Например, рассмотрим событие A — выпало 1 очко при бросании игрального кубика. Тогда, как отмечалось выше, событие $\bar{A}$ — 1 очко не выпало (то есть выпало или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков). Как было показано на с. 293, вероятность события A — $P(A)=\frac{1}{6}$, тогда вероятность события $\bar{A}$ — $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

При определении операций суммы и произведения событий будем рассматривать события, относящиеся к одному случайному эксперименту.

2. Нахождение суммы событий. Пусть заданы два случайных события A и B.

***Суммой* (или *объединением*) *событий* A и B *называется событие* $A + B$ (другое обозначение $A \cup B$), *которое состоит в том, что происходит событие A или событие B* (или A, или B, или оба события).**

Например, пусть при бросании игрального кубика события A и B означают: A — выпало четное число очков, B — выпало число очков, кратное 3. Тогда событие $A + B$ означает, что выпало или четное число очков, или число очков, кратное 3, то есть выпало 2, 3, 4 или 6 очков.

Аналогично вводится понятие суммы нескольких событий.

Суммой (или *объединением*) *событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется событие* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (другое обозначение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$), *которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий.*

3. Нахождение произведения событий. Пусть заданы два случайных события A и B.

Произведением **(или *пересечением*) *событий* A и B называется событие $A \cdot B$ (другое обозначение $A \cap B$), которое состоит в том, что происходят оба события A и B.**

В приведенном выше примере событие $A \cdot B$ означает, что выпало и четное число очков, и число очков, кратное 3, то есть выпало 6 очков.

Аналогично вводится понятие произведения нескольких событий.

Произведением (или *пересечением*) *событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется событие* $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ (другое обозначение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), *которое состоит в том, что происходят все заданные события*: и A_1, и A_2, ..., и A_n.

Замечание. Определения операций над событиями аналогичны соответствующим определениям операций над множествами (поэтому и обозначения операций над событиями совпадают с обозначениями операций над множествами). Операции над событиями (как и операции над множествами) удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера—Венна (рис. 22.6–22.8).

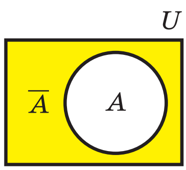


Рис. 22.6

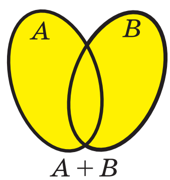


Рис. 22.7

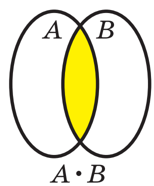


Рис. 22.8

Например, учитывая, что всегда выполняется или событие A, или событие $\bar{A}$, получаем, что $A + \bar{A} = U$ (достоверное событие). Поскольку одновременно события A и $\bar{A}$ не могут выполняться, имеем $A \cdot \bar{A} = \varnothing$ (невозможное событие). Тогда событие $\bar{A}$ можно проиллюстрировать дополнением множества A (до множества U) (рис. 22.6).

Аналогично сумму двух событий A и B (напомним, что событие $A + B$ заключается в том, что происходит событие A или событие B, или оба одновременно) можно проиллюстрировать в виде объединения множеств A и B (рис. 22.7), а произведение событий A и B (событие $A \cdot B$ заключается в том, что происходят оба события A и B) — в виде пересечения множеств A и B (рис. 22.8).

4. Свойства вероятностей событий. Вероятности событий обладают следующими свойствами.

1) Вероятность любого события A удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2) Вероятность достоверного события U равна 1:

$$P(U) = 1.$$

3) Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Действительно, из определения (см. 22.1) следует, что вероятность $P(A)$, то есть дробь $\frac{m}{n}$, неотрицательна и не больше 1. Она равна нулю для невозможного события и единице для достоверного события.

Чтобы обосновать свойство 3, уточним понятие несовместных событий, опираясь на введенные операции над событиями. Из определения несовместных событий получаем:

два случайных события A и B будут *несовместными* тогда и только тогда, когда их произведение является невозможным событием, то есть $A \cdot B = \varnothing$ (другое обозначение $A \cap B = \varnothing$).

Например, при бросании игрального кубика могут произойти события: A — выпадет четное число очков, B — выпадет 5 очков. Эти события несовместны, поскольку 5 — нечетное число; поэтому событие $A \cdot B$, состоящее в том, что выпадет четное число очков и это будет 5 очков, — невозможное событие.

● Рассмотрим несовместные события A и B в пространстве из n равновозможных элементарных событий. Пусть m — количество элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — количество элементарных событий, благоприятствующих событию B. Так как события A и B несовместные, то элементарные события, благоприятствующие событию A, отличны от элементарных событий, благоприятствующих событию B, а следовательно, событию $A + B$ благоприятствуют $m + k$ элементарных событий. Тогда

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Итак, **для несовместных событий A и B** выполняется равенство

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B),} \qquad (1)$$

то есть **вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.** ○

Свойство 1 можно обобщить.

Назовем события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *несовместными*, если любые два из этих событий A_i и A_j (при $i \neq j$) несовместны, то есть их произведение — невозможное событие:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing.$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, то из равенства (1) следует, что

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

то есть *вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*. (Для обоснования этого свойства достаточно применить метод математической индукции.)

Отметим, что для несовместных событий A и B вероятность $P(A \cdot B) = 0$ (так как $A \cdot B = \varnothing$).

Опираясь на рассмотренные основные свойства, можно доказать другие свойства вероятностей событий.

Покажем, что справедливо равенство

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).} \quad (2)$$

Обозначим через $A \backslash B$ событие, заключающиеся в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.

Так как события A и $B \backslash A \cdot B$ несовместны и $A + B = A + (B \backslash A \cdot B)$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B \backslash A \cdot B). \quad (3)$$

Аналогично, так как события $B \backslash A \cdot B$ и $A \cdot B$ несовместны и очевидно, что $B = (B \backslash A \cdot B) + A \cdot B$, то

$$P(B) = P(B \backslash A \cdot B) + P(A \cdot B). \quad (4)$$

Выражая из равенства (4) значение $P(B \backslash A \cdot B)$ и подставляя его в равенство (3), получаем равенство (2).

Задача Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или дама?

Пусть событие A заключается в том, что вынута козырная карта, событие B — вынута дама. Тогда событие $A + B$ — вынута козырная карта или дама, а событие $A \cdot B$ — вынута козырная дама. Ясно, что

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(A \cdot B) = \frac{1}{36},$$

поэтому по формуле (2)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, какое событие называется противоположным событию A. Приведите примеры.
2. Как найти вероятность противоположного события, зная вероятность события A? Чему равна вероятность события $\bar{A}$, если $P(A) = 0,6$?
3. Какое событие называется суммой (или объединением) событий A и B? Приведите примеры.
4. Какое событие называется произведением (или пересечением) событий A и B? Приведите примеры.

5. Какие два события называются несовместными? Приведите примеры.
6. а) Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
   б*) Обоснуйте соответствующую формулу.
7. Какие три (или больше) события считаются несовместными? Как вычисляется вероятность суммы нескольких несовместных событий?

Упражнения

1. Проводится эксперимент с подбрасыванием двух монет. Рассматриваются такие события:
A — выпал «герб» на первой монете, B — выпало «число» на первой монете, C — выпал «герб» на второй монете, D — выпало «число» на второй монете.
Что означают события:
1) $A + C$; 2) $A \cdot C$; 3) $B + C$; 4) $B \cdot D$; 5) $\bar{A}$; 6) $\bar{B} \cdot D$?

2. Проводится эксперимент с бросанием кубика. Рассматриваются такие события: A — выпало четное число очков, B — выпало нечетное число очков, C — выпало 3 очка, D — выпало число очков, меньшее 4. Что означают события:
1) $\bar{A}$; 2) $A + C$; 3) $A \cdot D$; 4) $B \cdot C$; 5) $B \cdot D$; 6) $B \cdot \bar{D}$?
Найдите вероятность каждого из этих событий.

3*. Пользуясь определениями операций над событиями, обоснуйте справедливость равенства:
1) $A + U = U$; 2) $A + A = A$; 3) $A + \bar{A} = U$;
4) $A \cdot \bar{A} = \varnothing$; 5) $A + \varnothing = A$; 6) $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

4. Мяч трижды бросают в баскетбольную корзину. События A_1, A_2, A_3 означают: A_1 — при первом броске мяч попал в корзину, A_2 — при втором броске мяч попал в корзину, A_3 — при третьем броске мяч попал в корзину. Запишите через события A_1, A_2, A_3 следующие события:
1) B — мяч попал в корзину все три раза;
2) C — мяч ни одного раза не попал в корзину;
3) D — мяч хотя бы один раз попал в корзину;
4) K — мяч попал в корзину только при первом броске;
5) M — мяч попал в корзину только при втором и третьем бросках.

5. Для эксперимента с бросанием кубика укажите, какие из приведенных событий являются попарно несовместными: A — выпало четное число очков, B — выпало нечетное число очков, C — выпало 3 очка, D — выпало меньше 3 очков, K — выпало число очков, кратное 3, M — выпало 6 очков, T — выпало больше 4 очков, F — выпало число очков, меньшее 7.

6. Для эксперимента по вытягиванию карт из колоды укажите, какие из приведенных событий являются попарно несовместными: A — вытянули карту червовой масти, B — вытянули карту бубновой масти, C — вытянули короля, D — вытянули даму, K — вытянули карту старше валета, M — вытянули карту с числовыми обозначениями.

7. Имеется 16 игральных карт: 4 валета, 4 дамы, 4 короля, 4 туза. Из этих 16 карт наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или туз?
8. Имеется колода из 52 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или король?

22.3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Таблица 34

1. Частота и относительная частота случайного события

Если случайный эксперимент проведен n раз и в $n\ (A)$ случаях произошло событие A, то число $n\ (A)$ называется ***частотой события A.***

Относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов, то есть отношение $\frac{n\ (A)}{n}$.

Событие A — выпадение «герба» при подбрасывании монеты.

Показатель	Экспериментаторы		
	Бюффон*	Пирсон	Пирсон
Количество экспериментов, n	4 040	12 000	24 000
Частота, $n\ (A)$	2 048	6 019	12 012
Относительная частота	0,5069	0,5016	0,5005

2. Статистическое определение вероятности

Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты события A близко к некоторому определенному числу (которое зависит только от вида события A и не зависит от серии экспериментов), то это число называется вероятностью случайного события A и обозначается $P\ (A)$.

$$0 \leqslant P\ (A) \leqslant 1$$

Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты,

$P\ (A) = 0,5$

* Жорж Луи де Бюффон (1707–1782) — французский математик и естествоиспытатель; Карл Пирсон (1857–1936) — английский математик и биолог. Их труды способствовали развитию теории вероятностей и математической статистики.

Объяснение и обоснование

Частота и относительная частота случайного события. Статистическое определение вероятности. Пусть в результате случайного эксперимента может произойти событие A, имеющее вероятность $p = P(A)$, где $0 < p < 1$. Повторим эксперимент n раз, и пусть при этом событие A произойдет m раз. Число m называют частотой события A (ее часто обозначают $n(A)$), а число $\frac{n(A)}{n} = \frac{m}{n}$ — *относительной частотой события A*. Иными словами, *относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов*.

Рассмотрим результаты экспериментов с подбрасыванием монеты, которые были проведены математиками Ж. Бюффоном и К. Пирсоном (п. 1 табл. 34). Как видно из таблицы, относительная частота выпадения «герба», полученная в экспериментах Бюффона и Пирсона, мало отличается от вероятности выпадения «герба» в указанном эксперименте, равной 0,5.

Тот факт, что вероятность появления «герба» равна 0,5, конечно, не означает, что в любой серии экспериментов герб появится в точности в половине случаев. Но если число экспериментов достаточно велико, мы можем дать прогноз, что «герб» выпадет приблизительно в половине случаев. Таким образом, зная вероятность события, мы можем прогнозировать частоту его появления в будущем при большом количестве соответствующих экспериментов.

Полученный результат отражает замечательный факт: *при большом количестве экспериментов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события*. Эту закономерность называют *статистической устойчивостью относительных частот*. Не всегда удается определить вероятность p события априори (от латинского *a priori* — независимо от опыта), как это имеет место с бросанием монеты или игральной кости. Но если возможно эксперимент повторить n раз, то при большом n относительная частота события $\frac{m}{n}$ может рассматриваться как приближенное значение вероятности $\left(\frac{m}{n} \approx p\right)$ этого события. Получим так называемое статистическое определение вероятности. Более точно его можно сформулировать следующим образом:

если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты события A близко к некоторому определенному числу (которое зависит только от вида события A и не зависит от серии экспериментов), то это число называется вероятностью случайного события А.

Статистические оценки вероятностей событий с использованием относительной частоты события широко используются в физике, биологии, социологии, в экономике и политике, в спорте и повседневной жизни каждого человека. Приведем пример использования такой оценки. В соответствии с законом Украины «Об обязательном страховании гражданско-правовой ответственности собственников наземных транспортных средств» каждый владелец автомобиля должен заключить договор с какой-либо уполномоченной страховой компанией. Согласно этому договору владелец машины платит компании определенную сумму, а компания взамен этого обязуется компенсировать (до определенного предела) убыток, который может быть нанесен этим автовладельцем другому автовладельцу, городской собственности или пешеходам. Чтобы по справедливости решить, кто и сколько должен платить, нужно учесть два обстоятельства: 1) с какой вероятностью автомобиль (на протяжении срока страхования) может попасть в аварию; 2) какой в среднем ущерб окружающим наносит одна авария. Зная это, можно вычислить страховые взносы. В частности, вероятность случайного события — «на протяжении года автомобиль может попасть в аварию», была вычислена по статистическим данным, которые имели в своем распоряжении страховые компании, государственная инспекция безопасности дорожного движения и другие организации. Эта вероятность оказалась равной приблизительно 0,015.

Напомним, что приведенное в п. 18.1 определение вероятности событий называют классическим определением вероятности.

Существует еще и аксиоматическое определение вероятности, в котором определение вероятности задается перечислением ее свойств. При аксиоматическом определении вероятность задается как функция $P\ (A)$, которая определена на множестве M всех событий, определяемых данным экспериментом, которая (для экспериментов с конечным числом исходов) удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $0 \leqslant P\ (A) \leqslant 1$ для любого события A из M;
2) $P\ (A) = 1$, если A — достоверное событие;
3) $P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B)$, если события A и B несовместны.

Теорию, изучающую вероятность событий лишь для экспериментов с конечным числом исходов, называют *элементарной теорией вероятностей*.

Конечно, существуют эксперименты и с бесконечным числом возможных событий. Теорию, изучающую вероятность таких событий, называют *общей теорией вероятностей*. В общей теории вероятностей свойство 3 понимается в расширенном смысле:

$$P\ (A_1 + A_2 + \ldots) = P\ (A_1) + P\ (A_2) + \ldots\ .$$

Свойства 1–3 называют *аксиомами Колмогорова* теории вероятностей. Именно А. Н. Колмогоров впервые в 1933 г. дал аксиоматическое построение теории вероятностей.

Вопросы для контроля

1. Объясните, что такое частота и относительная частота случайного события.
2. Объясните смысл статистического определения вероятности.

Упражнения

1. Проведите эксперимент с подбрасыванием монеты 50 раз. Вычислите относительную частоту выпадения «герба». Сравните свой результат с результатами других учащихся вашего класса.

2. Чтобы определить, как часто встречаются в лесопарке деревья разных пород, учащиеся провели следующие эксперименты. Каждый учащийся выбрал свою тропинку и, идя по ней, записывал породу каждого десятого дерева. Результаты были занесены в таблицу:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина	Всего
Число деревьев	315	217	123	68	34	757

Оцените вероятность того, что выбранное наугад в этом парке дерево будет:

1) сосной; 2) хвойным; 3) лиственным.

Ответ запишите приближенно в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой.

3. Чтобы определить, какой цвет волос у жителей города встречается чаще, а какой реже, учащиеся за полчаса провели такой эксперимент. Каждый выбрал свой маршрут и записывал по пути следования цвет волос каждого пятого встречного. Результаты были занесены в таблицу:

Цвет волос	Брюнеты	Шатены	Рыжие	Блондины	Всего
Число людей	198	372	83	212	865

Оцените вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет:

а) шатеном; б) рыжим; в) не рыжим.

4*. Выберите наугад одну страницу из книги любого писателя и подсчитайте, сколько раз на этой странице встречаются буквы «о» и «б», а также сколько всего на ней букв. Оцените вероятность появления букв «о» и «б» в этом тексте.

Объясните, почему на клавиатурах печатных машинок и компьютеров буква «о» расположена ближе к центру, а буква «б» — ближе к краю клавиатуры (рис. 22.9). Как вы объясните расположение других букв?

Рис. 22.9

5. Изготовили «неправильный» игральный кубик со смещенным центром тяжести. После проведения 1000 экспериментов с бросанием кубика получили следующие результаты.

Число очков	1	2	3	4	5	6
Число выпадений соответствующего количества очков	71	145	169	91	21	503

Используя эти данные, оцените вероятности указанных ниже событий (записав соответствующие вероятности в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой) и дайте ответы на вопросы:

1) Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет четное число очков, а вы — если нечетное»?
2) Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет число очков от 4 до 6, а вы — если от 1 до 3»?
3) Справедливо ли такое пари: «Я выиграю, если выпадет не 6 очков, а вы — если 6 очков»?

6. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятность, с которой в лесопарке встречаются деревья различных пород, и записали результаты в таблицу:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина
Вероятность	0,42	0,29	0,16	0,09	0,04

Найдите вероятность того, что выбранное наугад в этом лесопарке дерево будет: 1) сосной или дубом; 2) не дубом; 3) хвойным; 4) лиственным; 5) не осиной; 6) хвойным или лиственным (объясните, что означает последний результат).

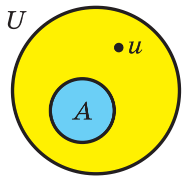
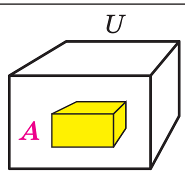
7. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятности того, какой цвет волос встречается у жителей города чаще, а какой реже, и составили таблицу:

Цвет волос	Брюнеты	Шатены	Рыжие	Блондины
Вероятность	0,23	0,43	0,1	0,24

Найдите вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет: 1) шатеном или рыжим; 2) не рыжим; 3) брюнетом или блондином; 4) не блондином.

22.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Таблица 35

1. Основные понятия	
	**U — некоторая фигура на плоскости, $S(U)$ — площадь фигуры U.** *Эксперимент* — это случайный выбор какой-либо точки u из фигуры U (можно также представить, что эту точку u случайно бросили на фигуру U). *Элементарные события u* — это точки фигуры U. **A — часть фигуры U ($A \subseteq U$), $S(A)$ — площадь фигуры A.** Событие A — попадание точек u в фигуру A. Тогда *элементарными событиями, благоприятствующими событию A, будут все точки фигуры A.*
2. Определение геометрической вероятности	
$P(A)=\dfrac{S(A)}{S(U)}$	***Геометрической вероятностью события A* называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры.** (Предполагается, что вероятность попадания точки в часть фигуры U пропорциональна площади этой части и не зависит от ее конфигурации и расположения в фигуре U.)
3. Общее определение	
  $P(A)=\dfrac{\text{мера } A}{\text{мера } U}$	Если U — пространственная фигура (тело), то записи $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать как объемы тела U и тела A — части тела U. Если U — отрезок, то записи $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать как длины отрезка U и его части — отрезка A. (Объем тела U в пространстве, площадь плоской фигуры U на плоскости, длину отрезка U на прямой назовем *мерой* фигуры U.) ***Геометрической вероятностью события A* называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию A, к мере всей заданной фигуры.**

Объяснение и обоснование

Приведенное классическое определение вероятности нельзя применить к случайным экспериментам с бесконечным количеством результатов (то есть в случае, когда множество U бесконечно).

Рассмотрим случай задания вероятностей $P(A)$ с помощью так называемых *геометрических вероятностей*. Пусть U — некоторая фигура на плоскости, $S(U)$ — ее площадь, A — часть фигуры U с площадью $S(A)$, B — часть фигуры U с площадью $S(B)$ (рис. 22.10). Элементарным событием u будем считать некоторую точку фигуры U, случайным образом выбранную на фигуре U или брошенную на фигуру U. Событием A будем считать попадание точек u в фигуру A. Также будем считать такой случайный выбор точек *равномерным* (или, как говорят, распределение вероятностей равномерно). Из этого следует, что вероятности попадания точки u в фигуры A и B, имеющие одинаковые площади, одинаковы и не зависят от расположения этих фигур (если $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ и $S(A) = S(B)$, то $P(A) = P(B)$). Иными словами, мы полагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры U пропорциональна только площади этой части и не зависит от ее расположения в фигуре U. Тогда вероятность попадания точки u в фигуру A определяется как отношение площадей

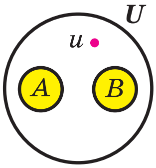


Рис. 22.10

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}. \qquad (5)$$

Поскольку благоприятствующим элементарным событием для рассмотренного события является попадание выбранной точки в фигуру A, то фигуру A можно назвать благоприятствующей этому событию, и тогда определение геометрической вероятности можно сформулировать следующим образом:

геометрической вероятностью события A **называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию** A**, к площади всей данной фигуры.**

Задача 1 Пусть круглая мишень радиуса 20 см разделена концентрическими окружностями с радиусами $R_k = 2(10 - k)$, где $k = 1, 2, \ldots, 9$, на 10 колец. Внутренний круг радиуса $R_9 = 2$ также назовем кольцом и будем считать, что $R_{10} = 0$, а $R_0 = 20$ (рис. 22.11). Стрелок попал в мишень. Будем считать, что стрелок выбил k очков, если он попал в k-е кольцо, то есть в кольцо между окружностями радиусов R_{k-1} и R_k (или попал в окружность радиуса R_{k-1}).

Обозначим событие A_k — стрелок выбил k очков и определим вероятность каждого из таких событий при $k = 1, 2, \ldots, 9, 10$.

▶ Если считать, что у стрелка точки попадания пуль равномерно распределены на круге мишени, то можно использовать

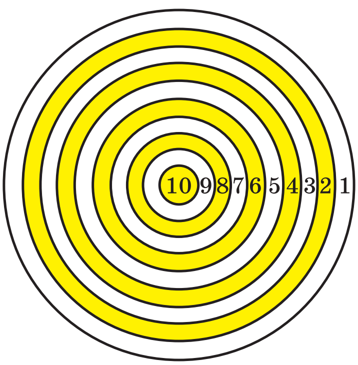


Рис. 22.11

геометрическое определение вероятности. Получаем $P(A_k)=\frac{S_{k\text{-го кольца}}}{S_{\text{мишени}}}$.

Учитывая, что

$$S_{k\text{–го кольца}}=\pi R_{k-1}^2-\pi R_k^2=4\pi(11-k)^2-4\pi(10-k)^2=4\pi(21-2k)$$

$$\text{и } S_{\text{мишени}}=\pi R_0^2=400\pi,$$

имеем $P(A_k)=\frac{21-2k}{100}$, где $k = 1, 2, \ldots, 9, 10$. ◁

Замечание 1. Назовем события A и B несовместными (событие A — точка попала в фигуру A, событие B — точка попала в фигуру B), если фигуры A и B не имеют общих точек (то есть множества точек фигур A и B не имеют общих элементов). *Сумму* событий $A + B$ и *произведение* $A \cdot B$ определим как объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ множеств точек фигур A и B.

Событие $\overline{A}$, *противоположное событию* A, определим как дополнение $\overline{A}$ множества точек фигуры A до множества U (то есть как множество всех точек фигуры U, не входящих в фигуру A).

Тогда приведенное определение геометрической вероятности удовлетворяет аксиомам 1–3, приведенным на с. 308.

● Действительно, $P(U)=\frac{S(U)}{S(U)}=1$, значит, аксиома 2 выполняется.

По свойству площади $S(A) > 0$, $S(U) > 0$, таким образом, $P(A) \geqslant 0$. Учитывая, что $A \subseteq U$ (см. рис. 22.10), получаем, что $S(A) \leqslant S(U)$, следовательно, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ (то есть аксиома 1 выполняется).
Если события A и B несовместны, то фигуры A и B не имеют общих точек. Тогда $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$. Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{S(A\cup B)}{S(U)}=\frac{S(A)+S(B)}{S(U)}=\frac{S(A)}{S(U)}+\frac{S(B)}{S(U)}=P(A)+P(B),$$

то есть выполняется и аксиома 3. ○

Поскольку разные определения вероятности удовлетворяют одним и тем же основным свойствам (аксиомам), то следствия, которые могут быть получены с использованием этих аксиом, не зависят от способа определения вероятности. Поэтому далее обоснования общих свойств вероятностей мы будем проводить для одного определения — или, как говорят в математике, для одной вероятностной модели — и иметь в виду, что аналогичное обоснование можно провести и для других моделей. Хотя, конечно, для каждой модели можно указать и свои специфические свойства, которых нет у других моделей.

Замечание 2. Определение геометрической вероятности (5) можно использовать не только в том случае, когда U — плоская фигура.

Если, например, U — пространственная фигура (тело), то в случае равномерного распределения вероятностей (в том понимании, что вероятности попадания точки u в части данного тела, имеющие одинаковые объемы, одинаковы и не зависят от положения этих частей в данном теле) в формуле (5) под записями $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать объемы тела U и его части — тела A.

Аналогично, если U — отрезок, то в случае равномерного распределения вероятностей (в том понимании, что вероятности попадания точки u в части данного отрезка, имеющие одинаковые длины, одинаковы и не зависят от положения этих частей на заданном отрезке) в формуле (5) под записями $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать длины отрезка U и его части — отрезка A.

Отметим, что объем тела U в пространстве, площадь плоской фигуры U на плоскости, длину отрезка U на прямой можно назвать *мерой* фигуры U. Тогда в общем виде формулу (5) можно записать так:

$$P(A)=\frac{\text{мера } A}{\text{мера } U},$$

то есть в общем случае

***геометрической вероятностью события A* называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию *A*, к мере всей заданной фигуры.**

Задача 2 Оля пообещала подруге Кате позвонить в промежутке от 9 ч до 10 ч. Найдите вероятность того, что их разговор начнется в промежутке от 9 ч 20 мин до 9 ч 25 мин.

▶ В этой задаче эксперимент — это фиксирование времени телефонного звонка. Изобразим все результаты эксперимента в виде отрезка AB (рис. 22.12). Элементарные события — это точки отрезка AB (Оля может позвонить Кате в любое время с 9.00 до 10.00). Если событие A — вызов произошел в промежутке 9.20–9.25, то элементарные события, благоприятствующие событию A, можно изобразить точками отрезка CD.

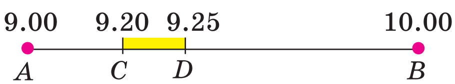


Рис. 22.12

Если считать, что время вызова в оговоренном промежутке распределяется равномерно, то

$$P(A)=\frac{\text{мера } CD}{\text{мера } AB}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}\approx 0{,}08.$$

(При вычислении учтено, что в минутах мера CD равна 5, а мера AB равна 60 (1 ч = 60 мин).) ◁

Задача 3* К сигнализатору поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T мин. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 мин. Найдите вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

▶ Выберем промежуток времени длительностью T, например $[0; T]$. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соответственно через x и y. Из условия задачи следует, что должны выполняться двойные неравенства: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Введем прямоугольную систему координат xOy. В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OTCT$ (рис. 22.13). Следовательно, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой задают все возможные значения моментов поступления сигналов.

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 мин, то есть если $|y - x| < 1$, что равносильно системе неравенств

$$y < x + 1 \text{ при } y > x, \quad (6)$$

$$y > x - 1 \text{ при } y < x. \quad (7)$$

Неравенства (9) выполняются для координат точек фигуры G, лежащих выше прямой $y = x$ и ниже прямой $y = x + 1$. Неравенства (10) имеют место для координат точек, расположенных ниже прямой $y = x$ и выше прямой $y = x - 1$.

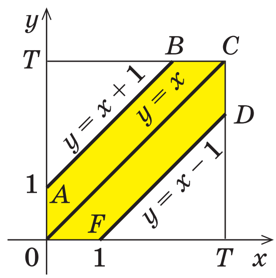


Рис. 22.13

Как видно из рис. 22.13, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (9) и (10), принадлежат закрашенному шестиугольнику $OABCDF$. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятными моментами времени x и y для срабатывания сигнализатора.

Учитывая, что площадь

$$g = 2S_{OABC} = 2\,(S_{\triangle OTC} - S_{\triangle ATB}) =$$

$$= 2S_{\triangle OTC} - 2S_{\triangle ATB} = T^2 - (T - 1)^2 = 2T - 1,$$

получаем, что искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G} = \frac{2T - 1}{T^2}. \ \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, в чем состоит эксперимент при геометрическом определении вероятности.
2. Дайте определение геометрической вероятности. В каких случаях его можно использовать? Приведите примеры.

Упражнения

1°. Егор и Даниил договорились: если стрелка вертушки (рис. 22.14) остановится на белом поле, то изгородь будет красить Егор, а если на синем поле — Даниил. У кого из мальчиков больше шансов красить изгородь?

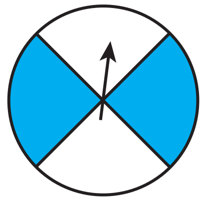


Рис. 22.14

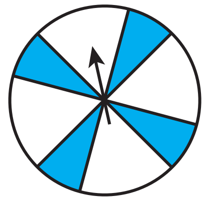


Рис. 22.15

2°. Два приятеля с помощью вертушки (рис. 22.15) решают, как им провести выходной: если стрелка остановится на белом, они пойдут в кино, если на синем — на стадион. Какое из событий вероятнее: приятели пойдут на стадион или в кино?

3°. Вы выиграете, если стрелка вертушки остановится на белом. Какая из вертушек, изображенных на рисунках рис. 22.16 и 22.17, дает вам больше шансов на выигрыш?

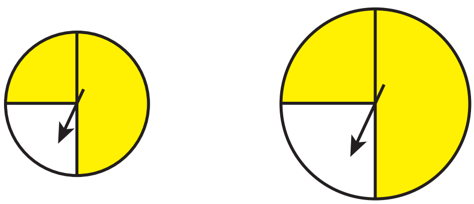


Рис. 22.16

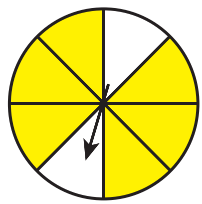


Рис. 22.17

4. В окружность радиуса R вписан квадрат. В круг, ограниченный данной окружностью, наугад поставили точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет находиться внутри квадрата, считая, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения в круге.

5. В сферу радиуса R вписан куб. В шар, ограниченный данной сферой, наугад бросили точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет находиться внутри куба, считая, что вероятность попадания точки в часть шара пропорциональна объему этой части и не зависит от ее расположения в шаре.

6. На отрезке L длиной 20 см расположили меньший отрезок l длиной 10 см. Найдите вероятность того, что точка, наугад поставленная на большом отрезке, попадет на меньший отрезок. Преполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

7*. *Задача о встрече.* Два друга договорились встретиться в определенном месте между 12 ч и 13 ч. Тот, кто придет первым, будет ждать второго $\frac{1}{4}$ ч, после чего покинет место встречи. Найдите вероятность того, что встреча произойдет, если каждый из друзей выбирает наугад момент своего прибытия (в промежутке от 12 ч до 13 ч).
Указание. Для упрощения графической иллюстрации будем считать, что встреча может произойти между 0 ч и 1 ч. Удобно обозначить время прибытия одного друга на место встречи через x, а другого — через y и ввести прямоугольную систему координат xOy.

22.5. НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

Таблица 36

<table>
<tr><td colspan="2">1. Понятие независимости двух событий</td></tr>
<tr><td>Содержание</td><td>Определение</td></tr>
<tr><td>Событие B называется независимым от события A, если событие A не изменяет вероятности события B.</td><td>События A и B называются независимыми, если выполняется равенство
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
(вероятность их произведения, то есть совместного появления, равна произведению вероятностей этих событий).</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Независимость нескольких событий</td></tr>
<tr><td colspan="2">Несколько событий называются независимыми, если для любого подмножества этих событий (содержащего два или больше событий) вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.
В частности,
если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Свойство независимых событий</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если мы имеем совокупность независимых событий, то, заменив некоторые из этих событий на противоположные им события, снова получим совокупность независимых событий. Например, если события A и B независимы, то независимыми будут также события
$$A \text{ и } \bar{B},\ \bar{A} \text{ и } B,\ \bar{A} \text{ и } \bar{B}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Вероятность того, что произойдет хотя бы одно из независимых событий
$A_1, A_2, \ldots, A_n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Событие B называется независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B. Общее определение независимости событий чаще всего формулируют следующим образом.

События A и B называются *независимыми*, если выполняется равенство

$$P\,(AB) = P\,(A) \cdot P\,(B), \tag{8}$$

то есть *два события называются независимыми, если вероятность их произведения (то есть совместного появления) равна произведению вероятностей этих событий.*

Равенство (8) обязательно будет выполняться, если одно из событий невозможно или достоверно. Например, если событие B — невозможное, то есть $B = \varnothing$, то $AB = \varnothing$. Следовательно, $P\,(AB) = 0$ и $P\,(B) = 0$, то есть равенство (13) выполняется. Если событие B — достоверное, то есть $B = U$, то $AB = AU = A$. Тогда $P\,(AB) = P\,(A)$ и $P\,(B) = 1$, следовательно, равенство (8) выполняется и в этом случае. Таким образом, *если хотя бы одно из двух событий невозможное или достоверное, то такие два события независимы.*

Обратим внимание, что в *случае, когда события A и B независимы, независимыми будут также события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.*

Докажем, например, что будут независимыми события A и $\bar{B}$. Если события A и B независимы, то по определению $P\,(AB) = P\,(A) \cdot P\,(B)$. Когда происходит событие A, то в это время событие B может происходить или не происходить. Следовательно, можно утверждать, что событие A происходит тогда и только тогда, когда происходят или события A и B, или события A и $\bar{B}$, то есть $A = AB + A\bar{B}$. Учитывая, что события AB и $A\bar{B}$ несовместны (поскольку события B и $\bar{B}$ — несовместны) и что $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, получаем: $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$. Тогда

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot(1 - P(B)) = P(A)\cdot P(\bar{B}),$$

А это и означает, что события A и $\bar{B}$ независимы.

Аналогично обосновывается независимость событий $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Понятие независимости событий может быть распространено на любое конечное количество событий.

Несколько событий называются *независимыми* (еще говорят: «независимыми в совокупности»), если для любого подмножества этих событий (содержащего два или более событий) вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.

Например, три события A, B, C будут независимыми, если выполняются условия:

$$P\,(AB) = P\,(A) \cdot P\,(B),\ P\,(AC) = P\,(A) \cdot P\,(C),\ P\,(BC) = P\,(B) \cdot P\,(C),$$
$$P\,(ABC) = P\,(A) \cdot P\,(B) \cdot P\,(C).$$

Из определения следует, что в случае, **когда события A_1, A_2, ..., A_n независимы, то**

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$$

(но выполнение этого равенства при $n > 2$ еще не означает, что события A_1, A_2, ..., A_n независимы).

Как и в случае двух событий, можно доказать, что если в некоторой совокупности независимых событий заменить какие-либо из них противоположными им событиями, то получится также совокупность независимых событий.

Отметим, что приведенные определения независимости событий в теоретико-вероятностном понимании соответствуют обычному пониманию независимости событий как отсутствию влияния одних событий на другие. Поэтому при решении задач можно пользоваться следующим принципом: *причинно-независимые события являются независимыми и в теоретико-вероятностном понимании.*

Задача 1 Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых на протяжении суток может выйти из строя независимо от других. Прибор не работает, если не работает хотя бы один из узлов. Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна 0,95, второго — 0,9, третьего — 0,85. Найдите вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно.

▶ Пусть событие A_1 — первый узел исправен, событие A_2 — второй узел исправен, событие A_3 — третий узел исправен, событие A — в течение суток прибор работает безотказно. Поскольку прибор работает безотказно тогда и только тогда, когда исправны все три узла, то $A = A_1A_2A_3$. По условию события A_1, A_2, A_3 — независимые, следовательно,

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}72675 \approx 0{,}73.$$ ◁

Задача 2 Два стрелка сделали по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попасть в мишень для первого стрелка равна 0,9, для второго — 0,8. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена.

▶ Рассмотрим такие события: A — первый стрелок попал в мишень, B — второй стрелок попал в мишень, C — мишень поражена. События A и B независимые, но непосредственно использовать в данном случае умножение вероятностей нельзя, поскольку событие C наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них.

Будем рассуждать иначе. Рассмотрим события $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, противоположные соответственно событиям A, B, C. Поскольку события A и B независимые, то события $\bar{A}$, $\bar{B}$ — также независимые. Если $P(A) = 0{,}9$, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Если

$$P(B) = 0{,}8, \text{ то } P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Учитывая, что мишень не будет поражена тогда и только тогда, когда в нее не попадет ни первый стрелок, ни второй, получаем, что $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. Тогда

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Поскольку события C и $\bar{C}$ противоположные, то

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98. \triangleleft$$

З а м е ч а н и е. Рассуждения, приведенные при решении задачи 2, можно обобщить.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимые, то события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ также независимые (и $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$). Для нахождения вероятности появления хотя бы одного из независимых событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$, то есть события $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, можно найти вероятность противоположного события $\bar{C}$. Событие $\bar{C}$ произойдет тогда и только тогда, когда не произойдет ни событие A_1, ни событие $A_2, \ldots,$ ни событие A_n, то есть $\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$. Тогда

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) =$$
$$= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Учитывая, что $P(C) = 1 - P(\bar{C})$, получаем, что *вероятность появления хотя бы одного из независимых событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).}$$

Разумеется, приведенную формулу необязательно запоминать, достаточно при решении задач на нахождение вероятности появления хотя бы одного из независимых событий провести вышеизложенные рассуждения.

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каком случае событие B называется независимым от события A.
2. Дайте определение независимости двух событий. Пользуясь этим определением, докажите, что в эксперименте по вытягиванию карт из колоды (36 карт) независимыми являются события: A — вытянули даму, B — вытянули бубновую карту.
3*. Известно, что события A и B независимые. Обоснуйте независимость событий $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.
4. Объясните, как понимают независимость (то есть независимость в совокупности) трех событий K, M, N.
5. Запишите формулу для нахождения вероятности произведения нескольких независимых событий. Приведите пример ее использования.

Упражнения

1°. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,8. Стрелок сделал два выстрела. Найдите вероятность того, что при двух выстрелах стрелок попал в цель.

2°. Одновременно подбросили монету и игральный кубик. Найдите вероятность одновременного выпадения «герба» на монете и 1 очка на кубике.

3°. В одной партии электролампочек 3 % бракованных, а во второй — 4 % бракованных. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Найдите вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными.

4. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что на одном кубике выпадет 1 очко, а на втором — больше трех очков.

5. Три стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны 0,8, 0,75, 0,7, делают по одному выстрелу по одной мишени. Найдите вероятность того, что:

1°) все три стрелка попадут в мишень;

2) хотя бы один из стрелков попадет в мишень;

3) только один из стрелков попадет в мишень;

4) только двое из стрелков попадут в мишень.

6. Вероятность остановки за смену одного из станков, работающих в цехе, равна 0,15, а другого — 0,16. Найдите вероятность того, что оба станка за смену не остановятся.

7. Прибор содержит два независимых элемента. Вероятности отказа элементов равны соответственно 0,05 и 0,08. Найдите вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

8*. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

9*. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,5. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 попасть в цель хотя бы один раз?

22.6. ПОНЯТИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие случайной величины. Под *случайной величиной* в теории вероятностей понимают переменную величину, которая в данном случайном эксперименте может принимать те или иные числовые значения с определенной вероятностью. Обозначают случайные величины прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z, ..., а их значения — соответствующими строчными буквами: x, y, z, ... Тот факт, что случайная величина X приняла значение x, записывают так: $X = x$.

Например, в п. 22.1 (с. 295) были найдены вероятности появления той или иной суммы очков при бросании двух игральных кубиков. Появляющаяся сумма очков — случайная величина. Обозначим ее через X.

Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, ..., $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ — значения случайной величины X. Эти значения и соответствующие им значения вероятности (p_1, p_2, ..., p_{10}, p_{11}*) приведены в таблице:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко увидеть, какие значения величина X принимает с одинаковыми вероятностями, какое значение величины X появляется с большей вероятностью и т. д. Такую таблицу называют *таблицей распределения значений случайной величины по их вероятностям* и говорят, что эта таблица задает *закон распределения* рассматриваемой *случайной величины*.

Приведем определение рассмотренных понятий. Отметим, что случайную величину можно задать в любом случайном эксперименте. Для этого достаточно каждому элементарному событию из пространства элементарных событий эксперимента поставить в соответствие некоторое число (в этом случае говорят, что задана числовая функция, областью определения которой является пространство элементарных событий).

Случайной величиной **называется числовая функция, областью определения которой является пространство элементарных событий.**

Например, в эксперименте с подбрасыванием монеты пространство элементарных событий состоит из двух событий: u_1 — выпал «герб», u_2 — выпало «число». Эти события несовместны, и в результате эксперимента обязательно произойдет только одно из них. Поставим в соответствие событию u_1 число 1, а событию u_2 — число 0 (то есть будем считать, что в случае появления «герба» выпадает число 1, а в случае появления «числа» выпадает 0). Тогда получим случайную величину X, которая принимает только два значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ ($X\ (u_1) = x_1 = 1$, $X\ (u_2) = x_2 = 0$). Рассмотренную функцию — случайную величину X — можно задать также с помощью следующей таблицы:

Результат эксперимента	u_1 — выпал «герб»	u_2 — выпало «число»
Значение X	1	0

Закон распределения этой случайной величины задается таблицей:

X	1	0
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

* Таким образом, через p_i обозначена вероятность события — случайная величина X приняла значение x_i. Это можно записать так: $P\ (X = x_i) = p_i$ (где $i = 1, 2, ..., 11$).

Отметим, что закон распределения каждой случайной величины устанавливает соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями, то есть является функцией, область определения которой — все значения случайной величины. Поэтому

законом распределения случайной величины X **называется функция, которая каждому значению** x **случайной величины** X **ставит в соответствие число** $P(X = x)$ **(вероятность события, состоящего в том, что случайная величина** X **приняла значение** x**).**

В общем случае закон распределения случайной величины, принимающей только n значений, можно записать в виде таблицы:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные значения случайной величины X, а $p_i = P(X = x_i)$ (где $i = 1, 2, \ldots, n$) — вероятности, с которыми X принимает эти значения.

События $(X = x_1), (X = x_2), \ldots, (X = x_n)$ попарно несовместны. Их сумма является достоверным событием, поэтому сумма вероятностей этих событий равна 1, следовательно,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Это равенство часто используют для проверки правильности задания закона распределения случайной величины, особенно в тех случаях, когда он задается не в результате теоретического расчета вероятностей событий с использованием классического определения вероятности, а в результате использования статистического определения вероятности.

Например, в экспериментах с подбрасыванием пуговицы с ушком для пришивания падение пуговицы на ушко или на лицевую сторону может быть рассмотрено как случайная величина Y с условными значениями $y_1 = 1$ (падение на ушко) и $y_2 = 0$ (падение на лицевую сторону). Результаты серии экспериментов с некоторой пуговицей представлены в таблице, задающей закон распределения случайной величины.

Y	1	0	(проверка: 0,45 + 0,55 = 1)
P	0,45	0,55	

Замечание. В том случае, когда приходится находить сумму всех значений некоторой величины, можно использовать знак $\sum$ (сигма, читается: «сумма»), введенный Л. Эйлером (1707–1783). Например, если вероятность P принимает значения $P_1, P_2, \ldots, P_k$, то введем обозначение*:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \sum P.$$

* Указанная сумма точнее записывается так: $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$.

Используя это обозначение, проверку правильности составления последней таблицы можно записать следующим образом:

$$\sum P = 0{,}45 + 0{,}55 = 1.$$

Рассмотренные в этом пункте случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от латинского *discretus* — раздельный, прерывистый), а распределение вероятностей такой величины называется *дискретным распределением вероятностей*.

Если случайная величина может принимать любое значение на некотором промежутке, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке является непрерывной случайной величиной.

2. Математическое ожидание случайной величины. Дадим определение этого понятия для дискретной случайной величины.

Пусть случайная величина X, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, задана законом распределения:

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1	p_2	…	p_k

Сумма произведений всех значений случайной величины на соответствующие вероятности называется *математическим ожиданием величины X* (*и обозначается MX* (*или M* (*X*)):

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k. \qquad (9)$$

Если значения случайной величины X имеют одну и ту же вероятность p, то, учитывая, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, получаем $kp = 1$ и $p = \frac{1}{k}$.

Тогда $MX = x_1p + x_2p + \ldots + x_kp = p(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}$,

то есть в этом случае математическое ожидание случайной величины X равно среднему арифметическому всех ее значений.

Говорят, что *математическое ожидание случайной величины есть среднее взвешенное (вероятностями) ее значений.*

Математическое ожидание называют еще средним значением случайной величины. Иногда также говорят, что математическое ожидание случайной величины есть ее *значение в среднем*.

Математическое ожидание показывает, на какое среднее значение случайной величины X можно надеяться в результате длительной серии экспериментов. С помощью математического ожидания можно сравнивать случайные величины, заданные законами распределения.

Например, пусть количества очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух ловких стрелков, имеют следующие законы распределения:

X	8	9	10
P	0,4	0,1	0,5

Y	8	9	10
P	0,1	0,6	0,3

Чтобы выяснить, какой из стрелков стреляет более метко, находят математическое ожидание для каждой случайной величины:

$$MX = 8 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}5 = 9{,}1;$$

$$MY = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}3 = 9{,}2.$$

Следовательно, среднее количество очков, выбиваемое при одном выстреле, у второго стрелка несколько больше, чем у первого. Это дает основание сделать вывод о том, что второй стрелок стреляет немного лучше, чем первый.

Понятие математического ожидания возникло в связи с изучением азартных игр. Приведем примеры.

Пример 1 Игрок вносит в банк игорного дома 1000 грн. Бросают игральный кубик. По правилам игры игрок может получить 1800 грн., если случится событие A_1 — выпадет 6 очков; 1200 грн., если случится событие A_2 — выпадет или 4, или 5 очков; 0 грн., если случится событие A_3 — выпадет или 1, или 2, или 3 очка.

Будем считать, что игрок получает X грн., то есть X — случайная величина, которая может принимать значения $x_1 = 1800$, $x_2 = 1200$, $x_3 = 0$ соответственно с вероятностями

$$p_1 = p(A_1) = \frac{1}{6},\ \ p_2 = p(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ \ p_3 = p(A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ где } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины X равно

$$MX = 1800 \cdot \frac{1}{6} + 1200 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 700.$$

Математическое ожидание — очень важный показатель игры. Многочисленные опыты показывают, что в нашем случае число $MX = 700$ — это та сумма, которую в среднем игорный дом выплачивает каждому игроку. Но это означает, что каждый игрок в среднем теряет 300 грн. из внесенных в банк игорного дома 1000 грн.

Пример 2 Игрок вынимает из колоды (в 36 карт) одну карту. Он получает (то есть выигрывает) 10 грн., если вынет бубнового туза; 5 грн., если вынет бубнового короля, и кладет на стол 1 грн. (то есть проигрывает, но можно сказать, что выигрывает –1 грн.) в остальных случаях.

Будем считать, что игрок получает X грн., где X — случайная величина, которая может принимать значения $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$ соответственно с вероятностями

$$p_1 = \frac{1}{36},\ \ p_2 = \frac{1}{36},\ \ p_3 = \frac{34}{36}, \text{ где } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины X равно

$$MX = 10 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + (-1) \cdot \frac{34}{36} = -\frac{19}{36}.$$

Это означает, что каждый игрок в среднем теряет $\frac{19}{36}$ грн.

Пример 3 *Задача Паскаля.* Два игрока A и B согласились, что в их игре вся ставка достанется тому, кто первый выиграет 5 партий. Но игра оказалась прерванной, когда игрок A имел 4 выигрыша, а игрок B — 3 выигрыша. В каком отношении игроки должны разделить ставку в этой прерванной игре? В каждой партии выигрывает один из игроков — ничьих нет; вероятность выигрыша каждого игрока в одной партии считается равной 0,5.

Рассмотрим, какие случаи могли бы произойти, если бы игроки сыграли еще две партии (независимо от их первоначальной договоренности):

1) игрок B выиграет обе партии; 2) игрок B выиграет первую партию, но проиграет вторую; 3) игрок B проиграет первую партию, но выиграет вторую; 4) игрок B проиграет обе партии.

По первоначальному соглашению всю игру выиграет первый игрок в трех из этих четырех случаев, второй — лишь в одном. Следовательно, вероятность события A (игрок A выиграл всю игру) равна $\frac{3}{4}$, а вероятность события B (игрок B выиграл всю игру) равна $\frac{1}{4}$.

Если ставка равна m грн., то игрок A получил бы X_A грн., где X_A — случайная величина, которая принимает значение m с вероятностью $\frac{3}{4}$ и значение 0 с вероятностью $\frac{1}{4}$, а игрок B получил бы X_B грн., где X_B — случайная величина, которая принимает значение m с вероятностью $\frac{1}{4}$ и значение 0 с вероятностью $\frac{3}{4}$.

Найдем математическое ожидание величин X_A и X_B, то есть найдем, сколько в среднем получил бы каждый игрок:

$$M(X_A) = m \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}m, \quad M(X_B) = m \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}m.$$

Следовательно, в среднем игроки разделили бы ставку m в отношении 3 : 1, поэтому ставку надо разделить в отношении математических ожиданий $M(X_A) : M(X_B)$, то есть в отношении 3 : 1.

Вопросы для контроля

1. а) Объясните, что такое случайная величина для данного случайного эксперимента. Приведите примеры. б*) Дайте определение случайной величины. Пользуясь определением, задайте какую-то случайную величину для эксперимента с подбрасыванием двух монет.
2. Объясните, что такое закон распределения случайной величины. Приведите примеры.
3. Закон распределения случайной величины, принимающей только n значений, задан в виде таблицы. Как можно проверить правильность заполнения строки со значениями вероятностей в этой таблице?
4. Дайте определение математического ожидания случайной величины X.

Упражнения

1°. Составьте таблицу распределения по вероятностям P случайной величины X — числа очков, выпадающих при бросании игрального кубика.

2. Имеется 3 игральных кубика, на гранях которых отмечены только одно или два очка: у кубика A одно очко встречается на гранях один раз, у кубика B — 2 раза, а у кубика C — 3 раза (рис. 22.18). Случайные величины X, Y и Z — число очков, выпавших соответственно на каждом из кубиков A, B и C. Задайте законы распределения случайных величин X, Y и Z с помощью соответствующих таблиц.

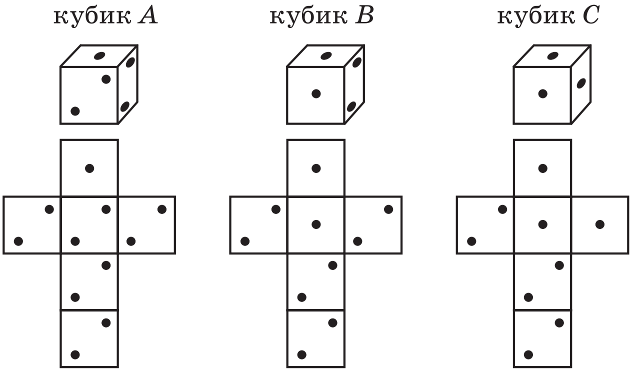


Рис. 22.18

3. Подбрасывают две монеты. Результату «герб» припишем условное числовое значение 0, а результату «число» — 1. Составьте таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы чисел, выпавших на монетах.

4*. Трижды подбрасывают монету. Случайная величина X — число выпадений «герба». Задайте закон распределения случайной величины X с помощью таблицы.

5. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей:

1)

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

2)

X	4	5	8	10	12
P	0,4	0,1	0,05	0,95	0,4

Найдите математическое ожидание этой величины.

6. Подбрасывают игральный кубик. Найдите математическое ожидание величины X — числа выпавших очков.

7. Выигрыши (в условных единицах), которые приходятся на один билет в каждой из двух лотерей, имеют следующие законы распределения:

X	0	1	5	10
P	0,9	0,06	0,03	0,01

Y	0	1	5	10
P	0,85	0,12	0,02	0,01

Какой из этих лотерей вы отдали бы предпочтение?

Будем называть игру справедливой, если в среднем будет одинаковым число очков или денег, получаемых каждым игроком. Определите, является ли справедливой игра, описанная в задачах **(8–11)**.

8. Подбрасывают две монеты. Игрок A получает 3 очка, если выпадают два «герба», 0 очков — в других случаях. Игрок B получает 2 очка, если выпадают «герб» и «число», 0 очков — в других случаях.

9. Подбрасывают две монеты. Игрок A получает 2 очка, если выпадают два «числа», 0 очков — в других случаях. Игрок B получает 1 очко, если выпадают «герб» и «число», 0 очков — в других случаях.

10. Бросают две игральные кости. Игрок A получает 6 очков, если выпадает сумма не более 7 очков, 0 очков — в других случаях. Игрок B получает 7 очков, если выпадает сумма более 7 очков, 0 очков — в других случаях.

11*. Подбрасывают две монеты. Игрок A получает a очков, если выпадают два «герба», 0 очков — в других случаях. Игрок B получает b очков, если выпадают «герб» и «число», 0 очков — в других случаях. Найдите отношение $a : b$, при котором эта игра будет справедливой.

12. *Задача Луки Пачоли* (1494 г.). Двое игроков играют до трех выигрышей. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй — одну, игра прервалась. Как справедливо разделить ставку 210 ливров (ливр — серебряная монета)?

13*. *Задача Пьера Ферма* (1654 г.). Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

§ 23 ПОНЯТИЕ О СТАТИСТИКЕ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДОВ ДАННЫХ

23.1. ПОНЯТИЕ О СТАТИСТИКЕ. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА

1. Понятие о статистике. «Статистика знает все», — утверждали И. Ильф и Е. Петров в своем знаменитом романе «Двенадцать стульев» и продолжали: «Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики... Известно, сколько в стране охотников, балерин, станков, собак всех пород, велосипедов, памятников, девушек, маяков и швейных машинок... Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли, глядит на нас из статистических таблиц!»

Это ироничное описание дает достаточно точное представление о *статистике* (от латинского *status* — состояние) — *науке, изучающей, обрабатывающей и анализирующей количественные данные о разнообразнейших массовых явлениях в жизни*. Экономическая статистика изучает изменение цен, спроса и предложения товаров, прогнозирует рост и падение производства и потребления. Медицинская статистика изучает эффективность разных лекарств и методов лечения, вероятность возникновения некоторых заболеваний в зависимости от возраста, пола, наследственности, условий жизни, вредных привычек, прогнозирует распространение эпидемий. Демографическая статистика изучает рождаемость, численность населения, его состав (возрастной, национальный, профессиональный). А есть еще статистика финансовая, налоговая, биологическая, метеорологическая...

Статистика имеет многовековую историю. Уже в Древнем мире вели статистический учет населения. Однако случайное толкование статистических данных, отсутствие строгой научной базы статистических прогнозов даже в середине XIX в. еще не позволяли говорить о статистике как науке. Только в XX в. появилась математическая статистика — наука, опирающаяся на законы теории вероятностей. Выяснилось, что статистические методы обработки данных из самых разных областей жизни имеют много общего. Это позволило создать универсальные научно обоснованные методы статистических исследований и проверки статистических гипотез. Таким образом,

> ***математическая статистика* — это раздел математики, изучающий математические методы обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.**

В математической статистике рассматриваются методы, которые дают возможность по результатам экспериментов (статистическим данным) делать определенные выводы вероятностного характера.

Математическая статистика подразделяется на две обширные области: 1) *описательная статистика*, которая рассматривает методы описания статистических данных, их табличное и графическое представление и пр.; 2) *аналитическая статистика* (теория статистических выводов), которая рассматривает обработку данных, полученных в ходе эксперимента, и формулировку выводов, имеющих прикладное значение для конкретной области человеческой деятельности. Теория статистических выводов тесно связана с теорией вероятностей и базируется на ее математическом аппарате.

Среди основных задач математической статистики можно отметить следующие.

1. **Оценка вероятности**. Пусть некоторое случайное событие имеет вероятность $p > 0$, но ее значение нам неизвестно. Требуется оценить эту вероятность по результатам экспериментов, то есть решить задачу об оценке вероятности через частоту.
2. **Оценка закона распределения.** Исследуется некоторая случайная величина, точное выражение для закона распределения которой нам неизвестно. Необходимо по результатам экспериментов найти приближенное выражение для функции, задающей закон распределения.
3. **Оценка числовых характеристик случайной величины** (например, математического ожидания — см. п. 22.6).
4. **Проверка статистических гипотез** (предположений). Исследуется некоторая случайная величина. Исходя из определенных рассуждений, выдвигается, например, гипотеза о распределении этой случайной величины. Необходимо по результатам экспериментов принять или отвергнуть эту гипотезу.

Результаты исследований, проводимых методами математической статистики, применяются для принятия решений. В частности, при планировании и организации производства, при контроле качества продукции, при выборе оптимального времени наладки или замены действующей аппаратуры (например, при определении времени замены двигателя самолета, отдельных частей станков и т. д.).

Как и в каждой науке, в статистике используются свои специфические термины и понятия. Некоторые из них приведены в табл. 37. Запоминать их определения необязательно, достаточно понимать их смысл.

Таблица 37

Часто употребляемый термин	Смысл термина	Научный термин	Определение
Общий ряд данных	То, откуда выбирают	**Генеральная совокупность**	*Множество всех возможных результатов наблюдения (измерения)*

Окончание табл. 37

Выборка	То, что выбирают	**Статистическая выборка, статистический ряд**	*Множество результатов, реально полученных в данном наблюдении (измерении)*
Варианта	Значение одного из результатов наблюдения (измерения)	**Варианта**	*Одно из значений элементов выборки*
Ряд данных	Значения всех результатов наблюдения (измерения)	**Вариационный ряд**	*Упорядоченное множество всех вариант*

2. Генеральная совокупность и выборка. Для изучения различных массовых явлений проводятся специальные статистические исследования. Любое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называют *этапом статистических наблюдений*. Для получения статистических данных в результате наблюдений похожие элементы некоторой совокупности сравнивают по разным признакам. Например, учащихся 11 классов можно сравнивать по росту, размеру одежды, успеваемости и пр. Болты можно сравнивать по длине, диаметру, массе, материалу и другим характеристикам. Практически любой признак или непосредственно измеряется, или может получить условную числовую характеристику (см. пример с выпадением «герба» или «числа» при подбрасывании монеты на с. 322). Таким образом, некоторый признак элементов совокупности можно рассматривать как величину, принимающую те или иные числовые значения.

При изучении реальных явлений часто бывает невозможно обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выяснить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, потому что полная проверка приведет к уничтожению всей партии бумаги. В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, называемой *генеральной совокупностью,* обследуют ее значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют *выборкой*, а число элементов в выборке называется *объемом выборки*.

Если в выборке все основные признаки генеральной совокупности представлены в той же пропорции и с той же относительной частотой, с которой данный признак выступает в данной генеральной совокупности, то эту выборку называют *репрезентативной* (от французского *représentatif* — показательный).

Иными словами, репрезентативная выборка представляет собой меньшую по размеру, но точную модель той генеральной совокупности, которую она должна отражать. В той степени, в какой выборка является репрезентативной, выводы, основанные на изучении этой выборки, можно с большой долей уверенности считать применимыми ко всей генеральной совокупности.

Понятие репрезентативности отобранной выборки не означает ее полного представительства по всем признакам генеральной совокупности, поскольку это практически обеспечить невозможно. Отобранная из всей совокупности часть должна быть репрезентативной относительно тех признаков, которые изучаются.

Чтобы выборка была репрезентативной, она должна быть выделена из генеральной совокупности случайным образом. Этого можно достичь различными способами. Чаще всего используют следующие виды выборок: 1) *собственно-случайную*; 2) *механическую*; 3) *типическую*; 4) *серийную*. Кратко охарактеризуем каждую из них.

1) Члены генеральной совокупности можно предварительно занумеровать и каждый номер записать на отдельной карточке. После тщательного перемешивания будем отбирать наугад из пачки таких карточек по одной и таким образом получим выборочную совокупность любого нужного объема, которая называется *собственно-случайной выборкой*. Номера на отобранных карточках укажут, какие члены генеральной совокупности попали в выборку. (Заметим, что при этом возможны два принципиально различных способа отбора карточек в зависимости от того, возвращается или не возвращается обратно вынутая карточка после записи ее номера.) Собственно-случайную выборку заданного объема n можно образовать и с помощью так называемых таблиц случайных чисел или генератора случайных чисел на компьютере. *При образовании собственно-случайной выборки каждый член генеральной совокупности с одинаковой вероятностью может попасть в выборку.*
2) Выборка, в которую члены из генеральной совокупности отбираются через определенный интервал, называется *механической*. Например, если объем выборки должен составлять 5 % объема генеральной совокупности (5 %-ная выборка), то отбирается ее каждый 20-й член, при 10 %-ной выборке — каждый 10-й член генеральной совокупности и т. д. Механическую выборку можно образовать, если имеется определенный порядок следования членов генеральной совокупности, например, если они следуют друг за другом в определенной последовательности во времени. Именно так появляются изготовленные на станке детали, приборы, сошедшие с конвейера, и т. п. При этом необходимо убедиться, что в следующих один за другим членах генеральной совокупности значения признака не изменяются с той же (или кратной ей) периодичностью, что и периодичность отбора элементов

в выборку. Например, пусть из продукции металлообрабатывающего станка в выборку попадает каждая пятая деталь, а после каждой десятой детали рабочий производит смену (или заточку) режущего инструмента и наладку станка. Эти операции рабочего направлены на улучшение качества деталей (износ режущего инструмента происходит более или менее равномерно). Следовательно, в выборочную совокупность попадут детали, на качество которых работа станка влияет в одну и ту же сторону, и значения признака выборочной совокупности могут неправильно отразить соответствующие значения признака генеральной совокупности.

3) Если из предварительно разбитой на непересекающиеся группы генеральной совокупности образовать собственно-случайные выборки из каждой группы (с повторным или бесповторным отбором членов), то отобранные элементы составят выборочную совокупность, которая называется *типической*.
4) Если генеральную совокупность предварительно разбить на непересекающиеся серии (группы), а затем, рассматривая серии как элементы, образовать собственно-случайную выборку (с повторным или бесповторным отбором серий), то все члены отобранных серий составят выборочную совокупность, которая называется *серийной*.

Например, пусть на заводе 150 станков (10 цехов по 15 станков) производят одинаковые изделия. Если в выборку отбирать изделия из тщательно перемешанной продукции всех 150 станков, то образуется собственно-случайная выборка. Но можно отбирать изделия отдельно из продукции первого, второго и т. д. станков. Тогда будет образована типическая выборка. Если же членами генеральной совокупности считать цеха и сначала образовать собственно-случайную выборку цехов, а потом в каждом из отобранных цехов взять все произведенные изделия, то все отобранные изделия (из всех отобранных цехов) составят серийную выборку.

Как уже отмечалось, практически любой изучаемый признак X может быть непосредственно измерен или получить числовую характеристику. Поэтому первичные экспериментальные данные, характеризующие выделенную выборку, обычно представлены в виде набора чисел, записанных исследователем в порядке их поступления. Количество (n) чисел в этом наборе — *объем выборки*, а численность (m) варианты (одного из значений элементов выборки) называют *частотой варианты*. Отношение $\frac{m}{n}$ называют *относительной частотой* (W) *варианты*.

Используя эти понятия, запишем соотношение между ними в репрезентативной выборке.

Пусть S — объем генеральной совокупности, n — объем репрезентативной выборки, в которой k значений исследуемых признаков распределены по частотам M_1, M_2, ..., M_k, где $\sum M = n$. Тогда в генеральной совокупности частотам M_1, M_2, ..., M_k будут соответствовать частоты $s_1, s_2, \ldots, s_k$ тех же значений признака, что и в выборке ($\sum s = S$). По определению репрезентативной выборки получаем:

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S},$$

где i — порядковый номер значения признака ($1 \leqslant i \leqslant k$). Из этого соотношения находим:

$$s_i = SW_i \quad \left(\text{или } s_i = S\frac{M_i}{n}\right), \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (1)$$

Пример Обувной цех должен выпустить 1000 пар кроссовок молодежного фасона. Для того чтобы определить, сколько кроссовок и какого размера необходимо выпустить, были выявлены размеры обуви у 50 случайным образом выбранных подростков. Распределение размеров обуви по частотам представлено в таблице:

Размер (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1

$\sum M = n = 50$

Сколько кроссовок разного размера будет изготавливать фабрика?

Решение

Будем считать рассмотренную выборку объемом $n = 50$ подростков репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности (объемом $S = 1000$) количество кроссовок каждого размера пропорционально количеству кроссовок соответствующего размера в выборке (и для каждого размера находится по формуле (1)). Результаты расчетов будем записывать в таблицу:

Размер (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\sum M = n = 50$
Относительная частота (W)	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\sum W = 1$
Количество кроссовок (SW)	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\sum(SW) = S = 1000$

Ответ:

Размер	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Количество кроссовок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

В сельском хозяйстве для определения количественного соотношения продукции разного сорта пользуются так называемым *выборочным* *методом.* Суть этого метода будет ясна из описания следующего опыта, теоретическую основу которого составляет закон больших чисел.

В коробке тщательно перемешан горох двух сортов: зеленый и желтый. Небольшой емкостью, например ложкой, вынимают из разных мест коробки порции гороха. В каждой порции подсчитывают число M желтых горошин и число n всех горошин. Для каждой порции находят относительную частоту появления желтой горошины $W = \frac{M}{n}$. Так делают k раз (на практике обычно берут $5 < k < 10$) и каждый раз вычисляют относительную частоту. За статистическую вероятность извлечения желтой горошины из коробки принимают среднее арифметическое полученных относительных частот W_1, W_2, ..., W_k:

$$W_{\text{ср}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие задачи решают статистика и математическая статистика.
2. Объясните, как вы понимаете термины: генеральная совокупность, выборка, репрезентативная выборка. Приведите примеры.

Упражнения

1. Определите, какую из предложенных выборок в последнем столбце можно считать репрезентативной.

№	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
1°	Партия одинаковых деталей объемом 10 000 штук	Определение числа бракованных деталей в партии	1) 100 деталей, лежащих рядом; 2) 100 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии
2°	Все бродячие собаки областного центра	Определение числа собак, больных чумкой	1) Одна собачья стая; 2) по нескольку случайным образом отловленных собак из каждого района города
3°	Все работы государственной итоговой аттестации по математике учащихся 9 классов школ города	Определение соотношения между числом учащихся, находящихся на низком, среднем и высоком уровнях учебных достижений по математике	1) 10 работ, взятых случайным образом из числа всех работ; 2) 100 работ, взятых случайным образом из числа всех работ; 3) 100 работ учащихся одной школы

№	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
4°	Партия штампованных деталей объемом 100 000 штук	Определение средней массы детали в партии	1) 2 детали; 2) 100 деталей, изготовленных последними; 3) 50 деталей, случайным образом выбранных из партии
5	Бидон молока	Определение жирности молока (в процентах)	1) Ложка молока, взятая с поверхности через 2 ч после доения; 2) стакан молока, налитый из бидона после охлаждения его в погребе в течение 2 ч; 3) ложка молока, взятая после тщательного перемешивания молока
6	Урожай зерна с площади 1000 га	Определение урожайности зерна на этом поле	1) Урожай зерна с северного склона холма площадью 1 га; 2) среднее арифметическое урожайности зерна с двух соседних участков площадью 1 га: северного и восточного склонов холма; 3) среднее арифметическое урожайностей зерна с 10 участков, площадью 10 соток, выбранных на поле случайным образом

2. В отрывке из художественного произведения некоего автора объемом 600 слов деепричастия встречаются 72 раза. Определите ориентировочное количество деепричастий в отрывке объемом 2000 слов этого же автора.

3. Среди случайным образом выбранных 100 молодых людей, которые летом носят кепки, провели опрос о цветовых предпочтениях для этого вида головных уборов. Результаты опроса отображены в таблице:

Цвет	Черный	Красный	Синий	Серый	Белый	Желтый	Зеленый
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, предложите рекомендации швейной фабрике по количеству выпуска кепок каждого цвета, если фабрика должна выпустить 30 000 кепок.

4. Молокозавод выпускает молоко разной жирности. В продуктовых магазинах города, для которых завод производит молоко, был проведен опрос 50 наугад выбранных покупателей о том, какой жирности молоко они предпочитают. Результаты опроса представлены в таблице:

Жирность молока (в %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,2	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, дайте рекомендации молокозаводу по объему выпуска молока каждого вида, если молокозавод должен выпускать 2000 л молока ежедневно.

23.2. ТАБЛИЧНОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДОВ ДАННЫХ

Таблица 38

Определение	Пример
Ранжирование ряда данных	
Под *ранжированием ряда данных* понимают расположение элементов этого ряда в порядке возрастания (имеется в виду, что каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего).	Если ряд данных выборки имеет вид 5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4, то после ранжирования он превращается в ряд 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. (*)
Размах выборки ***(R)***	
***Размах выборки* — это разность между наибольшим и наименьшим значениями величины в выборке.**	Для ряда (*) размах выборки: $R = 9 - 3 = 6.$
Мода ***(Mo)***	
***Мода* — это значение элемента выборки, встречающееся чаще остальных.**	В ряду (*) значение 4 встречается чаще всего, итак, ***Mo*** = 4.
Медиана ***(Me)***	
***Медиана* — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений:** — *если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине;* — *если количество чисел в ряду четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.*	Для ряда (*), в котором 9 членов, медиана — это среднее (то есть пятое) число 5: $Me = 5.$ Если рассмотреть ряд 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9, в котором 10 членов, то медиана — это среднее арифметическое пятого и шестого членов: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$

Окончание табл. 38

<table>
<tr><th colspan="2">Среднее значение $(\overline{X})$ выборки</th></tr>
<tr><td>
Средним значением выборки называется среднее арифметическое всех чисел ряда данных выборки.
Если в ряду данных записаны значения x_1, x_2, ..., x_n (среди которых могут быть и одинаковые), то
$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (**)$$
Если известно, что в ряду данных различные значения x_1, x_2, ..., x_k встречаются соответственно с частотами m_1, m_2, ..., m_k (тогда $\sum M = n$), то среднее арифметическое можно вычислить по формуле
$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_k m_k}{n}.$$
</td><td>
Пусть ряд данных задан таблицей распределения его различных значений по частотам M:
<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>
$$\sum M = n = 8.$$
Тогда по формуле (**)
$$\overline{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$
или по другой формуле
$$\overline{X} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25.$$
</td></tr>
</table>

1. Табличное и графическое представление данных. Полигоны частот. Как уже отмечалось, практически любой изучаемый признак X может быть непосредственно измерен или получить числовую характеристику. Поэтому первичные экспериментальные данные, характеризующие выделенную выборку, обычно представлены в виде набора чисел, записанных исследователем в порядке их поступления. Если данных много, то полученный набор чисел трудно обозрим и сделать по нему какие-то выводы очень сложно. Поэтому первичные данные нуждаются в обработке, которая обычно начинается с их группировки.

Группировка выполняется различными методами в зависимости от целей исследования, вида изучаемого признака и количества экспериментальных данных (объема выборки). Наиболее часто группировка сводится к представлению данных в виде таблиц, в которых различные значения элементов выборки упорядочены по возрастанию и указаны их частоты (то есть количество каждого элемента в выборке). При необходимости в этой таблице указывают также относительные частоты для каждого элемента, записанного в первой строке. Такую таблицу часто называют *рядом распределения* (или *вариационным рядом*).

Например, пусть при изучении размера обуви 30 мальчиков 11 класса получили набор чисел (результаты записаны в порядке опроса):

39; 44; 41; 39; 40; 41; 45; 42; 44; 41; 41; 43; 42; 43; 41; 44; 42; 38; 40; 38; 41; 40; 42; 43; 42; 41; 43; 40; 40; 42.

Чтобы удобнее было анализировать информацию, в подобных ситуациях числовые данные сначала *ранжируют*, располагая их в порядке возрастания (когда каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего). В результате ранжирования получаем следующий ряд:

38; 38; 39; 39; 40; 40; 40; 40; 40; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 42; 42; 42; 42; 42; 42; 43; 43; 43; 43; 44; 44; 44; 45.

Затем составляем таблицу, в первой строке которой указаны все различные значения полученного ряда данных (X — размер обуви выбранных 30 мальчиков 11 класса), а во второй строке — их частоты M:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

$n = \sum M = 30$

Получаем ряд распределения рассматриваемого признака X по частотам.

Иногда удобно проводить анализ ряда распределения на основе его графического изображения.

Отметим на координатной плоскости точки с координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_8; m_8)$ и соединим их последовательно отрезками (рис. 23.1). Полученную ломаную линию называют *полигоном частот*.

Итак,

полигоном частот **называют ломаную, отрезки которой последовательно соединяют точки с координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_k; m_k)$, где x_i — значения различных элементов ряда данных, а m_i — соответствующие им частоты.**

Аналогично определяется и строится *полигон относительных частот* для рассматриваемого признака X (строятся точки с координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$, где x_i — значения различных элементов ряда данных, а w_i — соответствующие им относительные частоты.

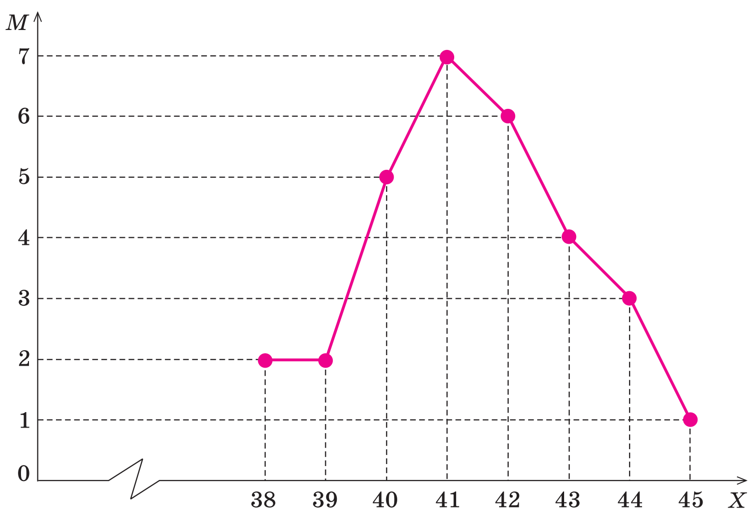


Рис. 23.1

Если вычислить относительные частоты для каждого из различных значений ряда данных, рассмотренного в начале этого пункта, то распределение значений рассматриваемого признака X по относительным частотам можно задать таблицей:

X	38	39	40	41	42	43	44	45	
W	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{6}\approx 0{,}17$	$\frac{7}{30}\approx 0{,}23$	$\frac{1}{5}=0{,}2$	$\frac{2}{15}\approx 0{,}13$	$\frac{1}{10}=0{,}1$	$\frac{1}{30}\approx 0{,}03$	$\Sigma W=1$

Распределение значений рассматриваемого признака X по относительным частотам можно представить также в виде полигона относительных частот (рис. 23.2), в виде линейной диаграммы (рис. 23.3) или в виде круговой диаграммы, предварительно записав значения относительной частоты в процентах (рис. 23.4).

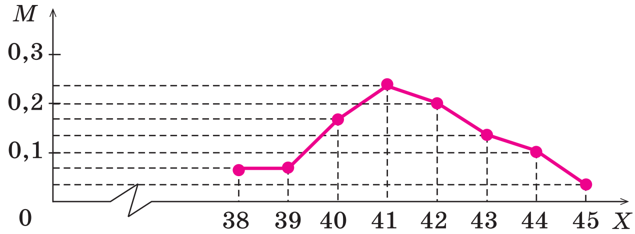


Рис. 23.2

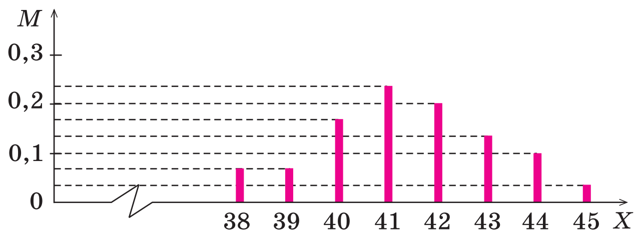


Рис. 23.3

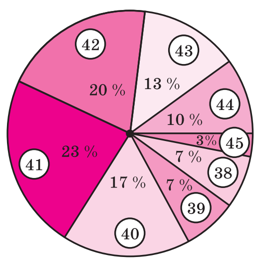


Рис. 23.4

Напомним, что для построения круговой диаграммы круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, вычисленным для каждого из различных значений ряда данных. Обратим внимание, что круговая диаграмма сохраняет свою наглядность и выразительность только при небольшом количестве полученных секторов. В противном случае ее применение малоэффективно.

Если рассматриваемый признак принимает много различных значений, то его распределение можно лучше себе представить после разбиения всех значений ряда данных на классы. Количество классов может быть любым, удобным для исследования (обычно от 4 до 12). При этом величины (объемы) классов должны быть одинаковыми.

Например, в следующей таблице представлены сведения о заработной плате 100 рабочих одного предприятия (в некоторых условных единицах). При этом значения зарплаты (округлены до целого числа условных единиц) сгруппированы в 7 классов, каждый объемом в 100 условных единиц.

Классы	От 400 до 500	От 500 до 600	От 600 до 700	От 700 до 800	От 800 до 900	От 900 до 1000	От 1000 до 1100
Номер класса X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (количество рабочих) M	4	6	18	36	22	10	4

(проверка: $\sum M = 100$)

Наглядно частотное распределение зарплат по классам можно представить с помощью полигона частот (рис. 23.5) или столбчатой диаграммы (рис. 23.6).

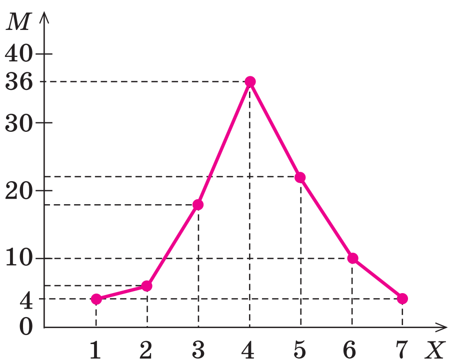


Рис. 23.5

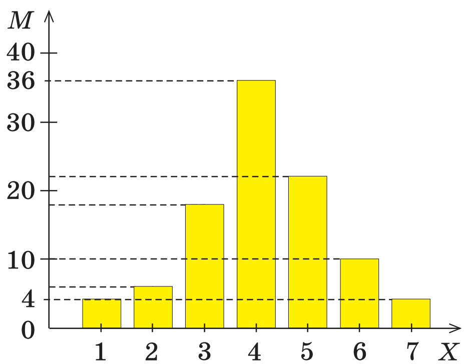


Рис. 23.6

2. Числовые характеристики рядов данных. Размах, мода и медиана ряда данных. Иногда выборку случайных величин или всю генеральную совокупность этих величин приходится характеризовать одним числом. На практике это необходимо, например, для быстрого сравнения двух или больше совокупностей по общему признаку.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть после летних каникул провели опрос 10 девочек и 9 мальчиков одного класса о количестве книг, прочитанных ими за каникулы. Результаты были записаны в порядке опроса. Получили следующие ряды чисел:

для девочек: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5;
для мальчиков: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Как уже отмечалось, чтобы удобнее было анализировать информацию, в подобных случаях числовые данные ранжируют, располагая их в порядке возрастания (когда каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего). В результате ранжирования получили следующие ряды:

для девочек: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12; (1)
для мальчиков: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7. (2)

Тогда распределение по частотам M величин: X — число книг, прочитанных за каникулы девочками, и Y — число книг, прочитанных за каникулы мальчиками, можно задать таблицами:

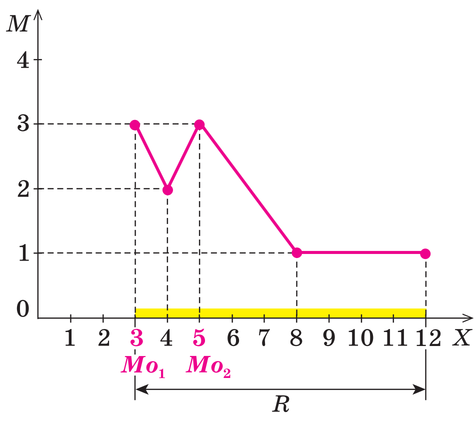
X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\sum M = n = 10$

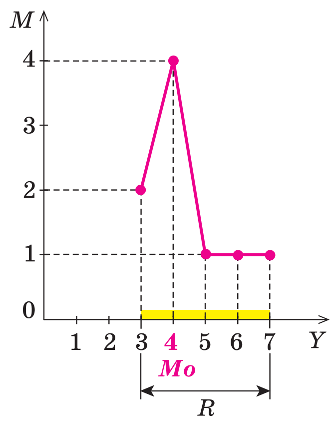
Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\sum M = n = 9$

Эти распределения можно проиллюстрировать также графически с помощью полигона частот (рис. 23.7, *а, б*).



а



б

Рис. 23.7

Для сравнения рядов (1) и (2) используют различные характеристики. Приведем некоторые из них.

Размахом ряда чисел (обозначается R) называют разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел. Поскольку мы анализируем выборку некоторых величин, то

***размах выборки* — это разность между наибольшим и наименьшим значениями величины в выборке.**

Для ряда (1) размах $R = 12 - 3 = 9$, а для ряда (2) размах $R = 7 - 3 = 4$. На графике размах — это длина области определения полигона частот (рис. 23.7).

Одной из статистических характеристик ряда данных является его *мода* (обозначается Mo, от латинского слова *modus* — мера, правило).

***Мода* — это значение элемента выборки, встречающееся чаще остальных.**

Так, в ряду (1) две моды — числа 3 и 5: $Mo_1 = 3$, $Mo_2 = 5$, а в ряду (2) одна мода — число 4: $Mo = 4$. На графике мода — это значение абсциссы точки, в которой достигается максимум полигона частот (см. рис. 23.7). Отметим, что моды может и не быть, если все значения рассматриваемого признака встречаются одинаково часто.

Моду ряда данных обычно находят тогда, когда хотят выяснить некоторый типовой показатель. Например, когда изучают данные о моделях мужских рубашек, проданных в определенный день в универмаге, то удобно использовать такой показатель, как мода, который характеризует модель, пользующуюся наибольшим спросом (собственно, этим и объясняется название «мода»).

Еще одной статистической характеристикой ряда данных является его медиана.

Медиана — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений (обозначается Me).

Медиана делит упорядоченный ряд данных на две равные по количеству элементов части.

Если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине.

Например, в ряду (2) нечетное количество элементов ($n = 9$). Тогда его медианой является число, стоящее посередине, то есть на пятом месте: $Me = 4$.

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \underset{\text{медиана}}{4},\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

Следовательно, о мальчиках можно сказать, что одна половина из них прочитала не больше 4 книг, а вторая — не меньше 4 книг. (Отметим, что в случае нечетного n номер среднего члена ряда равен $\frac{n+1}{2}$.)

Если количество чисел в ряду четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

Например, в ряду (1) четное количество элементов ($n = 10$). Тогда его медианой является число, равное среднему арифметическому чисел, стоящих посередине, то есть на пятом и шестом местах: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \quad 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12$$

4,5 — медиана

Следовательно, о девочках можно сказать, что одна половина из них прочитала меньше 4,5 книги, а вторая — больше 4,5 книги. (Отметим, что в случае четного n номера средних членов ряда равны $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1.$)

3. Среднее значение выборки

Средним значением выборки (обозначается $\overline{X}$) **называется среднее арифметическое всех чисел ряда данных выборки.**

Если в ряду данных записаны значения x_1, x_2, ..., x_n (среди которых могут быть и одинаковые), то

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если известно, что в ряду данных различные значения x_1, x_2, ..., x_k встречаются соответственно с частотами m_1, m_2, ..., m_k (тогда $\sum M = n$), то, заменяя одинаковые слагаемые в числителе на соответствующие произведения, получаем, что среднее арифметическое можно вычислять по формуле

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}. \qquad (3)$$

Последнюю формулу удобно использовать в тех случаях, когда в выборке распределение величины по частотам задано в виде таблицы. Напомним, что распределение по частотам M величин: X — число книг, прочитанных за каникулы девочками, и Y — число книг, прочитанных за каникулы мальчиками, было задано такими таблицами:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\sum M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\sum M = n = 9$

Тогда средние значения заданных выборок равны:

$$\overline{X} = \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 8\cdot 1 + 12\cdot 1}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2,$$

$$\overline{Y} = \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Поскольку $\overline{X} > \overline{Y}$, то можно сказать, что за один и тот же промежуток времени девочки в классе читают книг больше, чем мальчики.

Обратим внимание, что в пособиях по статистике моду, медиану и среднее значение выборки объединяют одним термином — *меры центральной тенденции*, подчеркивая тем самым возможность охарактеризовать ряд выборки одним числом.

Не для каждого ряда данных имеет смысл формально находить центральные тенденции. Например, если исследуется ряд

$$5,\ 5,\ 8,\ 110 \qquad (5)$$

годовых доходов четырех людей (в тыс. у. е.), то очевидно, что ни мода (5), ни медиана (6,5), ни среднее значение (32) не могут выступать в роли единой характеристики всех значений ряда данных. Это объясняется тем, что размах ряда (105) является соизмеримым с наибольшим из его значений.

В данном случае можно искать центральные тенденции, например, для части ряда (5):

$$5,\ 5,\ 8,$$

условно назвав его выборкой годового дохода низкооплачиваемой части населения.

Если в выборке среднее значение существенно отличается от моды, то его нецелесообразно выбирать в качестве типичной характеристики рассматриваемой совокупности данных (чем больше значение моды отличается от среднего значения, тем «более несимметричным» является полигон частот совокупности).

Вопросы для контроля

1. Объясните, что называется полигоном частот рассматриваемого признака X. Приведите примеры построения полигона частот и полигона относительных частот.
2. На примере ряда данных 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 объясните, что такое размах, мода, медиана и среднее значение ряда, и дайте соответствующие определения.

Упражнения

1°. На основании данных таблицы представьте в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение некоторого признака X.

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

2. Постройте полигон частот и полигон относительных частот некоторого признака X, распределение которого представлено в таблице:

1)

X	1	3	5	7	9
M	3	0	5	7	5

2)

X	11	12	13	14	15	16
M	6	5	2	3	1	3

3°. На рис. 23.8 построены полигоны, иллюстрирующие распределение частоты продажи магазином в течение недели компьютеров (черная линия) и телевизоров (синяя линия). Укажите два дня, непосредственно следующие друг за другом, когда:

1) число проданных телевизоров выросло больше, чем число проданных компьютеров;
2) число проданных телевизоров увеличилось, а число проданных компьютеров уменьшилось;
3) число проданных компьютеров выросло, а число проданных телевизоров осталось тем же.

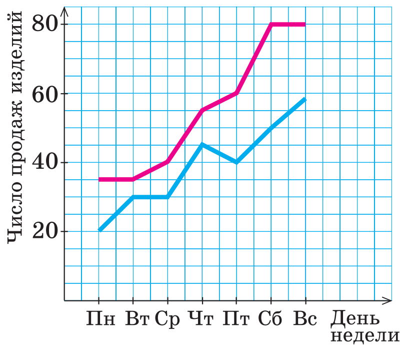


Рис. 23.8

4. Измерили рост 50 старшеклассников и результаты записали в таблицу:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Сгруппировав эти данные по классам 145–149, 150–154, 155–159, 160–164, 165–169, 170–174, 175–179, 180–184, представьте частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью: 1) таблицы; 2) полигона частот; 3) столбчатой диаграммы.

5. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение ряда данных:
1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5; 2) –3, –2, –2, –1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.
Постройте полигон частот значений величины X. Укажите на рисунке размах, моду и медиану заданного ряда данных.

6. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение выборки, заданной таблицей распределения значений величины X по частотам:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	–1	3	4	5	7
M	2	3	4	4	1

Постройте полигон частот значений величины X. Укажите на рисунке размах, моду и медиану заданной совокупности данных.

7. Девочки 11 класса на уроке физкультуры при прыжках в высоту показали следующие результаты (в см):

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Найдите моду, медиану и среднее значение этой совокупности данных. Какое из этих значений лучше всего характеризует спортивную подготовку девочек класса?

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Элементарные задачи, которые позднее были отнесены к стохастике, то есть к комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике, ставились и решались еще во времена Древних Египта, Греции и Рима. Этот период так называемой предыстории теории вероятностей заканчивается в XVI в. работами итальянских математиков Д. Кардано (1501–1576) «Книга об игре в кости», Н. Тартальи (1499–1557) «Общий трактат о числе и мере», Г. Галилея (1564–1642) «О выпадении очков при игре в кости» и др. В этих работах уже фигурирует понятие вероятности, используется теорема о вероятности произведения независимых событий, высказываются некоторые соображения относительно так называемого закона больших чисел. В XVII–XVIII вв. вопросами теории вероятностей заинтересовались французские математики П. Ферма (1601–1665) и Б. Паскаль (1623–1662), нидерландский математик Х. Гюйгенс (1629–1695), швейцарские математики Я. Бернулли (1654–1705), И. Бернулли (1687–1759), Д. Бернулли (1700–1782) и российский математик Л. Эйлер (1707–1783). В своих работах они уже использовали теоремы сложения и умножения вероятностей, понятия зависимых и независимых событий, математического ожидания.

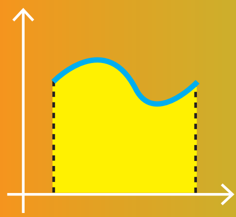
Большую роль в распространении идей теории вероятностей и математической статистики в России и Украине сыграли выдающиеся российские математики украинского происхождения В. Я. Буняковский (1804–1889) и М. В. Остроградский (1801–1862).

Дальнейшее развитие теории вероятностей потребовало уточнения основных ее положений. Большую работу в этом направлении провел выдающийся российский математик П. Л. Чебышёв (1821–1894). Его ученик А. А. Марков (1856–1922) стал выдающимся математиком именно благодаря своим исследованиям в теории вероятностей.

Книга А. А. Маркова «Исчисление вероятностей», первое издание которой вышло в 1900 г., а четвертое — в 1924 г., в течение многих лет была лучшей из тех, по которым учились российские математики. В этой книге, в частности, раскрывается, в каком понимании *статистическая вероятность* $P^*(A)$ *близка к вероятности* $P(A)$ *при больших* n: *вероятность значительного отклонения* $P_n^*(A)$ *от* $P(A)$ *близка к нулю, но это не означает, что значительные отклонения невозможны при больших* n.

В XX в. теория вероятностей постепенно превращается в строгую аксиоматическую теорию. Это произошло благодаря работам многих математиков. Но действительно решающим этапом в развитии теории вероятностей стала работа А. Н. Колмогорова (1903–1987) «Основные понятия теории вероятностей» (изданная в 1937 г.), в которой он изложил свою аксиоматику теории вероятностей и после которой теория вероятностей заняла равноправное место среди других математических дисциплин.

Большие достижения в теории вероятностей и математической статистике имели также российские математики А. Я. Хинчин (1894–1959), Е. Е. Слуцкий (1880–1948), Б. В. Гнеденко (1911–1995), украинские математики И. И. Гихман (1918–1985), В. С. Михалевич (1930–1994), М. И. Ядренко (1932–2004), Ю. М. Ермольев (1936 г. р.), И. Н. Коваленко (1935 г. р.), В. С. Королюк (1925 г. р.), А. В. Скороход (1930–2011), А. Ф. Турбин (1940 г. р.) и другие.

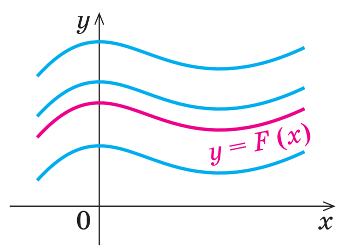


Раздел 4
ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

§ 24 ПЕРВООБРАЗНАЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Таблица 39

1. Первообразная	
Определение	**Пример**
Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.	Для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ первообразной является функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$, поскольку $$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

2. Основное свойство первообразной	
Свойство	**Геометрический смысл**
Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, а C — произвольной постоянной, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$, при этом любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Пример Поскольку функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ (см. выше), то *общий вид всех первообразных для функции* $f(x) = x^3$ можно записать следующим образом: $\frac{x^4}{4} + C$, где C — произвольная постоянная.	*Графики любых первообразных для данной функции получаются один из другого параллельным переносом вдоль оси Oy.* 

Продолжение табл. 39

3. Неопределенный интеграл

Определение	Пример
Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, то есть $$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$ где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.	$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C,$$ поскольку для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ все первообразные можно записать следующим образом: $\frac{x^4}{4} + C$ (см. п. 2 табл. 39).

4. Правила нахождения первообразных (правила интегрирования)

1. Если F — первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ — первообразная для $f + g$. *Первообразная для суммы равна сумме первообразных для слагаемых.*	**1.** $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ *Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.*
2. Если F — первообразная для f, а c — постоянная, то cF — первообразная для функции cf.	**2.** $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$, где c — постоянная. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*
3. Если F — первообразная для f, а k и b — постоянные (причем $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для функции $f(kx + b)$.	**3.** $\int f(kx + b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C.$

5. Таблица первообразных (неопределенных интегралов)

Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная	Запись с помощью неопределенного интеграла
0	C	$\int 0 \cdot dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$

Окончание табл. 39

$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \|x\| + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Объяснение и обоснование

1. Понятие первообразной. Основное свойство первообразной. В разделе 1 мы по заданной функции находили ее производную и применяли эту операцию дифференцирования к решению разнообразных задач. Одной из таких задач было нахождение скорости и ускорения прямолинейного движения по известному закону изменения координаты $x\ (t)$ материальной точки:

$$v\ (t) = x'\ (t),\ a\ (t) = v'\ (t) = x''\ (t).$$

Например, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость тела равна нулю, то есть $v\ (0) = 0$, то при свободном падении тело за промежуток времени t пройдет путь

$$s\ (t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда скорость и ускорение находят с помощью дифференцирования:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt,\ a\ (t) = v'\ (t) = (gt)' = g.$$

Необходимо уметь не только находить производную заданной функции, но решать и обратную задачу: находить функцию $f\ (x)$ по ее заданной производной $f'\ (x)$. Например, в механике часто приходится определять координату $x\ (t)$, зная закон изменения скорости $v\ (t)$, а также определять скорость $v\ (t)$, зная закон изменения ускорения $a\ (t)$. Нахождение функции $f\ (x)$ по ее заданной производной $f'\ (x)$ называют операцией *интегрирования*.

Таким образом, операция интегрирования является обратной операции дифференцирования. Операция интегрирования позволяет по заданной производной $f'(x)$ найти (восстановить) функцию $f(x)$ (латинское слово *integratio* означает «восстановление»).

Приведем определения понятий, связанных с операцией интегрирования.

Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = 3x^2$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ первообразной является функция $F(x) = x^3$, поскольку $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Отметим, что функция $x^3 + 5$ имеет ту же производную $(x^3 + 5)' = 3x^2$. Следовательно, функция $x^3 + 5$ также является первообразной для функции $3x^2$ на множестве $\boldsymbol{R}$. Понятно, что вместо числа 5 можно подставить любое другое число. Поэтому задача нахождения первообразной имеет бесконечное множество решений. Найти все эти решения позволяет *основное свойство первообразной*.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, а C — произвольной постоянной, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$, при этом любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Выражение $F(x) + C$ называют *общим видом первообразных* для функции $f(x)$.

● 1) По условию функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке I. Следовательно, $F'(x) = f(x)$ для любого x из этого промежутка I. Тогда

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

то есть $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$.

2) Пусть функция $F_1(x)$ — другая первообразная для функции $f(x)$ на том же промежутке I, то есть $F_1'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Тогда

$$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно условию постоянства функции (с. 47), если производная функции $F_1(x) - F(x)$ равна нулю на промежутке I, то эта функция принимает некоторое постоянное значение C на этом промежутке. Следовательно, для всех $x \in I$ функция $F_1(x) - F(x) = C$. Отсюда $F_1(x) = F(x) + C$. Таким образом, любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. ○

Например, поскольку для функции $f(x) = 2x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ одной из первообразных является функция $F(x) = x^2$ (действительно, $F'(x) = (x^2)' = 2x$), то общий вид всех первообразных функции $f(x) = 2x$ можно записать таким образом: $x^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Замечание. Для краткости при нахождении первообразной функции $f(x)$ промежуток, на котором задана функция $f(x)$, чаще всего не указывают. При этом имеются в виду промежутки возможно большей длины.

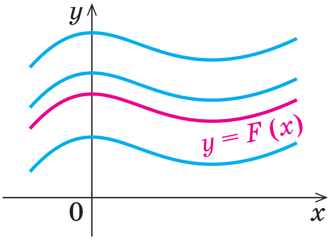


Рис. 24.1

Геометрически основное свойство первообразной означает, что *графики любых первообразных для данной функции $f(x)$ получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy* (рис. 24.1). Действительно, график произвольной первообразной $F(x) + C$ можно получить из графика первообразной $F(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на C единиц.

2. Неопределенный интеграл. Пусть функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке первообразную $F(x)$. Тогда согласно основному свойству первообразной совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке задается формулой $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, то есть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

В приведенном равенстве знак $\int$ называют знаком интеграла, функцию $f(x)$ — подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, переменную x — переменной интегрирования, слагаемое C — постоянной интегрирования.

Например, как отмечалось выше, общий вид первообразных для функции $f(x) = 2x$ записывается так: $x^2 + C$, следовательно, $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

3. Правила нахождения первообразных (правила интегрирования). Эти правила аналогичны соответствующим правилам дифференцирования.

Правило 1. **Если F — первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ — первообразная для $f + g$.**

Первообразная для суммы равна сумме первообразных для слагаемых.

● Действительно, если F — первообразная для f (в этой краткой формулировке имеется в виду, что функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$), то $F' = f$. Аналогично, если G — первообразная для g, то $G' = g$. Тогда согласно правилу вычисления производной суммы имеем

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

а это и означает, что $F + G$ — первообразная для $f + g$. ○

С помощью неопределенного интеграла это правило можно записать так:

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx,$$

то есть *интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.*

Отметим, что правило 1 может быть распространено на любое количестве слагаемых (поскольку производная от любого количества слагаемых равна сумме производных слагаемых).

Правило 2. **Если F — первообразная для f, а c — постоянная, то cF — первообразная для функции cf.**

Действительно, если F — первообразная для f, то $F'=f$. Учитывая, что постоянный множитель можно выносить за знак производной, имеем $(cF)'=cF'=cf$, следовательно, cF — первообразная для cf.

С помощью неопределенного интеграла это правило запишем так:

$$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx,\ \text{ где } c \text{ — постоянная,}$$

то есть *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

Правило 3. **Если F — первообразная для f, а k и b — постоянные (причем $k\neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.**

Действительно, если F — первообразная для f, то $F'=f$. Учитывая правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k=f(kx+b),$$

а значит, $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

С помощью неопределенного интеграла это правило запишем так:

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

4. Таблица первообразных (неопределенных интегралов). Для вычисления первообразных (или неопределенных интегралов), кроме правил нахождения первообразных, полезно помнить табличные значения первообразных для некоторых функций, приведенные в п. 5 табл. 39. Чтобы обосновать правильность этих формул, достаточно проверить, что производная от указанной первообразной (без постоянного слагаемого C) равна заданной функции. Это будет означать, что рассмотренная функция действительно является первообразной для заданной функции. Поскольку в записи всех первообразных во втором столбце имеется постоянное слагаемое C, то по основному свойству первообразных можно сделать вывод, что это действительно общий вид всех первообразных заданной функции. Приведем обоснование формул для нахождения первообразных для функций x^{α} и $\frac{1}{x}$, а для других функций предлагаем провести аналогичную проверку самостоятельно.

● Для всех $x \in \boldsymbol{R}$ при $\alpha \neq -1$ производная $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)\,x^{\alpha} = x^{\alpha}$.
Следовательно, функция $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha \neq -1$ является первообразной для функции x^{α}. Тогда согласно основному свойству первообразных **общий вид всех первообразных для функции x^{α} при $\alpha \neq -1$ будет**

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

С помощью неопределенного интеграла это можно записать так:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1).$$ ○

● У функции $f(x)=\frac{1}{x}$ область определения $x \neq 0$. Рассмотрим функцию $F(x) = \ln|x|$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

При $x > 0$ $F(x) = \ln x$, тогда $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

При $x < 0$ $F(x) = \ln(-x)$, тогда $F'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Следовательно, на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{x}$.
Тогда
общий вид всех первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ будет

$$\ln|x| + C.$$

С помощью неопределенного интеграла это можно записать так:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C.$$ ○

Примеры решения задач

Задача 1 Покажите, что функция $F(x)=2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Решение	*Комментарий*
▶ $F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, а значит, $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. ◁	По определению функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Задача 2 1) Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = x^4$ на $\boldsymbol{R}$.
2) Найдите все первообразные для функции $f(x) = x^4$.
3*) Найдите $\int x^4\,dx$.

Решение	*Комментарий*
▶1) Одной из первообразных для функции $f(x)=x^4$ на множестве $\boldsymbol{R}$ будет функция $F(x)=\frac{x^5}{5}$, поскольку $$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$ ◁	1) Первообразную для функции $f(x)=x^4$ можно попытаться найти подбором. При этом рассуждаем так: чтобы после нахождения производной получить x^4, необходимо брать производную от x^5. Но $(x^5)' = 5x^4$. Чтобы производная равнялась x^4, достаточно поставить перед функцией x^5 коэффициент $\frac{1}{5}$. Проще непосредственно использовать формулу из в п. 5 табл. 39: *одной из первообразных для функции x^α является функция $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.*
▶2) По основному свойству первообразных все первообразные для функции $f(x) = x^4$ можно записать в виде $\frac{x^5}{5}+C$, где C — произвольная постоянная. ◁	2) *Если мы знаем одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, то* согласно основному свойству первообразных *любую первообразную для функции $f(x)$ можно записать в виде $F(x) + C$*, где C — произвольная постоянная.
▶3*) $\int x^4\,dx=\frac{x^5}{5}+C$, где C — произвольная постоянная. ◁	3) Согласно определению $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то есть неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ — это просто специальное обозначение общего вида всех первообразных для данной функции $f(x)$ (которые мы уже нашли в п. 2 решения).

Задача 3 Для функции $f(x)=\sqrt{x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M (9; 10).

Решение	*Комментарий*
▶$D(f) = [0; +\infty)$. Тогда $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.	Сначала запишем общий вид первообразных для заданной функции

Общий вид всех первообразных для функции $f(x)$ следующий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

По условию график первообразной проходит через точку M (9; 10). Следовательно, при $x = 9$ получим:

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Отсюда $C = -8$. Тогда искомая первообразная:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8. \triangleleft$$

$F(x) + C$, а потом воспользуемся тем, что график полученной функции проходит через точку M (9; 10). Следовательно, при $x = 9$ значение функции $F(x) + C$ равно 10.

Чтобы найти первообразную для функции $f(x)=\sqrt{x}$, учтем, что область определения этой функции $x \geqslant 0$. Тогда эту функцию можно записать так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ и использовать формулу нахождения первообразной для функции x^{α}, а именно: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Задача 4* Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-2\cos 3x.$$

Решение	*Комментарий*

▶ Запишем одну из первообразных для каждого слагаемого.

Для функции $\frac{1}{\sin^2 2x}$ первообразной является функция $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$.

Второе слагаемое запишем так: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда первообразной для этой функции будет функция:

$$\frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2(2-x)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2-x}.$$

Первообразной для функции $2\cos 3x$ будет функция $2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=\frac{2}{3}\sin 3x$.

Отсюда общий вид первообразных для заданной функции:

$$-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}\sin 3x+C. \triangleleft$$

Используем правила нахождения первообразных. Сначала обратим внимание на то, что заданная функция является алгебраической суммой трех слагаемых. Следовательно, ее первообразная равна алгебраической сумме соответствующих первообразных для слагаемых (правило 1).

Затем учтем, что все функции-слагаемые являются сложными функциями от аргументов вида $kx + b$. Следовательно, по правилу 3 мы должны перед каждой функцией-первообразной (аргумента $kx + b$), которую получим по таблице первообразных, поставить множитель $\frac{1}{k}$.

Для каждого из слагаемых удобно сначала записать одну из первообразных (без постоянного слагаемого C), а затем уже записать общий вид первообразных для заданной функции (прибавить к полученной функции постоянное слагаемое C).

Для третьего слагаемого учтем также, что постоянный множитель 2 можно поставить перед соответствующей первообразной (правило 2).

Для первого слагаемого учитываем (см. табл. 39), что первообразной для $\frac{1}{\sin^2 x}$ является $(-\text{ctg}\ x)$, для второго — первообразной для x^α является $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, для третьего — первообразной для $\cos x$ является $\sin x$ (разумеется, преобразование второго слагаемого выполняется на области определения этой функции, то есть при $2 - x > 0$).

Вопросы для контроля

1. Объясните, в каком случае функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке. Приведите примеры.
2. Сформулируйте основное свойство первообразных и проиллюстрируйте его на примерах.
3*. Сформулируйте определение неопределенного интеграла. Приведите примеры его вычисления.
4. Сформулируйте правила нахождения первообразных. Объясните их на примерах.
5*. Докажите правила нахождения первообразных.
6*. Запишите и сформулируйте правила нахождения первообразных с помощью неопределенных интегралов.
7*. Запишите и докажите общий вид первообразных для функций: x^α $(\alpha \neq -1)$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, e^x, a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$. Запишите соответствующие формулы с помощью неопределенного интеграла.

Упражнения

Докажите, что функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на указанном промежутке (1, 2).

1°. 1) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$;

2) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0;\ +\infty)$;

3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$;

4) $F(x) = \frac{1}{6}x^6$, $f(x) = x^{-7}$, $x \in (0;\ +\infty)$.

2. 1) $F(x) = \sin^2 x,\ f(x) = \sin 2x,\ x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x,\ f(x) = -\sin 2x,\ x \in \boldsymbol{R}$;

3) $F(x) = \sin 3x,\ f(x) = 3\cos 3x,\ x \in \boldsymbol{R}$;

4) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ f(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ x \in (-\pi; \pi)$.

3. Проверьте, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Найдите общий вид первообразных для f, если:

1) $F(x) = \sin x - x\cos x,\ f(x) = x\sin x$;

2) $F(x) = \sqrt{x^2+1},\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

3) $F(x) = \cos x + x\sin x,\ f(x) = x\cos x$;

4) $F(x) = x - \frac{1}{x},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$.

Определите, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке **(4, 5)**.

4°. 1) $F(x) = 3 - \sin x,\ f(x) = \cos x,\ x \in (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = 5 - x^4,\ f(x) = -4x^3,\ x \in (-\infty; +\infty)$;

3) $F(x) = \cos x - 4,\ f(x) = -\sin x,\ x \in (-\infty; +\infty)$;

4) $F(x) = x^{-2} + 2,\ f(x) = \frac{1}{2x^3},\ x \in (0; +\infty)$.

5. 1) $F(x) = 2x + \cos\frac{x}{2};\ f(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2},\ x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x) = \sqrt{4-x^2},\ f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ x \in (-2; 2)$;

3) $F(x) = \frac{1}{x^2},\ f(x) = 14 - \frac{1}{x^2},\ x \in (0; +\infty)$;

4) $F(x) = 4x\sqrt{x},\ f(x) = 6\sqrt{x},\ x \in (0; +\infty)$.

6°. Найдите общий вид первообразных для функции **(6–8)**.

1) $f(x) = 2 - x^4$; 2) $f(x) = x + \cos x$; 3) $f(x) = 4x$; 4) $f(x) = -8$;

5) $f(x) = x^6$; 6) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$; 7) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$; 8) $f(x) = x^3$.

7*. 1) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$; 2) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$;

4) $f(x) = 5x^2 - 1$; 5) $f(x) = (2x - 8)^5$; 6) $f(x) = 3\sin 2x$;

7) $f(x) = (4 - 5x)^7$; 8) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 9) $f(x) = \frac{3}{(4-15x)^4}$;

10) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$; 11) $f(x) = \frac{4}{(3x-1)^2}$; 12) $f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

8*. 1) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 3x^2$;

3) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(3x+1)} - 3\sin(4-x) + 2x$;

4) $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

9. Для функции $f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в указанной точке:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$; 2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

3) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; 4) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -1$.

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M **(10–12)**.

10. 1) $f(x) = 2x + 1$, $M(0; 0)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1; 4)$;
3) $f(x) = x + 2$, $M(1; 3)$; 4) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2; -1)$.

11°. 1) $f(x) = 2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 2) $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3; 9)$;

3) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

12. 1) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$, $M(-1; 4)$; 2) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2; 15)$;

3) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3; 2)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 10x^4 + 3$, $M(1; 5)$.

13*. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, задана формулой $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Запишите формулу зависимости ее координаты x от времени t, если известно, что в начальный момент времени ($t = 0$) точка находилась в начале координат.

14*. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, задана формулой $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$. Запишите формулу зависимости координаты точки от времени, если известно, что в момент $t = \frac{\pi}{3}$ с точка находилась на расстоянии 4 м от начала координат (в положительном направлении).

15*. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t) = 12t^2 + 4$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = 1$ с ее скорость равна 10 м/с, а координата равна 12 (единица ускорения — 1 м/с²).

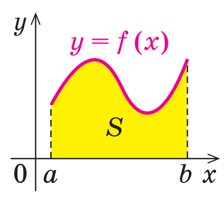
16*. Материальная точка массой m движется по оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени t сила равна $F(t)$. Найдите формулу зависимости $x(t)$ от времени t, если известно, что при $t = t_0$ скорость точки равна v_0, а координата равна x_0 ($F(t)$ измеряется в ньютонах, t — в секундах, v — в метрах в секунду, m — в килограммах):

1) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;
2) $F(t) = 14 \sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;
3) $F(t) = 25 \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;
4) $F(t) = 8t + 8$, $t_0 = 2$, $v_0 = 9$, $x_0 = 7$, $m = 4$.

§ 25 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

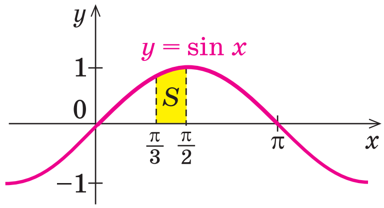
25.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Таблица 40

1. Вычисление определенного интеграла (формула Ньютона—Лейбница)	
Формула	Пример
Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, а $F(x)$ — произвольная ее первообразная на этом отрезке ($F'(x) = f(x)$), то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a).$	Так как для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является $F(x) = \frac{x^3}{3}$, то $\int\limits_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big\vert_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$
2. Криволинейная трапеция	
Определение	Иллюстрация
Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$, принимающая на этом отрезке только неотрицательные значения. **Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*.**	

3. Площадь криволинейной трапеции	
Формула	Пример
$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Продолжение табл. 40



▶ Изображая эти линии, видим, что заданная фигура — криволинейная трапеция. Тогда

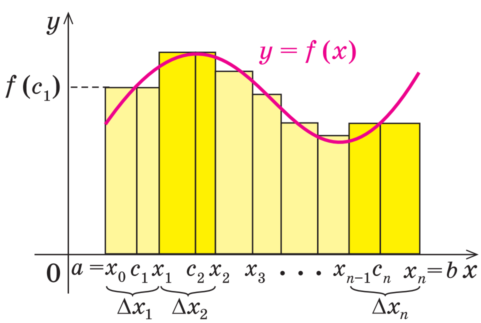
$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.\ \triangleleft$$

4. Свойства определенных интегралов

$\int_a^a f(x)\,dx=0$	$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$	$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$	Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $c\in[a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$

5. Определение определенного интеграла через интегральные суммы



Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Выполним следующие операции.

1. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (полагаем, что $a = x_0$, $b = x_n$).

Окончание табл. 40

2. Обозначим длину первого отрезка через Δx_1, второго — через Δx_2 и т. д. ($\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$).
3. На каждом из полученных отрезков выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.
4. Составим **сумму** $S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$. Эту сумму **называют *интегральной суммой функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$.**
Если $n \to \infty$ и длины отрезков разбиения стремятся к нулю, то интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу, которое называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

Объяснение и обоснование

1. Геометрический смысл и определение определенного интеграла. Как отмечалось в § 24, интегрирование — это действие, обратное дифференцированию. Оно позволяет по данной производной функции найти (восстановить) саму функцию. Покажем, что эта операция тесно связана с задачей вычисления площади.

Например, в механике часто приходится определять координату $x(t)$ материальной точки при прямолинейном движении, зная закон изменения ее скорости $v(t)$ (напомним, что $v(t) = x'(t)$).

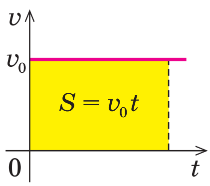


Рис. 25.1

Рассмотрим сначала случай, когда точка движется с постоянной скоростью $v = v_0$. Графиком ее скорости в системе координат $(t; v)$ является прямая $v = v_0$, параллельная оси времени t (рис. 25.1). Если считать, что в начальный момент времени $t = 0$ точка находилась в начале координат, то ее путь s, пройденный за время t, вычисляется по формуле $s = v_0 t$. Величина $v_0 t$ равна площади прямоугольника, ограниченного графиком скорости, осью абсцисс и двумя вертикальными прямыми, то есть путь точки можно вычислить как площадь под графиком скорости.

Рассмотрим случай неравномерного движения. Теперь скорость можно считать постоянной только на маленьком отрезке времени Δt. Если скорость v изменяется по закону $v = v(t)$, то путь, пройденный за отрезок времени $[t; t + \Delta t]$, приближенно выражается произведением $v(t)\Delta t$. На графике это произведение равно площади прямоугольника со сторонами Δt и $v(t)$ (рис. 25.2). Точное значение пути за отрезок времени $[t; t + \Delta t]$ равно площади *криволинейной трапеции*, выделенной на этом рисунке. Тогда весь путь за отрезок времени $[0; t]$ может быть вычислен в результате сложения площадей таких криволинейных трапеций, то есть путь равен площади заштрихованной фигуры под графиком скорости (рис. 25.3).

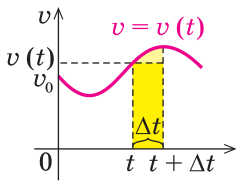


Рис. 25.2

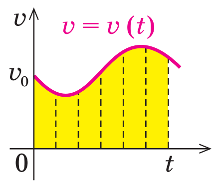


Рис. 25.3

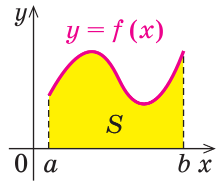


Рис. 25.4

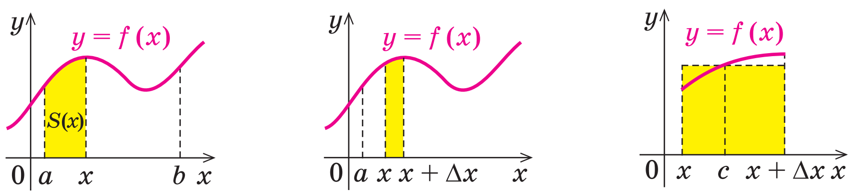
Приведем соответствующие определения и обоснования, позволяющие сделать эти рассуждения более строгими.

Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox дана непрерывная функция $f(x)$, которая принимает на этом отрезке только положительные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией* (рис. 25.4).

Отрезок $[a; b]$ называют *основанием этой криволинейной трапеции.*

Выясним, как можно вычислить площадь криволинейной трапеции с помощью первообразной для функции $f(x)$.

Обозначим через $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 25.5, *а*), где x — любая точка отрезка $[a; b]$. При $x = a$ отрезок $[a; x]$ вырождается в точку, и поэтому $S(a) = 0$; при $x = b$ имеем $S(b) = S$, где S — площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$ (см. рис. 25.4).



а *б* *в*

Рис. 25.5

Покажем, что $S(x)$ *является первообразной для функции* $f(x)$, то есть что $S'(x) = f(x)$.

Согласно определению производной нам необходимо доказать, что $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Для упрощения рассуждений рассмотрим случай $\Delta x > 0$ (случай $\Delta x < 0$ рассматривается аналогично).

Поскольку $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то геометрически ΔS — площадь фигуры, выделенной на рис. 25.5, *б*.

Рассмотрим теперь прямоугольник с такой же площадью ΔS, одной из сторон которого является отрезок $[x;\ x + \Delta x]$ (рис. 25.5, *в*). Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то верхняя сторона этого прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x;\ x + \Delta x]$ (иначе говоря, рассмотренный прямоугольник или содержит криволинейную трапецию, выделенную на рис. 25.5, *в*, или содержится в ней, и соответственно его площадь будет больше или меньше площади ΔS). Высота прямоугольника равна $f(c)$.

По формуле площади прямоугольника имеем $\Delta S = f(c)\,\Delta x$. Тогда $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = f(c)$. (Эта формула будет верной и при $\Delta x < 0$.)

Поскольку точка c лежит между точками x и $x + \Delta x$, то c стремится к x, если $\Delta x \to 0$. Учитывая непрерывность функции $f(x)$, также получаем:

$$f(c) \to f(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$, а значит, что $S'(x) = f(x)$, то есть $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. ○

Так как $S(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то по основному свойству первообразных любая другая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$ отличается от $S(x)$ на постоянную C, то есть

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

Чтобы найти C, подставим $x = a$. Получаем $F(a) = S(a) + C$. Поскольку $S(a) = 0$, то $C = F(a)$, и равенство (1) можно записать следующим образом:

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Учитывая, что площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляем в формулу (2) $x = b$ и получаем: $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Следовательно,

площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x)$ — произвольная первообразная для функции $f(x)$ (рис. 25.4).

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к нахождению первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$, то есть к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Запись $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ читается: «интеграл от a до b эф от икс де икс». Числа a и b называются *пределами интегрирования*: a — нижним пределом, b — верхним. Следовательно, по приведенному определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Формулу (4) называют **формулой Ньютона–Лейбница.**

При вычислении определенного интеграла разность $F(b) - F(a)$ обозначают: $F(x)\Big|_a^b$, то есть $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона–Лейбница можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Например, поскольку для функции $f(x) = e^x$ одной из первообразных является $F(x) = e^x$, то

$$\int\limits_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Отметим, что в случае, когда для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, функцию $f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a; b]$.

Из формул (3) и (4) получаем, что *площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке* $[a; b]$ *функции* $y = f(x)$, *отрезком* $[a; b]$ *оси* Ox *и прямыми* $x = a$ *и* $x = b$ (рис. 25.4), *можно вычислить по формуле*

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Например, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, отрезком $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ оси Ox и прямыми $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{6}$ (рис. 25.6), можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

(При вычислении определенного интеграла учтено, что для функции $f(x) = \cos x$ одной из первообразных является функция $F(x) = \sin x$.)

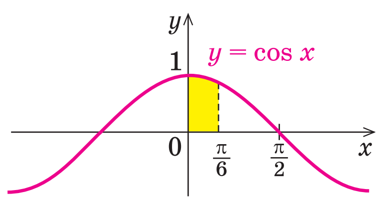


Рис. 25.6

З а м е ч а н и е. В задачах из курса алгебры и начал анализа на вычисление площадей как ответ чаще всего приводится числовое значение площади. Поскольку на координатной плоскости, где изображается фигура, по осям указывается единица измерения, то мы всегда имеем и единицу площади — квадрат со стороной 1. Иногда, чтобы подчеркнуть, что полученное число выражает именно площадь, ответ записывают следующим образом: $S=\frac{1}{2}$ (кв. ед.), то есть квадратных единиц. Заметим, что так записывают только числовые ответы. Если в результате вычисления площади мы получили, например, $S = 2a^2$, то обозначений квадратных единиц не записывают: отрезок a был измерен в каких-то линейных единицах, а значит, выражение a^2 уже содержит информацию о тех квадратных единицах, в которых измеряется площадь.

2. Свойства определенных интегралов. При формулировании определения определенного интеграла непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции мы полагали, что $a < b$. Расширим понятие определенного интеграла и для случая $a > b$ примем по определению, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Для случая $a = b$ также по определению будем считать, что

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \qquad (6)$$

Формальное применение формулы Ньютона–Лейбница для вычисления интегралов в формулах (5) и (6) дает такой же результат. Действительно, если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

С помощью формулы Ньютона–Лейбница для непрерывных функций легко обосновываются и другие свойства определенных интегралов, приведенные в п. 4 табл. 40.

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то для функции $kf(x)$ первообразной будет функция $kF(x)$. Тогда

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k\,(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Итак,

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

- Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразной для функции $g(x)$, то для функции $f(x) + g(x)$ первообразной будет функция $F(x) + G(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) =$$

$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (8)$$

- Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ и $c \in [a;\ b]$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $c \in [a;\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Определение определенного интеграла через интегральные суммы. Исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми, в частности площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим криволинейную трапецию, изображенную на рис. 25.7 (функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$). На этом рисунке основание трапеции— отрезок $[a;\ b]$ — разбито на n отрезков (не обязательно равных) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (для удобства будем считать, что $a = x_0$, $b = x_n$). Через эти точки проведены вертикальные прямые. На первом отрезке выбрана произвольная точка c_1. На этом отрезке как основании построен прямоугольник с высотой $f(c_1)$. Аналогично на втором отрезке выбрана произвольная точка c_2, и на этом отрезке как сновании построен прямоугольник с высотой $f(c_2)$ и т. д.

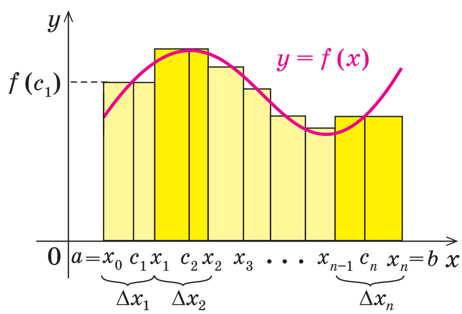


Рис. 25.7

Площадь S данной криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников. Обозначим эту сумму через S_n, длину первого отрезка — через Δx_1, второго — через Δx_2 и т. д. ($\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). Тогда

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n. \qquad (9)$$

Следовательно, площадь S криволинейной трапеции можно приближенно вычислять по формуле (9), то есть $S \approx S_n$.

Сумму (9) называют *интегральной суммой функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;\ b]$. При этом считают, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и может принимать любые значения: положительные, отрицательные и равные нулю (а не только неотрицательные, как для случая криволинейной трапеции). Если $n \to \infty$ и длины отрезков, на которые разбито основание трапеции, стремятся к нулю, то интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу, которое называют *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Можно доказать, что при этом также справедливы формула Ньютона–Лейбница и все рассмотренные свойства определенного интеграла.

Замечание. Изменяя способ разбиения отрезка $[a;\ b]$ на n частей (то есть фиксируя другие точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) и выбирая на каждом из полученных отрезков другие точки c_i (где $c_i \in [x_{i-1};\ x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$), мы получим для функции $f(x)$ другие интегральные суммы. В курсе математического анализа доказывается, что для любой непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$ независимо от способа разбиения этого отрезка и выбора точек c_i, если $n \to \infty$ и длины отрезков стремятся к нулю, то интегральные суммы S_n стремятся к одному и тому же числу.

Определение определенного интеграла через интегральные суммы позволяет приближенно вычислять определенные интегралы по формуле (9). Но такой способ требует громоздких вычислений, и его используют в тех случаях, когда для функции $f(x)$ не удается найти первообразную (в этих случаях приближенное вычисление определенного интеграла обычно проводят на компьютере с использованием специальных программ). Если же первообразная для функции $f(x)$ известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона–Лейбница (см. пример в п. 1 табл. 40 и примеры, приведенные далее).

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение	*Комментарий*
▶ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$ *Ответ*: 1. ◁	Поскольку для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ мы знаем первообразную — это $F(x) = \operatorname{tg} x$ (см. табл. 39), то данный интеграл вычисляется непосредственным применением формулы Ньютона–Лейбница $$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a).$$

Задача 2 Вычислите $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx$.

Решение	*Комментарий*
<u>I способ</u> ▶ Для функции $f(x) = \frac{4}{x} - x$ одной из первообразных является $F(x) = 4\ln\|x\| - \frac{x^2}{2}$. Тогда $$\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \left(4\ln\|x\| - \frac{x^2}{2}\right)\Big\|_1^3 =$$ $$= \left(4\ln\|3\| - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\ln\|1\| - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4.$$ <u>II способ</u> ▶ $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \int\limits_1^3 \frac{4\,dx}{x} - \int\limits_1^3 x\,dx =$ $$= 4\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^3 x\,dx = 4\ln\|x\|\Big\|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big\|_1^3 =$$ $$= 4(\ln\|3\| - \ln\|1\|) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4.$$ *Ответ:* 4 ln 3 − 4. ◁	Возможны два способа вычисления данного интеграла. 1) Сначала найти первообразную для функции $f(x) = \frac{4}{x} - x$, используя правила вычисления первообразных и таблицу первообразных, а затем найти интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. 2) Использовать формулу (8) $$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$ и записать данный интеграл как алгебраическую сумму двух интегралов, каждый из которых можно непосредственно вычислить, как в задаче 1 (для первого слагаемого можно использовать также формулу (7) и вынести постоянный множитель 4 за знак интеграла).

З а м е ч а н и е. Данный интеграл рассматривается на отрезке [1; 3], где $x > 0$. Но при $x > 0$ одной из первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ является функция $F(x) = \ln x$. Поэтому, учитывая, что $x > 0$, можно, например, записать: $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3$. Хотя, разумеется, приведенная выше запись первообразной также является верной (поскольку при $x > 0$ $\ln|x| = \ln x$).

Задача 3 Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 8$, осью Ox и графиком функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение	*Комментарий*
▶Изображая эти линии, видим, что данная фигура — криволинейная трапеция (рис. 25.8).	Данная фигура является криволинейной трапецией, и поэтому ее площадь можно вычислить по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$ где $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

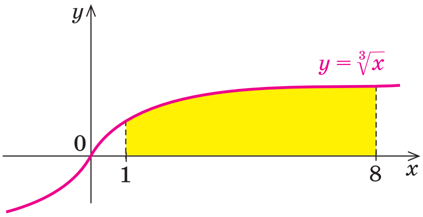


Рис. 25.8

Также необходимо учесть, что на данном отрезке [1; 8] значения $x > 0$, и при этом условии можно записать $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Тогда ее площадь равна

$$S = \int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \int\limits_1^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 =$$

$$= \frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4} - 1\right) = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}.$$

Ответ: $11\frac{1}{4}$ кв. ед. ◁

Упражнения

1. Вычислите интеграл:

1°) $\int\limits_{-1}^{2} x^4\,dx$; 2°) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 3°) $\int\limits_1^3 x^3\,dx$; 4°) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; 6) $\int\limits_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$; 7) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2}$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

2. Докажите, что верно равенство:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx;$ 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2\, dx;$ 4) $\int\limits_0^1 (2x+1)\, dx = \int\limits_0^2 (x^3-1)\, dx.$

3. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\, dx;$ 2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}};$ 3) $\int\limits_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}};$ 4) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$

5) $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx;$ 6) $\int\limits_0^2 (1+2x)^3\, dx;$

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\, dx;$ 8) $\int\limits_1^4 \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx.$

Вычислите (предварительно выполнив рисунок) площадь фигуры, ограниченной данными линиями **(4—8)**.

4. 1) $y = x^4,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1;$ 2) $y = x^4,\ y = 1;$
3) $y = x^2 - 4x + 5,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4;$ 4) $y = x^2 - 4x + 5,\ y = 5.$

5. 1) $y = 1 - x^3,\ y = 0,\ x = 0;$
2) $y = 2 - x^3,\ y = 1,\ x = -1,\ x = 1;$
3) $y = -x^2 - 4x,\ y = 0,\ x = -3,\ x = -1;$
4) $y = -x^2 - 4x,\ y = 1,\ x = -3,\ x = -1.$

6. 1) $y = x^3,\ y = 8,\ x = 1;$ 2) $y = 2\cos x,\ y = 1,\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3};$
3) $y = x^2 - 2x + 4,\ y = 3,\ x = -1;$ 4) $y = \sin x,\ y = \frac{1}{2},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}.$

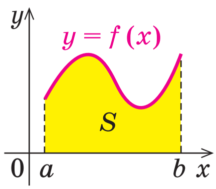
7. 1) $y = 4x - x^2,\ y = 4 - x;$ 2) $y = \frac{16}{x^2},\ y = 2x,\ x = 4;$
3) $y = x^2,\ y = 2x;$ 4) $y = 6 - 2x,\ y = 6 + x - x^2.$

8. 1) $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 4 - x^2;$
2) $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2 + 6x - x^2;$
3) $y = x^2,\ y = 2x - x^2;$
4) $y = x^2,\ y = x^3.$

25.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Таблица 41

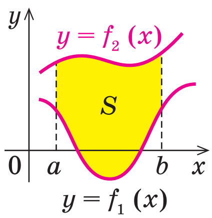
<table>
<tr><td colspan="2">1. Площадь криволинейной трапеции</td></tr>
<tr><td colspan="2">



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми $x = a$ и $x = b$</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>

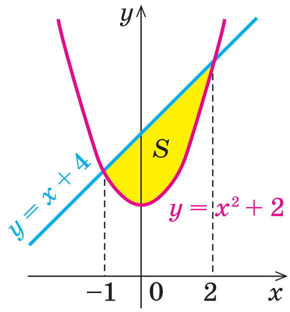


Если на заданном отрезке $[a;\ b]$ непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ имеют такое свойство, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$, то

$$\boxed{S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx}. \qquad (1)$$

</td><td>

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.



▶Изобразим данные линии и абсциссы точек их пересечения.
Абсциссы точек пересечения:

$$x^2 + 2 = x + 4,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Тогда по формуле (1)

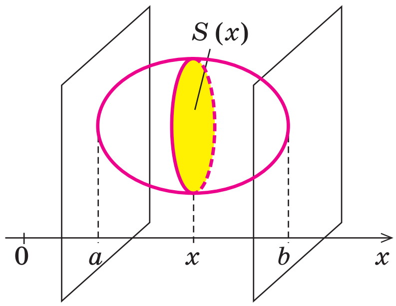
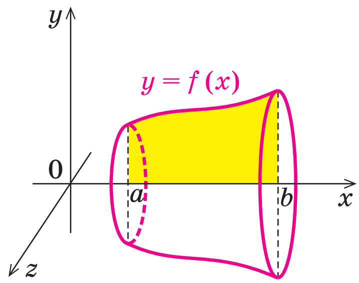
$$S = \int_{-1}^{2} \left((x+4) - (x^2+2)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}. \quad \triangleleft$$

</td></tr>
</table>

Окончание табл. 41

3. Объемы тел	
	
Если тело помещено между двумя перпендикулярными оси Ox плоскостями, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, то $V = \int_a^b S(x)\,dx,$ где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, проходящей через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярной оси Ox.	Если тело получено в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

Объяснение и обоснование

1. Вычисление площадей фигур. Обоснование формулы площади криволинейной трапеции и примеры ее применения были приведены в п. 25.1.

- Выясним, как можно вычислить площадь фигуры, изображенной на рис. 25.9. Эта *фигура ограничена сверху графиком функции* $y = f_2(x)$, *снизу графиком функции* $y = f_1(x)$, *а также вертикальными прямыми* $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$; *функции* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *непрерывны и неотрицательны на отрезке* $[a; b]$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a; b]$.

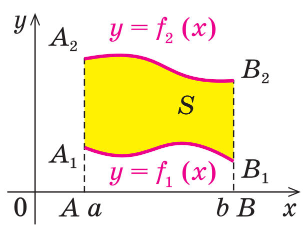


Рис. 25.9

Площадь S этой фигуры равна разности площадей S_2 и S_1 криволинейных трапеций (S_2 — площадь криволинейной трапеции AA_2B_2B, а S_1 — площадь криволинейной трапеции AA_1B_1B). Но

$$S_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx, \quad S_2 = \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Следовательно, $S = S_2 - S_1 = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx.$

Таким образом, площадь данной фигуры можно вычислить по формуле

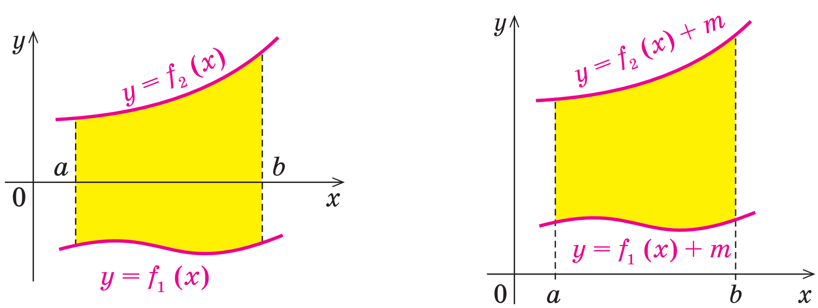
$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула верна и в том случае, когда данные функции не являются неотрицательными на отрезке $[a; b]$: для этого достаточно выполнения условий, что *функции* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a; b]$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (рис. 25.10, *а*). Для обоснования справедливости формулы достаточно перенести данную фигуру параллельно вдоль оси Oy на m единиц так, чтобы она разместилась над осью Ox (рис. 25.10, *б*). Такое преобразование означает, что данные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ мы заменили соответственно на функции $y = f_1(x) + m$ и $y = f_2(x) + m$. Площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна площади данной фигуры. Следовательно, искомая площадь

$$S = \int\limits_a^b ((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m))\,dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Например, площадь фигуры, изображенной на рис. 25.11, равна

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$



а *б*

Рис. 25.10

2. Вычисление объемов тел. Задача вычисления объема тела с помощью определенного интеграла аналогична задаче нахождения площади криволинейной трапеции. Пусть дано тело объемом V, причем есть такая прямая (ось Ox на рис. 25.12), что какую бы ни взяли плоскость, перпендикулярную этой прямой, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Следовательно, каждому числу x из отрезка $[a; b]$ (см. рис. 25.12) поставлено в соответствие единственное число $S(x)$ — площадь сечения тела этой плоскостью. Таким образом, на отрезке $[a; b]$ задана функция $S(x)$. Если функция S непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (2)$$

Полное доказательство этой формулы дано в курсе математического анализа, а мы остановимся на наглядных соображениях, приводящих к этой формуле.

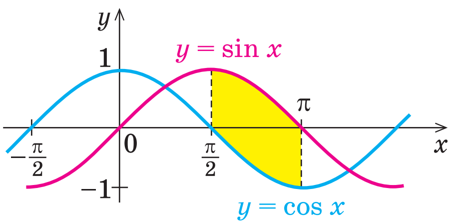


Рис. 25.11

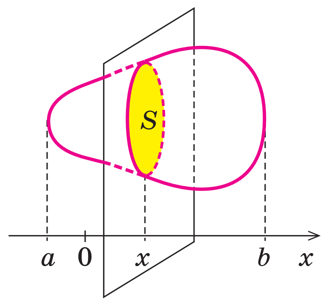


Рис. 25.12

● Разделим отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и допустим, что

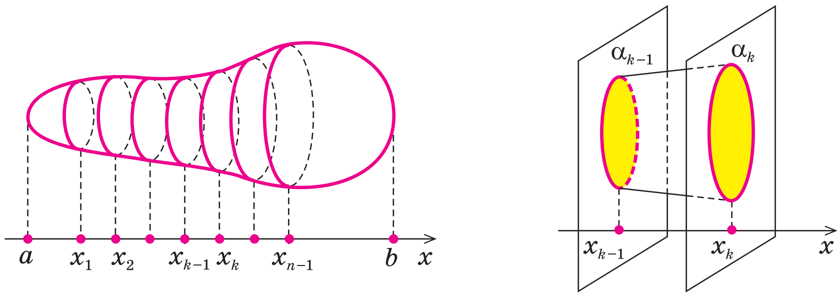
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Через каждую точку x_k проведем плоскость α_k, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости разрезают данное тело на слои (рис. 25.13, *а*). Объем слоя между плоскостями α_{k-1} и α_k (рис. 25.13, *б*) при достаточно больших n приближенно равен площади $S(x_{k-1})$ сечения, умноженной на «толщину слоя» Δx, поэтому

$$V \approx S(x_0)\,\Delta x + S(x_1)\,\Delta x + \ldots + S(x_n)\,\Delta x = V_n.$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, то есть чем больше n. Поэтому $V_n \to V$, если $n \to \infty$. По определению определенного интеграла через интегральные суммы получаем, что $V_n \to \int\limits_a^b S(x)\,dx$, если $n \to \infty$. Следовательно,

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx.$$



а *б*

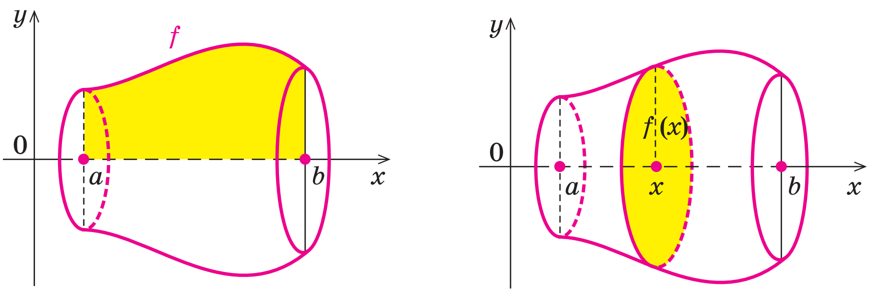
Рис. 25.13

Используем полученный результат для обоснования *формулы объема тел вращения*.

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a; b]$ оси Ox и ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$. Вследствие вращения этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox образуется тело (рис. 25.14, *а*), объем которого можно найти по формуле

$$V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \quad (3)$$

Действительно, каждая плоскость, которая перпендикулярна оси Ox и пересекает отрезок $[a; b]$ этой оси в точке x, дает в сечении с телом круг радиуса $f(x)$ и площадью $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 25.14, *б*). Отсюда по формуле (2) получаем формулу (3).

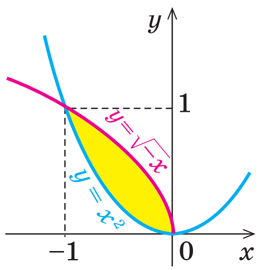


а *б*

Рис. 25.14

Примеры решения задач

Задача 1 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y=\sqrt{-x}$.

Решение	*Комментарий*
▶Изобразим данные линии (рис. 25.15) и найдем абсциссы точек их пересечения: $$x^2=\sqrt{-x}, \qquad (1)$$ тогда $x^4 = -x$, $x^4 + x = 0$, $x(x^3 + 1) = 0$, $x = 0$ или $x = -1$ (оба корня удовлетворяют уравнению (1)).  Рис. 25.15 Площадь данной фигуры равна $$S=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{-x}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{1}{2}}\,dx-\int_{-1}^{0}x^2\,dx=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\Big\|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{3}\Big\|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}.$$ ◁	Изображая данные линии (см. рис. 25.15), видим, что искомая фигура находится между графиками двух функций. Сверху она ограничена графиком функции $f_2(x)=\sqrt{-x}$, а снизу — графиком функции $f_1(x)=x^2$. Следовательно, ее площадь можно вычислить по формуле $$S=\int_a^b(f_2(x)-f_1(x))\,dx.$$ Чтобы найти пределы интегрирования, найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Поскольку ординаты обеих кривых в точках пересечения одинаковы, то достаточно решить уравнение $f_1(x) = f_2(x)$. Для решения полученного иррационального уравнения можно использовать уравнения-следствия (в конце выполнить проверку) или равносильные преобразования (на ОДЗ, то есть при $x \leqslant 0$). Отметим также, что на полученном отрезке $[-1;\ 0]$ значение $(-x)\geqslant 0$. Тогда $\sqrt{-x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$.

Задача 2 Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

Решение	*Комментарий*
▶Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий. $$4 - x^2 = 0,\ x = \pm 2.$$	Изобразим данную фигуру (рис. 25.16) и убедимся, что она является криволинейной трапецией.

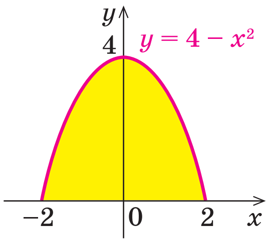


Рис. 25.16

Поскольку данная фигура — криволинейная трапеция, то объем тела вращения равен

$$V=\int_{-2}^{2}\pi\left(4-x^2\right)^2dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(16-8x+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(16x-8\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=76\frac{4}{5}\pi. \triangleleft$$

В этом случае объем тела вращения можно вычислить по формуле

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, достаточно найти абсциссы точек пересечения данных линий.

Как и для задач на вычисление площадей, в ответ записывают числовое значение объема, но можно подчеркнуть, что мы получили именно величину объема, и записать

ответ: $76\frac{4}{5}\pi$ куб. ед. (кубических единиц).

Замечание. Можно было обратить внимание на то, что данная фигура симметрична относительно оси *Oy*, и поэтому объем тела, полученного вращением всей фигуры вокруг оси абсцисс, будет вдвое больше объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок [0; 2].

Вопросы для контроля

1. Объясните, как можно найти площадь криволинейной трапеции. Приведите пример.
2. 1) Запишите формулу для нахождения площади фигуры, ограниченной сверху и снизу графиками непрерывных функций, а также прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$). Приведите пример.
   2*) Докажите эту формулу.
3. Запишите формулу для нахождения объема тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси абсцисс. Приведите пример ее использования.

Упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями **(1–6)**.

1. 1) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = 4 - x$;
3) $y=\frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 3$.

2. 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
3) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$.

3. 1) $y = x^2$, $y = x + 2$; 2) $y = x^2$, $y = 2 - x$.

4. 1) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 4x + 5$; 2) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 6 - x^2$.

5. 1) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$; 2) $y = \frac{5}{x}$, $x + y = 6$;

3) $y = \frac{5}{x}$, $y = 4x + 1$, $x = 2$; 4) $y = \frac{3}{x}$, $y = 2x + 1$, $x = 3$.

6. 1) $y = 8 - x^2$, $y = 4$; 2) $y = 6 - x^2$, $y = 5$;
3) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 8x - 2x^2$, касательной к этой параболе в ее вершине и прямой $x = 0$.

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x = -2$ и прямой $x = 1$.

9. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
1) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; 2) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$; 4) $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

10. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:
1) $y = x^2$, $y = x$; 2) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;
3) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$; 4) $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

11*. 1) Выведите формулу объема шарового сегмента радиуса R и высоты H.
2) Выведите формулу объема усеченного конуса высоты H с радиусами оснований R и r.

§ 26 ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Понятия дифференциального уравнения и его решения. До сих пор мы рассматривали уравнения, в которых неизвестными были числа. В математике и ее применениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции. Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — данная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t) = 3 - 4t$, то для нахождения $s(t)$ необходимо решить уравнение $s'(t) = 3 - 4t$.

Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*. *Решением* дифференциального уравнения называется любая функция, удовлетворяющая этому уравнению (то есть функция, при подстановке которой в заданное уравнение получаем тождество).

Задача 1 Решите дифференциальное уравнение $y' = x + 3$.

Решение

▶ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 3$, то есть найти первообразную для функции $x + 3$.

По правилам нахождения первообразных получаем: $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$, где C — произвольная постоянная. ◁

При решении дифференциальных уравнений следует учитывать, что *решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной*. Такое решение называют *общим решением* данного уравнения.

Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется. Решение, полученное с использованием такого условия, называют *частным решением* данного дифференциального уравнения.

Задача 2 Найдите решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \sin x$, удовлетворяющего условию $y(0) = 2$.

Решение

▶ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = -\cos x + C$. Из условия $y(0) = 2$ находим $-\cos 0 + C = 2$. Тогда $C = 3$.

Ответ: $y = -\cos x + 3$. ◁

Решения многих физических, биологических, технических и других практических задач сводятся к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \tag{1}$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \tag{2}$$

где C — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, в опытах установлено, что скорость $m'(t)$ размножения бактерий (для которых достаточно пищи) связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где k — положительное число, которое зависит от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, при условии, что в момент $t = 0$ масса m_0 бактерий известна. Тогда $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, следовательно,

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то $m'(t) = -km(t)$, где k — постоянная, которая зависит от радиоактивности вещества.

Решениями этого уравнения являются функции

$$m\,(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса вещества равна m_0, то $C = m_0$, и тогда

$$m\,(t) = m_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Отметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, то есть промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t = T$ получаем $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$. Отсюда $e^{kT} = 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. Тогда формулу (3) можно записать следующим образом:

$$m\,(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}\cdot t} = m_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}},$$

то есть

$$m\,(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания. На практике часто встречаются периодически повторяющиеся процессы, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. п.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и др. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (4)$$

где ω — заданное положительное число, $y = y\,(x)$, $y'' = (y'\,(x))'$.

Решением уравнения (4) является функция

$$y\,(x) = C_1 \sin\,(\omega x + C_2), \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые определяются условиями конкретной задачи.

Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y\,(t)$ — отклонение точки струны, которая свободно колеблется, от положения равновесия в момент времени t, то

$$y\,(t) = A \sin\,(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — угловая частота, φ — начальная фаза колебания.

Графиком гармонического колебания является синусоида.

3. Примеры применения первообразной и интеграла к решению практических задач

Задача 3 Цилиндрический бак, высота которого 4,5 м, а радиус основания 1 м, заполнен водой. За какое время вода вытечет из бака через круглое отверстие в дне, радиус которого 0,05 м?

Решение

▶ Обозначим высоту бака H, радиус его основания R, радиус отверстия r (длины измеряем в метрах, время — в секундах) (рис. 26.1).

Скорость v вытекания жидкости зависит от высоты x столба жидкости и вычисляется по формуле Бернулли

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \tag{6}$$

где g = 9,8 м/с², σ — коэффициент, зависящий от свойства жидкости; для воды $\sigma = 0{,}6$. Поэтому при уменьшении уровня воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не остается постоянной).

Пусть $t(x)$ — время, за которое из бака высотой x с основанием радиуса R вытекает вода через отверстие радиуса r (рис. 26.1).

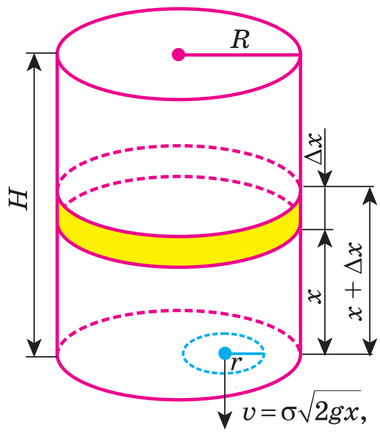


Рис. 26.1

Найдем приближенно отношение $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, считая, что за время $\Delta t = t(x + \Delta x) - t(x)$ скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6).

За время Δt объем воды, которая вытекла из бака, равен объему цилиндра высотой Δx с основанием радиуса R (см. рис. 26.1), то есть равен $\pi R^2 \Delta x$. С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания v на время Δt, то есть объем равен $\pi r^2 v \Delta t$. Следовательно,

$$\pi R^2 \Delta x = \pi r^2 v \Delta t.$$

Учитывая формулу (6), получаем:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma\sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тогда при $\Delta x \to 0$ получаем равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Отсюда

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если $x = 0$ (в баке нет воды), то $t(0) = 0$, отсюда $C = 0$. При $x = H$ находим искомое время

$$t(H) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{g}} \cdot \sqrt{2H}.$$

Используя данные задачи, вычисляем:

$$t(4{,}5) = \frac{1^2}{(0{,}05)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \cdot \sqrt{9} \approx 639 \text{ (с)}.$$

Ответ: 639 с. ◁

Задача 4 Вычислите работу силы F при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 м необходима сила 5 Н.

Решение

▶Согласно закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, то есть $F = kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в метрах), k — постоянная. По условию задачи находим k. Поскольку при $x = 0{,}01$ м сила $F = 5$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 500$.

Следовательно, $F(x) = kx = 500x$.

Найдем формулу для вычисления работы при перемещении тела (оно рассматривается как материальная точка), которое движется под действием переменной силы $F(x)$, направленной вдоль оси Ox. Пусть тело переместилось из точки $x = a$ в точку $x = b$.

Обозначим через $A(x)$ работу, выполненную при перемещении тела из точки a в точку x. Дадим x приращение Δx. Тогда $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ — работа, которая выполняется силой $F(x)$ при перемещении тела из точки x в точку $x + \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то силу $F(x)$ на отрезке $[x;\ x + \Delta x]$ будем считать постоянной и равной $F(x)$. Поэтому $\Delta A = F(x)\,\Delta x$. Отсюда $\frac{\Delta A}{\Delta x} = F(x)$. Тогда при $\Delta x \to 0$ получаем $A'(x) = F(x)$. Последнее равенство означает, что $A(x)$ является первообразной для функции $F(x)$.

Учитывая, что $A(a) = 0$, по формуле Ньютона–Лейбница получаем:

$$\int_a^b F(x)\,dx = A(x)\Big|_a^b = A(b) - A(a) = A(b) = A.$$

Таким образом,

работа переменной силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Используя данные задачи, вычисляем:

$$A = \int_0^{0{,}06} 500x\,dx = 500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}9 \text{ (Дж)}. \ \triangleleft$$

Вопросы для контроля

1. Объясните, какое уравнение называется дифференциальным уравнением. Приведите примеры.
2. Объясните, какая функция называется решением дифференциального уравнения. Приведите примеры.

Упражнения

1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/сек). Вычислите путь, который пройдет тело за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4$; 2) $v(t) = 2t^2 + t,\ t_1 = 1,\ t_2 = 3$.

2. Решите дифференциальное уравнение:

1) $y' = 3 - 4x$; 2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$; 3) $y' = 3e^{2x}$;
4) $y' = 4\cos 2x$; 5) $y' = 3\sin x$; 6) $y' = \cos x - \sin x$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y' = \sin x,\ y(0) = 0$; 2) $y' = 2\cos x,\ y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1,\ y(1) = -2$; 4) $y' = 2 + 2x - 3x^2,\ y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x,\ y(1) = 1$; 6) $y' = e^{-x},\ y(0) = 2$.

4. Какую работу необходимо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

5. Сила 4 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу необходимо выполнить, чтобы растянуть пружину на 8 см?

6. Вода, которая подается с плоскости основания в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака равна h, радиус основания r.

7. Найдите работу против сил выталкивания при погружении шара в воду.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 4

1. Найдите первообразную для функции $f(x) = e^{2x} - \cos x$, график которой проходит через начало координат.

2. Найдите первообразную для функции $f(x) = \sin x - e^{3x}$, график которой проходит через начало координат.

Найдите первообразную для функции $y = f(x)$, график которой проходит через данную точку **(3–7)**.

3. 1) $f(x) = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + 4\cos 4x,\ A(\pi;\ 3)$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\sin 5x,\ B(\pi;\ 0)$;

3) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4,\ B(-1;\ 12)$; 4) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x,\ N(9;\ -8)$.

4. 1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $A(2;\ 6)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $A(1;\ 4)$;

3) $f(x)=\dfrac{12}{\sqrt{3x-2}}$, $A(9;\ 30)$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями **(5–9)**.

5. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3 - x$; 2) $y = x^2 - 5x + 2$, $y = 2 - x$;

3) $y=\dfrac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 4$; 4) $y=\dfrac{2}{x}$, $y = 2$, $x = 3$.

6. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 2 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 1$;

3) $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = x + 4$.

7. 1) $y = x^3$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 4x$;

3) $y=-x^2+2x+1$, $y=x^2-2x+1$; 4) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 2 - x^2$.

8. 1) $y=\dfrac{2}{x}$, $x + y = 3$; 2) $y=\dfrac{4}{x}$, $x + y = 5$;

3) $y=\dfrac{3}{x}$, $y = 4x - 1$, $x = 2$; 4) $y=\dfrac{5}{x}$, $y = 2x + 3$, $x = 3$.

9. 1) $y = 9 - x^2$, $y = 1$; 2) $y = 5 - x^2$, $y = 4$;

3) $y = x^2$, $y = 8x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 3x - 2x^2$.

10. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\dfrac{8}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, пополам?

11. При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\dfrac{4}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, пополам?

12. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$, касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = 2$, и осью ординат.

13. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x - x^2$, касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = 3$, и осью ординат.

14. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{x+1}$ и $y=\sqrt{7-x}$ и осью абсцисс.

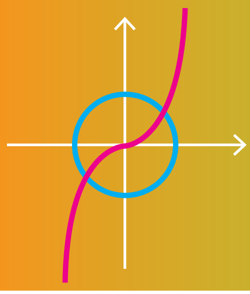
СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Интегральное исчисление и само понятие интеграла возникло из необходимости вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. Идеи интегрального исчисления берут свое начало в работах древних математиков. В частности, важное значение для развития интегрального исчисления имел *метод исчерпывания,* предложенный Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 г. до н. э.) и усовершенствованный Архимедом. По этому методу для вычисления площади плоской фигуры вокруг нее описывают ступенчатую фигуру и в нее вписывают ступенчатую фигуру. Увеличивая количество сторон полученных многоугольников, находят предел, к которому стремятся площади ступенчатых фигур (именно так в курсе геометрии вы доказывали формулу площади круга). Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но прошло более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи были доведены до уровня исчисления. Заметим, что математики XVII в., получившие множество новых результатов, учились на работах Архимеда. Именно в XVII в. было сделано много открытий, касающихся интегрального исчисления, введены основные понятия и термины.

Символ $\int$ ввел Г. Лейбниц (1675). Этот знак является измененной латинской буквой S (первая буква слова *summa*). Само слово *интеграл* ввел Я. Бернулли (1690). Другие известные вам термины, касающиеся интегрального исчисления, появились значительно позже. Название *первообразная для функции,* применяемое сейчас, является русским переводом более раннего термина «примитивная функция», введенного Ж. Лагранжем (1797). Латинское слово *primitivus* переводится как «начальный»: функция $F(x)=\int f(x)\,dx$ — начальная (или первообразная) для функции $f(x)$, которая образуется из $F(x)$ дифференцированием. Понятие *неопределенного интеграла* и его обозначение ввел Лейбниц, а обозначение *определенного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ввел К. Фурье (1768–1830).

Следует отметить, что при всей значимости результатов, полученных математиками XVII в., интегрального исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, на которых основывается решение многих отдельных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования. Это сделали Ньютон и Лейбниц, которые независимо друг от друга открыли факт, известный нам под названием формулы Ньютона–Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод. Следовало еще научиться находить первообразные для многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисления созданы.

Методы интегрального исчисления активно развивались в следующем столетии (прежде всего следует назвать имена Л. Эйлера, который закончил систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитие интегрального исчисления значительный вклад внесли российские математики украинского происхождения В. Я. Буняковский (1804–1889), М. В. Остроградский (1801–1862). Много теорем и формул Остроградского вошли в различные математические курсы. Хорошо известны математикам всего мира метод интегрирования Остроградского, правило Остроградского, формула Остроградского и др.



Раздел 5
СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ, НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ СИСТЕМАХ

§ 27 УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

27.1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

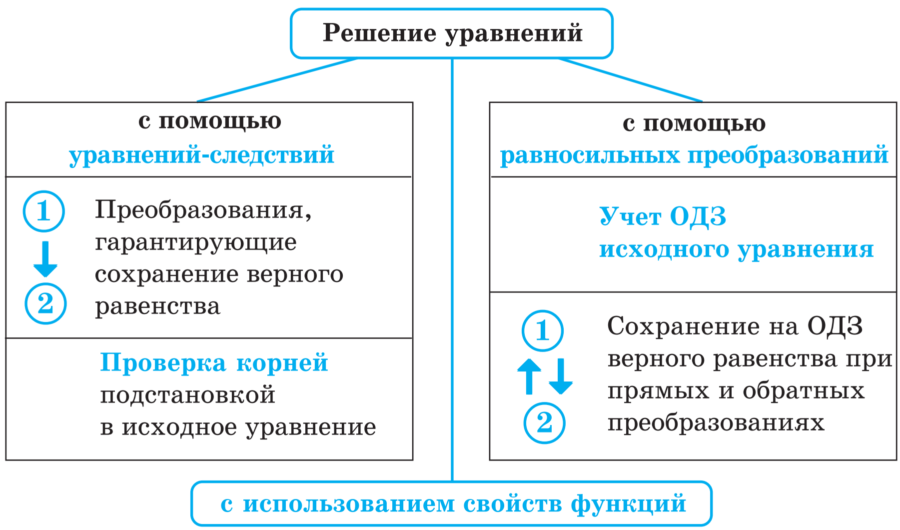
Таблица 42

1. Область допустимых значений (ОДЗ)	
Определение	Пример
Областью допустимых значений (или областью определения) ***уравнения*** **(или неравенства) называется общая область определения для функций** $f(x)$ **и** $g(x)$**, стоящих в левой и правой частях уравнения (или неравенства).**	Для уравнения $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$, так как область определения функции $f(x)=\sqrt{x+2}$ определяется условием $x + 2 \geqslant 0$, а областью определения функции $g(x) = x$ является множество всех действительных чисел.
2. Уравнения-следствия	
Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого. Если из **правильности первого равенства следует правильность каждого последующего, то получаем уравнения-следствия.** *При этом возможно появление посторонних корней.* Поэтому **при использовании уравнений-следствий проверка полученных корней подстановкой их в исходное уравнение является составной частью решения.**	Решите уравнение $$\sqrt{x+2}=x.$$ ▶Возведем обе части уравнения в квадрат: $$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2,$$ $$x+2=x^2,\ x^2-x-2=0,$$ $$x_1=2,\ x_2=-1.$$ Проверка. $x = 2$ — корень; $x = -1$ — посторонний корень. *Ответ*: 2. ◁

Продолжение табл. 42

3. Равносильные уравнения и неравенства	
Определение	Простейшие теоремы
Два уравнения (неравенства) называются *равносильными* на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения. *Иными словами, каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого.* (Схема решения уравнений с помощью равносильных преобразований приведена в пп. 4 и 6 этой таблицы.)	1. **Если из одной части уравнения (неравенства) перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение (неравенство), равносильное заданному** (на любом множестве). 2. **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю** (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), **то получим уравнение, равносильное заданному** (на ОДЗ заданного уравнения).

4. Схема поиска плана решения уравнений



① — исходное уравнение;

② — уравнение, полученное в результате преобразования исходного;

↓, ↑ — символическое изображение направления выполненных преобразований

Продолжение табл. 42

5. Замена переменных

Ориентир	Пример
Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной).	Решите уравнение $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$. ▶ *Замена:* $\sin x = t$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -1$. 1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — корней нет, поскольку $\lvert 3\rvert > 1$. 2. При $t = -1$ имеем $\sin x = -1$, тогда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. *Ответ:* $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

6. Схема поиска плана решения неравенств

Решение неравенства

с помощью равносильных преобразований

Учет ОДЗ исходного неравенства

1 ↓↑ 2 Сохранение на ОДЗ верного неравенства при прямых и обратных преобразованиях.

с помощью метода интервалов ($f(x) \gtrless 0$)

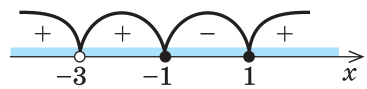
1. Найти ОДЗ.
2. Найти нули функции $f(x) = 0$.
3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.
4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.

1 — исходное неравенство;

2 — неравенство, полученное в результате преобразования исходного;

↓, ↑ — символическое изображение выполненных преобразований (с указанием направления их выполнения)

Окончание табл. 42

7. Метод интервалов (решение неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)	
План	Пример
1. Найти ОДЗ. **2. Найти нули функции $f(x) = 0$.** **3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.** **4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.**	Решите неравенство $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$. ▶ Пусть $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)^2}$. 1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, то есть $x \neq -3$. 2. Нули функции: $f(x) = 0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (входят в ОДЗ). 3.  *Ответ:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

8. Теоремы о равносильности неравенств
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (*или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства*), **не изменяя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).**
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (*или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства*) **и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства).**

Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

Таблица 43

1. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля

по определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0, \\ 0, \text{ при } a = 0, \\ -a, \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

с использованием геометрического смысла

$|a|$ — *расстояние на числовой прямой от точки* 0 *до точки* a.

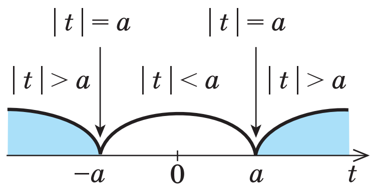
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

по общей схеме

1. **Найти ОДЗ.**
2. **Найти нули всех подмодульных функций.**
3. **Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки.**
4. **Найти решение в каждом промежутке (и проверить, входит ли это решение в расматриваемый промежуток).**

с использованием специальных соотношений

2. Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **или** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **или** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **или** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$
5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}$

Обобщения

6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **или** $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

3. Использование специальных соотношений
1. $\lvert u\rvert = u \Leftrightarrow u \geqslant 0.$ 2. $\lvert u\rvert = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0.$ 3. $\lvert u\rvert = \lvert v\rvert \Leftrightarrow u^2 = v^2.$ 4. $\lvert u\rvert > \lvert v\rvert \Leftrightarrow u^2 > v^2$. **Тогда** $\lvert u\rvert - \lvert v\rvert > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0;$ *знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов.* 5. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert = u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u\geqslant 0, \\ v\geqslant 0. \end{cases}$ 6. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert = -u-v \Leftrightarrow \begin{cases} u\leqslant 0, \\ v\leqslant 0. \end{cases}$ 7. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = \lvert u+v\rvert \Leftrightarrow uv \geqslant 0.$ 8. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = \lvert u-v\rvert \Leftrightarrow uv \leqslant 0.$ 9. $\lvert x-a\rvert + \lvert x-b\rvert = b-a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, **где** $a < b$.

27.2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Таблица 44

1. Понятие системы уравнений и неравенств	
Понятия системы и ее решений	Примеры
Если ставится задача найти все общие решения двух (или больше) уравнений (неравенств) с одной или несколькими переменными, то говорят, что требуется решить **систему уравнений (неравенств).** Записывают систему уравнений (неравенств), объединяя их фигурной скобкой. ***Решением системы*** **называют такое значение переменной или такой упорядоченный набор значений переменных (если переменных несколько), которые удовлетворяют всем уравнениям (неравенствам) системы.** *Решить систему уравнений (неравенств) — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.* Если система не имеет решения, то ее называют несовместной.	$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ — система двух уравнений с двумя переменными. Пара чисел (5; 1), то есть $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ — решение системы. $\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ — система трех уравнений с тремя переменными. Тройка (1; 4; 3), то есть $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ — одно из решений системы.

Продолжение табл. 44

<table>
<tr><td colspan="2">2. Системы-следствия</td></tr>
<tr><td>Определение</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>

Если каждое решение первой системы уравнений является решением второй системы, то вторая система называется *следствием* первой.

При использовании систем-следствий возможно появление посторонних решений, поэтому проверка подстановкой решения в начальную систему является составной частью решения системы.

</td><td>

Решите систему: $\begin{cases} \dfrac{y}{x-1}=1, \\ x^2=y+1. \end{cases}$

Решение. ► Из первого уравнения системы $y = x - 1$. Подставляем во второе уравнение системы и получаем $x^2 = x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тогда $y_1 = -1$, $y_1 = 0$.
Проверка. Пара $(0; -1)$ удовлетворяет обоим уравнениям системы и является ее решением. Пара $(1; 0)$ не удовлетворяет первому уравнению и не является решением системы.
Ответ: $(0; -1)$. ◁

</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Равносильность систем уравнений и неравенств</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определения</td></tr>
<tr><td>

Две системы уравнений (или неравенств) называют *равносильными на некотором множестве*, если на этом множестве они имеют одинаковые решения (то есть каждое решение первой системы на этом множестве является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой).

</td><td>

***Областью допустимых значений* (ОДЗ) *системы* называют общую область определения всех функций, входящих в запись этой системы.**

Все равносильные преобразования систем выполняются на ОДЗ исходной системы.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Простейшие свойства равносильных систем</td></tr>
<tr><td colspan="2">

1. Если изменить порядок записи уравнений (или неравенств) заданной системы, то получим систему, равносильную заданной.
2. Если одно из уравнений (или неравенств) системы заменить на равносильное ему уравнение (неравенство), то получим систему, равносильную заданной.
3. Если в системе уравнений из одного уравнения выразить одну переменную через другие и полученное выражение подставить вместо этой переменной во все другие уравнения системы, то получим систему, равносильную заданной (на ее ОДЗ).
4. Если какое-то уравнение системы заменить суммой этого уравнения, умноженного на число $\alpha \neq 0$, и какого-то другого уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$ (а все другие уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную заданной (на ее ОДЗ).

</td></tr>
</table>

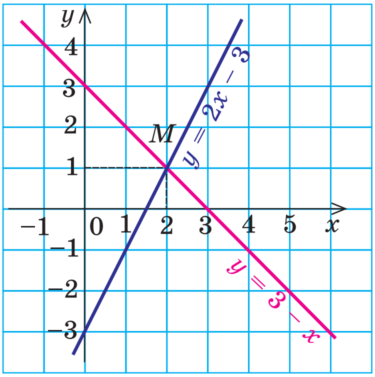
Продолжение табл. 44

4. Основные способы решения систем уравнений
Способ подстановки
Выражаем из одного уравнения системы одну переменную через другую (или через другие) и подставляем полученное выражение вместо соответствующей переменной во все другие уравнения системы (затем решаем полученное уравнение или систему и подставляем результат в выражение для первой переменной).
Пример. Решите систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Решение. ▶ Из первого уравнения системы $y = 2x - 3$. Подставляем во второе уравнение системы и получаем $x + 2x - 3 = 3$. Отсюда $x = 2$. Тогда $y = 2x - 3 = 1$. *Ответ:* (2; 1). ◁
Способ сложения
Если первое уравнение системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число $\alpha \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$ (а все остальные уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную заданной.
Пример. Решите систему $\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases} \begin{array}{\|l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array}$ Решение. ▶ Умножим обе части первого уравнения системы на 2, а второго — на 3 (чтобы получить как коэффициенты при переменной y противоположные числа) и почленно сложим полученные уравнения. Из последнего полученного уравнения находим значение x, подставляем результат в любое уравнение системы и находим значение y. $\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \begin{array}{\|l} + \end{array}$ $19x = 57,$ $x = 3.$ Тогда $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$. *Ответ:* (3; 2). ◁
Графическое решение систем уравнений с двумя переменными
Выполняем равносильные преобразования системы так, чтобы удобно было строить графики всех входящих в нее уравнений. Затем строим соответствующие графики и находим координаты точек пересечения построенных линий — эти координаты и являются решениями системы.

Окончание табл. 44

Примеры

1. Решите графически систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$



Решение. ▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Графиком каждого из уравнений системы является прямая.

Для построения прямой достаточно построить две ее точки.

Например, для

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	−3	−1

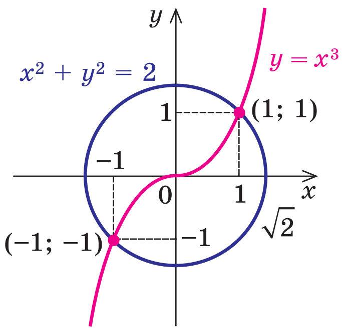
$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2

Графики пересекаются в единственной точке M (2; 1). Итак, пара чисел (2; 1) — единственное решение заданной системы.

Ответ: (2; 1). ◁

2. Решите графически систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$



Решение. ▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$

График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, а график второго — кубическая парабола $y = x^3$.

Эти графики пересекаются в двух точках с координатами (−1; −1) и (1; 1).

Ответ: (−1; −1), (1; 1) — решение системы. ◁

Объяснение и обоснование

1. Общие методы решения уравнений и неравенств детально рассмотрены в учебнике 10 класса (см. в разделе 1 пп.: «Уравнения-следствия и равносильные преобразования уравнений», «Применение свойств функций к решению уравнений», «Неравенства: равносильные преобразования и общий метод интервалов», «Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля», «Уравнения и неравенства с параметрами», «Многочлены. Корни многочлена. Формулы Виета. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами»). Там же были рассмотрены и соответствующие ориентиры для использования выделенных общих методов, которые приведены в табл. 42. (Напомним, что некоторые общие методы, связанные с применением свойств функций к решению уравнений, рассмотрены в этом учебнике в табл. 27 на с. 251, а с применением производной — в табл. 16 на с. 137.)

Рассмотрение всех уравнений и неравенств из каждой темы проводилось с использованием общих методов решения (см., например, § 17). К ним при необходимости добавлялись специальные приемы решения для некоторых типов уравнений или неравенств (см., например, схему решения показательных уравнений в табл. 19 на с. 178).

Аналогично можно организовать и *поиск плана решения уравнения или неравенства.*

1. Сначала *выбрать общий способ решения уравнения или неравенства и вспомнить ориентиры для его реализации* (см. пп. 4 и 6 табл. 42). Например, если для решения уравнения вы решили использовать уравнения-следствия, то в конце обязательно придется выполнить проверку полученных корней (и, оформляя решение, записать либо саму проверку, либо предложение типа «Проверка показывает, что $x = \dots$ — корень, а $x = \dots$ — посторонний корень», которое свидетельствует о том, что проверку вы выполнили устно).
2. *Для выполнения преобразований данного уравнения (неравенства) использовать соответствующие формулы* (в зависимости от вида уравнения или неравенства) *или свойства соответствующих функций либо специальные ориентиры или теоремы,* которые рассматривались при решении уравнений и неравенств определенного вида (целые или дробные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические).

Напомним, что из определения уравнения-следствия *(если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого)* получаем ориентир:

для получения уравнения-следствия достаточно рассмотреть заданное уравнение как правильное числовое равенство и гарантировать (то есть иметь возможность обосновать), **что каждое следующее уравнение будет правильным числовым равенством.**

Действительно, если придерживаться этого ориентира, то, рассмотрев заданное уравнение как правильное числовое равенство, мы фактически подставили в первое уравнение вместо переменной его корень. Поскольку второе уравнение тоже является правильным числовым равенством, то рассмотренный корень первого уравнения является корнем и второго уравнения, а это и означает, что второе уравнение является следствием первого. Напомним, что **в результате использования уравнений-следствий возможно появление посторонних корней и поэтому проверка подстановкой корней в исходное уравнение является составной частью решения** (см. решение уравнения $\sqrt{x+2}=x$ с помощью уравнений-следствий в п. 2 табл. 42).

Аналогичный ориентир был получен и в курсе 10 класса для равносильных преобразований уравнений и неравенств: *для выполнения равносильных преобразований уравнений или неравенств* (см. определение в п. 3 табл. 42) *достаточно*:

1. **Учесть ОДЗ заданного уравнения (неравенства).**
2. **Следить за тем, чтобы на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением правильного равенства (неравенства).**

Рассуждая так же, как и в случае ориентира для уравнений-следствий, получаем следующее. Если придерживаться приведенного ориентира, то на ОДЗ каждое решение первого уравнения (неравенства) будет решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения (неравенства) будет решением первого, то есть на ОДЗ рассмотренные уравнения (неравенства) будут равносильны. (Примеры применения этого ориентира к решению уравнений и доказательству теорем о равносильности уравнений приведены на с. 211, 212, а для решения неравенств — на с. 224, 225.)

Иногда удобно выполнять равносильные преобразования не на всей ОДЗ, а только на той ее части, где находятся корни заданного уравнения (решения неравенства).

Например, для решения уравнения

$$\sqrt{x+2}=x \qquad (1)$$

выберем равносильные преобразования.

ОДЗ уравнения (1): $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$. На этой ОДЗ правая часть уравнения (1) может быть и положительной, и отрицательной. Это означает, что при возведении обеих частей уравнения в квадрат мы можем гарантировать только правильность прямых преобразований (если числа равны, то и квадраты их обязательно будут равны), а обратных — нет (если $a^2 = b^2$, то не обязательно выполняется равенство $a = b$, например $2^2 = (-2)^2$, но $2 \neq -2$).

Попробуем рассмотреть не всю ОДЗ, а только ту ее часть, где находятся корни заданного уравнения.

Для всех корней уравнения (1) должно выполняться условие $x \geqslant 0$ (*) (поскольку при подстановке корня в уравнение (1) оно превращается в правильное равенство, в котором левая часть неотрицательна, следовательно, для всех корней и правая часть будет неотрицательной).

При условии (*) *обе части уравнения* (1) *неотрицательны, и при возведении в квадрат мы получаем равносильное уравнение* (поскольку для неотрицательных значений аргумента функция $y = t^2$ является возрастающей и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, поэтому при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, если $a^2 = b^2$, обязательно выполняется равенство $a = b$):

$$x + 2 = x^2. \tag{2}$$

Заметим, что для всех корней уравнения (2) его правая часть $x^2 \geqslant 0$, тогда и левая часть будет неотрицательной: $x + 2 \geqslant 0$. Но это означает, что для всех корней уравнения (2) ОДЗ уравнения (1) выполняется автоматически и его можно не записывать в решение (но нужно уметь объяснять, почему мы не записали ОДЗ в решение), а записывать и учитывать только ограничение (*).

Тогда $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = 2$ — корень (удовлетворяет условию (*)) $x_2 = -1$ — посторонний корень (не удовлетворяет условию (*)).

Ответ: 2.

Замечание 1. Приведенное решение можно записать также с помощью знака равносильности ($\Leftrightarrow$):

$$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x_1 = -1 \text{ или } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Замечание 2. В приведенных выше рассуждениях по решению уравнения (1) мы фактически обосновали теорему (приведенную и обоснованную в учебнике 10 класса):

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases} \tag{3}$$

которую можно использовать при решении иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

2. Системы уравнений и неравенств. С понятием системы уравнений и неравенств, их решения и с основными методами решений систем уравнений, поданными в табл. 44, вы знакомы из курса алгебры 7–9 классов (и использовали их при решении систем в 10–11 классах). Напомним, что аналогично к соответствующим понятиям, связанным с уравнениями или неравенствами, вводят понятие области допустимых значений системы уравнений или неравенств (см. п. 3 табл. 44), понятие систем-следствий для уравнений (п. 2 табл. 44) и равносильных систем уравнений и неравенств (п. 3 табл. 44).

Все приведенные определения относятся не только к системам уравнений или систем неравенств, но и к смешанным системам, в которые входят и уравнения, и неравенства.

Как и для уравнений, из определения *системы-следствия* для системы уравнений (*если каждое решение первой системы уравнений является решением второй системы, то вторая система называется следствием первой*) получаем такой ориентир:

для получения системы-следствия достаточно рассмотреть заданную систему уравнений как систему правильных числовых равенств и гарантировать (то есть иметь возможность обосновать), что каждую следующую систему уравнений мы можем получить как систему правильных числовых равенств.

Действительно, если придерживаться этого ориентира, то каждое решение первой системы превращает все уравнения системы в правильные числовые равенства. Но тогда вторая система тоже будет содержать все правильные числовые равенства, то есть рассматриваемые значения переменной (или упорядоченные наборы нескольких переменных) являются решением и второй системы, а это и означает, что вторая система является следствием первой. Также следует учитывать, что **при использовании систем-следствий возможно появление посторонних решений, и потому проверка подстановкой решений в начальную систему является составляющей частью решения** (см. пример в п. 2 табл. 44).

Аналогично обосновывается, что *при равносильных преобразованиях систем уравнений или неравенств* необходимо учесть ОДЗ заданной системы и гарантировать для всех уравнений системы сохранение правильных равенств на каждом шаге решения (а для систем неравенств — сохранения правильных неравенств) не только при прямых преобразованиях, но и при обратных.

Этот ориентир позволяет обосновать простейшие свойства равносильных систем уравнений и неравенств, которые приведены в п. 3 табл. 44 (проведите такое обоснование самостоятельно).

Для решения некоторых систем иногда удается использовать свойства функций (см., например, с. 143). Следует также помнить, что для решения некоторых уравнений, неравенств и их систем бывает удобно ввести *замену переменных* (см., например, решение уравнения в п. 5 табл. 42, неравенства — в п. 3 табл. 20 на с. 186, системы — на с. 183, 184).

Иногда при решении уравнений и неравенств приходится переходить не только к равносильным системам уравнений или неравенств (см., например, формулу (2)), но и к *совокупности уравнений или неравенств* (или их систем).

Решить совокупность уравнений (неравенств или их систем) — значит найти такие значения переменной или такие упорядоченные наборы значений переменных (если переменных несколько), **каждое из которых является решением хотя бы одного из уравнений (неравенств или их**

систем), входящих в совокупность, при этом остальные уравнения (неравенства или системы) совокупности определены, или доказать, что таких наборов чисел не существует.

Из этого определения следует, что *областью допустимых значений (ОДЗ) совокупности считается общая область определения для всех функций, которые входят в запись совокупности*.

Как и для уравнений, неравенств или их систем, **две совокупности уравнений (неравенств или их систем) называют равносильными на некотором множестве, если они на этом множестве имеют одинаковые решения.** Иначе говоря, каждое решение первой совокупности на этом множестве является решением второй и, наоборот, каждое решение второй является решением первой. Если две совокупности не имеют решений на данном множестве, то они также считаются равносильными на этом множестве.

Совокупность уравнений, неравенств или их систем можно записывать, используя союз «или» (именно такая запись использовалась в учебнике для 10 класса). Можно также использовать специальный знак совокупности «[». Например, уравнение $\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0$ на его ОДЗ: $2x + 2 \geqslant 0$ равносильно совокупности

$$\sqrt{2x+2}=0 \tag{4}$$

или

$$x^2 + 3x - 4 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) имеет корень $x = -1$, который входит в ОДЗ заданного уравнения (тогда уравнение (5) определено). А уравнение (5) имеет корни: $x_1 = 1$ — входит в ОДЗ заданного уравнения (тогда уравнение (4) определено) и $x_2 = -4$ — не входит в ОДЗ заданного уравнения (тогда уравнение (4) не определено). Таким образом, решением рассмотренной совокупности (а следовательно, и корнями заданного уравнения) являются только $x = -1$ и $x = 1$.

Рассмотренное решение можно записывать, используя значки равносильности, совокупности и системы. Приведем несколько возможных способов такой записи (проанализируйте каждый из этих способов оформления), но такое оформление записи решения не является обязательным.

<u>I способ</u>

$$\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+3x-4=0,\\ 2x+2\geqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

<u>II способ</u>

$$\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\\ x=-4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

III способ

$$\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+2}=0, \\ x^2+3x-4=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ \sqrt{2x+2}=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} x\geqslant -2, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-4 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

3. Уравнения и неравенства с параметрами. Решение уравнений и неравенств с параметрами детально рассматривалось в курсе 10 класса. Для решения таких заданий часто приходится разбивать область допустимых значений параметра на такие промежутки, что при изменении параметра внутри выбранного промежутка получаем уравнения (или неравенства), которые можно решить одним и тем же методом (и решения через параметры записываются одинаково). Методы решения заданий с параметрами точно такие же, как и методы решения аналогичных уравнений, неравенств или их систем без параметров. Напомним *ориентир*, который мы использовали для разбивки области допустимых значений параметра на промежутки.

Любое уравнение (неравенство) с параметрами можно решать как обычное уравнение (неравенство) до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Если какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, то решение необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.

Пример Решите уравнение $ax+1=\dfrac{4a+2}{x}$, где x — переменная.

Решение	*Комментарий*
ОДЗ: $x \neq 0$	Выражения, стоящие в обеих частях уравнения, существуют тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю.
$ax^2 + x - (4a + 2) = 0$	Умножим обе части данного уравнения на выражение x — общий знаменатель для обеих частей уравнения и получим целое уравнение, которое при условии $x \neq 0$ (то есть на ОДЗ заданного уравнения) равносильно заданному.
1) При $a = 0$ получаем линейное уравнение $x - 2 = 0$. Отсюда $x = 2$ (входит в ОДЗ)	При $a = 0$ данное уравнение не является квадратным. Подставляем $a = 0$ в данное уравнение и решаем полученное уравнение (с учетом ОДЗ).

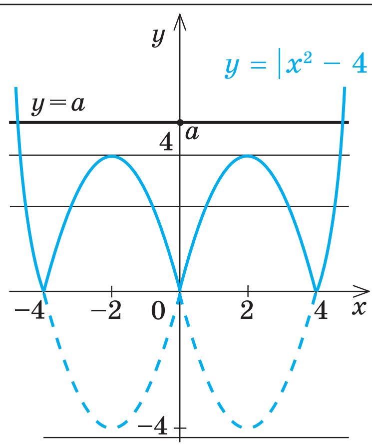
2) При $a \neq 0$ решаем квадратное уравнение: $$D = 1 + 4a(4a + 2) = 16a^2 + 8a + 1 = (4a + 1)^2;$$ $$x_{1,2} = \frac{-1 \pm (4a+1)}{2a}.$$ Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$. Учитываем ОДЗ: $x_1 = 2$ — корень (входит в ОДЗ) при любых значениях a. Поскольку $x_2 = 0$ при $a = -\frac{1}{2}$, то при этом значении параметра $x_2 = 0$ не является корнем данного уравнения (однако его корнем является $x_1 = 2$). При $a \neq -\frac{1}{2}$ (и $a \neq 0$) значение $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$ является корнем уравнения.	При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение. Находим его дискриминант. Для вычисления корней уравнения целесообразно записать общую формулу для двух корней (в этом случае знак модуля можно не записывать). Прежде чем записывать ответ, следует обязательно выяснить, входят ли полученные значения корней в ОДЗ данного уравнения. Для корня x_2 сначала нужно выяснить, при каких значениях параметра a его значение попадает в запрещенную область ($x = 0$). Потом можно дать ответ для найденного значения $\left(a = -\frac{1}{2}\right)$ и для всех других значений a (учитывая, что при $a = 0$ получили тот же ответ, что и при $a = -\frac{1}{2}$).
Ответ: 1) при $a = 0$ или $a = -\frac{1}{2}$ $x = 2$; 2) при $a \neq 0$ и $a \neq -\frac{1}{2}$ $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$.	

Отметим, что при решении исследовательских заданий с параметрами часто решение заданных уравнений и неравенств бывает очень сложным или невозможным. В таких случаях полезно помнить специальные приемы исследования задач с параметрами, рассмотренные в курсе 10 класса. Напомним некоторые из них.

Таблица 45

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
1. Исследование количества решений уравнений и их систем
Ориентир
Если в задаче с параметрами речь идет о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа данной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения.

Продолжение табл. 45

<table>
<tr><td colspan="2">Особенности использования ориентира</td></tr>
<tr><td colspan="2">Наиболее простым соответствующее исследование является в том случае, когда данное уравнение можно преобразовать к виду $f\,(x) = a$, поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox (которая пересекает ось Oy в точке a). Отметим, что, заменяя данное уравнение на уравнение $f\,(x) = a$, нужно следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и данное. Тогда количество корней у них будет одинаковым. Чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f\,(x) = a$, достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции $y = f\,(x)$ с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a. (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пример</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сколько корней имеет уравнение $\left| x^2 - 4\,|x| \right| = a$ в зависимости от значения параметра a?</td></tr>
<tr><td>План</td><td>Решение</td></tr>
<tr><td>1. Строим график функции
$$y = \left| x^2 - 4\,|x| \right|$$
(учитывая, что $x^2 = |x|^2$), например, так:
$$x^2 - 4x \to |x|^2 - 4\,|x| \to \to \left| x^2 - 4\,|x| \right|).$$
2. Строим график функции $y = a$.
3. Анализируем взаимное размещение полученных графиков: количество корней уравнения $f(x) = a$ равно количеству точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$.
4. Записываем ответ.</td><td>

Ответ: 1) при $a < 0$ нет корней;
2) при $a = 0$ три корня;
3) при $0 < a < 4$ шесть корней;
4) при $a = 4$ четыре корня;
5) при $a > 4$ два корня</td></tr>
</table>

Окончание табл. 45

2. Использование четности функций, которые входят в запись уравнения

Ориентир

Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ является четной или нечетной, то вместе с каждым корнем α мы можем указать еще один корень этого уравнения $(-\alpha)$

Пример

Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственный корень уравнение $$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0. \qquad (1)$$

Решение

▶ Функция $f(x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$ является четной ($D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(-x) = f(x)$). Если $x = \alpha$ — корень уравнения (1), то $x = -\alpha$ тоже корень этого уравнения. Поэтому единственный корень у данного уравнения может быть только тогда, когда $\alpha = -\alpha$, то есть $\alpha = 0$.

Таким образом, единственный корень данного уравнения — $x = 0$.

Если $x = 0$, то из уравнения (1) получаем $a^2 - a = 0$, то есть $a(a - 1) = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 1$. При $a = 0$ уравнение (1) превращается в уравнение $x^2 = 0$, имеющее единственный корень $x = 0$. Таким образом, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ имеем уравнение
$$\cos^2 x - x^2 - 1 = 0, \text{ то есть}$$
$$\cos^2 x = 1 + x^2. \qquad (2)$$

Поскольку $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1 + x^2 \geqslant 1$, то уравнение (2) равносильно системе
$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x = 0$, что удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, эта система, а значит, и уравнение (2) имеют единственное решение $x = 0$. Следовательно, $a = 1$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 0$, $a = 1$ ◁

Комментарий

Отмечаем, что в левой части данного уравнения стоит четная функция, и используем ориентир. Действительно, если $x = \alpha$ — корень уравнения $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — верное числовое равенство.

Учитывая четность функции $f(x)$, имеем $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Таким образом, $x = -\alpha$ — тоже корень уравнения $f(x) = 0$. Единственный корень у этого уравнения может быть только тогда, когда корни α и $-\alpha$ совпадают. Тогда $x = \alpha = -\alpha = 0$.

Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых $x = 0$ является корнем уравнения (1). (Это $a = 0$ и $a = 1$.)

Поскольку значения $a = 0$ и $a = 1$ мы получили из условия, что $x = 0$ — корень уравнения (1), то необходимо проверить, действительно ли при этих значениях a данное уравнение будет иметь единственный корень.

Для решения уравнения (2) оценим его левую и правую части:
$$f(x) = \cos^2 x, \quad g(x) = 1 + x^2.$$

$$\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}} = \underbrace{1 + x^2}_{\boxed{g(x) \geqslant 1}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Вопросы для контроля

1. Что называется решением: а) уравнения; б) неравенства; в) системы уравнений или неравенств; г) совокупности уравнений или неравенств? Приведите примеры.
2. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ): а) уравнения; б) неравенства; в) системы уравнений или неравенств; г) совокупности уравнений или неравенств.
3. Дайте определение системы-следствия данной системы уравнений. Приведите примеры.
4. Дайте определение равносильности: а) уравнений; б) неравенств; в) систем уравнений или неравенств; г) совокупности уравнений или неравенств. Приведите примеры равносильных преобразований. Объясните, почему выполненные преобразования являются равносильными.
5. Назовите основные методы решения: а) уравнений; б) неравенств; в) систем уравнений и неравенств. Приведите примеры их использования.

Упражнения

Решите уравнения **(1–32)**.

1. 1) $x=\sqrt{3x+40}$; 2) $x=\sqrt{10x+24}$; 3) $x=\sqrt{5x+36}$; 4) $x=\sqrt{3x+28}$.

2. 1) $\sqrt{10-x}=4-x$; 2) $\sqrt{x-1}=x-3$; 3) $\sqrt{1+x}=2x-4$;

4) $\sqrt{x+7}=4x-5$; 5) $x+3\sqrt{x-5}=5$; 6) $x+2\sqrt{x-6}=6$;

7) $\sqrt{x^4-3x-1}=x^2-1$; 8) $\sqrt{x^4+x-9}=x^2-1$;

9) $\sqrt{x(x-2)(x+3)}=3-x$; 10) $\sqrt{x(x+4)(x-3)}=6-x$.

3. 1) $\sqrt{3x+3}=2x-3$; 2) $\sqrt{3x+2}=2x-4$;

3) $x+1=2-\sqrt{x-1}$; 4) $1-\sqrt{x-2}=x-1$.

4. 1) $x^2-13x+30=\left(\sqrt{3x-18}\right)^2$; 2) $x^2-9x+13=\left(\sqrt{5x-35}\right)^2$;

3) $x^2-8x+10=\left(\sqrt{7x-40}\right)^2$; 4) $x^2-15x+55=\left(\sqrt{x-8}\right)^2$.

5. 1) $\sqrt{3x-5}=3-2x$; 2) $\sqrt{4x^2+4x+1}=x^2+x-1$;

3) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$; 4) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$.

6. 1) $\sqrt{y-1}=6-y$; 2) $\sqrt{x+1}=4-x$;

3) $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2$; 4) $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-2$.

7. 1) $5\sqrt{x-2}+3\sqrt{x+1}+2x=17$; 2) $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x-1}+5x=14$.

8. 1) $\sin 2x=\sqrt{3}\cos x$; 2) $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$.

9. 1) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0$. Укажите все корни, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$. Укажите все корни, которые принадлежат отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

10. 1) $\sin(0{,}5\pi + x) + \sin 2x = 0$; 2) $\cos(0{,}5\pi + x) + \sin 2x = 0$.

11. 1) $\sin 4x + \sqrt{3}\sin 3x + \sin 2x = 0$; 2) $\cos 3x + \sin 5x = \sin x$.

12*. 1) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$; 2) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$;
3) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 16\cos 2x$.

13. 1) $\sin 2x = \cos x$; 2) $\cos 2x = \sin x$.

14. 1) $\sqrt{3}\sin^2 x + 0{,}5\sin(\pi + 2x) = 0$; 2) $\sqrt{3}\cos^2 x - 0{,}5\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

15*. 1) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = 2\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$, которые удовлетворяют неравенству $\cos x < \frac{1}{2}$;

2) Найдите все решения уравнения $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\operatorname{ctg}^2 x$, которые удовлетворяют неравенству $\cos x < -\frac{1}{2}$.

16. Найдите все решения уравнения:
1) $\cos x + \cos 5x - \cos 2x = 0$, которые принадлежат отрезку $[-\pi; \pi]$;
2) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$.

17. 1) $3\cos 2x + 4\sin x = 1$;
2) $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$;
3) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x$.

18. 1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = 2\operatorname{ctg} x$;
3) $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3}\cos 2x$.

19. 1) $\left|x - \frac{3}{7}\right| = \frac{2}{7}$; 2) $\left|x - \frac{5}{8}\right| = \frac{3}{5}$.

20. 1) $|14 - x| = x^2 - 196$; 2) $|16 - x| = x^2 - 256$;
3) $|19 - x| = x^2 - 361$; 4) $|17 - x| = x^2 - 289$.

21. 1) $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$; 2) $x^2 + 1 + |x + 1| = 2|x|$.

22. 1) $x^2 - 6|x| - 2 = 0$; 2) $x^2 + 4|x| - 1 = 0$;
3) $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$; 4) $|x^2 - 2x - 1| + x - 4 = 0$;
5) $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$; 6) $\frac{|x|}{x} + 2x = x^2 + 1$.

23. 1) $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$; 2) $|2x + 3| = x^2$.

24*. 1) $\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}$; 2) $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \cos x - \frac{1}{2}$;

3) $|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1$.

25*. 1) $\sqrt{|2x+1|} = 1 - 2|x|$; 2) $\sqrt{|1-3x|} = 1 - 3|x|$.

26. 1) $(2x-7)\sqrt{3x^2-5x-2} = 0$; 2) $(2x-3)\sqrt{4x^2-5x-9} = 0$;

3) $(3x^2-8x-11)\sqrt{3x-5} = 0$; 4) $(4x^2+3x-22)\sqrt{3x-15} = 0$.

27. 1) $(7\sin x - 4\sqrt{3})(7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0$; 2) $(5\cos x - 3\sqrt{3})(5\cos x - 2\sqrt{6}) = 0$.

28*. 1) $(\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0$;

2) $(\cos x + \sin x + \sqrt{2})\sqrt{-x^2 - 7x - 12} = 0$.

29*. 1) $(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$; 2) $(2\cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0$;

3) $\sqrt{4x - x^2 - 3}\left(\sqrt{2}\cos x - \sqrt{1+\cos 2x}\right) = 0$.

30*. 1) $\arcsin\frac{6x-7}{2x-3} = 2\pi - \pi x$; 2) $x^2 - \cos 2x^2 + 1 = 0$.

31*. 1) $\log_{\sin x}(3\sin x - \cos x) = 0$; 2) $\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1$.

32*. Найдите наибольший корень уравнения:

1) $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$; 2) $\left(2\sqrt{3}-2\right)^x + 2^{x+1} = 2\left(\sqrt{3}+1\right)^x$.

Решите неравенство **(33–57).**

33. 1) $3x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$; 2) $-x^2 + 2x - 3 > 0$.

34. 1) $x^3 - 3x - 2 < 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 4 > 0$.

35. 1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} < 0$; 2) $\frac{x^2-6x+18}{-x^2+8x-12} > 0$.

36. 1) $\frac{3}{x-2} \geqslant x$; 2) $x \geqslant \frac{2}{x-1}$; 3) $\frac{x^2-1}{x+5} < 1$; 4) $\frac{2x-1}{x-3} < x+3$.

37. 1) $\frac{5}{2-x} > 1 + \frac{3}{x+2}$; 2) $\frac{5}{x+4} < 1 + \frac{1}{4-x}$; 3) $\frac{2}{3-x} > 1 - \frac{3}{x+2}$; 4) $\frac{7}{x+5} < 1 + \frac{2}{5-x}$.

38. 1) $\sqrt{12x-11} < \sqrt{10x-9}$; 2) $\sqrt{11x-9} < \sqrt{9x-7}$;

3) $\sqrt{10x-7} < \sqrt{9x-5}$; 4) $\sqrt{10x-9} < \sqrt{8x-7}$.

39. 1) $\sqrt{x^2-9} < 14-2x$; 2) $\sqrt{x^2-6x} < 8+2x$;

3) $2-3x < \sqrt{4+9x-9x^2}$; 4) $4-5x < \sqrt{16+30x-25x^2}$.

40*. 1) $\sqrt{3-x} > x-2$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$.

41*. 1) $\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$; 2) $\frac{3x-2}{\sqrt{5x-2}}<1$; 3) $\sqrt{x^2-8x+12}\geqslant x-5$.

42. 1) $3\log_8(3x+2)<2$; 2) $4\log_{16}(4x+3)<3$; 3) $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1-3x)>2$;

4) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-1)>2$; 5) $\log_{0,5}(3-2x)>-\log_{0,5}3$; 6) $\log_2(2x-5)<-\log_2 3$.

43. 1) $\log_{0,4}(3,5-5x)>2\log_{0,4}0,2-1$; 2) $1+2\log_2 0,3>\log_2(1,5-3x)$.

44*. 1) $\log_{\sqrt{2}}(5^{x+1}-25^x)\leqslant 4$; 2) $\log_{\sqrt{6}}(7^{x+1}-49^x)\leqslant 2$;

3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$.

45. 1) $\operatorname{tg}3x>0$; 2) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<1$; 3) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$;

4) $\operatorname{ctg}2x\leqslant 0$; 5) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$.

46*. 1) $5\sin x-\sin 2x>0$; 2) $5\cos x+\sin 2x<0$.

47*. 1) $2\sin x-1\leqslant\sqrt{6\sin^2 x-6\sin x-12}$;

2) $16\sin^2 x+\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 7$; 3) $16\sin^2 x+9\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 15$.

48. 1) $2x>|x|+1$; 2) $x^2-6\geqslant|x|$; 3) $\frac{4}{|x+2|}\geqslant 3-x$; 4) $\frac{3}{|x-1|}\geqslant 2x+5$.

49*. 1) $\frac{4|2-x|}{4|x|}-|x-2|\leqslant 0$; 2) $|1-x|+\frac{4|1-x|}{|x|-3}\geqslant 0$;

3) $|x^2-8x+15|\leqslant|15-x^2|$.

50*. 1) $\frac{4^{\frac{1}{x}}-4}{2+x}<0$; 2) $\frac{2^{\frac{1}{x}}-2}{x-2}>0$; 3) $\frac{2^{-\frac{1}{x}}-2}{x+2}<0$.

51. 1) $(x^2-9)\sqrt{x+6}>0$; 2) $(16-x^2)\sqrt{8-x}<0$;

3) $\sqrt{x^2-9}\,(x+8)>0$; 4) $(x-4)\sqrt{x^2-4}<0$.

52. 1) $(x-2)(x-3)\sqrt{x-1}\leqslant 0$; 2) $(x+2)(x+3)\sqrt{x+11}\leqslant 0$;

3) $(x-4)(x+3)\sqrt{x}\geqslant 0$; 4) $(x-8)(x+7)\sqrt{x}\geqslant 0$.

53. 1) $\frac{\sqrt{6+5x-x^2}}{x-2}<0$; 2) $\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2}<0$; 3) $\frac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+3}>0$;

4) $\frac{1-x}{\sqrt{2+x-x^2}}<0$; 5) $\frac{3x+2}{\sqrt{2-x-x^2}}>0$; 6) $\frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}<0$.

54. 1) $\dfrac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{x-11+5\sqrt{7-x}}{|x-1|-\sqrt{x+1}} \leqslant 0$;

3) $\dfrac{|x-5|-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{11-x}+x-12} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{x+2-7\sqrt{6-x}}{|x-3|-\sqrt{x+3}} \leqslant 0$.

55*. 1) $2^x+2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$; 2) $3^x + 3^{|x|} \leqslant 3$;

3) $3\cdot 4^{\sqrt{2-x}}+3<10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}$; 4) $2\cdot 9^{\sqrt{3-x}}+2<5\cdot 3^{\sqrt{3-x}}$.

56*. 1) $\dfrac{\lg(8-x)}{\lg(x-2)^2} \leqslant 1$; 2) $\dfrac{\lg(2x+9)}{\lg(2x+3)^2} \leqslant 1$; 3) $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{2}+9\right)}{\lg\left(\frac{x}{2}+3\right)^2} \leqslant 1$; 4) $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{3}+5\right)}{\lg\left(\frac{x}{3}-1\right)^2} \leqslant 1$.

57*. 1) $\dfrac{\log_2 x-3}{6\log_x 2-1} \leqslant 2$; 2) $\log_{(x-2)} x \leqslant \log_{(x-2)} 4$.

Решите систему уравнений **(58–62)**.

58. 1) $\begin{cases} x-3y^2=8, \\ x+4y^2=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-5y^2=10, \\ x+3y^2=18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-7y^2=9, \\ x+2y^2=18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2y^2=12, \\ x+7y^2=21. \end{cases}$

59. 1) $\begin{cases} 4^{2y}+3^{2x}=82, \\ 3^x-4^y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^y+5^{2x}=26, \\ 5^x-3^{0,5y}=4. \end{cases}$

60. 1) $\begin{cases} 3^{x^2-2xy}=1, \\ 2\log_3(y+2)=\log_3(5x-2); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{y^2-3xy}=1, \\ 2\log_2(x+1)=\log_2(3y-5). \end{cases}$

61. 1) $\begin{cases} 2^{y-3}=8^{x-2}, \\ 2\log_3(y-x)-\log_3 x=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^y=4^{x-3}, \\ 2\log_2(x-y)-\log_2 y=1. \end{cases}$

62*. 1) $\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5, \\ 2x+y+\dfrac{10}{xy}=4+xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9\cdot 2^x\cdot 5^y-5\cdot 3^{y+x}=3^x\cdot 5^y, \\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y}=1. \end{cases}$

Решите задачи с параметрами **(63–71)**.

63. При каких значениях $c \in \boldsymbol{R}$ для действительных корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + (4c - c^2 - 1)x + 2c^2 - 1 = 0$ выполняется равенство $x_1+x_2=6$?

64. 1) Постройте график квадратного трехчлена $y = x^2 + 3x + a$, если известно, что его корни связаны соотношением $x_1^2+x_2^2=5$;

2) Постройте график квадратного трехчлена $y = x^2 - x - a$, если известно, что его корни связаны соотношением $x_1^3+x_2^3=4$.

65*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение:

1) $2|x+1|-2|x-2|+|x-6|=x+3a$ имеет ровно один корень;

2) $2|x+3|-2|x-2|+|x-4|=x+2a$ имеет ровно два корня;

3) $|x^2-8x-a|=4x$ имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший 11,5;

4) $|x^2-4x+a|=x$ имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший 4.

66. Для каждого значения параметра b найдите число корней уравнения:

1) $2x^2+10x+|6x+30|=b$; 2) $6x^2+18x+|12x+36|=b$;

3) $4x^2+12x+|8x+24|=b$; 4) $4x^2+8x+|24x+48|=b$.

67*. Для каждого значения параметра c решите уравнение:

1) $\sqrt{\frac{x}{4}+2}=c+\sqrt{\frac{x}{4}-3}$; 2) $\sqrt{x^2-4x+4}=c-\sqrt{x^2+6x+9}$;

3) $\sin\left(c\sqrt{x-1}+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5$; 4) $\left(2^{-x}+4+3c\right)\left(5-c-2^{-x}\right)=0$.

68. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $8+4p(x-2)=(x-|x|)x$ имеет единственное решение. Найдите все решения при каждом p.

69*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $144^{-|2x-1|}-2\cdot 12^{-|2x-1|}+12a=0$ имеет хотя бы один корень.

70. Для каждого значения параметра a решите неравенство.

1) $|2x+a|\leqslant x+2$; 2) $3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0$.

71. При каких значениях параметра a уравнение $|2x+6|+|2x-8|=$ $=ax+12$ имеет единственное решение?

Решите задачу **(72–93)**.

72. Какое количество воды нужно прибавить к 1 л 10%-ного водного раствора спирта, чтобы получить 6 %-ный раствор?

73. Имеется 1 л 6 %-ного раствора спирта. Сколько литров 3 %-ного раствора спирта нужно прибавить к 6 % раствору, чтобы получить 5 %-ный раствор?

74. Из пункта А выехал колесный трактор со скоростью 25 км/ч. Через час вслед за ним одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость грузовика постоянная и составляет $\frac{3}{4}$ скорости легкового автомобиля. Найдите скорость грузовика, если известно, что он догнал трактор на 10 мин позже, чем легковой автомобиль.

75. От пристани по водохранилищу со скоростью 10 км/ч отправилась яхта. Через полтора часа от той же пристани за яхтой отправились два катера с постоянными скоростями, причем скорость первого катера составляла $\frac{4}{3}$ скорости второго. Найдите скорость первого катера, если известно, что он догнал яхту на 15 мин раньше, чем второй.

76. Двое рабочих выполнили определенную работу за 20 дней. За сколько дней выполнил бы эту работу каждый из них, работая отдельно, если известно, что первому пришлось бы работать на 9 дней больше, чем второму?

77. Двое рабочих, работая вместе, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий?

78. Заполнение бассейна водой через первую трубу требует на 3 ч меньше времени, чем его освобождение от воды через вторую. За какое время заполняется бассейн через одну первую трубу, если известно, что при открытых двух трубах бассейн заполняется за 18 ч?

79. Товарный поезд задержался в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал упущенное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите начальную скорость поезда.

80. За 7 ч 20 мин судно прошло вверх по реке 35 км и вернулось назад. Скорость течения — 4 км/ч. С какой скоростью судно шло по течению?

81. Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 230 км. Через час навстречу ему вышел из пункта B второй поезд, скорость которого на 15 км/ч больше, чем у первого. Определите скорости поездов, если известно, что они встретились на расстоянии 120 км от пункта A.

82. Смешали 20 %-ный и 40 %-ный растворы соляной кислоты и получили 25 %-ный раствор. Найдите отношение масс начальных растворов.

83. Имеется два сплава, в одном из которых содержится 20 %, а в другом — 30 % олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить из них 10 кг нового сплава, содержащего 27 % олова?

84. В смеси пшеничной и ржаной муки содержится 55 % ржаной муки. Если к этой смеси прибавить еще 36 кг ржаной муки, то ее содержание в смеси достигнет 75 %. Найдите массу начальной смеси.

85. Морская вода содержит по весу 5 % соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 60 кг морской воды, чтобы содержание соли в ней составляло 3 %?

86. Свежие грибы содержат по массе $90\ \%$ воды, а сухие — $12\ \%$. Сколько получим сухих грибов из 22 кг свежих?

87. В траве влага составляет $\frac{7}{10}$ от общей массы, а в сене — $\frac{1}{10}$. Сколько нужно скосить травы, чтобы заготовить 1 т сена?

88*. Задано двузначное натуральное число, у которого число десятков на единицу больше числа единиц, а произведение его цифр на 45 больше утроенного числа его десятков. Найдите это число.

89*. Тете сейчас 40 лет. Она вчетверо старше, чем была ее племянница тогда, когда тете было столько лет, сколько сейчас племяннице. Каков возраст племянницы?

90*. В двух домах более 31 квартиры. Число квартир в первом доме, увеличеное на 21, больше чем в три раза превышает число квартир во втором доме. Удвоенное число квартир в первом доме меньше утроенного числа квартир во втором доме, увеличенного на единицу. Сколько квартир в каждом доме?

91*. Есть три сплава. Первый содержит $30\ \%$ никеля и $70\ \%$ марганца, второй — $10\ \%$ марганца и $90\ \%$ меди, третий — $15\ \%$ никеля, $25\ \%$ марганца и $60\ \%$ меди. Из них приготовили сплав, масса которого 15 кг, он содержит $40\ \%$ меди и $42\ \%$ марганца. Какое количество первого, второго и третьего сплава взяли для этого?

92*. Жидкость налили в бутыли вместимостью по 40 л, при этом одна из бутылей оказалась не совсем полной. Если эту жидкость перелить в бутыли вместимостью по 50 л, то такие бутыли будут заполнены полностью, но при этом понадобится на 5 бутылей меньше. Если эту же жидкость перелить в бутыли вместимостью по 70 л, то понадобится еще меньше на 4 бутыли, при этом опять одна бутыль будет не совсем полной. Сколько было литров жидкости?

93*. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе $4\ \%$, на втором — $6\frac{2}{3}\ \%$, на третьем — $6\frac{1}{4}\ \%$ и на четвертом — $14\frac{2}{7}\ \%$ в месяц. По окончании реконструкции начальный объем производства на предприятии сократился на $37\ \%$. Определить длительность периода реконструкции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Таблица 1

<table>
<tr><th colspan="3">1. Понятие комплексного числа</th></tr>
<tr><th>Определение</th><th colspan="2">Обозначения и термины</th></tr>
<tr><td>Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа ($a \in R$, $b \in R$), i — некоторое (не действительное) число, квадрат которого равен -1:
$$i^2 = -1.$$</td><td colspan="2">$z = a + bi$ — комплексное число,
a — действительная часть комплексного числа (также обозначают $a = Re\, z$),
bi — мнимая часть комплексного числа,
b — коэффициент при мнимой части (также обозначают $b = Im\, z$),
i — мнимая единица.
Действительное число a считается равным комплексному числу $a + 0i$, то есть $a = a + 0i$, где $a \in R$, в частности
$$0 = 0 + 0i.$$
Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются сопряженными комплексными числами.</td></tr>
<tr><th colspan="3">2. Равенство комплексных чисел</th></tr>
<tr><th>Определение</th><th colspan="2">Пример</th></tr>
<tr><td>Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны коэффициенты при мнимых частях.</td><td colspan="2">$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}$$
$(a, b, c, d \in R)$
Если $2 + xi = y + 5i$, то $y = 2$, $x = 5$.</td></tr>
<tr><th colspan="3">3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме</th></tr>
<tr><th>Ориентир</th><th>Пример</th><th>Запись в общем виде (определение)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над комплексными числами выполняются как действия над обыкновенными буквенными выражениями (одночленами и двучленами), но с учетом того, что
$$i^2 = -1.$$</td><td colspan="2">Сложение</td></tr>
<tr><td>$(6 + 7i) + (3 - 5i) =$
$= 6 + 3 + 7i - 5i = 9 + 2i$</td><td>$(a + bi) + (c + di) =$
$= (a + c) + (b + d)\, i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычитание</td></tr>
<tr><td>$(9 + 2i) - (3 - 5i) =$
$= 9 - 3 + 2i + 5i = 6 + 7i$</td><td>$(a + bi) - (c + di) =$
$= (a - c) + (b - d)\, i$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 1

	Пример	Запись в общем виде (определение)
	Умножение	
	$(3 + 2i)(4 + 3i) =$ $= 12 + 9i + 8i + 6i^2 =$ (заменяем i^2 на -1) $= 12 + 17i - 6 = 6 + 17i$	$(a + bi)(c + di) =$ $= (ac - bd) +$ $+ (ad + bc)i$
Выполняя деление комплексных чисел, удобно сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю.	*Деление*	
	$\frac{6+17i}{4+3i} = \frac{(6+17i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$ $= \frac{24-18i+68i-51i^2}{16-9i^2} =$ $= \frac{24+50i+51}{16+9} =$ $= \frac{75+50i}{25} = 3+2i$	$\frac{a+bi}{c+di} =$ $= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$ $= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

4. Свойства сопряженных чисел

Если $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, где $a \in R$, $b \in R$, то

$z + \bar{z} = 2a \in R$,

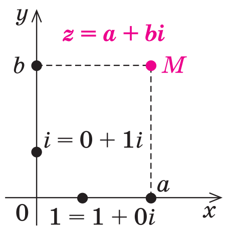
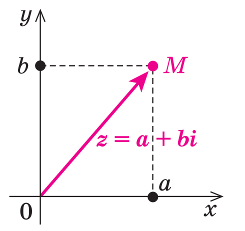
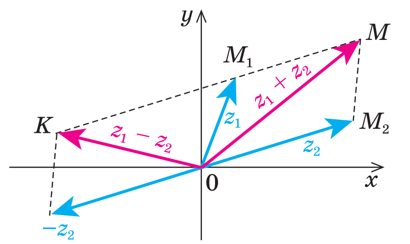
$z\bar{z} = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in R$.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.

5. Нахождение степеней числа i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 i^2 = -1$	$i^7 = i^4 i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$			
...	...	...	...
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = -i$

Окончание табл. 1

<table>
<tr><th colspan="3">6. Геометрическое изображение комплексных чисел</th></tr>
<tr><td>В виде точек на координатной плоскости</td><td colspan="2">В виде векторов на координатной плоскости</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td rowspan="2">

$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$

$z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \leftrightarrow \overline{OM}$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \leftrightarrow \overline{OK}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Геометрическое изображение комплексных чисел устанавливает взаимно однозначное соответствие
<table><tr><td>между комплексными числами и точками плоскости (которая называется комплексной плоскостью)

$z = a + bi \leftrightarrow M\ (a;\ b)$</td><td>между комплексными числами и радиус-векторами (векторами, отложенными от начала координат)

$z = a + bi \leftrightarrow \overline{OM}$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Расширение понятия числа. Понятие комплексного числа. Рассмотрим, как может происходить расширение понятия числа. Простейшим числовым множеством является множество N *натуральных чисел*. В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения и умножения (то есть сумма двух натуральных чисел является натуральным числом и произведение двух натуральных чисел является натуральным числом). Вычитание выполняется не всегда ($5 - 3 = 2$, а разность $3 - 5$ не выражается натуральным числом).

Чтобы действие вычитания можно было выполнять всегда, необходимо расширить множество натуральных чисел, дополнить его отрицательными числами и нулем. В результате такого расширения получили множество Z *целых чисел*.

Однако во множестве целых чисел не всегда можно выполнить действие деления. Чтобы действие деления (на число, не равное нулю) выполнялось всегда, необходимо расширить множество целых чисел, дополнить его множеством всех обыкновенных дробей (то есть числами вида $\frac{m}{n}$, где

m и n — целые числа и $n \neq 0$). В результате такого расширения мы получаем множество Q *рациональных чисел*. В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

В множестве рациональных чисел не всегда можно выполнить действие извлечения корня из положительного числа (например, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом). Чтобы действие извлечения корня из положительного числа всегда выполнялось, необходимо расширить множество рациональных чисел, дополнив его *иррациональными числами*. В результате такого расширения мы получаем множество $\boldsymbol{R}$ *действительных чисел*. В этом множестве, кроме действий сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на нуль), также всегда можно выполнить действие извлечения квадратного корня из неотрицательного числа. Отметим, что каждое расширение множества чисел проводят таким образом, чтобы в новом множестве выполнялись все законы действий, которые выполнялись в предыдущем множестве.

Однако во множестве действительных чисел нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа, то есть во множестве действительных чисел нельзя решить даже простейшие, на первый взгляд, уравнения ($x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 9 = 0$ и др). Таким образом, мы приходим к необходимости расширить множество действительных чисел, присоединив к нему такие числа, чтобы в новом множестве C так называемых комплексных чисел всегда можно было извлечь квадратный корень (или корень n-й степени) не только из положительного, но и из отрицательного числа.

Для того чтобы извлечь квадратный корень из отрицательного числа, достаточно уметь извлекать квадратный корень из (-1). Тогда, например, если выполняются известные правила действий, то

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}.$$

Число нового вида $\sqrt{-1}$ принято обозначать знаком i (буквой i) и называть *мнимой единицей* (i — первая буква латинского слова *imaginarius* — мнимый). Согласно определению квадратного корня квадрат числа i равен (-1), то есть $i^2 = -1$. С помощью нового числа можно записать значение квадратного корня из любого отрицательного числа, например $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$*. Тогда выражение $2 + \sqrt{-16}$ может быть записано так: $2 + 4i$.

Мы получили выражение $a + bi$, где a и b — действительные числа. Выражения такого вида называются *комплексными числами*. Таким образом,

---

* Для комплексных чисел знак $\sqrt{\ }$ уже не является знаком только арифметического квадратного корня, поэтому $\sqrt{-1} = \pm i$ (поскольку $(\pm i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-16} = \pm 4i$, а $2 + \sqrt{-16} = 2 \pm 4i$. Более подробно операция извлечения корня n-й степени из комплексного числа рассмотрена на с. 430.

комплексными числами **называют выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа ($a \in R$, $b \in R$), если их равенство и действия над ними определяются правилами, приведенными в п. 2. Как будет показано ниже, i — некоторое (не действительное) число, квадрат которого равен -1: $i^2 = -1$.**

В комплексном числе $a + bi$ число a называется *действительной частью,* а выражение bi — *мнимой частью* (b — коэффициент при мнимой части).

2. Понятие равенства комплексных чисел и операции над комплексными числами

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях,

то есть $a + bi = c + di$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Например, равенство $2 + xi = y - 5i$ при действительных x и y возможно только при $y = 2$ и $x = -5$.

Каждое комплексное число вида $a + 0i$ отождествляют с действительным числом a и записывают: $a + 0i = a$. Таким образом, ***действительные числа являются частью множества комплексных чисел.*** Например, $5 + 0i = 5$, $0 + 0i = 0$.

Каждое комплексное число вида $0 + bi$ отождествляют с выражением bi и записывают: $0 + bi = bi$ (комплексное число bi называют *чисто мнимым числом*); в частности, комплексное число $0 + 1i$ отождествляют с числом i и пишут: $0 + 1i = i$.

Действия сложения, вычитания и умножения над комплексными числами выполняются по тем же законам, что и над действительными. Это позволяет пользоваться следующим ориентиром: ***для практического выполнения действий над комплексными числами достаточно выполнять эти операции так, как будто выражение $(a + bi)$ является не комплексным числом, а двучленом. (При этом необходимо учитывать, что i — не переменная, а определенное число, такое, что $i^2 = -1$, поэтому в результате умножения необходимо заменить i^2 на (-1).)***

Для того чтобы иметь право пользоваться этим ориентиром, необходимо соответствующим образом дать определение действий над комплексными числами.

1. *Сложение комплексных чисел.* Пусть $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$.
   Тогда $z_1 + z_2 = (2 + 7) + (3+4)i = 9 + 7i$. Запись выполнения соответствующей операции в общем виде и является *определением суммы двух комплексных чисел.*

Если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *суммой* этих комплексных чисел называют комплексное число $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Отметим, что, как и для действительных чисел,

$$z_1 + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = z_1.$$

2. *Вычитание комплексных чисел.* Пусть $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 2 + 3i$.
Тогда $z_1 - z_2 = (9 - 2) + (7 - 3)i = 7 + 4i$. Если обозначить разность рассмотренных чисел через $z_3 = z_1 - z_2 = 7 + 4i$, то $z_3 + z_2 = (7 + 4i) + (2 + 3i) = 9 + 7i = z_1$. Поэтому для *определения действия вычитания* достаточно знать определения суммы и равенства комплексных чисел.
Разностью **двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называют такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое в сумме с z_2 дает z_1.**

Если $z_3 + z_2 = z_1$, то $(x + c) + (y + d)i = a + bi$. Согласно определению равенства комплексных чисел $x + c = a$, $y + d = b$. Тогда $x = a - c$, $y = b - d$. Таким образом, $z_1 - z_2 = x + yi = (a - c) + (b - d)i$.

3. *Умножение комплексных чисел.* Пусть $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$.
Тогда $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12i^2$. Заменяя i^2 на (-1), получаем: $z_1 \cdot z_2 = 14 + 29i - 12 = 2 + 29i$.
Запись выполнения соответствующей операции в общем виде и является *определением произведения двух комплексных чисел*.
Если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *произведением* этих комплексных чисел называют комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Как и для действительных чисел, *возведение комплексного числа в натуральную степень* сводится к последовательному умножению числа на себя. В частности, $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0i = -1$. Таким образом, мы показали, что из определения умножения комплексных чисел следует, что $\mathbf{i^2 = -1}$. Поэтому при умножении комплексных чисел и возведении их в степень мы действительно имеем право заменять i^2 на число -1. Например, $i^3 = i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Примем по определению $\mathbf{i^0 = 1}$ (а также при $z \neq 0$ $\mathbf{z^0 = 1}$). Тогда, учитывая, что $i^4 = 1$, получаем:

$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = \mathbf{1}$, $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = \mathbf{i}$, $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = \mathbf{-1}$, $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = \mathbf{-i}$.

Например, $i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = -i$, $i^{102} = i^{100} \cdot i^2 = -1$.

При возведении комплексного числа $a + bi$ в квадрат или в куб можно использовать соответствующие формулы сокращенного умножения (заменяя i^2 на -1). Например,

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

Введем также понятие *сопряженных комплексных чисел*, которые нам будут необходимы для практического выполнения деления комплексных чисел.

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называют *сопряженными* комплексными числами.

Например, числа $z = 2 + 5i$ и $\bar{z} = 2 - 5i$ — сопряженные. Найдем сумму и произведение этих чисел:

$z + \bar{z} = (2 + 5i) + (2 - 5i) = 4$ — действительное число,

$z \cdot \bar{z} = (2 + 5i) \cdot (2 - 5i) = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29$ — действительное число.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.

● Если $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, где $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, то

$$\boldsymbol{z + \bar{z} = 2a} \text{ — действительное число } (2a \in \boldsymbol{R}).$$

$$\boldsymbol{z \cdot \bar{z}} = a^2 - b^2 i^2 = \boldsymbol{a^2 + b^2} \in \boldsymbol{R}.$$

○

4. *Деление комплексных чисел*. Пусть необходимо разделить $z_1 = 2 + 29i$ на $z_2 = 2 + 3i$. Запишем деление с помощью черты дроби и, пользуясь основным свойством дроби, умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю (чтобы получить в знаменателе действительное число):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+29i}{2+3i} = \frac{(2+29i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4-6i+58i-87i^2}{4-9i^2} = \frac{4+52i+87}{4+9} = \frac{91+52i}{13} = 7+4i.$$

В п. 3 мы получили, что $(2 + 3i)(7 + 4i) = 2 + 29i$. Следовательно, и во множестве комплексных чисел операцию деления можно проверять с помощью операции умножения.

В общем виде деление комплексных чисел выполняется так:

$$\boldsymbol{\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.} \qquad (1)$$

● Строгое получение формулы (1) опирается на *определение частного комплексных чисел*, аналогичное определению их разности.

Частным **двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ $(z_2 \neq 0)$ называют такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое при умножении на z_2 дает z_1.**

Из этого определения получаем, что $z_3 \cdot z_2 = z_1$, то есть $(x + yi)(c + di) = a + bi$. Тогда по определению равенства комплексных чисел $\begin{cases} \boldsymbol{xc - yd = a,} \\ \boldsymbol{xd + yc = b.} \end{cases}$ Умножим первое уравнение системы на c, а второе — на d и сложим полученные уравнения. Имеем $x(c^2 + d^2) = ac + bd$. Поскольку $z_2 \neq 0$, то $c^2 + d^2 \neq 0$, следовательно, $\boldsymbol{x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}}$. Аналогично, если первое уравнение умножить на d, а второе — на c и вычесть из второго уравнения первое, получим $y(c^2 + d^2) = bc - ad$, а значит, $\boldsymbol{y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}}$. Тогда $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = z_3 = x + yi = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$, что совпадает с результатом, полученным по формуле (1). ○

Таким образом, мы обосновали корректность использования приведенного практического ориентира для выполнения действий над комплексными числами.

Из приведенных определений операций над комплексными числами следует справедливость для комплексных чисел тех основных свойств операций сложения и умножения, которые выполнялись для действительных чисел (проверьте это самостоятельно).

Свойства сложения

1) $z + w = w + z$.
2) $(z + w) + t = z + (w + t)$.
3) $z + 0 = z$ $(0 = 0 + 0i)$.
4) **Для каждого комплексного числа $z = a + bi$ существует противоположное число $(-z = -a - bi)$, такое, что**
$$z + (-z) = 0.$$

Свойства умножения

1′) $zw = wz$.
2′) $(zw)t = z(wt)$.
3′) $z \cdot 1 = z$ $(1 = 1 + 0i)$.
4′) **Для каждого комплексного числа $z \neq 0$ существует обратное ему число $\frac{1}{z}$, такое, что $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.**

Например, для комплексного числа $z = c + di$ по формуле (1) имеем $\frac{1}{z} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i$.

5) **Операции сложения и умножения комплексных чисел объединены распределительным законом**
$$(z + w)t = zt + wt.$$

Для множества действительных чисел эти основные свойства 1–5 (их еще называют аксиомами поля действительных чисел) определяют все остальные свойства действительных чисел (кроме свойств упорядоченности и непрерывности, которые определяются в поле действительных чисел другими аксиомами). Поскольку основные свойства 1–5 выполняются и для комплексных чисел, то все тождества, которые вы знаете из курса алгебры, остаются справедливыми и для множества комплексных чисел. Например,
$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3.$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Каждое комплексное число $z = a + bi$ $(a \in \boldsymbol{R},\ b \in \boldsymbol{R})$ можно изобразить точкой M на координатной плоскости с координатами $(a;\ b)$ (рис. 1.1). И наоборот, каждую точку $M(a;\ b)$ координатной плоскости можно считать изображением комплексного числа $z = a + bi$. В таком случае говорят, что геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек координатной плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости (эту плоскость называют *комплексной плоскостью*).

Действительные числа $a = a + 0i$ изображаются точками с координатами $(a;\ 0)$, которые находятся на оси абсцисс, поэтому эта ось комплексной плоскости называется *действительной осью*. Чисто мнимые числа $bi = 0 + bi$ изображаются точками с координатами $(0;\ b)$, которые находятся на оси ординат, поэтому эта ось называется *мнимой осью*.

Комплексное число $z = a + bi$ на координатной плоскости можно изображать и в виде так называемого радиус-вектора $\overline{OM}$ (вектора с началом в начале координат и концом в точке $M(a;\ b)$, то есть в виде вектора $\overline{OM}$ с координатами $(a;\ b)$) (рис. 1.2). Такое изображение тоже устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и соответствующими радиусами-векторами. С помощью последнего изображения можно проиллюстрировать, что нахождение суммы и разности комплексных чисел — это просто нахождение суммы и разности соответствующих векторов (рис. 1.3), поскольку при сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при вычитании — вычитаются (см. табл. 1).

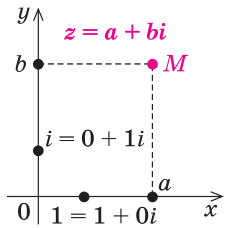


Рис. 1.1

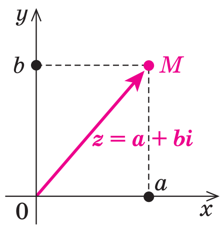


Рис. 1.2

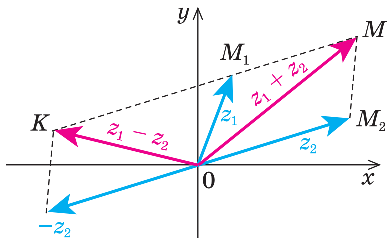


Рис. 1.3

З а м е ч а н и е. Геометрическое изображение действительных чисел на числовой прямой позволяет легко сравнивать действительные числа: из двух чисел на числовой прямой больше то, которое изображено правее (и меньше то, которое изображено левее). Но для комплексных чисел, изображаемых точками на координатной плоскости, мы не можем ввести аналогичное определение (поскольку рассматривается не одна, а две координаты). Поэтому для комплексных чисел не вводится понятие «больше» или «меньше», то есть нельзя, например, сказать, какое из комплексных чисел больше: $3 + 2i$ или $2 + 5i$.

Отметим, что введение комплексных чисел позволяет решать *квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом* (которые в множестве действительных чисел не имели корней). Во множестве комплексных чисел знак $\sqrt{\ }$ уже не является знаком только арифметического квадратного корня, поэтому, например, $\sqrt{-1} = \pm i$ (поскольку $(\pm i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = \pm 2i$, $\sqrt{-7} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{7}$. (Как будет показано далее, квадратный корень из комплексного числа имеет только два значения, поэтому других значений записанные квадратные корни не имеют.) Учитывая это, найдем корни квадратных уравнений с помощью известных формул.

Пример Решите уравнение: 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$; 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$.

1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, тогда $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Следовательно,

$$x_1 = 1 + 2i,\ x_2 = 1 - 2i.$$

2) $x^2 - 3x + 4 = 0$, тогда $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad x_2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение комплексного числа. Приведите примеры. Укажите на этих примерах действительную и мнимую части комплексного числа.
2. Сформулируйте определение равенства двух комплексных чисел. В каком случае будут равны комплексные числа $(m + 5i)$ и $(-3 + ni)$ при $m, n \in \boldsymbol{R}$?
3. 1) Приведите примеры выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами.
   2) Дайте определения суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел.
4. 1) Объясните, какие комплексные числа называют сопряженными.
   2) Сформулируйте свойства сопряженных комплексных чисел. Приведите примеры.
   3) Докажите свойства сопряженных комплексных чисел.
5. 1) Сформулируйте основные свойства операций сложения и умножения во множестве комплексных чисел.
   2) Обоснуйте справедливость этих свойств.
6. Объясните на примерах, как можно изображать комплексные числа на координатной плоскости: а) в виде точек, б) в виде радиусов-векторов.

Упражнения

1. Назовите действительную и мнимую части комплексного числа:
1) $5 + 3i$; 2) $2 - 4i$; 3) $-5 + i$;
4) $-5 - 3i$; 5) $4i$; 6) 7.

2. Зная, что заданные комплексные числа равны, найдите значения x и y (при $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$):
1) $2x + 4i = 6 - yi$; 2) $8 + 4xi = y + 12i$;
3) $-4 + xi = 2y - 3i$; 4) $2xi = y + 2i$.

3. Найдите сумму комплексных чисел:
1) $(5 + 2i) + (3 - 4i)$; 2) $(1 - 7i) + (-3 + 8i)$;
3) $(4 - i) + (-1 - 3i)$; 4) $(2 + 6i) + (2 - 6i)$.

4. Найдите разность комплексных чисел:
1) $(9 - i) - (5 + 4i)$; 2) $(3 + 8i) - (1 - 11i)$;
3) $(-5 - 2i) - (6 + 3i)$; 4) $(4 + i) - (-2 - 3i)$.

5. Найдите произведение комплексных чисел:
1) $(2 + 5i)\cdot(4 - 2i)$; 2) $(5 - i)\cdot(-2 - 6i)$;
3) $(-4 + 6i)\cdot(3 + i)$; 4) $(7 - 4i)\cdot(7 + 4i)$.

6. Найдите частное комплексных чисел:
1) $\frac{18 + i}{2 + 3i}$; 2) $\frac{6 - 4i}{1 - i}$; 3) $\frac{11 - 10i}{4 - 3i}$; 4) $\frac{1}{1 + i}$.

Упростите выражение **(7, 8)**.

7. 1) i^{41}; 2) $i^{27} + 2i^{13}$; 3) $3i^{24} + 2i^{14}$; 4) $i^{33} + i^{7}$.

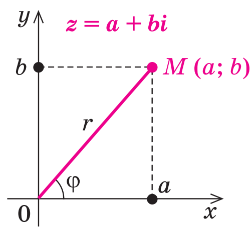
8. 1) $(2-3i)^2$; 2) $(1-i)^3$; 3) $(3+4i)^2$; 4) $(2+i)^3$.

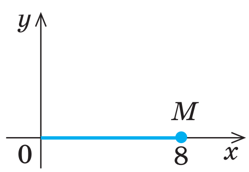
9. Изобразите на координатной плоскости заданное комплексное число: а) в виде точки; б) в виде радиуса-вектора:
1) $z_1 = 2+3i$; 2) $z_2 = -1-i$; 3) $z_3 = 3-2i$;
4) $z_4 = -2-4i$; 5) $z_5 = -3$; 6) $z_6 = 4i$.

10. Решите уравнение:
1) $x^2-4x+29=0$; 2) $2x^2-2x+1=0$;
3) $x^2+x+2=0$; 4) $3x^2+5x+3=0$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Таблица 2

<table>
<tr><th colspan="2">1. Понятие тригонометрической формы комплексного числа</th></tr>
<tr><th>Понятие</th><th>Иллюстрация, термины и определения</th></tr>
<tr><td>Комплексное число $z = a + bi$ изображают точкой $M\ (a;\ b)$. Положение этой точки можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка $OM = r$ и величину угла φ, который луч OM образует с положительным направлением оси Ox. Тогда
$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{r},\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$
Отсюда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, поэтому $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\,i$. Тогда
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма комплексного числа.</td><td>

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ — *модуль* (или *абсолютная величина*) комплексного числа $z = a + bi$.
$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$
φ — *аргумент* комплексного числа z (обозначают $\mathrm{Arg}\ z$)
$\mathrm{Arg}\ z = \varphi$, где $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Примеры</th></tr>
<tr><td>1. Изобразим комплексное число $8 = 8 + 0i$ на комплексной плоскости. Из рисунка видно, что $|8| = OM = 8$, $\mathrm{Arg}\ 8 = 0$, то есть в тригонометрической форме
$$8 = 8\,(\cos 0 + i\sin 0).$$

</td><td>2. $z = 1 - i$, где $a = 1$, $b = -1$. Тогда
$$|z|=|1-i|=r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}.$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi&=\frac{b}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\ \mathrm{Arg}\ z=\varphi=\frac{7\pi}{4},$$
то есть в тригонометрической форме
$$1-i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 2

<table>
<tr><td colspan="2">2. Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме</td></tr>
<tr><td>$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$\boxed{z_1 = z_2} \Leftrightarrow$ $r_1 = r_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ (или отличаются на $2\pi k$, где $k \in Z$)</td><td>Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, где $k \in Z$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$</td></tr>
<tr><td>Умножение</td><td>Деление</td></tr>
<tr><td>$z_1 \cdot z_2 =$
$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.</td><td>$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (модуль делимого делится на модуль делителя и из аргумента делимого вычитается аргумент делителя).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Возведение в степень</td></tr>
<tr><td>$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N}$

При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. (Формулу можно использовать и для целых отрицательных n.)</td><td>Пример

$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{20} =$
$= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right)\right) =$
$= 2^{10}(\cos 35\pi + i\sin 35\pi) =$
$= 1024(-1 + i\cdot 0) = -1024$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Извлечение корня n-й степени</td></tr>
<tr><td>$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z}$

(Всего получаем n разных значений при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.)</td><td>При извлечении корня n-й степени из комплексного числа извлекается арифметический корень n-й степени из модуля, а к аргументу прибавляется $2\pi k$ и результат делится на показатель корня.</td></tr>
</table>

Окончание табл. 2

	Примеры
Во множестве комплексных чисел знаки $\sqrt{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[2k]{}$ *являются знаками не только арифметических корней, как во множестве действительных чисел. Поэтому знаком* $\sqrt[n]{z}$ *обозначают все* n *значений корня для любого* n (*четного или нечетного*).	1. $\sqrt{-1}=\pm i$. 2. $\sqrt{9}=\pm 3$ (только во множестве комплексных чисел!). 3. $t=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8(\cos 0+i\sin 0)}=$ $=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),\ k\in\boldsymbol{Z}$ (в последнем равенстве $\sqrt[3]{8}=2$ — арифметический корень). Имеем три различных значения $\sqrt[3]{8}$: 1) при $k=0$ $\quad t_0=\sqrt[3]{8}=2(\cos 0+i\sin 0)=2;$ 2) при $k=1$ $t_1=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3};$ 3) при $k=2$ $t_2=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{4\pi k}{3}+i\sin\frac{4\pi k}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3},$ то есть $\sqrt[3]{8}$ имеет три значения: $2;\ -1+i\sqrt{3};\ -1-i\sqrt{3}$.

Объяснение и обоснование

1. Понятие тригонометрической формы комплексного числа. Как уже отмечалось, каждое комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить на координатной (комплексной) плоскости в виде точки $M(a;\ b)$ или в виде вектора $\overline{OM}$ (с координатами $(a;\ b)$). Но положение точки M (вектора $\overline{OM}$) на координатной плоскости можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка $OM=r$ и величину угла* φ, образованного лучом OM с положительным направлением оси Ox (рис. 2.1). Учитывая формулу расстояния между двумя точками и определение косинуса и синуса на координатной плоскости, получаем:

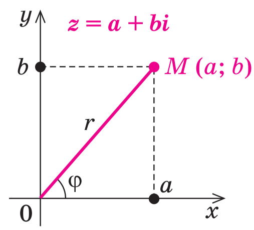


Рис. 2.1

$$r=OM=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{r},\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$

Тогда $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ и заданное комплексное число z можно записать так: $z=a+bi=r\cos\varphi+(r\sin\varphi)i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Полученная запись комплексного числа z называется *тригонометрической формой* этого числа, а его запись в виде $a+bi$ — *алгебраической формой* комплексного числа. Следовательно,

* Величину угла будем измерять в радианах.

тригонометрической формой комплексного числа $z = a + bi$ **называют запись этого числа в виде**

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),\text{ где } r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Неотрицательное число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем* (или *абсолютной величиной*) комплексного числа $z = a + bi$) и обозначается $|z|$. Следовательно, $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Как и для действительных чисел на координатной (комплексной) плоскости, *модуль комплексного числа — это расстояние от точки, изображающей заданное число, до точки* 0 (до начала координат). Как и для действительных чисел, только при $z = 0$ модуль z равен нулю, а если $z \neq 0$, то $|z| > 0$. Для действительного числа $z = a = a + 0i$ его модуль $|z| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ совпадает с обычным модулем действительного числа.

Число φ, входящее в запись тригонометрической формы комплексного числа $z = a + bi$, называют *аргументом* комплексного числа и обозначают $\operatorname{Arg} z$. Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi,\text{ где } \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ \left(r = \sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Как уже отмечалось, при геометрическом изображении комплексного числа $z = a + bi$ в виде точки $M\,(a;\,b)$ (или радиуса-вектора $\overline{OM}$) аргумент φ — это числовое значение величины угла, образованного лучом OM с положительным направлением оси Ox (см. рис. 2.1). Понятно, что этот угол можно определить только с точностью до $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому аргумент комплексного числа z имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на числа, кратные 2π. Отметим, что для комплексного числа $0 = 0 + 0i$ аргумент нельзя определить, поскольку $|0| = r = 0$ (в этом случае радиус-вектор $\overline{OM}$ превращается в точку — нуль-вектор, и мы не можем указать его направление).

Пример Запишите в тригонометрической форме число $\sqrt{3} - i$.

▶Если $z = a + bi = \sqrt{3} - i$, то $a = \sqrt{3}$, $b = -1$. Найдем модуль этого комплексного числа: $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Аргумент φ найдем из соотношений: $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}$. Поскольку косинус φ положителен, а синус φ — отрицателен, то соответствующий угол φ находится в IV четверти и как одно из значений аргумента можно взять $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (или любое другое значение, отличающееся от него на $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, например, $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$). Тогда заданное комплексное число в тригонометрической форме записывается следующим образом:

$$z=\sqrt{3}-i=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right). \ \triangleleft$$

В простейших случаях тригонометрическую форму комплексного числа можно записывать, опираясь на изображение этого числа на координатной плоскости.

Например, для числа $1 = 1 + 0i$, изображаемого точкой M (1; 0) (рис. 2.2), модуль $r = OM = 1$ и аргумент $\varphi = 0$ (угол между лучом OM и положительным направлением оси Ox равен 0). Тогда в тригонометрической форме число 1 можно записать так: $1 = 1\,(\cos 0 + i \sin 0)$.

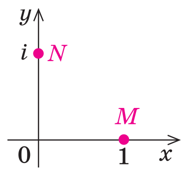


Рис. 2.2

Аналогично для числа $i = 0 + 1i$, изображаемого точкой N (0; 1) (см. рис. 2.2), модуль $r = ON = 1$ и аргумент $\varphi=\frac{\pi}{2}$ $\Big($угол между лучом ON и положительным направлением оси Ox равен $\frac{\pi}{2}\Big)$, тогда в тригонометрической форме число i можно записать так: $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Рис. 2.3

Напомним, что для действительных чисел геометрический смысл выражения $|a - b|$ — *это расстояние между соответствующими точками на числовой прямой*, то есть $|a - b| = AB$ (рис. 2.3).

Аналогично для комплексных чисел

геометрический смысл выражения $|z - w|$ — это расстояние между соответствующими точками на координатной (комплексной) плоскости.

● Действительно, комплексное число z изображают вектором $\overline{OM}$ или точкой M, а комплексное число w — вектором $\overline{ON}$ или точкой N (рис. 2.4). Тогда комплексное число $z - w$ изображают разностью этих векторов, то есть вектором $\overline{NM}$. Число $|z - w|$ равно длине этого вектора, то есть расстоянию между точками M и N. ○

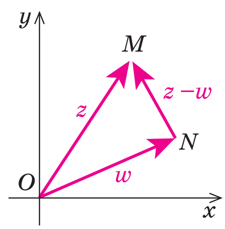


Рис. 2.4

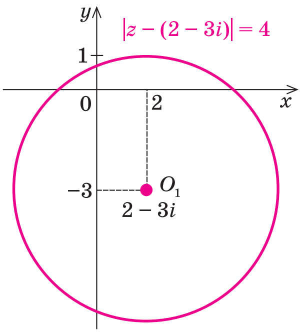
Например, пусть необходимо изобразить множество точек z комплексной плоскости, для которых выполняется равенство

$$|z - 2 + 3i| = 4 \qquad (1)$$

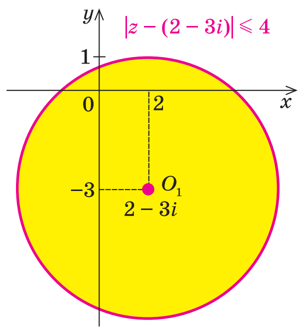
или неравенство

$$|z - 2 + 3i| \leqslant 4. \qquad (2)$$

Для этого достаточно записать данные условия так: $|z - (2 - 3i)| = 4$; $|z - (2 - 3i)| \leqslant 4$ и использовать геометрический смысл модуля разности. Тогда множество точек, задаваемое равенством (1), — это окружность радиуса 4 с центром в точке O_1 (2; −3) (рис. 2.5, *а*), а множество точек, задаваемое неравенством (2), — это круг радиуса 4 с центром в точке O_1 (2; −3) (рис. 2.5, *б*).



а



б

Рис. 2.5

Отметим, что в случае, когда два комплексных числа равны, они изображаются одной и той же точкой M на координатной плоскости. Но тогда их модули (расстояния до начала координат) равны, а аргументы (то есть углы, образованные лучом OM с положительным направлением оси Ox) или равны, или отличаются на целое число полных оборотов, то есть на $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. И наоборот, если модули двух комплексных чисел равны, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, то эти числа изображаются на координатной плоскости одной и той же точкой, следовательно, эти числа равны. Таким образом,

два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Иначе говоря, если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то равенство $z_1 = z_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$ (или φ_2 отличается от φ_1 на $2\pi k$, то есть $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$).

2. Умножение, возведение в степень и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда $z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)).$$

Учитывая, что $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$, получаем:

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (3)$$

То есть **при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.**

- Возведение в натуральную степень комплексного числа $z = r\ (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ сводится к умножению одинаковых множителей, поэтому, используя несколько раз формулу (3), получаем:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}} = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ раз}} \left(\cos (\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ раз}}) + i \sin (\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ раз}}) \right).$$

Отсюда:

$$z^n = r^n\ (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \qquad (4)$$

Таким образом, **при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.** ○

Например, для нахождения i^{102} учтем, что в тригонометрической форме $i = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ (с. 427). Тогда, используя формулу (4), получаем

$$i^{102} = \left(1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right)^{102} = 1^{102}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 102\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 102\right)\right) =$$
$$= 1\ (\cos 51\pi + i \sin 51\pi) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1$$

(что совпадает с значением, полученным на с. 418 в алгебраической форме).

Поскольку деление — действие, обратное умножению, то при делении числа $z_1 = r_1\ (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ на число $z_2 = r_2\ (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ (при $z_2 \neq 0$) модули необходимо разделить, а аргументы — вычесть:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \qquad (5)$$

Таким образом, **при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.**

- По формуле (3) произведение числа $z_3 = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$ на число $z_2 = r_2\ (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ равно:

$$z_3 z_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot r_2\left(\cos((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2) + i \sin((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2)\right) = r_1\ (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = z_1.$$

Это и означает, что число z_3 является частным от деления числа z_1 на число z_2. ○

З а м е ч а н и е. Если $z = r\ (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то по определению $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ (при $z \neq 0$). Поскольку $1 = 1 + 0i = 1\ (\cos 0 + i \sin 0)$, то, учитывая равенства (4) и (5) для $n \in N$, имеем:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1\ (\cos 0 + i \sin 0)}{r^n\ (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{1}{r^n}\left(\cos(0 - n\varphi) + i \sin(0 - n\varphi)\right) =$$
$$= r^{-n}\left(\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)\right).$$

Это равенство означает, что формулу (4) можно использовать не только для натуральных, но и для целых значений n при $z \neq 0$ (напомним, что $z^0 = 1$ при $z \neq 0$).

3. Извлечение корня из комплексного числа. Как и для действительных чисел, *корнем n-й степени из комплексного числа z* (где n — натуральное число) *называют такое комплексное число t, что $t^n = z$.*

Корень n-й степени из z обозначается $\sqrt[n]{z}$. Следовательно, если $t = \sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Покажем, что из любого комплексного числа z можно извлечь корень n-й степени, причем если $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ принимает n различных значений. Для обоснования используем тригонометрическую форму рассмотренных комплексных чисел.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Число t будем искать в виде

$$t = R(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Если $t = \sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Учитывая, что $t^n = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, получаем:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Но два комплексных числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно,

$$R^n = r, \tag{6}$$

$$n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

Поскольку $r \geqslant 0$ и число R должно быть неотрицательным, то из равенства (6) получаем $R = \sqrt[n]{r}$ (арифметическое значение),

а из равенства (7):

$$\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = t = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{9}$$

Учитывая, что функции $\cos x$ и $\sin x$ являются периодическими с наименьшим положительным периодом 2π, делаем вывод, что значения $\sqrt[n]{z}$, которые дает формула (9), могут повторяться только в том случае, когда значения α (см. формулу 8) будут отличаться на число, кратное 2π. Выясним, при каких значениях k_1 и k_2 это может быть. Для этого разность $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} = \frac{2\pi(k_1 - k_2)}{n}$ должна быть кратной 2π, а разность $k_1 - k_2$ должна, в свою очередь, делиться на n. Отсюда следует, что при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ формула (9) дает разные значения $\sqrt[n]{z}$. При $k = n$ получаем те же значения корня, что и при $k = 0$, при $k = n + 1$ — те же значения корня, что и при $k = 1$, и т. д. Следовательно, по формуле (9) мы всегда получим точно n различных значений $\sqrt[n]{z}$ (при $z \neq 0$). То есть

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z.} \tag{10}$$

(Всего получаем n различных значений при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.) Итак,

при извлечении корня n-й степени из комплексного числа из модуля извлекается арифметический корень n-й степени, а к аргументу прибавляется $2\pi k$ (где $k \in Z$) и результат делится на показатель корня. ○

Пример Найдите все значения $\sqrt[4]{1}$.

▶Запишем подкоренное число в тригонометрической форме $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Тогда по формуле (10):

$$t = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right).$$

Всего получаем 4 различных значения:

при $k = 0$ $t_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1(1 + i\cdot 0) = 1.$

при $k = 1$ $t_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1(0 + i\cdot 1) = i.$

при $k = 2$ $t_2 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1(-1 + i\cdot 0) = -1.$

при $k = 3$ $t_3 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1(0 + i\cdot(-1)) = -i.$

Следовательно, $\sqrt[4]{1}$ имеет четыре различных значения: 1; -1; i; $-i$. ◁

Замечание. Если записать формулу (10) так:

$$t_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right),$$

$k \in \boldsymbol{Z}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$,

то, учитывая геометрический смысл модуля, получаем, что все точки, изображающие числа t_k, лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Аргументы соседних точек отличаются на $\frac{2\pi}{n}$, поэтому указанные точки делят окружность на n равных частей, то есть эти точки являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность. Например, точки, изображающие все значения $\sqrt[4]{1}$ (то есть ± 1 и $\pm i$), являются вершинами правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 2.6).

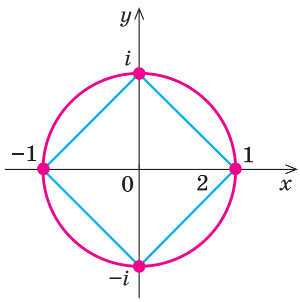


Рис. 2.6

Вопросы для контроля

1. Пользуясь геометрическим изображением комплексного числа, поясните смысл понятий модуля и аргумента комплексного числа.
2. Запишите формулы, по которым для комплексного числа $z = a + bi$ можно найти его модуль и аргумент. Приведите примеры.
3. Запишите общий вид комплексного числа в тригонометрической форме. Приведите примеры такой записи комплексных чисел.

4. Объясните, в каком случае будут равными комплексные числа
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$
5. Объясните и обоснуйте геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, для которых $|z - i| = 1$.
6. Объясните, как выполняются действия умножения, деления и возведения в степень над комплексными числами в тригонометрической форме. Запишите и докажите соответствующие формулы.
7. Запишите и докажите формулу для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме.

Упражнения

1. Изобразите на координатной плоскости заданное комплексное число. Пользуясь соответствующим изображением, найдите его модуль и аргумент и запишите заданное число в тригонометрической форме:
1) $3i$; 2) 4; 3) $-5i$; 4) -7.

2. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
1) $\sqrt{3}+i$; 2) $2 + 2i$; 3) $3i$; 4) $-3 - 3i$;
5) -4; 6) $-1-\sqrt{3}i$; 7) $-2+2\sqrt{3}\,i$.

3. Представьте в алгебраической форме число:
1) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условию:
1) $|z - 2 - i| = 2$; 2) $|z + i| \geqslant 3$; 3) $|z + 1 - i| \leqslant 2$; 4) $|z - 3| = 4$.

5. Найдите произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2 (результат запишите в тригонометрической и алгебраической формах):
1) $z_1 = 12\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
2) $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

6. Вычислите выражение, предварительно представив числитель и знаменатель в тригонометрической форме:
1) $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{i-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1+i}{-1-i}$; 4) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$.

7. Возведите комплексное число в степень, предварительно представив основание степени в тригонометрической форме:
1) $(1 + i)^{16}$; 2) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15}$; 3) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$; 4) $(1 - i)^{20}$.

8. Найдите все значения корня n-й степени из комплексного числа:
1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{-16}$; 4) $\sqrt[6]{-1}$.

9. Найдите все комплексные корни уравнения:
1) $z^3 - 27 = 0$; 2) $z^4 + 81 = 0$; 3) $z^6 + 64 = 0$; 4) $z^4 - 625 = 0$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Раздел 1

§ 1. **3.** 1) -3; 2) 9; 3) 0; 4) 1. **4.** 1) 11; 2) 1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) -8. **5.** 1) $[2; 3]$; 2) $(-1; 0,5)$; 3) $[3; 4)$; 4) $[1; 3] \cup (4; +\infty)$. **6.** 1) $(2; 5]$; 2) $[0,5; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup [-1; 1] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$ или $x = 1,5$; 4) $(4; 28]$.

§ 2. **1.** 1) 6; 2) 7; 3) 5. **2.** 1) $3\Delta x$; 2) $3x_0\Delta x\,(x_0 + \Delta x) + (\Delta x)^3$; 3) $\Delta x\,(2x_0 + \Delta x - 1)$; 4) $\Delta x + \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$. **5.** а) $f'(x_1) = \sqrt{3}$; $f'(x_2) = 1$; б) $f'(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f'(x_2) = 0$; в) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = 0$; г) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** 1) 6; 2) 1; 3) -1; 4) 1. **7.** 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = x - 0,25$; 4) $y = -6x - 9$. **8.** 1) $y = 0,5x + 0,5$; 2) $y = x + 0,25$; 3) $y = 0,25x + 3$; 4) $y = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2}$. **9.** 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 3. **1.** 1) $8x^7$; 2) $-5x^{-6}$; 3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $20x^{19}$; 5) $-20x^{-21}$; 6) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. **2.** 1) 1; 2) $5x^4 - 1$; 3) $-\frac{1}{x^2} - 3x^2$; 4) $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.** 1) $6x^2 + 3$; 2) $2x + 5$; 3) $4x^3 - 4x$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 12x^2$. **4.** 1) $6x^2 + 6x^5$; 2) $-6x^2 + 2x + 2$; 3) $-4x^3 + 6x^2 - 3$; 4) $\frac{15x^2 - 3x}{2\sqrt{x}}$. **5.** 1) $\frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$; 2) $-\frac{7}{(3x-2)^2}$; 3) $-\frac{11}{(5x+1)^2}$; 4) $\frac{2x^2 - 2x}{x^4}$. **6.** 1) $f'(-2) = -2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$; 2) $f'(2) = 28$; $f'(-1) = -8$; 3) $f'(0) = -\frac{5}{9}$; $f'(-3) = -\frac{5}{81}$; 4) $f'\left(-\sqrt{2}\right) = 1,5$; $f'(0,1) = 101$. **7.** 1) 1; 2) -2; 0; 3) $\pm 0,5$; 4) 0,25. **8.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-2; 0)$; 3) $(-2; 0) \cup (0; 2)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **9.** 1) $f(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = \sin x$; 2) $f(u) = u^5$; $u(x) = 2x + x^2$; 3) $f(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = x^3 - x$; 4) $f(u) = \cos u$; $u(x) = 2x - \frac{\pi}{4}$. **10.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 5) $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(0; 0,5]$; 7) $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $[0,1; 10]$. **11.** 1) $3\,(x^2 - x)^2\,(2x - 1)$; 2) $-10\,(2x - 1)^{-6}$; 3) $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$; 4) $\frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$; 5) $\frac{3}{4\sqrt{3x\left(2 + \sqrt{3x}\right)}} - \frac{4}{(2x-1)^3}$. **12.** 1) $y = 7x - 4$; 2) $y = 26x + 54$; 3) $y = -0,5x + 1,5$; 4) $y = 7x + 6$.

§ 4. **1.** 1) $-\sin x$; 2) $2\cos x - 3$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $3x^2 + \frac{1}{\sin^2 x}$. **2.** 1) $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}$; 3) $\sin x\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$; 4) $-\cos x\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)$. **3.** 1) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$; 2) $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\sin 2x$; 4) $-\sin 2x$. **4.** 1) $\cos x$; 2) $-6\sin 6x$; 3) $2\cos 2x$;

4) $-4\sin 4x$. **5.** 1) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; 2) $-2x\sin x^2$; 3) $-\sin x\cos(\cos x)$; 4) $\dfrac{3}{\cos^2 6x\sqrt{\operatorname{tg} 6x}}$.
6. 1) $5x^4+4\cos 4x$; 3) $-2\cos 2x$; 4) $\dfrac{12\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}$. **7.** 1) $\dfrac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}$; 2) $\sin 2x$; 4) $\dfrac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$.
8. 1) 0; 2) 2; 3) -1; 4) -8. **9.** 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) -5. **10.** 1) Нет; 2) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\dfrac{\pi k}{4}, k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in\boldsymbol{Z}$. **11.** 1) 0; 4; 2) 0; 3; 3) 1; 4) 2. **12.** 1) $(-2; 2)$; 2) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$; 3) $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $(0; 4)$. **13.** 1) а) 1; 3; б) $(-\infty; 1)\cup$ $\cup(3; +\infty)$; в) $(1; 3)$; 2) а) 1; 3; б) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$; в) $(1; 3)$; 3) а) 1; б) $(1; +\infty)$; в) $(0; 1)$; 4) а) 0; б) $(0; 4)$; в) $(-4; 0)$. **14.** 1) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\dfrac{\pi}{2}$; 3) $y=3$; 4) $y=0{,}5x-1{,}5$. **15.** 1) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\boldsymbol{Z}$; 2) 2; -2; 3) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **16.** $y=-3x+5$. **17.** $y=5x-5$.

§ 5. **Пункт 5.1.** **1.** а) Возрастает на $[-6; -4]$ и $[-2; 2]$; убывает на $[-4; -2]$ и $[2; 6]$; б) возрастает на $[-7; -4]$ и $[-2; 2]$; убывает на $[-4; -2]$ и $[2; 7]$. **2.** Возрастает на $(-\infty; -5]$ и $[5; +\infty)$; убывает на $[-5; 5]$. **3.** Возрастает на $[-3; -1]$; убывает на $(-6; -3]$ и $[-1; 3)$. **6.** 1) Возрастает на $[1; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 1]$; 2) возрастает на $\left(-\infty; -2\sqrt{2}\right]$ и $\left[2\sqrt{2}; +\infty\right)$; убывает на $\left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$; 3) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$; убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; 4) возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$; убывает на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$. **7.** 1) Возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$; убывает на $[-3; 3]$; 2) возрастает на $[-1; 1]$; убывает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$; 3) возрастает на $\left[-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k; \dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$; убывает на $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi k; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$; 4) зростає на $\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$; убывает на $\left[-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 9]$. **9.** 1) 1; 2) 2; 3) π; 4) -1. **12.** 1) Возрастает на $(-\infty; -2]$, $[1; +\infty)$; убывает на $[-2; 1]$; 2) $x=-2$ — точка максимума; $x=1$ — точка минимума. **16.** 1) Возрастает на $[3; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 3]$; $x=3$ — точка минимума; $f(3)=-4$; 2) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$; убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; $x=\pm 1$ — точки минимума; $f(-1)=f(1)=-1$; $x=0$ — точка максимума; $f(0)=0$; 3) возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$; убывает на $[-2; 0)$ и $(0; 2]$; $x=-2$ — точка максимума; $f(-2)=-4$; $x=2$ — точка минимума; $f(2)=4$; 4) возрастает на $[1; 2]$; убывает на $[2; 3]$; $x=2$ — точка максимума; $f(2)=2$. **17.** 1) Возрастает на $[-2; 2]$; убывает на $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$; $x=-2$ — точка минимума, $y(-2)=-0{,}25$; $x=2$ — точка максимума, $y(2)=0{,}25$; 2) возрастает на $[-0{,}5; 0]$ и $[0{,}5; +\infty)$; убывает на $(-\infty; -0{,}5]$ и $[0; 0{,}5]$; $x=\pm 0{,}5$ — точки минимума; $f(-0{,}5)=f(0{,}5)=-1{,}25$; $x=0$ — точка максимума; $f(0)=-1$; 3) возрастает на $(-\infty; +\infty)$; 4) возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$; убывает на $\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi k; \dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right], k\in\boldsymbol{Z}$; $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\boldsymbol{Z}$, — точка минимума; $f\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}, k\in\boldsymbol{Z}$; $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\boldsymbol{Z}$, — точка максимума;

$f\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}, k\in \mathbf{Z}$. **Пункт 5.2.** **4.** 1) б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) при $a < -4$, $a > 4$ — два; при $a = \pm 4$ — один; при $-4 < a < 4$ — нет; 2) б) $[-2; +\infty)$; в) при $a < -2$ — нет; при $a = -2$, $a > 0$ — один; при $-2 < a \leqslant 0$ — два; 3) б) $[-0,25; +\infty)$; в) при $a < -0,25$ корней нет, при $a = -0,25$ или $a > 0$ — один, при $0 < a < -0,25$ — два; 4) б) $[4; +\infty)$; в) при $a < 4$ корней нет, при $a = 4$ — один, при $a > 4$ — два. **5.** 1) 2; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **6.** 3), 4) Графики функций изображены на рис. 1 и 2. **Пункт 5.3.** **1.** 1) $f_{max} = 9$, $f_{min} = 5$; 2) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = 6$, $f_{min} = -2$; 4) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -31$. **2.** 1) $f_{max} = 4$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, $f_{min} = 0$. **3.** 2) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$; 3) $f_{min} = -5$, $f_{max} = -3$; 4) $f_{min} = -1$, $f_{max} = 1$. **4.** 1) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -52$; 2) $f_{min} = 0$, $f_{max} = 2\sqrt{3}$; 4) $f_{min} = 0,5$, $f_{min} = 2,25$. **5.** 5; 5. **6.** 3,5; 0,5. **7.** 6; −2. **8.** Квадрат со стороной 5 см. **9.** $\frac{a}{6}$. **12.** 4. **13.** Равнобедренный треугольник с боковой стороной $\frac{a}{2}$ и углом α при вершине. **14.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$. **16.** $14 + 2\pi$. **17.** К точке отрезка AB, удаленной от B на 1 км.

§ 6. **4.** 1) −3; 2) ±2; 3) 2; 4) −3; 1. **5.** 1) −3; 2) 25; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 14; 5) 5; 6) −3; 7) 0,25; 8) $2\sqrt{2}$; 9) 3; 10) 2; 11) 0; 12) $-1\frac{5}{7}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) 1,25; 16) $4\frac{2}{3}$.

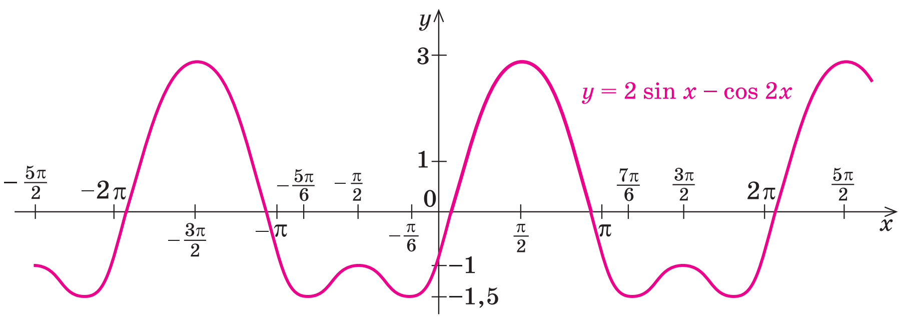


Рис. 1

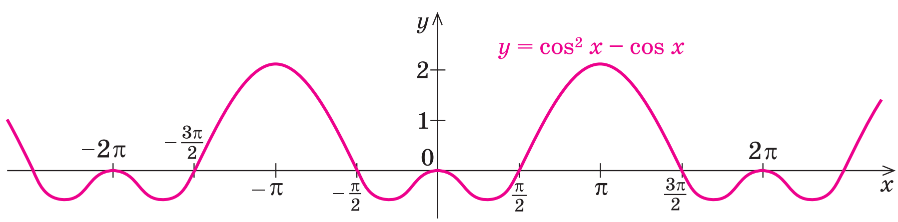


Рис. 2

6. 1) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ или $x = 1$; 3) $(-3; -2] \cup [3; 4)$; 5) $(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$; 8) $[-2; 3]$.

§ 9. **1.** 1) $6x - 6$; 2) $\frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}$; 3) $-2\sin x - x\cos x$; 4) $(2 - x^2)\sin x + 4x\cos x$. **2.** 1) Выпуклая вниз на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$; выпуклая вверх на $(-1; 1)$; $x = \pm 1$ — точки перегиба; 2) выпуклая вниз на $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$; выпуклая вверх на $\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$; $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{3\pi}{4}$ — точки перегиба; 3) выпуклая вниз на $(-\infty; -1)$ и $(0;1)$; выпуклая вверх на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$; $x = 0$ — точка перегиба; 4) выпуклая вниз на $\left(-\infty; \sqrt[3]{36}\right)$, выпуклая вверх на $\left(\sqrt[3]{36}; +\infty\right)$, $x = \sqrt[3]{36}$ — точка перегиба.

§ 10. **Пункт 10.1.** **1.** 1) 3; 2) 5. **2.** 1) ± 1; 2) 0; 3) 2. **3.** 1) 2; 2) 0; 3) 2. **4.** 1) 0; 2) 0; **5.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) -1; -2. **6.** 1) 1; 2; -2; 2) -1; 2; -2; 3) 1; -1; 2. **8.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(5; +\infty)$. **9.** 1) 3; 2) 11.

§ 11. **1.** $a \leqslant -3$ или $a \geqslant 1$. **2.** $a = 1$. **3.** $k = 2$. **4.** $x = 1$, $a = 3$. **5.** 1. **6.** $a = 3$, $b = 1$. **7.** $a = -23{,}25$. **8.** $5 - 3\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 5 + 3\sqrt{3}$. **9.** $a \leqslant -32$ или $a \geqslant 32$. **10.** $a < -7$ или $a > 11$. **11.** $-7 \leqslant a < 0$ или $0 < a \leqslant 7$. **12.** $0 < a \leqslant 9$. **13.** $a = -\frac{2}{3}$.

Дополнительные упражнения. **4.** 1) -2; 2) 1. **11.** 1) (1; -3). **23.** 45°.

Раздел 2

§ 13. **4.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0)$; 3) $(-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$. **10.** 1) «−»; 2) «−»; 3) «+»; 4) «+».

§ 14. **Пункт 14.1.** **1.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $2 \pm \sqrt{6}$; 7) -3; 2; 8) 0; 9) 2; 10) 4; 11) корней нет; 12) 5; 13) корней нет; 14) 0; 15) 1; 16) 2; 17) 1; 18) 2; 3; 19) 1; 20) 1; 21) 2; 22) 2. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 3. **3.** 1) -4; 2; 2) -2; 3; 3) -2; 4; 4) -1; 3; 5) $\pm\sqrt{3}$. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) -1; 5) 2; 6) 0; 7) -2; 8) 2. **5.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) при $a = 0$ $\boldsymbol{R}$; при $a \neq 0$ $x = 1$; 3) при $a = 0$ $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$; при $a > 0$ $x = 0{,}5$ (при $a < 0$ уравнение не определено). **Пункт 14.2.** **1.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 2; 4) 0; 2; 5) 3; 6) 0,5; 7) ± 1; 8) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 0; 6) 1,5. **4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 1; 5) 0; 1. **5.** 1) 2; 2) ± 1; 3) 0; 4) 0; 1,5. **8.** 1) $(3; -1)$; 2) $(-2; -3)$; 3) $(1; 2)$; $(2; 1)$; 4) $(3; 1)$; 5) $(4; 2)$; 6) $(4; 2)$. **Пункт 14.3.** **1.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $(-1; +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) решений нет; 5) $(-\infty; -2]$; 6) $(-\infty; 5]$; 7) $[2{,}5; +\infty)$; 8) $(0; +\infty)$; 9) $[1; 3) \cup [6; +\infty)$; 10) $[1; 4) \cup [8; +\infty)$. **2.** 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1]$; 5) $(2; +\infty)$; 6) $[1; 2]$. **3.** 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 1]$; 3) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 4) $[0; 1]$. **4.** 1) -2; $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]$, 4; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; 1)$. **5.** 1) $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$; 2) $[4; +\infty) \cup \{0\}$.

§ 15. **2.** 1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) 0,5; 5) $-1{,}5$; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) -1; 10) -1. **3.** 1) $\log_4 9$; 6) $\ln 3$. **4.** 5) 14; 6) 54. **5.** 2) $2\lg a + 5\lg b - 7\lg c - 1$; 5) $2 + 7\log_3 a + \frac{1}{3}\log_3 b$. **6.** 1) $3\lg|a| + 5\lg|b| + 8\lg|c|$; 2) $\frac{1}{3}\lg|a| + \frac{1}{3}\lg|b| - 2\lg|c|$;

3) $4\lg|c|-\frac{2}{5}\lg|a|-\frac{2}{5}\lg|b|$; 4) $2+\frac{1}{5}\lg|a|+\frac{1}{5}\lg|b|+\frac{2}{5}\lg|c|$. **7.** 1) $b+1$; 2) $2a+b$; 3) $a+b+1$; 4) $3a+2b$. **8.** 1) $\frac{40}{9}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{5a}\cdot c^5}{b^2}$; 3) $\frac{m^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt[5]{p}}$; 4) $\frac{1}{1600}$. **9.** 1) $-\log_3 a$; 2) $0{,}5\log_3 a$; 3) $-0{,}5\log_3 a$; 4) $2\log_3 a$; 5) $\frac{\log_3 a}{\log_3 2}$. **10.** 1) 24; 2) 10; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 19; 6) 12. **11.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{2+a}{2(2-a)}$; 3) $\frac{b(3-2a)}{ab+2}$; 4) $\frac{b(a+4)}{3(1+ab)}$.

§ 16. **1.** 1) $(-3;+\infty)$; 2) $(3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 4) $(0;3)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; 8) $(2;3)\cup(3;+\infty)$; 9) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 10) $(0;1)\cup(1;2)$; 11) $(1{,}5;2)\cup(2;5)$.

§ 17. **Пункт 17.1.** **1.** 1) 16; 2) 5; 3) 2; 4) 100. **2.** 1) 5; 2) 6; 3) -3; 1; 4) 2,9. **3.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4; 4) 5. **4.** 1) 3; 27; 2) 10; 3) $\frac{1}{81}$; 9; 4) 0,1; 1; 10. **5.** 1) 1; 2) 2; 4; 3) 0; 4) $\log_3 4$. **8.** 1) (100; 10); (10; 100); 2) $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\sqrt{17}\right)$; 3) (4; 1); (1; 4); 4) (0,25; 64); (8; 2). **Пункт 17.2.** **1.** 1) $(9;+\infty)$; 2) $(0;5)$; 3) $(0{,}5;+\infty)$; 4) $(0;100)$. **2.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(0{,}2;2)$; 3) $\left(\frac{2}{3};9\right)$; 4) $(-0{,}5;1{,}5)$. **3.** 1) $(3;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3};1\right)$; 3) $(2;3)$; 4) $(0{,}5;4]$. **4.** 1) $(0;3)\cup(9;+\infty)$; 2) $(0{,}1;10)\cup(10;1000)$; 3) $\left[\frac{1}{9};9\right]$; 4) $(0;0{,}5]\cup[4;+\infty)$. **5.** 1) $(10;+\infty)$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-4;-3)\cup(4;5)$; 4) $[1;+\infty)$. **6.** 1) $(0;0{,}25]$; 2) $(1;4)$; 3) $(0;1)\cup\left[\sqrt{2};4\right]$; 4) $(-2;0{,}5)$.

§ 18. **1.** 1) $3e^x$; 2) $e^x-\frac{1}{x}$; 3) $-e^{-x}+5x^4$; 4) $\frac{2}{2x-1}$. **2.** 1) $e^{5x}(5\cos x-\sin x)$; 2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln 10}$; 4) $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)$. **3.** 1) $(0{,}5\ln 0{,}5;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0{,}5;+\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$; 4) $(1{,}5;+\infty)$. **4.** 1) а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$; в) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) а) 1; б) $(1;+\infty)$; в) $(0;1)$; 3) а) e; б) $(0;e)$; в) $(e;+\infty)$; 4) а) e^{-2}; б) $(e^{-2};+\infty)$; в) $(0;e^{-2})$. **5.** 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=2$; 4) $y=-1$. **6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) 1; 3) 0. **7.** $y=5x+2$. **8.** $y=3x-1$. **9.** 2) $f_{\max}=\ln 2+5$, $f_{\min}=\ln 4-2$. **10.** 1) а) График функции изображен на рис. 3; б) $\left[-\frac{2}{e};+\infty\right)$; в) при $a<-\frac{2}{e}$ — нет; при $a=-\frac{2}{e}$ і $a\geqslant 0$ — один; при $-\frac{2}{e}<a<0$ — два; 2) а) график функции изображен на рис. 4; б) $(-\infty;0)\cup[e;+\infty)$; в) при $a<0$, $a=e$ — один; при $0\leqslant a<e$ — нет; при $a>e$ — два. **11.** $\left(\frac{e}{6}\right)^6$. **12.** 1) 0; 2) 1. **13.** 1) 0; 3) 1. Указание. При $x<0$ выполнить оценку значений левой и правой части уравнения. **14.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) -2; 0. **15.** 1) 0; 1; 3; 2) 0; 1; 2; 3) 0; ±1; 4) 1.

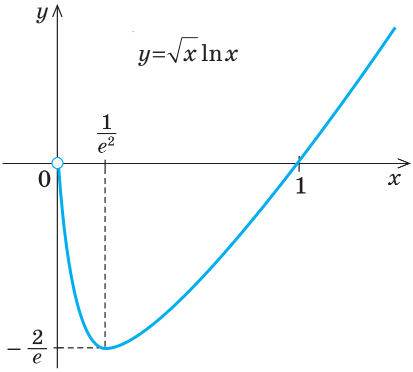


Рис. 3

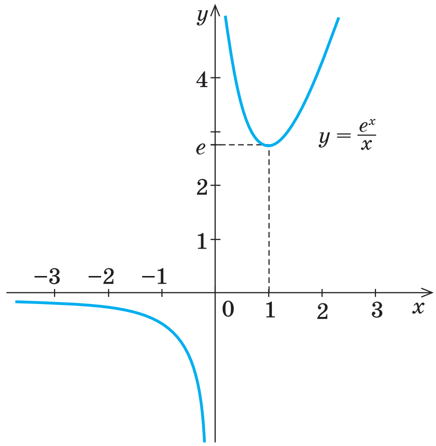


Рис. 4

§ 19. **1.** 1) 1; 1000; 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10; 3) $\frac{1}{16}$; 8; 4) 3; 5) а) 1; 4; б) 0; 1; 4; 6) −1; 0; 2; 7) 3; 8) 0,25; 4; 9) 2. **2.** 1) (25; 5); (5; 25); 2) (0,5; 0,125); (8; 2). **3.** 1) $(0; 0{,}5) \cup (1; 2)$; 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [3; +\infty)$; 3) [3; 5]; 4) при $0 < a < 1$ $x \in (0; a) \cup (a^{-4}; +\infty)$; при $a > 1$ $x \in (a^{-4}; a)$; при $a \leqslant 0$ или $a = 1$ неравенство не определено; 5) при $0 < a < 1$ $x \in (a; a^{-2})$; при $a > 1$ $x \in (0; a^{-2}) \cup (a; +\infty)$; при $a \leqslant 0$ или $a = 1$ неравенство не определено.

§ 20. **1.** 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 4; 6) корней нет; 7) ±2; 8) 1. *Указание.* Записать уравнение в виде $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2x-x^2$ и учесть, что при $x > 0$ $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$; 9) 1. **2.** 1) ±2; 2) ±2; 3) 2. *Указание.* Разделить обе части уравнения на 2^x и учесть, что функция, полученная в правой части, убывающая. **3.** 1) 0,25; 2; 2) 1; 3; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1,5. **4.** 1) −3; $[-1; +\infty)$; 2) $[25; +\infty)$. **5.** 1) При $a \geqslant 11$ $x=\log_5\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $a < -1{,}5$ $x=\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $-1{,}5 \leqslant a < 11$ корней нет; 2) при $-1<a\leqslant 3-2\sqrt{2}$ или $3<a\leqslant 3+2\sqrt{2}$ $x=\log_2\frac{a^2-1}{2(a-3)}$; при $a \leqslant -1$, или $3-2\sqrt{2}<a\leqslant 3$, или $a>3+2\sqrt{2}$ корней нет. **6.** 1) (−5; −5); (2; 2); 2) (3; 3). **7.** $-1 < a \leqslant 0$. **8.** $a \geqslant 1$. **9.** $a = -4$. *Указание.* Привести уравнение к виду $f(x) = 0$ и учесть, что функция $f(x)$ четная. **10.** $a \leqslant 0$, $a = 0{,}25$. **11.** При $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ один корень; при $a > 0$ — два. **12.** При $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 7$ один корень; при $-1 < a < 7$ — два. **13.** $a \geqslant -2{,}25$.

Дополнительные упражнения. **1.** 1) −40; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) 20. **2.** 1) 1000; 2) −2; 3) 32; 4) 27; 5) 10. **3.** 1) 1; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **4.** 1) 9; 2) 19; 3) 0,5. **5.** 1) −27,2; 2) −0,8; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 2,903. **6.** 1) $\frac{24a}{2+3a}$; 2) $\frac{a+1}{2a}$; 3) $5(1 - a - b)$. **9.** 1) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty]$;

2) $(-\infty;\ -1] \cup [5;\ +\infty]$; 3) $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ 1\right]$; 4) $[-1;\ 0) \cup (3;\ 4]$. **10.** 1) $(-\infty;\ 1]$; 3) $[0{,}5;\ 1]$; 4) $[2;\ 4]$. **11.** 1) $[-2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -8]$; 3) $[-1;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 1]$. **12.** 1) −2,5; 2) 0,6; 3) 1,75; 4) 3. **13.** 1) −2; 2) 6; 11; 3) 16; 4) 64. **11.** 1) $[-2;\ +\infty)$. **14.** $-2 < a < 2$. Указание. Записать заданные выражения как степени с одинаковым основанием 5.

Раздел 3

§ 21. **Пункт 21.1.1.** **1.** 12. **2.** 1) 16; 2) 60. **3.** 1) 2052; 2) яблоко. **4.** 1680. Указание. Целесообразно в качестве мест выбрать экзамены и размещать по ним заданные дни. **5.** 24. **6.** 870. **7.** 336. **8.** 210. **9.** 2730. **10.** $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$. **11.** 120. **12.** 96. **13.** 544 320. **14.** 1) 24; 2) 12. **15.** 1) 5; 2) 6. **Пункт 21.1.2.** **1.** 24. **2.** 5040. **3.** 120. **4.** 6. **5.** 1) 720; 2) 600. **6.** 1) 6; 2) 6. **7.** 384. **8.** 240. **9.** $5! \cdot 8!$. **10.** $10!$; $(5!)^2$. **Пункт 21.1.3.** **1.** 21. **2.** 56. **3.** 210. **4.** 1) 55; 2) 165. **5.** 400 400.

§ 22. **Пункт 22.1.** **1.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) случайное; 4) невозможное; 5) случайное; 6) невозможное; 7) случайное; 8) невозможное; 9) достоверное; 10) случайное; 11) случайное. **3.** 0,03. **4.** 0,002. **5.** 0,998. **6.** 0. **7.** 1. **8.** 1) 1; 2) 0. **9.** $\frac{1}{24}$. **10.** $\frac{1}{1250}$. **11.** 0,04. **12.** 0,75. **13.** $\frac{1}{12}$. **14.** 0,95. **15.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$. **16.** Выигрыши равновозможные. **17.** Нет. **18.** 1) Красное; 2) а) 1; б) 0; в) 0,4; г) 0,52. **19.** Любую. **20.** 1 красная, 5 желтых. **21.** Зеленая, $p = \frac{1}{6}$. **22.** 1) $\frac{4}{15}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 11. **23.** $\frac{1}{36}$. **24.** $\frac{2}{3}$. **25.** $\frac{1}{120}$. **Пункт 22.2.** **4.** 1) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 2) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; 3) $A_1 + A_2 + A_3$. 4) $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; 5) $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$. **5.** A і B; A і C; B і M; C і D; C і M; C і T; D і K; D і M; D і T. **6.** A і B; C і D; C і M; D і M; K і M. **7.** $\frac{7}{16}$. **8.** $\frac{4}{13}$. **Пункт 22.3.** **2.** 1) 0,42; 2) 0,51; 3) 0,49. **3.** 1) 0,43; 2) 0,1; 3) 0,9. **6.** 1) 0,71; 2) 0,71; 3) 0,51; 4) 0,49; 5) 0,96; 6) 1. **7.** 1) 0,53; 2) 0,9; 3) 0,47; 4) 0,76. **Пункт 22.4.** **1.** Шансы одинаковы. **2.** В кино. **3.** Шансы одинаковы. **4.** $\frac{2}{\pi}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **6.** 0,5. **7.** 0,4375. **Пункт 22.5.** **1.** 0,64. **2.** $\frac{1}{12}$. **3.** 0,0012. **5.** 1) 0,42; 2) 0,985; 3) 0,14; 4) 0,425. **6.** 0,714. **7.** 0,126. **8.** 0,5. **9.** $n \geqslant 4$. **Пункт 22.6.**

1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Z	1	2
P	0,5	0,5

3.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

6. 3,5. **8.** Игра несправедливая. **10.** Игра несправедливая. **11.** 2 : 1. **12.** Первый игрок должен получить 157,5 ливров, второй — 52,5. **13.** 11 : 5.

§ 23. **Пункт 23.1.** **2.** 240.

3.

Цвет	черный	красный	синий	серый	белый	желтый	зеленый
Количество кепок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

4.

Жирность	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Количество литров	400	240	160	200	480	280	240

Пункт 23.2. **5.** 1) $R = 4$; $Mo = 2$; $Me = 2$; $\overline{X} = 2\frac{2}{3}$; 2) $R = 8$; $Mo = 2$; $Me = 1$; $\overline{X} = 0{,}6$. **6.** 1) $R = 3$; $Mo = 3$; $Me = 3$; $\overline{X} = 3\frac{4}{11}$; 2) $R = 8$; $Mo_1 = 4$; $Mo_2 = 5$; $Me = 4$; $\overline{X} = 3\frac{4}{7}$. **7.** $Mo_1 = 135$; $Mo_2 = 140$; $Me = 135$; $\overline{X} = 129\frac{6}{11}$.

Раздел 4

§ 24. **4.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **5.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. **6.** 1) $2x - \frac{x^5}{5} + C$; 2) $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$; 3) $2x^2 + C$; 4) $-8x + C$; 5) $\frac{x^7}{7} + C$; 6) $-\frac{1}{2x^2} - 2x + C$; 7) $x + \frac{1}{3x^3} + C$; 8) $\frac{x^4}{4} + C$. **7.** 1) $2x - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$; 2) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^4} + \sin x + C$; 3) $-\frac{1}{x} + \cos x + C$; 4) $\frac{5}{3}x^3 - x + C$; 5) $\frac{1}{12}(2x-8)^6 + C$; 6) $-\frac{3}{2}\cos 2x + C$; 7) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8 + C$; 8) $-\frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$; 9) $\frac{1}{15(4-15x)^3} + C$; 10) $-2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$; 11) $-\frac{4}{3(3x-1)} + C$; 12) $\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x-1) + C$. **8.** 1) $x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$; 2) $-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\,4x - 2\sqrt{2-x} - x^3 + C$; 3) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x+1) - 3\cos(4-x) + x^2 + C$; 4) $\frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5}\sqrt{5x-2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$. **9.** 1) $-\frac{1}{x} - 10$; 2) $\mathrm{tg}\,x - 1$; 3) $\frac{x^4}{4} + 1\frac{3}{4}$; 4) $-\cos x - 2$. **10.** 1) $x^2 + x$; 2) $x^3 - x^2 + 4$; 3) $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}$; 4) $-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4\frac{1}{3}$. **11.** 1) $2\sin x + 3$; 2) $x - \frac{x^3}{3} + 3$; 3) $-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$; 4) $-\frac{1}{3x^3} + 5\frac{2}{3}$. **12.** 1) $2x^2 - \frac{1}{x} + 1$; 2) $\frac{x^4}{4} + 2x + 3$; 3) $x - x^2 + 8$; 4) $-\frac{1}{x} - 2x^5 + 3x + 5$. **13.** $\frac{t^3}{3} + t^2 - t$. **14.** $4\sin\frac{t}{2} + 2$. **15.** $t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

§ 25. **Пункт 25.1.** **1.** 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1; 5) $\frac{1}{15}$; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. **3.** 1) 3; 2) 2; 3) $9\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $\frac{2\pi}{3} + 1$; 6) 78; 7) $\frac{\pi + 3}{12}$; 8) 9,5. **4.** 1) 0,4; 2) 1,6; 3) $9\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$.

5. 1) 0,75; 2) 2; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{1}{3}$. **6.** 1) 4,25; 2) $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **Пункт 25.2.** **7.** $5\frac{1}{3}$. **8.** 4,5. **9.** 2) $\frac{15\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{16\pi}{15}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 11π; 3) $\frac{50\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

§ 26. **1.** 1) 68 м; 2) $21\frac{1}{3}$. **2.** 1) $y = 3x - 2x^2 + C$; 2) $y = 2x^3 - 4x^2 + x + C$; 3) $y = 1{,}5e^{2x} + C$; 4) $y = 2\sin 2x + C$. **3.** 1) $y = 1 - \cos x$; 2) $y = 2\sin x + 1$; 3) $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$; 4) $y = 2x + x^2 - x^3 + 2$; 5) $y = e^x + 1 - e$; 6) $y = -e^{-x} + 3$.

Раздел 5

§ 27. **1.** 1) 8; 2) 12; 3) 9; 4) 7. **2.** 1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 5; 6) 6; 7) 2; 8) −2,5; 2; 9) $\sqrt[3]{9}$; 10) $\sqrt[3]{36}$. **3.** 1) $\frac{15+\sqrt{129}}{8}$; 2) $\frac{19+\sqrt{137}}{8}$; 3) 1; 4) 2. **4.** 1) 12; 2) 8. **5.** 1) корней нет; 2) −3; 2; 3) −1; 0; 4) 4. **6.** 1) $\frac{13-\sqrt{21}}{2}$; 2) $\frac{9-\sqrt{21}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $2+\sqrt{2}$. **7.** 1) 3; 2) 2. **8.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. **9.** 1) 0; $\pm\pi$; $\pm\frac{3\pi}{4}$; $\pm\frac{5\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **10.** 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$. **11.** 1) $\frac{\pi k}{3}$, $k\in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in \mathbf{Z}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in \mathbf{Z}$. **15.** 1) $\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2\pi,\ k\in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. **21.** 1) 1; 2) −1. **23.** 1) 0; $\frac{15}{4}$; 4; 2) −1; 3. **24.** 1) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$; $2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; 3) $\pm\arccos\frac{-1}{\sqrt{3}+1}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. **28.** 1) $-\frac{7\pi}{4}$; − 6; − 5; 2) − 4; $\frac{5\pi}{4}$; − 3. **29.** 1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; $\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. **30.** 1) 1,5; 2) 0. **32.** 1) 3; 2) 1. **38.** 1) $\left[\frac{11}{12};\ 1\right)$; 2) $\left[\frac{9}{11};\ 1\right)$. **41.** 1) $\left(\frac{4}{7};\ \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{5};\ \frac{17+\sqrt{73}}{18}\right)$; 3) $(-\infty;\ 2]\cup[6{,}5;\ +\infty)$. **43.** 1) (0,58; 0,6); 2) (0,44; 0,5). **46.** $(\pi k;\ \pi+\pi k),\ k\in \mathbf{Z}$. **50.** 2) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 2)$. **62.** 1) (1; 5); 2) (2; 1). **63.** $c = -1$. **69.** $\left(0;\ \frac{1}{12}\right]$. **72.** $\frac{2}{3}$ л. **73.** 0,5 л. **74.** 75 км/ч. **75.** 40 км/ч. **76.** 45 и 36 дней. **77.** 10 дней. **78.** 6 ч. **79.** 60 км/ч. **80.** 15 км/ч. **81.** 40 км/ч и 55 км/ч. **82.** 3 : 1. **83.** 3 кг и 7 кг. **84.** 45 кг. **85.** 40 кг. **86.** 2,5 кг. **87.** 3 т. **88.** 98. **89.** 25 лет. **90.** 19 и 13 квартир. **91.** 7 кг; 4 кг; 4 кг. **92.** 850 л. **93.** 6 мес.

Приложение. **Пункт 1.** **2.** 1) $x = 3$; $y = -4$; 2) $x = 3$; $y = 8$; 3) $x = -3$; $y = -2$; 4) $x = 1$; $y = 0$. **3.** 1) $8 - 2i$; 2) $-2 + i$; 3) $3 - 4i$; 4) 4. **4.** 1) $4 - 5i$; 2) $2 + 19i$; 3) $-11 - 5i$; 4) $6 + 4i$. **5.** 1) $18 + 16i$; 2) $-16 - 28i$; 3) $-18 + 14i$; 4) 65. **6.** 1) $3 - 4i$; 2) $5 + i$; 3) $2{,}96 - 0{,}28i$; 4) $0{,}5 - 0{,}5i$. **7.** 1) i; 2) i; 3) 1; 4) 0. **8.** 1) $-5 - 12i$; 2) $-2 - 2i$; 3) $-7 + 24i$; 4) $2 + 11i$. **10.** 1) $2\pm i\sqrt{5}$; 2) $0{,}5 \pm 0{,}5i$; 3) $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$; 4) $\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{6}$.

Пункт 2. **2.** 1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 5) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$; 6) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 7) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. **3.** 1) $2\sqrt{3}+2i$; 2) $-3+3\sqrt{3}i$; 3) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. **5.** 1) $z_1z_2=48\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-24\sqrt{3}-24i$; $\frac{z_1}{z_2}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3i$; 2) $z_1z_2=18\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=18i$; $\frac{z_1}{z_2}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$. **6.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}-3}{4}-\frac{\sqrt{3}+3}{4}i$; 3) $\cos\pi+i\sin\pi=-1$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i$.
7. 1) 256; 2) $32\,768i$; 3) 4096; 4) -1024. **8.** 1) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $-i$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$; 4) $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$. **9.** 1) 3; $\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$; 2) $3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. 3) $\pm2i$; $\pm\sqrt{3}\pm i$; 4) ±5; $\pm5i$.

Обозначения, встречающиеся в учебнике

$\boldsymbol{N}$	—	множество всех натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$	—	множество всех целых чисел
$\boldsymbol{Z}_0$	—	множество всех неотрицательных целых чисел
$\boldsymbol{Q}$	—	множество всех рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$	—	множество всех действительных чисел, числовая прямая
$\boldsymbol{R}_+$	—	множество всех положительных действительных чисел
$[a;\ b]$	—	отрезок (замкнутый промежуток) с концами a и b, $a < b$
$(a;\ b)$	—	интервал (открытый промежуток) с концами a и b, $a < b$
$(a;\ b]$, $[a;\ b)$	—	полуоткрытые промежутки с концами a и b, $a < b$
$(a;\ +\infty)$, $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, $(-\infty;\ b)$	—	бесконечные промежутки
$(-\infty;\ +\infty)$	—	бесконечный промежуток, числовая прямая
$\vert x \vert$	—	модуль (абсолютная величина) числа x
$(a-\delta;\ a+\delta)$	—	δ-окрестность точки a
$[x]$	—	целая часть числа x
$\{x\}$	—	дробная часть числа x
$f\ (x)$	—	значение функции f в точке x
$D\ (f)$	—	область определения функции f
$E\ (f)$	—	область значений функции f
$\Delta\ x$	—	приращение аргумента x
$\Delta\ f\ (\ x_0)$, $\Delta\ f$	—	приращение функции f в точке x_0
$f'\ (x_0)$	—	производная функции f в точке x_0
sin	—	функция синус
cos	—	функция косинус
tg	—	функция тангенс
ctg	—	функция котангенс
arcsin	—	функция арксинус
arccos	—	функция арккосинус
arctg	—	функция арктангенс
arcctg	—	функция арккотангенс
$\sqrt{a}$	—	арифметический корень из числа a
$\sqrt[2k]{a}$	—	арифметический корень $2k$-го степени из числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)
$\sqrt[2k+1]{a}$	—	корень $(2k+1)$-го степени из числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)
$\log_a$	—	логарифм по основанию a
lg	—	десятичный логарифм (логарифм по основанию 10)
ln	—	натуральный логарифм (логарифм по основанию e)
$\max\limits_{[a;b]} f$	—	наибольшее значение функции f на отрезке $[a;\ b]$
$\min\limits_{[a;b]} f$	—	наименьшее значение функции f на отрезке $[a;\ b]$
$\int f(x)dx$	—	неопределенный интеграл функции f
$\int\limits_a^b f(x)dx$	—	определенный интеграл функции f в пределах от a до b

ПРЕДМЕТНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 3. **ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ**

Раздел 4. **ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ**

Раздел 5. **СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ, НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ СИСТЕМАХ**

Приложение. **КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**

Навчальне видання

Нелін Євген Петрович
Долгова Оксана Євгенівна

АЛГЕБРА
11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень,
профільний рівень

(Російською мовою)

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 70×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 32,76. Обл.-вид. арк. 25,3.
Тираж 3 000 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003