УДК 37016:51
DOI 10.24139/2519-2361/2025.02/37-45

В. В. Корольський
ORCID ID 0000-00D2-7409-4201
Д. І. Муравська
ORCID ID 0009-0001-6101-2692

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ ЧИСЛОВИМИ РЯДАМИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ РОЗДІЛУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ «РЯДИ»

Навчальна дисципліна «Математичний аналіз» має фундаментальне значення в підготовці вчителів на фізико-математичних факультетах вищих педагогічних закладів. Одним з основних розділів в його структурі є «числові ряди». Зміст розділу «числові ряди» в процесі вивчення має значне поле зв'язків з іншими розділами математичного аналізу. Тому поширення знань про «числові ряди» і подальше їх використання для підвищення компетентного рівня підготовки майбутніх бакалаврів спеціальності 014.04. Середня освіта (Математика) повинно відповідати сучасним вимогам.

Ці вимоги зазначені в проекті-концепції розвитку освіти України на період 2015-2025 років. Акцентується увага на розвитку інноваційного середовища, в якому здобувачі освіти отримують нові знання і набувають вміння їх застосовувати в майбутній професійній діяльності. В контексті сказаного досить актуально стають питання: 1 – поширення зв'язків між основними поняттями в межах окремих розділів математичного аналізу; 2 – створення нових задач для використання в процесі вивчення змісту математичного аналізу. Розглянемо ці питання відносно розділу «Числові ряди». При цьому будемо використовувати геометричну інтерпретацію числових рядів.

Ключові слова: *математична освіта, фахова освіта вчителів математики, зв'язки між числовими рядами, методи навчання.*

Постановка проблеми. В сучасних підручниках в теорії числових рядів особлива увага приділяється важливості (теоретичної і практичної) підготовці, що пов'язана з поняттям «середнє значення»: середнє арифметичне; середнє гармонічне, середнє геометричне [6].

Виклад основного матеріалу. Розглянемо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (1)$$

Якщо для будь-яких послідовних трьох членів ряда (1) a_n, a_{n+1}, a_{n+2} виконується умова: $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ (2), то ряд (1) називається рядом арифметичної прогресії і його члени пов'язані з поняттям «середнє арифметичне».

Якщо для будь-яких послідовних трьох членів ряда (1) виконується умова: $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}$ (3), то ряд (1) називається рядом геометричної прогресії і його члени пов'язані з поняттям «середнє геометричне».

Якщо для будь-яких послідовних трьох членів ряда (1) виконується умова: $\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$ (4), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ називається гармонічним і його члени пов'язані з поняттям «середнього гармонічного»:

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} = 2 \cdot \frac{a_n + a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+2}} \rightarrow$ знаходимо середнє гармонічне a_{n+1} між a_n і a_{n+2}:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} \ (5)$$

Досліджуючи зв'язки між числовими рядами варто відмітити, що «середнє геометричне» між двома числами – в той же час є «середнім геометричним» між «середнім арифметичним» і «середнім гармонічним». Доводиться це наступним чином: використаємо праві частини рівностей (2) і (5) у вигляді коренів.

Помножимо праві частини рівності (2) і (5):

$$\sqrt{\frac{a_n+a_{n+2}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}}=\sqrt{a_n\cdot a_{n+2}}\ (6)$$

З рівності (6) виходить, що корінь квадратний від добутку середніх арифметичних та гармонічних дорівнює середньому геометричному між членами рядів a_nі a_{n+2}.

Класичними прикладами числових рядів, пов'язаних з поняттями «середніх значень» є:

$\sum_{n=1}^{\infty}\quad [a+(n-1)d]$ (7) – ряд арифметичної прогресії, де "d" – різниця прогресії.

$\sum_{n=1}^{\infty}\quad bq^{n-1}$ (8) – ряд геометричної прогресії, де "q" – знаменник прогресії.

$\sum_{n=1}^{\infty}\quad \frac{1}{n}$ (9) – гармонічний ряд.

Покажемо, що для членів ряду (9) виконується умова (5), враховуючи, що:

$a_n=\frac{1}{n}, a_{n+1}=\frac{1}{n+1}, a_{n+2}=\frac{1}{n+2}$.

Відповідно до правої частини рівності (5) одержуємо:

$$\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+2}}{\frac{n+n+2}{n(n+2)}}=\frac{2}{2(n+1)}=\frac{1}{n+1}.$$

Умови виконуються, ряд (5) є гармонічним числовим рядом.

Далі розглянемо зв'язок між рядами (7) і (9). Спочатку розглянемо випадок ряду арифметичної прогресії (7) при умові, що в загальному члені ряду $a=1$ і $d=1$. Тобто ряд арифметичної прогресії має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\quad \big(1+(n-1)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\quad n\ (10)$$

Представимо графічно ряди (9) і (10) на рис.1

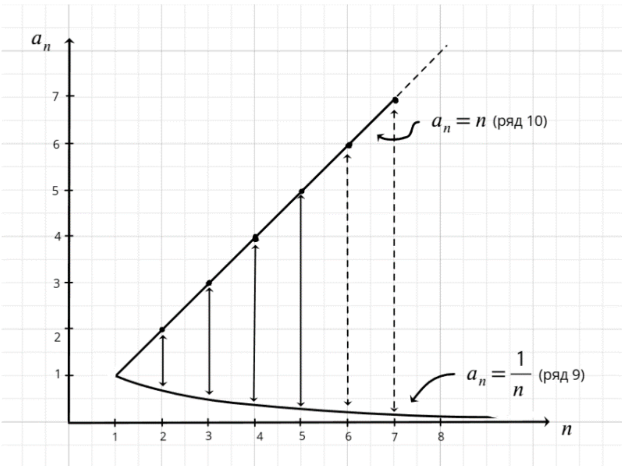

Рис. 1. Взаємно-обернена залежність між членами рядів (9) і (10)

Далі розглянемо узагальнений вид (7) ряду арифметичної прогресії, тобто для випадків коли $a=1$ і $d\neq 1$ і має значення, які належать підмножині додатних дійсних чисел множини R.

Доведемо, що ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty}\quad \frac{1}{1+(n-1)d}$, (11) є гармонічним рядом.

<u>Доведення:</u> Використаємо три послідовних перших члени ряду (11):

$$a_1=\frac{1}{1}=1;\ a_2=\frac{1}{1+d};\ a_3=\frac{1}{n+2d}$$

Перевіримо виконання умови «гармонічності» для чисел a_1, a_2, a_3. Тобто перевіримо виконання рівності:

$$a_2 = \frac{2 \cdot a_1 \cdot a_3}{a_1 + a_3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+2d}}{1 + \frac{1}{1+2d}} = \frac{\frac{2}{1+2d}}{\frac{2+2d}{1+2d}} = \frac{1}{1+d}.$$

Умова «гармонічності» для чисел a_1, a_2, a_3виконується. Покажемо, що ця умова має місце для будь-яких послідовних трьох членів ряду (11).

Нехай: $a_n = \frac{1}{1+(n-1)d}$; $a_{n+1} = \frac{1}{1+nd}$; $a_{n+2} = \frac{1}{1+(n+1)d}$. Обчислюємо вираз: $\frac{2a_n \cdot a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{1+(n-1)d} \cdot \frac{1}{1+(n+1)d}}{\frac{1}{1+(n-1)d} + \frac{1}{1+(n+1)d}} = \frac{2}{1+(n+1)d+1+(n-1)d} = \frac{2}{2+2nd} = \frac{1}{1+nd} = a_{n+1}, \forall n \in N.$

Доведено, що $\forall n \in N$ ряд (11) є гармонічним. Покажемо, що ряд (11) розбіжний $\forall d > 0$.

Для з'ясування сказаного використаємо відому з теорії числових рядів умову порівняння. Для цього записуємо загальний член ряду у вигляді:

$$a_n = \frac{1}{(1-d) + nd} = \frac{\frac{1}{d}}{\frac{1-d}{d} + n}$$

Розглянемо наступні випадки:

1) якщо $d = 1$, то одержується гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, розбіжність якого доводиться відомими різними методами математичного аналізу. Тому тотожній йому ряд (11) буде за ознакою порівняння також розбіжним;

2) якщо $d > 1$ то має місце нерівність:

$$\frac{1-d}{d} + n < n \to \frac{\frac{1}{d}}{\frac{1-d}{d} + n} \to \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) (12)$$

За ознакою порівняння з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ доводиться розбіжність ряду (11)

3) якщо $d < 1$, то знов має місце нерівність (12).

Таким чином доведено, що $\forall d > 0$ гармонічний ряд (11) є розбіжним рядом.

Розглянуте доведення розбіжності ряду (1) можна пропонувати для студентів у вигляді задач.

Задача 1. Довести, що ряд (1) розбіжний, якщо $d = 1$.

Задача 2. Довести, що ряд (1) розбіжний, якщо $d > 1$.

Задача 3. Довести, що ряд (1) розбіжний, якщо $d < 1$.

Задача 4. Дослідити розбіжність ряду (1) за допомогою відомої граничної ознаки порівняння числових рядів.

Коло задач при вивченні числових рядів може бути поширено і за рахунок іншого варіанту зв'язку між гармонічним рядом і рядом арифметичної прогресії.

Розглянемо гармонічний ряд у вигляді:

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \ldots, (13),$ де$\forall C_n$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ (14) є рядом геометричної прогресії.

В такому випадку можливі задачі:

Задача 5. Відомі члени ряду (2) C_1 і C_2. Знайдіть члени ряда C_3, C_4, C_5 і загальний член ряду C_n.

Задача 6. Відомі члени гармонічного ряду (2) C_1і C_2. Знайдіть ряд арифметичної прогресії, пов'язаний з заданими рядом (13).

Розглянемо приклади.

Задача 7. Відомі члени гармонічного ряду $C_1 = 3$, $C_2 = \frac{3}{2}$. Знайдіть C_3, C_4, C_5, C_6 та загальний член даного ряду.

За умовами задачі ряд гармонічний, тому відповідно до умови гармонічності записуємо рівність:

$C_2 = \frac{2C_1 \cdot C_3}{C_1 + C_3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot C_3}{3 + C_3} = \frac{3}{2} \rightarrow 6C_3 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} C_3 \rightarrow$ одержуємо $C_3 = 1$

Аналогічно знаходимо члени ряду: $C_4 = \frac{3}{4}, C_5 = \frac{3}{5}, C_6 = \frac{1}{2}$. Одержуємо гармонійний ряд, в якому відомі перші шість членів і для якого виконується рівність:

Таким чином загальний член одержаного гармонічного ряда $C_n = \frac{3}{n}$.

Але задачу можна розв'язати в інший спосіб, якщо використати показаний вище зв'язок між гармонічним рядом (11) і рядом арифметичної прогресії (13).

Для заданих членів гармонічного ряду $C_1 = 3 \; i \; C_2 = \frac{3}{2}$ відповідно до вказаного зв'язку членами ряда арифметичної прогресії будуть $a_1 = \frac{1}{3}$ і $a_2 = \frac{2}{3}$.

Відповідно до зв'язку між двома членами арифметичної прогресії за допомогою величин a_1 і a_2 знаходимо різницю прогресії: $d = a_2 - a_1 = \frac{2}{3} - -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Таким чином загальний член арифметичної прогресії має вигляд $a_n = \left[\frac{1}{3} + \frac{(n-1)1}{3}\right] = \frac{n}{3}$. Враховуючи, що $C_n = \frac{1}{a_n} = \frac{3}{n}$.

При вивченні числових рядів однією з основних задач є знаходження загального члена ряду за допомогою низки відомих (заданих) членів ряду. Розв'язання кожної такої задачі потребує застосування окремих логічних дій. Однак у випадку гармонічних рядів задача знаходження загального члена може бути розв'язана лише маючи відомі два перших члена ряда C_1 і C_2. В такому випадку загальний член ряду C_n може бути знайдений за формулою $C_n = \frac{C_1 \cdot C_2}{(n-1)C_1 - (n-2)C_2}$ (15).

Доведення формули (15) виконується за допомогою зв'язку між рядами гармонічної і арифметичної прогресії (13, 14). Відповідно до зв'язку для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \; C_n$ існує ряд арифметичної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \; \frac{1}{C_n}$.

За властивістю ряду арифметичної прогресії записуємо: $\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_2} = \cdots = \frac{1}{C_n} - \frac{1}{C_{n-1}} = d$ (1), де d – різниця арифметичної прогресії.

З рівності (1) переходимо до очевидної рівності:

$$\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_n} - \frac{1}{C_{n-1}} \rightarrow \frac{1}{C_n} = \frac{1}{C_1} + (n-1)\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{1}{C_1} + n\frac{1}{C_2} - n\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}$$

$$= \frac{n-1}{C_2} - \frac{n-2}{C_1} = \frac{(n-1)C_1 - (n-2)C_2}{C_1 \cdot C_2} \rightarrow$$

$$C_n = \frac{C_1 \cdot C_2}{(n-1)C_1 - (n-2)C_2} \quad (16)$$

За допомогою формули (15) можна формулювати множину задач по знаходженню різноманітних гармонічних рядів та рядів арифметичної прогресії і розв'язувати завдання дослідницької спрямованості.

Приклади задач.

<u>Задача 8.</u> Відомі члени гармонічного ряду $c_1 = 2, c_2 = \frac{3}{2}$. Знайти: загальний член ряду C_n; величини членів ряду C_7, C_8, C_9; загальний член ряду a_n арифметичної прогресії, яка має зв'язок з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \; \frac{1}{C_n}$; обчислити суму ряда арифметичної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \; \frac{1}{C_n}$ для: $n = 10; \; n = 20; \; n = 25$.

1. Загальний член ряду C_n знаходимо за формулою (4):

$C_n = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{(n-1)2 - (n-2) \cdot \frac{3}{2}} = \frac{3}{2n - 2 - \frac{3}{2}n + 3} = \frac{3}{\frac{1}{2}n + 1} = \frac{6}{n+2}$ (1)

2. Використовуючи формулу (1) обчислюємо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n+2}$: $C_7 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $C_8 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $C_9 = \frac{6}{11}$.

3. Знаходимо загальний член арифметичної прогресії $a_n = \frac{1}{C_n} = \frac{n+2}{6}$.

Прогресія має вигляд:

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 1 + \frac{7}{6} + \cdots + (n-1)d + \cdots$, де $d = \frac{1}{6}$. Ряд арифметичної прогресії можна представити у вигляді: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{(n-1)1}{6}\right] \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6}$

4. $S_{10} = \frac{10\left(\frac{1}{2}+2\right)}{2} = \frac{25}{2}$;

$$S_{20} = \frac{20\left(\frac{1}{2} + \frac{11}{3}\right)}{2} = 10\left(\frac{25}{6}\right) = \frac{125}{3};$$

$$S_{25} = \frac{25\left(\frac{1}{2} + \frac{27}{6}\right)}{2} = \frac{25\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right)}{2} = \frac{125}{2};$$

Примітка. Ряд $C_n = \frac{C_1 \cdot C_2}{(n-1)C_1 - (n-2)C_2}$ можна вважати узагальненою формулою гармонічних рядів.

Далі розглянемо геометричну модель візуалізації процесу зміни членів рядів гармонічного та арифметичної прогресії наступного виду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Використаємо модель на (рис. 2)

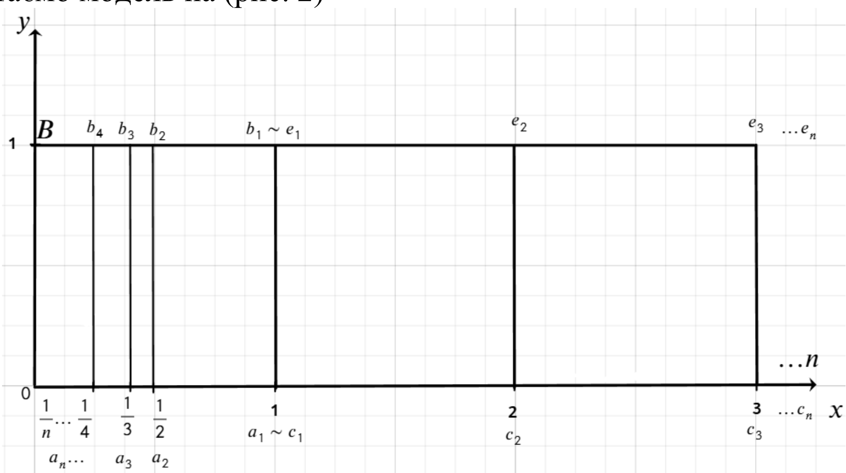

Рис. 2. Послідовності площ прямокутників: $\{S_{Oa_nb_nB}\}_{n=1}^{\infty}$; $\{S_{Oc_ne_nB}\}_{n=1}^{\infty}$;

Візуально спостерігаємо змінність членів вказаних послідовностей:

$\{S_{Oa_nb_nB}\}_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ (I) $\quad (I) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

$\{S_{Oc_ne_nB}\}_{n=1}^{\infty} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$(II) $\quad (II) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n$

Маємо приклад квадратурної інтерпретації величин членів гармонічного ряду (1) і ряду арифметичної прогресії.

Але ця геометрична інтерпретація для учнів може бути не зрозумілою (парадоксальною). Дійсно, зрозуміло, що сума ряда площ квадратів з значенням $S_n = 1$ $\forall n \in N$, тому коли $n \to \infty$, то сума площ S буде нескінченною, тому, що:

$S = S_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot 1 = \infty$ (17).

Але не зрозумілим буде, чому сума площ S_n, розташованих в межах одного квадрата з площею $S = 1$ також є нескінченною?

Тому тут потрібно дати найбільш доступний варіант доведення. Спочатку варто виконати фрагментацію площ прямокутників послідовності $\{Oa_nb_nB\}_{n=1}^{\infty}$ у вигляді (рис. 3).

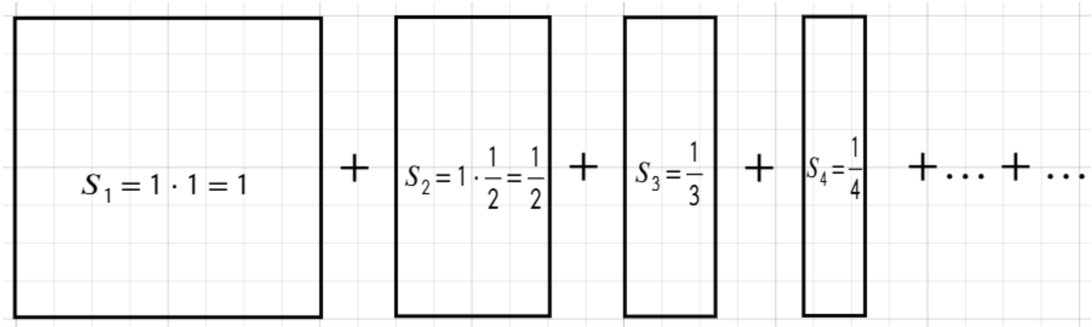

Рис. 3. Геометрична інтерпретація членів гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Далі виконуємо наступний ланцюжок дій:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{33} + \frac{1}{34} + \cdots + \frac{1}{64}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + m\frac{1}{2} + \cdots \to S_n = 1 + \frac{1}{2} + m\frac{1}{2} + S_{n-m} \to S = \left[1 + \frac{1}{2} + m\frac{1}{2} + S_{n-m}\right] = \infty$

Зв'язок між рядами: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} n$ можна спостерігати на моделі, представленій на рис. 4.

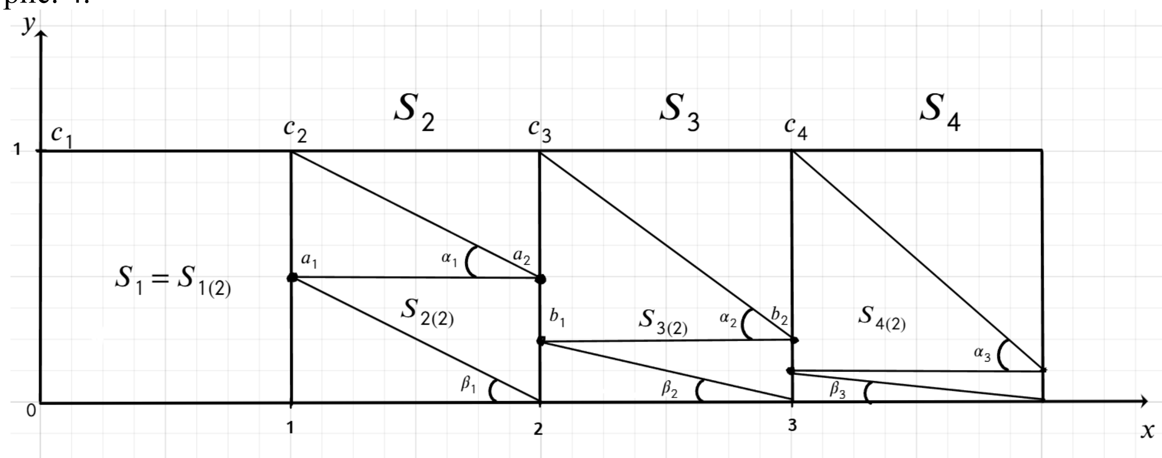

Рис. 4. $S_1' = S_2' = \cdots = S_n = 1$ **для ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} n$

$S_{1(2)} = 1; S_{2(2)} = \frac{1}{2};\ S_{3(2)} = \frac{1}{3}; \ldots; S_{n(n)} = \frac{1}{n}$ для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

За допомогою моделі одержується ряд виду:

$$a_n = S_n - S_{n(2)} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} \ldots (18)$$

Зрозуміло, що $\frac{n}{n+1} = 1$, тому ряд (18) і гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ можна сумісно розглядати у вигляді точкової геометричної інтерпретації рис.5

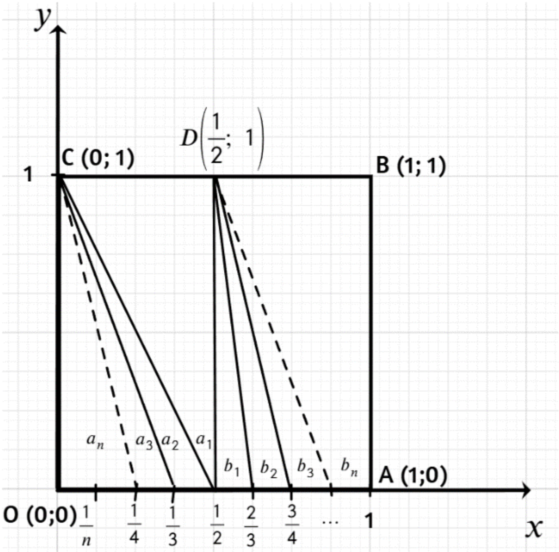

Рис. 5 Точкова інтерпритація рядів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **і** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

На рис. 5. Абсциси т.т. a_n відповідають величинам членів гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$; абсциси т.т. b_n відповідають величинам ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Якщо використати арифметичні дії над загальними членами даних рядів, то можна одержати наступні ряди:

1) $a_n + b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1 \to \forall n \in N$ сума відрізків: $|0a_n| + |0b_n| = 1$.

2) $b_n - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow$маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \cdots$

3) $b_n \cdot a_n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ гармонічний ряд, в якому $a_1 = \frac{1}{2}$

4) $b_n : a_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{n+1} = n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n -$
ряд арифметичної прогресії з різницею $d = 1$.

Використовуючи моделі на рис. (4) і (5) можна одержати інші **числові шляхи розв'язання** наступних задачі:

Модель (рис. 4).

<u>Задача 1.</u> Скласти і дослідити ряд величин діагоналей $|\, a_{n(n+1)} \,|$ **послідовності прямокутників** $\{a_n n(n+1) b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 2.</u> Скласти і дослідити ряд величин діагоналей $|C_{n+1} b_n|$ послідовності прямокутників $\{a_n b_n c_{n+2} c_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 3.</u> Скласти і дослідити ряди: $\sum_1^{\infty} \alpha_n;\ \sum_1^{\infty} \beta_n;$

Модель (рис. 5).

<u>Задача 1.</u> Скласти і дослідити ряд величини послідовності відрізків $\{a_n C\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 2.</u> Скласти і дослідити ряд величини послідовності відрізків $\{C b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 3.</u> Скласти і дослідити ряд довжин послідовності відрізків $\{a_n a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 4.</u> Скласти і дослідити ряд довжин послідовності відрізків $\{b_n b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 5.</u> Скласти і дослідити ряд площ послідовності прямокутних трикутників $\{\Delta O C a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 6.</u> Скласти і дослідити ряд величин **площ послідовності трикутників** $\{\Delta b_n D b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Задача 7.</u> Скласти і дослідити **ряди тригонометричних функцій послідовностей кутів**:

а) $\{< a_n C a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

б) $\{< C a_n O\}_{n=1}^{\infty}$

в) $\{< b_n D b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

г) $\{< D b_{n+1} b_n\}_{n=1}^{\infty}$

Список задач може бути продовжений.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Використання розглянутих зв'язків між числовими рядами сприяє систематизації знань при вивченні розділу «Числові ряди»; застування геометричних моделей дозволяє реалізовувати дидактичний принцип «візуалізації опанованих математичних понять»; геометрична інтерпретація членів числових рядів дає можливість формулювати дослідницькі задачі при вивченні числових рядів та числових послідовностей і використовувати їх розв'язання в якості курсових та магістерських робіт в процесі підготовки бакалаврів спеціальності «Математика». Розробка геометричних моделей студентами сприяє розвитку їх логічних та абстрактних компетентностей та дозволяє самостійно формулювати умови задач і демонструвати вміння самостійно їх розв'язувати

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Дзигарська, Н. С., Корольський, В. В., Михайлова, Я. А., Тураєва, О. В. (2023). Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовності» учнями ліцеїв. *Актуальні питання математичної освіти*, 22. (Dzyharska, N. S., Korolskyi, V. V., Mykhailova, Y. A., Turaieva, O. V. (2023). Application of geometric models in studying the topic "Numerical sequences" by lyceum students. *Topical issues of mathematical education*, 22).
2. Корольський, В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. *Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник*, редакційна колегія: С. О. Семеріков [та інші], Том XV, 57–63. (Korolskyi, V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. *Newest computer technologies: scientific-methodological collection*, editorial board: S. O. Semerikov [et al.], Volume XV, 57–63).
3. Корольський, В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. *Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник*, редакційна колегія: С. О. Семеріков [та інші], Том XVI, 59–66. (Korolskyi, V. V. (2018). Geometric interpretation of the numerical series of an arithmetic progression. *Newest computer technologies: scientific-methodological collection*, editorial board: S. O. Semerikov [et al.], Volume XVI, 59–66).
4. Корольський, В. В., Римар, А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з державною символікою. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*, 2 (20), 29–38. (Korolskyi, V. V., Rymar, A. I. (2022). Geometric interpretation of numerical series related to state symbols. *Topical issues of science and mathematical education*, 2 (20), 29–38).
5. Корольський, В. В., Тураєва, О. В. (2023). Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \quad 1\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \quad 1\frac{n}{n+1}$. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1 (21), 46–54. (Korolskyi V. V., Turaieva O. V. (2023). Generation and research of numerical series using a geometric model and combinations of series $\sum_{n=1}^{\infty} \quad 1\frac{1}{n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \quad 1\frac{n}{n+1}$. *Topical issues of science and mathematical education*, 1 (21), 46–54).
6. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. (2018). Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. *Фізико-математична освіта*, 4(18), 81–89. (Korolskyi V. V., Shokaliuk S. V., Melnychenko Yu. A. 2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. *Physical and mathematical education*, Issue 4(18), 81–89).
7. Проект концепції розвитку освіти України на період 2015–2025 років. (2014). URL: http://www.naiau.kiev.ua/files/zakon_ukr/proek-rozv-osvitu.pdf (Draft Concept of Education Development in Ukraine for the period 2015–2025. (2014). URL: http://www.naiau.kiev.ua/files/zakon_ukr/proek-rozv-osvitu.pdf).
8. Шкіль М. І. (1981). Математичний аналіз, ч II: Посібник для пед. інститутів. Київ. (Shkil M. I. (1981). Mathematical analysis, part II: Handbook for pedagogical institutes. Kyiv).

Korolskiy V. V., Muravska D. I. Connections Between Numerical Series and Their Application in the Study of the "Series" Section of Mathematical Analysis.

The academic discipline of "Mathematical Analysis" is of fundamental importance in the training of teachers at the physics and mathematics faculties of higher pedagogical institutions.

"Numerical Series" is one of the main sections in its structure. The content of the "Numerical Series" section, during the learning process, has a significant field of connections with other sections of mathematical analysis. Therefore, the expansion of knowledge about "numerical series" and their further use to enhance the competence level of future bachelors in specialty 014.04. Secondary Education (Mathematics) must comply with modern requirements.

These requirements are outlined in the draft concept for the development of education in Ukraine for the period 2015–2025. Attention is focused on the development of an innovative environment where students acquire new knowledge and gain the skills to apply it in their future professional activities. In the context of the foregoing, the following questions become quite relevant: 1 – expanding the connections between basic concepts within individual sections of mathematical analysis; 2 – creating new problems for use in the process of studying the content of mathematical analysis. We will consider these issues concerning the "Numerical Series" section. In doing so, we will use the geometric interpretation of numerical series.

Key words: *mathematical education, professional education of mathematics teachers, connections between numerical series, teaching methods.*

Подано до друку 27.10.2025
Прийнято до друку 03.11.2025

УДК 373.5.016:[51-043.5]
DOI 10.24139/2519-2361/2025.02/45-50

С.Є. Яценко
ORCID ID 0009-0009-4274-1177
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова
А.М. Сергійчук
ORCID ID 0009-0000-1986-558X
ліцей «Престиж»

ІНТЕГРАЦІЯ ЕЛЕМЕНТІВ КРИПТОГРАФІЇ В ПРОЦЕС НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІН МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТНЬОЇ ГАЛУЗІ УЧНІВ 5–6 КЛАСІВ

У статті обґрунтовано доцільність інтеграції елементів криптографії у процес навчання математики учнів 5–6 класів як ефективного засобу підвищення інтересу учнів у навчанні, сприяння розвитку логічного та формування алгоритмічного мислення. Мета дослідження полягає у теоретичному обґрунтуванні та практичній реалізації методики використання криптографічних завдань у навчанні математики для підвищення мотивації до опанування математичних понять, формування пізнавальної активності та стійкого інтересу до математики. У межах дослідження розроблено методику застосування елементів криптографії під час вивчення тем, пов'язаних із числами, діями над ними, послідовностями тощо. Запропоновано навчально-методичні матеріали, що передбачають шифрування та розшифрування навчальних математичних задач і текстів різного рівня складності. У процесі дослідження застосовано комплекс взаємопов'язаних методів: теоретичні (аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури, узагальнення, систематизація, моделювання методики навчання) та емпіричні (спостереження за навчально-пізнавальною діяльністю учнів, педагогічний експеримент, аналіз результатів навчання). Показано, що впровадження елементів криптографії сприяє розвитку в учнів навичок логічного та алгоритмічного мислення, вмінь аналізувати, кодувати й декодувати інформацію, підвищує інтерес до розв'язування нестандартних задач, стимулює творчу активність і пізнавальну самостійність. Розроблена методика може бути використана вчителями математики для збагачення змісту навчального матеріалу інноваційними компонентами, створення інтегрованих уроків математики та інформатики, а також у професійній підготовці майбутніх педагогів до реалізації міжпредметних технологій навчання. Отримані результати розширюють уявлення про можливості практичного застосування криптографії у шкільній освіті та відкривають перспективи подальших досліджень щодо інтеграції елементів інформаційної безпеки в освітній процес.