УДК 317.512
DOI 10.24139/2519-2361/2025.02/56-66

Л. В. Ізюмченко
ORCID ID 0000-0001-8656-2220
Ліцей «Престиж»
А. П. Ткачевська
ORCID ID 0009-0009-0170-3422
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського»

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЯК КЛЮЧОВИЙ ЕЛЕМЕНТ ФОРМУВАННЯ КРИТИЧНОСТІ МИСЛЕННЯ

У сучасному світі ми постійно стикаємося з ситуаціями, що передбачають вибір серед декількох можливих варіантів. Кожна з них передбачає аналіз умов, пошук альтернатив, оцінку можливих наслідків і зрештою вибір оптимального варіанту. Отже навички критичного, гнучкого та нестандартного мислення стають необхідними у будь-якій сфері життя, а тому доцільно ще зі школи сприяти їх формуванню. Гнучкість мислення особливо добре розвивається через вивчення геометрії, а у старших класах – стереометрії, адже значна теоретична база, відома школяру, широкий спектр методів та підходів зумовлює можливість розв'язати одну й ту саму задачу багатьма способами, подивитися на неї з усіх боків, побачити глибинні властивості, застосувати знання з різних розділів математики та забезпечити вищу ймовірність правильності отриманої відповіді. У статті наведено приклад задачі, яка пропонувалася до розв'язання учням 11-го класу на контрольній роботі ІІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України та її узагальнена версія, наведено п'ять різних способів її розв'язання, а саме: з використанням методу проєкцій у поєднанні з теоремами косинусів і синусів, методу площ, тригонометричних співвідношень, теореми косинусів для тригранного кута, допоміжних побудов з використанням подібних трикутників та методу координат, окремо розглянуто можливість використання методів векторної алгебри та матриці Грама, що може бути корисним для студентів математичних спеціальностей. Зроблено акцент на дослідженні впливу числових даних на геометричну конфігурацію і відповідно – розв'язання задачі. Окрема увага звертається на те, що розв'язання однієї стереометричної задачі декількома альтернативними способами може бути темою науково-дослідницької роботи школяра, науковим проєктом групи учнів профільного класу або темою заняття математичного гуртка та відповідно розглянуті методичні особливості організації освітнього процесу при кожному з зазначених варіантів.

***Ключові слова**: стереометрія, кут між площинами, теорема косинусів для тригранного кута, метод координат, теореми косинусів і синусів, метод площ, тригонометричні співвідношення, критичне мислення.*

Постановка проблеми. У повсякденному житті ми постійно обираємо серед декількох варіантів дій: спілкуватися онлайн чи особисто, скористатися громадським транспортом або велосипедом, отримати дохід працюючи чи заощаджуючи. Кожна ситуація передбачає аналіз альтернатив, оцінку умов, ресурсів і наслідків. Цього варто навчати дітей ще зі школи, бо там закладаються основи уміння працювати з інформацією й осмислювати її критично. Особливо широкі можливості для розвитку гнучкості мислення дає геометрія: у стереометричних задачах значна теоретична база дозволяє будувати розв'язання різними способами, використовувати метод площ, тригонометричні співвідношення, метод координат та інші. Це дозволяє учням побачити, як різні теоретичні знання можуть бути застосовані для знаходження оптимального розв'язання, а також дає можливість провести самоперевірку, що підвищує впевненість у правильності відповіді.

Розв'язання однієї задачі декількома способами може стати основою для науково-дослідницької роботи школяра у Малій академії наук України або наукового проєкту групи учнів профільного класу. Окрім цього, це сприяє гнучкості мислення, глибокому розумінню предмета та умінню обирати найефективніший метод залежно від даних задачі. Надалі це вміння стане корисним у будь-якій сфері життя.

У цій статті ми розглянемо геометричну задачу, яку можна розв'язати різними способами. Такий приклад буде корисний як учням старших класів, що вивчають математику на профільному рівні, студентам, які навчаються за математичними спеціальностями, так і вчителям геометрії.

Аналіз актуальних досліджень. Науковці, методисти і педагоги-практики досліджували різні аспекти математичної підготовки учнів і студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вишів: формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня у процесі навчання математики досліджували Г.П. Бевз [1], М.І. Бурда [4], О.І. Скафа, З.І. Слєпкань, Т.М. Хмара, О.С. Чашечникова та ін.; наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладах вищої освіти вивчали І.А. Акуленко [10], Ю.В. Ботузова [2], Н.Г. Владімірова, К.М. Гнезділова, А.І. Кузьмінський, В.О. Швець та ін.; інноваційну діяльність при профільному вивченні математики та геометричну складову нестандартних задач розглядали І.М. Богатирьова, О.П. Вашуленко, О.І. Матяш, Р.Я. Ріжняк [3], З.О. Сердюк, Н.А. Тарасенкова та ін.; психолого-педагогічні передумови застосування геометричних знань до розв'язування задач та роль системи задач у навчанні геометрії вивчали В.Г. Бевз, І.Г. Ленчук [12], І.В. Лов'янова, О.І. Матяш [13], Є.П. Нелін, Л.О. Палій [14], М.В. Працьовитий та ін.; проблему використання ІКТ під час навчання стереометрії досліджували науковці Ю.В. Ботузова, О.В. Вітюк, Ю.В. Горошко, М.І. Жалдак, О.П. Зеленяк [6], Н.В. Морзе, С.А. Раков, С.О. Семеріков та ін. Організацію навчання математики у старшій профільній школі досліджували І.А. Акуленко, І.М. Богатирьова, А.І. Кузьмінський [10], М.В. Працьовитий [12], З.О. Сердюк та ін.; необхідність використання диференційованого підходу при вивченні стереометрії обґрунтовували Г.П. Бевз [1], М.І. Бурда [4], О.І. Матяш, З.І. Слєпкань, О.С. Чашечникова та ін. Окремі аспекти реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії розглядали О.М. Коломієць, А.В. Прус, З.О. Сердюк, Н.А. Тарасенкова, В.О. Швець та ін. Відшуканню різних способів розв'язування геометричних задач присвячені ти Бевз В.Г., Зеленяка О.П. [6], Ігнатенко М.Я. [7], Істера О.С., Коломієць О.М., Ткачевської А.П. [9] та ін.; критичності мислення і важливості перевірки отриманих результатів та оцінці відповідності отриманих розв'язків стартовій математичній моделі присвячені роботи Голодюк Л.С., Ізюмченко Л.В.[8], Кушніра В.А.[11], Філєра З.Ю. і ін.

Попри велику кількість праць, присвячених організації навчального процесу учнів, у сучасних науково-методичних джерелах недостатньо висвітлена геометрична складова роботи з учнями, які опановують математику на профільному рівні, у тому числі і питання розв'язування задач різними способами, особливо при вивченні стереометрії, та їхній вплив на розвиток критичного мислення, природних здібностей та покликань учнів. Саме тому ця тематика залишається актуальною та потребує глибшого вивчення.

Мета статті полягає в порівняльному аналізі різних способів розв'язання стереометричної задачі, що сприятиме формуванню гнучкості мислення, розвитку вміння шукати альтернативні рішення, а також стане поштовхом до особистісного зростання школярів.

Завдання: розглянути методичні аспекти роботи з учнями фізико-математичних класів у позаурочний час на прикладі пошуку різних способів розв'язання стереометричної задачі. Для реалізації поставленої мети використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, порівняння), праксиметричні (вивчення педагогічного досвіду вчителів математики для його аналізу й узагальнення), емпіричні (педагогічне спостереження, аналіз навчального процесу) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу, яка пропонувалася до розв'язання учням 11-го класу на контрольній роботі III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України (автор Плахотник В.В. [5]).

Задача 1. Обчисліть об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $AB = 13$, $AC = 5$, $BC = 12$, $AD = 15$, $BD = 14$, $CD = 16$.

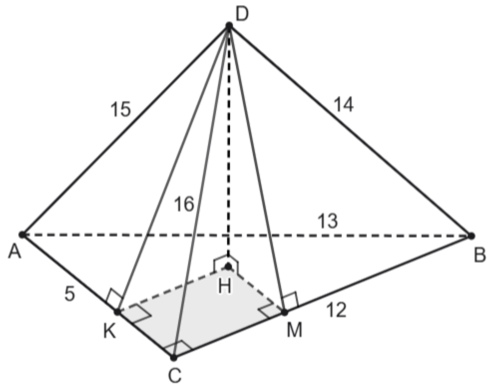

Рис. 1. Ілюстрація до задачі 1

Наведемо один із способів розв'язання задачі. Використовуючи наслідок з теореми косинусів, встановлюємо, що три трикутники, які утворюють поверхню піраміди є гострокутними, а один – прямокутний, бо $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $13^2 = 5^2 + 12^2$, ΔACB – прямокутний.

Виконуючи рисунок до задачі, доцільно одразу проговорити важливий момент: чому жодне із ребер не є висотою піраміди? (якби якесь ребро, наприклад CD, було висотою, воно було б перпендикулярне до площини ABC, і тому перпендикулярне до ребер AC і BC, а тоді щонайменше два трикутники, які утворюють поверхню піраміди, були б прямокутними, а це не так). Використаємо отриману інформацію. Нехай DH– висота піраміди. Розглянемо грані ACD і DCB: позначимо DK – висота грані ACD: $DK \perp AC$; DM – висота грані DCB: $DM \perp CB$. Оскільки ці грані є гострокутними трикутниками, то точки K, M є внутрішніми точками відрізків AC, CB (рис.1). Так як усі ребра піраміди відомі, то для кожної грані ми можемо обчислити площу, висоти і інше за потреби:

ΔACD: сторони $5, 15, 16$ (од.), периметр $P = 36$ од., півпериметр $p = 18$ од., площа $S_{\Delta ACD} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13} = 6\sqrt{39}$ (кв. од.); обчислимо висоту грані $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DK \Rightarrow DK = \frac{2 \cdot 6\sqrt{39}}{5} = \frac{12\sqrt{39}}{5}$ (од.); з ΔDCK: $CK = \sqrt{DC^2 - DK^2} = \sqrt{16^2 - \frac{144 \cdot 39}{25}} = \frac{28}{5}$ (од.).

Аналогічно, з ΔCDB: сторони $12, 14, 16$ (од.), півпериметр $p = 21$ од., площа $S_{\Delta CDB} = \sqrt{21 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} = \sqrt{7 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 15} = 21\sqrt{15}$ (кв. од.); висота $DM = \frac{2S_{\Delta CDB}}{CB} = \frac{2 \cdot 21\sqrt{15}}{12} = \frac{7\sqrt{15}}{2}$ (од.). З ΔDCM: $CM = \sqrt{16^2 - \left(\frac{7\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{17}{2}$ (од.).

Оскільки $DK \perp AC$; $DH \perp ABC$; $AC \subset ABC$, HK – проєкція DK на ABC, а тому за теоремою про три перпендикуляри $HK \perp AC$. Аналогічно $HM \perp CB$; $KHMC$ – прямокутник, а тому $HM = CK = \frac{28}{5}$ (од.).

З ΔDHM: $\angle H = 90°$; $DH = \sqrt{DM^2 - HM^2}$; $DH = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{28}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{15239}{100}} = \frac{7\sqrt{311}}{10}$ (од.). А тоді об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot DH$ з урахуванням площі основи $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ (кв.од.) дорівнює $V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \frac{7\sqrt{311}}{10} = 7\sqrt{311}$ (куб. од.).

Відповідь: $V = 7\sqrt{311}$ (куб. од.).

Для розв'язання цієї задачі надзвичайно ефективним є також метод координат.

Якщо ми працюємо з обдарованими учнями під час засідання математичного гуртка (чи пропрацьовуємо з ними ідеї дослідницького проєкту), доцільно одразу звернути увагу на те, що нам дуже допомогло при розв'язанні цієї задачі, а саме – той факт, що один із трикутників (основа ABC) є прямокутним, а тому в основі утворився прямокутник $KHMC$. А як зміниться розв'язання задачі, якщо цей трикутник не був би прямокутним і взагалі – усі трикутники були, наприклад, гострокутними? Так з'являється узагальнення задачі 1 – задача 2.

Задача 2. Обчисліть об'єм трикутної піраміди $SABC$, якщо $AB = 36$, $AC = 32$, $BC = 28$, $SA = 29$, $SB = 25$, $SC = 17$.

<u>1 спосіб</u>. Нехай S – вершина піраміди, ABC – її основа, SH – висота, проведена до основи. Проаналізуємо умову задачі: у піраміді відомі усі ребра, а тому відомі сторони кожного із чотирьох трикутників, які утворюють поверхню піраміди. Визначимо вид кожного трикутника: використовуючи наслідок із теореми косинусів встановлюємо, що кожен із чотирьох трикутників є гострокутним ($32^2+28^2>36^2$, бо $8^2+7^2>9^2$, а тому найбільший кут основи є гострим, аналогічно і для інших трикутників). Враховуючи визначеність трикутників, у кожному з них ми можемо за потреби знайти косинуси та інші тригонометричні функції кутів, площі та висоти цих трикутників і інші необхідні елементи. Нехай SK і SM – висоти граней SAB і SBC, відповідно, див. рис. 2.

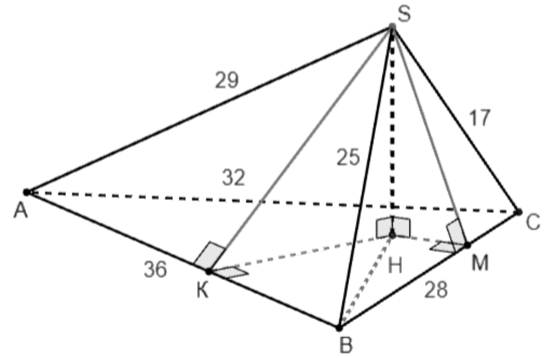

Рис. 2. Ілюстрація до першого способу розв'язання задачі 2

Розглянемо основу $\Delta\, ABC$: $cosB=\frac{36^2+28^2-32^2}{2\cdot 36\cdot 28}=\frac{11}{21}\Rightarrow sinB=\frac{8\sqrt{5}}{21}$; площа за формулою Герона $p=48$ (од.), $S_{\text{осн.}}=\sqrt{48\cdot 12\cdot 16\cdot 20}=192\sqrt{5}$ (кв. од.) або $S_{\text{осн.}}=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 28\cdot\frac{8\sqrt{5}}{21}=192\sqrt{5}$ (кв. од.).

А тоді задача зводиться до відшукання висоти піраміди SH, для цього є рівнозначні можливості розглянути прямокутні трикутники SKH (чи SMH) або SBH, для чого досить знайти інші елементи одного з цих трикутників.

З $\Delta\, SAB$ визначимо його висоту, використовуючи метод площ:

$p=40(\text{од.})\,; S_\Delta=360\ (\text{кв. од.})\,;\ SK=\frac{2\cdot 360}{36}=20$ (од.).

З $\Delta\, SKB$: $KB=\sqrt{25^2-20^2}=15$ (од.)

Аналогічно з $\Delta\, SBC$: $p=35(\text{од.});\ S_\Delta=210\ (\text{кв. од.});\ SM=\frac{2\cdot 210}{28}=15\ (\text{од.})$; з $\Delta\, SBM$: $BM=\sqrt{25^2-15^2}=20$ (од.).

Розглянемо чотирикутник $KBMH$, протилежні кути $\angle K, \angle M$ якого прямі (в сумі дають 180°), а тому навколо нього можна описати коло (рис. 3). З $\Delta\, KBM$ (відомі дві сторони і кут між ними) за теоремою косинусів

$KM^2=15^2+20^2-2\cdot 15\cdot 20\cdot\frac{11}{21}=\frac{2175}{7}$ (од.).

А тоді за наслідком з теореми синусів визначимо діаметр кола BH, описаного навколо ΔKBM (чотирикутника $KBMH$): $2R=\frac{KM}{sinB}=\sqrt{\frac{2175}{7}}:\frac{8\sqrt{5}}{21}=\frac{3\sqrt{3045}}{8}=BH.$

Чи можна інакше знайти BH? Запропонуємо такий спосіб: позначимо $\angle KBH=\alpha, \angle MBH=\beta,\ BH=d$ (рис. 3).

Тоді $cos\alpha=\frac{15}{d}; sin\alpha=\frac{\sqrt{d^2-225}}{d},\ \ cos\beta=\frac{20}{d};\ sin\beta=\frac{\sqrt{d^2-400}}{d}.\ \ cosKBM=cosABC=\frac{11}{21};\ \angle KBM=\alpha+\beta.$ Скористаємося формулою косинуса суми $cos\,cos\,(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$, отримаємо рівняння

$\frac{15}{d}\cdot\frac{20}{d}-\frac{\sqrt{d^2-225}}{d}\cdot\frac{\sqrt{d^2-400}}{d}=\frac{11}{21}$, звідки $\frac{300}{d^2}-\frac{11}{21}=\frac{\sqrt{d^2-225}\cdot\sqrt{d^2-400}}{d^2}$ або

$6300-11d^2=21\sqrt{d^2-225}\cdot\sqrt{d^2-400},\ d^2\in\left(400;\frac{6300}{11}\right).$

Рівняння має єдиний додатний розв'язок, що задовольняє цим умовам:
$121d^4 - 138600d^2 + 39690000 = 441d^4 - 275625d^2 + 39690000;$
$320d^4 - 137025d^2 = 0,\ 320d^2 \cdot \left(d^2 - \frac{27405}{64}\right) = 0,\ d = \sqrt{\frac{27405}{64}} = \frac{3\sqrt{3045}}{8}.$
Маємо той же результат для $BH = d$.

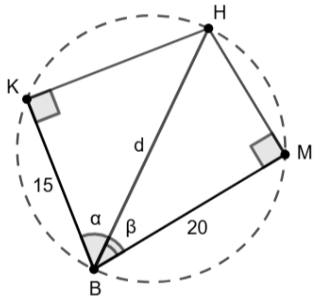

Рис. 3. Ілюстрація до альтернативного пошуку *BH*

Це в свою чергу дозволяє знайти висоту піраміди з прямокутного трикутника $\Delta\, SBH$: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{3\sqrt{3045}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{12595}}{8}$ (од.). Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot 192\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{12595}}{8} = 40\sqrt{2519} \approx 2007{,}6$ (куб. од.)

2 спосіб. Використаємо позначення і обчислення із першого способу розв'язання цієї задачі: SK – висота грані SAB, $SK = 20$ (од.), $KB = 15$ (од.); площа основи $S_{\Delta ABC} = 192\sqrt{5}$ (кв. од.), косинус кута $cosB = \frac{11}{21}$.

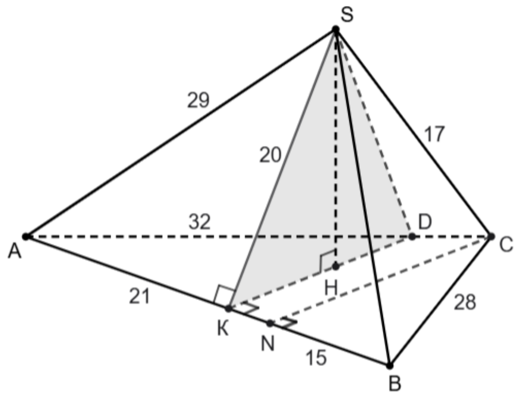

Рис. 4. Ілюстрація до другого способу розв'язання задачі 2

Проведемо в основі $\Delta\, ABC$ висоту CN, маємо
$CN = \frac{2S}{AB} = \frac{2\cdot 192\sqrt{5}}{36} = \frac{32}{3}\sqrt{5}$ (од.); $BN = BC \cdot cosB = 28 \cdot \frac{11}{21} = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$ (од.).

Тоді $KH \parallel CN$, як два перпендикуляри до прямої AB у площині ABC, нехай точка D – точка перетину KH з AC. Висоту піраміди спробуємо знайти із ΔSKD, для чого знайдемо його елементи (сторони та кути).

Розглянемо відрізок AB: $AK = AB - KB = 36 - 15 = 21(\text{од.})$, $AN = AB - NB = 36 - 14\frac{2}{3} = 21\frac{1}{3}$ (од.). Це ще раз дає нам змогу уточнити взаємне положення точок A, K, N, B на прямій AB, звідки маємо підтвердження того факту, що точка D є внутрішньою точкою відрізка AC.

З подібності прямокутних трикутників $\Delta AKD \sim \Delta ANC$ (рис. 4, 5) з коефіцієнтом подібності $k = \frac{AK}{AN} = \frac{21}{21\frac{1}{3}} = \frac{63}{64}$ маємо $KD = \frac{63}{64}CN = \frac{63}{64} \cdot \frac{32}{3}\sqrt{5} = \frac{21}{2}\sqrt{5}(\text{од.})$, $AD = \frac{63}{64}AC = \frac{63}{64} \cdot 32 = \frac{63}{2}(\text{од.})$.

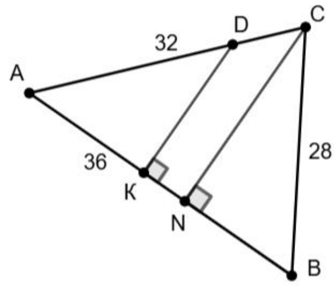

Рис. 5. Ілюстрація до розташування точок K, N на відрізку AB

Таким чином, у трикутнику SKD ми визначили дві сторони, щоб знайти третю сторону SD, чого буде повністю достатньо для знаходження усіх елементів цього трикутника, розглянемо $\Delta\, SAC$, у площині якого лежить SD. Двічі застосуємо теорему косинусів:

$cosSAC = \frac{AS^2+AC^2-SC^2}{2\cdot AS\cdot AC} = \frac{29^2+32^2-17^2}{2\cdot 29\cdot 32} = \frac{197}{232}$,

з $\Delta\, SAD$: $SD^2 = 29^2 + \left(\frac{63}{2}\right)^2 - 2\cdot 29\cdot \frac{63}{2}\cdot \frac{197}{232} = \frac{2255}{8}$, $SD = \frac{\sqrt{4510}}{4}$ (од.).

Тепер задача зводиться до відшукання висоти SH трикутника SKD, у якого відомі сторони, формула Герона незручна, тоді спочатку використаємо теорему косинусів: з $\Delta\, SKD$: $cosK = \frac{20^2+\left(\frac{21}{2}\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{4510}}{4}\right)^2}{2\cdot 20\cdot \frac{21}{2}\sqrt{5}} = \frac{51\sqrt{5}}{160}$, що дозволяє отримати синус кута $sinK = \sqrt{1-cos^2K} = \sqrt{1-\left(\frac{51\sqrt{5}}{160}\right)^2} = \frac{\sqrt{12595}}{160}$, а тоді з прямокутного ΔSHK висота піраміди $SH = SK\cdot sinK = 20\cdot \frac{\sqrt{12595}}{160} = \frac{\sqrt{12595}}{8}$ (од.), а об'єм $V = \frac{1}{3}\cdot 192\sqrt{5}\cdot \frac{\sqrt{12595}}{8} = 40\sqrt{2519} \approx 2007{,}6$ (куб. од.).

<u>**3 спосіб**</u>**.** Нагадаємо теорему косинусів для тригранного кута (рис. 6).

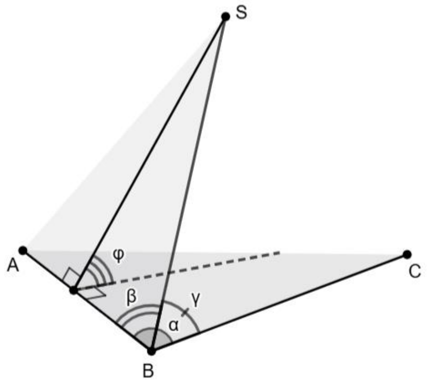

Рис. 6. Ілюстрація до теореми косинусів для тригранного кута

Якщо плоскі кути тригранного кута дорівнюють α, β і γ, а двогранний кут при ребрі, протилежному плоскому куту γ, дорівнює φ, то $cos\; cos\; \varphi\; = \frac{coscos\,\gamma\, - coscos\,\alpha\; coscos\,\beta}{sinsin\,\alpha\; sinsin\,\beta}$.

Скористаємося рис. 2 та обчисленнями, проведеними у 1 способі: $cosABC = \frac{11}{21} \Longrightarrow sinABC = \frac{8\sqrt{5}}{21}$; з прямокутних трикутників визначимо $cosSBK = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow sinSBK = \frac{4}{5}$; $cosSBC = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. Матимемо

$cos\; cos\; SKH\; = \frac{cosSBC - cosABC\cdot cosSBK}{sinABC\cdot sinSBK}$, $cosSKH = \frac{\frac{4}{5}-\frac{11}{21}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{21}} = \frac{84-33}{32\sqrt{5}} = \frac{51}{32\sqrt{5}}$.

А тоді синус цього кута $sinSKH = \sqrt{1-cos^2SKH} = \sqrt{\frac{2519}{5120}} = \frac{\sqrt{12595}}{160}$. І висота піраміди $SH = SK\cdot sinSKH = 20\cdot \frac{\sqrt{12595}}{160} = \frac{\sqrt{12595}}{8}$ (од.), об'єм

$V = \frac{1}{3}\cdot 192\sqrt{5}\cdot \frac{\sqrt{12595}}{8} = 40\sqrt{2519} \approx 2007{,}6$ (куб. од.).

4 спосіб (метод координат). Виберемо прямокутну систему координат, помістивши точку B у початок координат O, вісь абсцис – у напрямі від B до A, основу піраміди ABC помістимо у площину Oxy (рис. 7). Тоді координати точок $B(0;0;0), A(36;0;0)$, апліката точки C дорівнює нулю.

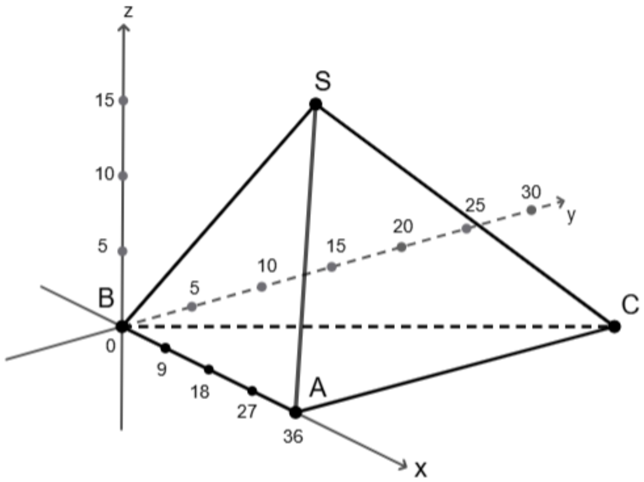

Рис. 7. Ілюстрація до вибору системи координат

Оскільки довжина $BC = 28$, і $\angle ABC$ такий, що $cosABC = \frac{11}{21}$, $sinABC = \frac{8\sqrt{5}}{21}$, то координати точки

$C: \tilde{x} = BC \cdot cosABC = \frac{44}{3}$, $\tilde{y} = BC \cdot sinABC = \frac{32\sqrt{5}}{3}$, $\tilde{z} = 0$, $C\left(\frac{44}{3}; \frac{32\sqrt{5}}{3}; 0\right)$.

Нехай координати точки $S(x;y;z)$. Тоді висота піраміди є відстанню від точки S до площини ABC, тобто є аплікатою (модулем аплікати) точки S: $h_{\text{пір.}} = d(S;ABC) = d(S;Oxy) = |z_s|$. Запишемо відстані $SB = 25, SA = 29, SC = 17$ та віднімемо почленно перше рівняння від другого і третього:

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = 625, (x-36)^2 + y^2 + z^2 = 841, \left(x - \frac{44}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{32\sqrt{5}}{3}\right)^2 + z^2 = 289,$$

$$\Rightarrow \{-72x + 1296 = 216, -\frac{88}{3}x + \frac{1936}{9} - \frac{64\sqrt{5}}{3}\ x^2 + y^2 + z^2$$

$$= 625. y + \frac{5120}{9} = -336,$$

Виразимо x і y з першого і другого рівнянь та підставимо у третє, отримаємо

$$\{x = \frac{1296 - 216}{72} = 15, \qquad y = \frac{-\frac{88}{3} \cdot 15 + \frac{1936}{9} + \frac{5120}{9} + 336}{\frac{64\sqrt{5}}{3}}$$

$$= \frac{51\sqrt{5}}{8}, z = \pm\sqrt{625 - 15^2 - \left(\frac{51\sqrt{5}}{8}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{12595}}{8}.$$

Маємо координати $S\left(15; \frac{51\sqrt{5}}{8}; \pm\frac{\sqrt{12595}}{8}\right)$, висота піраміди $SH = \frac{\sqrt{12595}}{8}$, така ж, як і у попередніх способах. А отже, і об'єм такий самий.

Зауважимо, що зі студентами ми можемо проговорити інше продовження цієї задачі, тобто маючи координати точок, що є вершинами піраміди: $B(0;0;0)$, $A(36;0;0)$, $C\left(\frac{44}{3}; \frac{32\sqrt{5}}{3}; 0\right)$, $S\left(15; \frac{51\sqrt{5}}{8}; \frac{\sqrt{12595}}{8}\right)$, отримуємо координати векторів $\overrightarrow{BA} = (36;0;0), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{44}{3}; \frac{32\sqrt{5}}{3}; 0\right), \overrightarrow{BS} = \left(15; \frac{51\sqrt{5}}{8}; \frac{\sqrt{12595}}{8}\right)$, а тоді використати мішаний добуток векторів: $V_{\text{пір.}} = \frac{1}{6} mod\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS}\right)$;

$$\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BS}\right)=\left|36\ 0\ 0\ \frac{44}{3}\ \frac{32\sqrt{5}}{3}\ 0\ 15\ \frac{51\sqrt{5}}{8}\ \frac{\sqrt{12595}}{8}\right|=36\cdot\frac{32\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{12595}}{8}=240\sqrt{2519};$$

$$V_{\text{пір.}}=\frac{1}{6}\cdot 240\sqrt{2519}=40\sqrt{2519}\text{ (куб. од.)}$$

Також можемо скласти матрицю Грама, обчисливши скалярні добутки $\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}\right)=36^2+0+0=1296;\ \left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=36\cdot\frac{44}{3}+0+0=528;$

$\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BS}\right)=36\cdot 15+0+0=540;\ \left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=\left(\frac{44}{3}\right)^2+\left(\frac{32\sqrt{5}}{3}\right)^2+0=784;$

$\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BS}\right)=\frac{44}{3}\cdot 15+\frac{32\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{51\sqrt{5}}{8}=560;\ \left(\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BS}\right)=15^2+\left(\frac{51\sqrt{5}}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{12595}}{8}\right)^2=625.$

Зауважимо, що у нас є можливість перевірити себе, адже модулі (довжини) трьох векторів $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}$ співпадають з даними в умові, наприклад, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{784}=28$. Тоді визначник матриці Грама має вигляд $|1296\ 528\ 540\ 528\ 784\ 560\ 540\ 560\ 625\ |=14400\cdot 10076$. Під час обчислення визначника попередньо винесені множники – НСД усіх рядків і усіх стовпців. Тоді об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}$ як на сторонах, є квадратний корінь із отриманого числового значення: $V_{\text{пар.}}=\sqrt{14400\cdot 10076}=240\sqrt{2519}$ (куб. од.). А об'єм (трикутної) піраміди $V_{\text{пір.}}=\frac{1}{6}V_{\text{пар.}}=40\sqrt{2519}$ (куб. од).

Відповідь: об'єм піраміди $40\sqrt{2519}$ (куб. од).

Зауважимо, що розв'язання задачі залежить від вхідних числових параметрів і якщо неправильно зробити рисунок до задачі, то легко припуститися помилки. Як приклад, сформулюємо задачу 3 (рис. 8, 9).

Задача 3. Обчисліть об'єм трикутної піраміди $SABC$, якщо $AB=12$, $AC=14$, $BC=10$, $SA=25$, $SB=17$, $SC=21$.

Зазначимо, що трикутники SBA, SBC тупокутні, а тому маємо конфігурацію, зображену на рисунку 8.

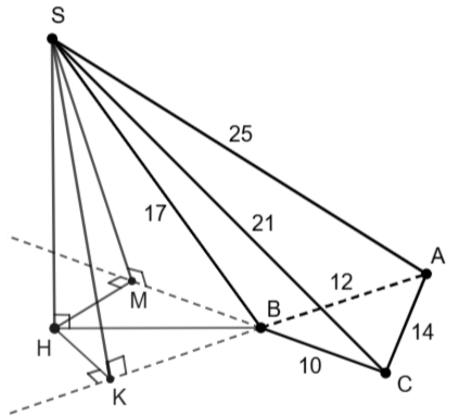

Рис. 8. Ілюстрація до задачі 3

Зауважимо, що при перетині двох прямих AB і BC утворюються чотири квадранти і точка S може спроєктуватися у будь-який із цих квадрантів або на межу квадрантів (це залежить від вигляду трикутників, даних в умові), а тому потрібно бути уважним, особливо під час використання другого способу: у задачі 2 точки K,D є внутрішніми точками відрізків AB,AC (рис. 5), а у задачі 3 – зовнішніми (рис. 9).

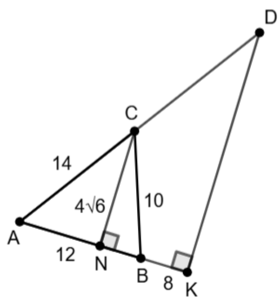

Рис. 9. Ілюстрація основи піраміди до задачі 3

При розв'язанні задачі методом координат: $B(0;0;0)$, $A(12;0;0)$, $C\left(2;4\sqrt{6};0\right)$, абсциса і ордината точки $S\left(-8;-\frac{5\sqrt{6}}{12};\pm\frac{5\sqrt{1290}}{12}\right)$ є від'ємними, що іще раз ілюструє правильність рис. 8.

Відповідь. Площа основи $24\sqrt{6}$ од.^{2}, висота $\frac{5\sqrt{1290}}{12}$ од., об'єм піраміди $20\sqrt{215}$ од.^{3}

Аналізуючи умову стереометричних задач 1–3, звернемо увагу на те, що жодна задача не планується до розв'язання на уроці. Пошуки шляхів розв'язання доцільно перенести на позаурочний час (математичний гурток, індивідуальна робота з обдарованими учнями, науковий проєкт чи написання науково-дослідницької роботи). Якщо це заняття математичного гуртка, доцільно після розв'язання задачі 1 і вивчення формулювання задачі 2 та виконання рисунка проаналізувати, що змінилося принципово. Бажано, щоб це робили самі учні, а вчитель міг потім скоригувати підсумок. Спільним для обох задач є потреба знайти діаметр описаного навколо чотирикутника кола. Порівнюючи задачі 2 і 3, можна побачити багато спільного, проте можна знайти і відмінності, які можуть вплинути на хід розв'язання. Якщо це дослідницький проєкт, то бажано дослідити вплив різних числових даних на геометричну конфігурацію і відповідно – розв'язання задачі. Для виконання рутинної роботи (обчислення площі за формулою Герона, висоти трикутника, косинуса кута та ін.) доцільно використовувати можливості будь-якого математичного пакета, наприклад, *Maple*. Якщо це НДР, то доцільно використати можливості ІКТ для підбору кращих числових даних, які б ілюстрували різні геометричні конфігурації у цій задачі.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. У повсякденному житті ми зазвичай розглядаємо кілька можливих варіантів, щоб обрати найкращий. Аналогічно і в геометрії – для успішного розв'язання задачі важливо знати альтернативні способи розв'язування. Це сприяє тому, що учні вчаться обирати найефективніший спосіб розв'язання залежно від умов, а це є надзвичайно важливим як у навчанні, так і в реальному житті. Такий підхід до організації освітнього процесу сприятиме не тільки підвищенню рівня математичної грамотності, а й вихованню впевненості учнів у своїх силах і відповідальності за кінцевий продукт.

Ми вважаємо, що наш досвід може бути корисним орієнтиром для інших вчителів, які працюють у профільних класах, та студентів профільних спеціальностей. Практику відшукання альтернативних способів розв'язування математичних задач вважаємо виправданою, на що плануємо спрямувати свої подальші дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бевз, Г. П. (2010). Методи навчання математики: Навч.-метод, посіб. для загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза. (Bevz, H. P. (2010). Methods of teaching mathematics: Educational and methodological manual for general educational institutions. Kyiv: Heneza.)
2. Botuzova, Yu. V. (2020). Factors of providing the continuity of teaching mathematics during transition from high school to university. *Universal Journal of Educational Research, 8*(3), 857–865.
3. Ботузова, Ю. В., Нічишина, В. В., Ріжняк, Р. Я. (2022). Наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти: контекст інтегративного підходу. *Фізико-математична освіта,* 36.4. 16–25. (Botuzova, Yu.V., Nichyshyna, V. V., Rizhniak, R. Ia. (2022). Continuity of teaching methods for solving mathematical problems in schools and university: the context of the integrative approach. *Fizyko-matematychna osvita*, 36.4. P. 16–25).
4. Бурда, М. І., Глобін, О. І. (2009). Особливості організації навчання математики в 10–12 класах на профільному рівні. *Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки»*. Вип. 150. Черкаси. сс. 24–31. (Burda, M. I., Hlobin, O. I. (2009). Features of organizing mathematics education in grades 10–12 at the specialized level. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia «Pedahohichni nauky»*. Vyp. 150. Cherkasy. pp. 24–31).
5. Вишенський, В. А., Нагорний, В. Н., Перестюк, М. О., Плахотник, В. В. (2006). Десять математичних олімпіад. Кам'янець-Подільський: Аксіома. (Vyshenskyi, V. A., Nahornyi, V.

N., Perestiuk, M. O., Plakhotnyk, V. V. (2006). Ten Mathematical Olympiads. Kamianets-Podilskyi: Aksioma).
6. Зеленяк, О. П. (2012). Технології розв'язування геометричних задач. *Наукові записки. Вип.71. Математичні науки*. Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, сс. 27–46. (Zeleniak, O. P. (2012).Technologies for solving geometric problems. *Naukovi zapysky. Vyp. 71. Matematychni nauky.* Kirovohrad: KDPU im. V. Vynnychenka, pp. 27–46).
7. Ігнатенко, М. Я, Кобко, Л. М. (2013). Одна геометрична задача крізь різні розділи. *Математика в сучасній школі,* 4, 4–8. (Ihnatenko, M. Ia., Kobko, L. M. (2013). One geometry problem through different sections. *Matematyka v suchasnii shkoli*, 4, 4–8).
8. Ізюмченко, Л. В. (2025). Пошуки різних способів розв'язування задач як каталізатор особистісного зростання учнів. *Освіта. Інноватика. Практика, 13*(3), 30–36. (Iziumchenko, L. V. (2025). Exploring diverse problem-solving approaches as a catalyst for students' personal growth. *Osvita. Innovatyka. Praktyka*, 13(3), 30–36).
9. Ізюмченко, Л. В., Ткачевська, А. П. (2023). Різні способи розв'язування задач як інструмент формування гнучкості мислення (на прикладі геометричної задачі). *Освіта. Інноватика. Практика*, *11*(9), 48–54. (Iziumchenko, L. V., Tkachevska, A. P. (2023). Different ways of solving problems as a tool for forming flexibility of thinking (on the example of a geometric problem). *Osvita. Innovatyka. Praktyka*, *11*(9), 48–54).
10. Кузьмінський, А., Тарасенкова, Н., Акуленко, І. (2014). Інновації в методології методичної підготовки майбутнього вчителя математики профільної школи. *Educational Dimension*, *40*, 3–9. (Kuzminskyi, A., Tarasenkova, N., Akulenko, I. (2014). Innovations in the methodology of the methodical training of the future teacher of mathematics in a specialized school. *Educational Dimension*, *40*, 3–9).
11. Кушнір, В. А., Ріжняк, Р. Я. (2010). Інтеграція математичних знань та умінь при використанні різних способів розв'язування задач. *Постметодика*, *(2)*, 24–31. (Kushnir, V. A., Rizhniak, R. Ia. (2010). Integration of mathematical knowledge and skills when using different methods of solving problems. *Postmetodyka*, *(2)*, 24–31).
12. Ленчук, І. Г., Працьовитий, М. В. (2022). Основні метричні задачі конструктивної стереометрії. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, *64*, 243–257. (Lenchuk, I. H., Pratsovytyi, M. V. (2022). Basic metric tasks of constructive stereometry. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, досвід, проблеми*, *64*, 243–257).
13. Матяш, О. І., Ясінський, В. А., Прус, А. В. (2010). Формування знань старшокласників про різні методи розв'язування задач стереометрії. Математика в школі, 10, 8–17. (Matiash, O. I., Yasinskyi, V. A., Prus, A. V. (2010). Developing an understanding of the different methods used to solve solid geometry problems by higher-grade school students. Matematyka v shkoli, 10, 8–17).
14. Палій, Л. О. (2013). Функції і роль стереометричної задачі у процесі формування знань та вмінь учнів з геометрії. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems*, *(36)*, 38–43. (Palii, L. O. (2013). Functions and role of the stereometric problem in the process of formation of students' knowledge and skills in geometry. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems*, *(36)*, 38–43).

Iziumchenko L.V., Tkachevska A.P. Modelling the solution of solid geometry problems as a key element in the development of critical thinking.

In today's world, we are constantly faced with situations that require us to choose from several possible options. Each situation involves analysing the conditions, searching for alternatives, evaluating possible consequences and finally selecting the best option. Therefore, critical, flexible and creative thinking skills are essential in any area of life, and it is worthwhile starting to develop them at school. The study of geometry, and in particular solid geometry (and

stereometry in higher school grades) is an especially effective way to develop flexibility of thinking. This is because students' existing solid theoretical foundation, together with a wide range of methods and approaches, enables them to solve the same problem in many different ways, view it from different angles, discover deeper properties, apply knowledge from different areas of mathematics, and increase the likelihood of finding the correct answer.

This article presents an example of a problem set for 11th-grade students in the 3rd level of the All-Ukrainian Competition for Research Papers of Students of the Junior Academy of Sciences of Ukraine, alongside a generalised version. Five solutions are provided: using the projection method combined with the cosine and sine theorems; the area method; trigonometric relations; the cosine theorem for a trihedral angle; auxiliary constructions with similar triangles; and the coordinate method. The possibility of using vector algebra methods and the Gram matrix is also considered, which could be useful for mathematics students. Special attention is given to studying how numerical data affect the geometric configuration, and accordingly the solution of the problem. It is also noted that solving a single solid geometry problem in several alternative ways could form the basis of a student's research paper, a group project for an advanced mathematics class or a mathematics club session. The article also examines methodological aspects of organizing the learning process for each of these formats.

Key words. *Solid geometry, angle between planes, cosine theorem for a trihedral angle, method of coordinates, the theorems of cosines and sines, method of areas, trigonometric ratios, critical thinking.*

Подано до друку 14.08.2025
Прийнято до друку 22.09.2025

УДК 378.016:517
DOI 10.24139/2519-2361/2025.02/66-72

А. М. Нестеренко
ORCID ID 0000-0002-3070-7440
Черкаський державний
технологічний університет

ПРОБЛЕМНЕ НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Посилення уваги до освітніх потреб особистості, розуміння студента не тільки як об'єкта навчання, але й як рівноправного суб'єкта навчального процесу, призводить до необхідності активізації пізнавальної діяльності студентів та їх інтересу до навчання шляхом застосування методів проблемного навчання. Актуальним є завдання щодо визначення ефективних умов прикладної спрямованості математичної підготовки майбутніх інженерів, активізації самостійної пізнавальної діяльності студентів, оволодіння ними системою математичних знань, умінь і навиків,

Мета статті полягає в аналізі одного з інноваційних підходів навчання вищої математики - методу проблемного навчання студентів технічних спеціальностей, який є підґрунтям для набуття ними комплексних і системних знань, сприяє активізації самостійної пізнавальної діяльності, оптимізації та модернізації математичної підготовки студентів.

Проблемний підхід у викладанні вищої математики для студентів технічних спеціальностей є продуктивним, оскільки сприяє утворенню у студентів належного уявлення про використання математичних знань і вмінь під час вивчення дисциплін профільного спрямування, необхідних у майбутній професійній діяльності, розвитку їх пізнавальної самостійності за допомогою розв'язання проблемних ситуацій, що сприяють формуванню зацікавленості з оволодіння майбутньої професії інженера. Під час навчання вищої математики у студентів вирішальну роль відіграє така система завдань, яка має сприяти прояву пізнавальної самостійності, творчого мислення, тобто завдання практичного характеру, нестандартні задачі і завдання