РОЗДІЛ 1. АКТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІН ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ В ШКОЛІ ТА ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ РІЗНИХ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

УДК 378.091.214.18:[512+514]]:005.32-057.87
DOI 10.24139/2519-2361/2025.02/5-13

І. А. Акуленко
ORCID ID 0000-0003-4603-409X
В. В. Атамась
ORCID ID 0000-0002-2819-5829
Черкаський національний
університет ім. Б. Хмельницького

РОЛЬ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ’ЯЗКІВ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ФОРМУВАННІ СТІЙКОЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ МОТИВАЦІЇ СТУДЕНТІВ – МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Статтю присвячено актуальній проблемі формування стійкої пізнавальної мотивації студентів вищих навчальних закладів в адаптаційний період навчання. Авторами проведено аналіз наукових досліджень, які висвітлюють роль структурування навчального змісту як чинника, що позитивно впливає на стійкість пізнавальних мотивів здобувачів вищої освіти. Теоретичну основу дослідження становлять положення теорії когнітивного навантаження Дж. Свеллера. Авторами встановлено, що одним із найпотужніших механізмів структурування навчального змісту, а отже, і формування стійкої внутрішньої мотивації студентів, виступають міжпредметні зв'язки. У статті розроблено та обґрунтовано класифікацію міжпредметних зв'язків лінійної алгебри та аналітичної геометрії: "експорт-імпорт" зв'язки, зв'язки-"ілюстратори" та інтегруючі зв'язки. Практичним внеском роботи є розроблення комплексу конкретних навчальних задач, які демонструють мотиваційний потенціал міжпредметних зв'язків: задачі економічного, хімічного змісту, з криптографії та геометрії. Особлива увага приділена задачам-"мостам" (Rich Tasks), які можна розв'язувати різними способами, залучаючи апарат обох дисциплін. Авторами також підкреслено важливість розуміння студентами різних методологічних підходів до введення одних і тих же понять у курсах лінійної алгебри та аналітичної геометрії (наприклад, аксіоматичного підходу в лінійній алгебрі та геометричного підходу в аналітичній геометрії у введенні поняття скалярного добутку). Результати дослідження можуть бути використані у практиці навчання математичних дисциплін у вищій школі для підвищення ефективності навчального процесу та формування стійкої внутрішньої пізнавальної мотивації студентів. Проте авторами висловлено позицію про необхідність подальших емпіричних досліджень, особливо щодо узгодження міждисциплінарної диференціації навчальних дисциплін та їх інтеграції у контексті забезпечення стійкої пізнавальної мотивації студентів.

Ключові слова: *міжпредметні зв'язки, пізнавальна мотивація, структурування навчального змісту, лінійна алгебра, аналітична геометрія, задачі хімічного змісту.*

Постановка проблеми. Проблема стійкості пізнавальної мотивації студентів в адаптаційний період (зазвичай, 1-2-й семестри навчання у ЗВО) є однією з ключових у вищій школі. Вона безпосередньо впливає на пізнавальну активність, успішність, відсів студентів та якість їхньої майбутньої професійної діяльності. В адаптаційний період відбувається перебудова всіх базових характеристик навчальної діяльності, яка набуває змісту й характеру навчально-професійної діяльності. Акценти в організації навчально-пізнавальної діяльності зміщуються: від жорстко регламентованої форми організації навчання, під постійним контролем учителя в школі до гнучкої форми організації навчання у ЗВО з можливістю побудови індивідуальної освітньої траєкторії, високим рівнем автономії, самоорганізації, самоконтролю та більш розосередженим у часі контролем з боку викладача. Відбуваються глибинні зміни у мотиваційній сфері особистості: перехід від домінування зовнішньої мотивації у пізнавальній діяльності (оцінка і контроль учителя, контроль і похвала батьків, успішне зовнішнє незалежне оцінювання тощо) до пріоритетності внутрішніх мотивів (акцентуація професійних інтересів, активізуються процеси самоактуалізації, розширюється спектр професійної самоідентифікації).

Однак саме адаптаційний період має певні труднощі й характеризується своєрідними «гойдалками»: від ейфорійного сприйняття студентами невичерпності своїх фізичних та інтелектуальних сил до перспективно-негативної професійної самоідентифікації, нівелювання цінності обраної професії, кризи професійно-особистісної ідентичності. Одним із чинників нестійкої пізнавальної мотивації виступає також суттєве ускладнення змісту навчання, значне наростання його абстрактності, фундаментальності, необхідності швидкого темпу в просуванні та засвоєнні. Ці загальні закономірності особистісного розвитку студентства повною мірою прослідковуються у здобувачів вищої освіти за спеціальністю А4 Середня освіта (математика) на першому адаптаційному етапі їхнього навчання у ЗВО. Відтак, постає проблема формування стійкої пізнавальної мотивації студентів, зокрема в опануванні змісту математичних фундаментальних дисциплін.

Аналіз актуальних досліджень. У сучасному міжнародному науковому дискурсі проблема мотивації учнів і студентів до навчання досліджується у різних аспектах на вихідних позиціях теорії самовизначення (Ф. Гуей [4]), теорії цілей досягнення (Д. Дж. Чазан, Г. Н. Пелетьє, Л. М. Деніелс [5]), теорії когнітивного навантаження (П. Еванс, М. Ванстенкісте, Ф. Паркер та ін. [3]). Поряд із суто теоретичними напрацюваннями науковці висвітлюють сучасні освітні практики: від традиційного офлайн-навчання до новітніх інноваційних середовищ онлайн-навчання. Наукові дослідження трактують мотивацію навчання як складний, залежний від контексту феномен, що зазнає впливів множинних взаємодіючих факторів.

Наукові розвідки А. Ішіда та Т. Секіяма узагальнили [1] тенденції в дослідженнях мотивації учнів та студентів до навчання серед різних демографічних груп і культурних контекстів. Дослідження виявило шість ключових факторів, що впливають на мотивацію навчання: 1) психологічні цінності; 2) когнітивні фактори; 3) соціальні та екологічні впливи; 4) демографічні фактори; 5) академічне минуле та навчальні звички; 6) педагогічні впливи та освітні програми. Дослідження чилійських науковців [2] продемонструвало вагомі докази на користь того, що конкретні мотиваційні практики по-різному впливають на пізнавальну мотивацію. Дослідники підкреслюють, що педагогічні впливи, які наголошують на важливості пізнавального процесу, на використанні когнітивних ресурсів індивідуума для глибинного розуміння об'єкту та предмету пізнання (а не просто для оцінок), а також сприяють автономії учнів/студентів, виступають основними предикторами пізнавальної активності й успішності здобувачів у різних галузях освіти. Результати наукових розвідок П. Еванса, М. Ванстенкісте, Ф. Паркера [3] також показали, що стратегії навчання, спрямовані на зменшення когнітивного навантаження й посилення залученості студентів, позитивно співвідносилися з автономною пізнавальною мотивацією та навчальними досягненнями здобувачів освіти. Позитивний вплив на стійкість пізнавальних мотивів виявили освітні практики викладачів, що підтримували навчання зі структуруванням навчального змісту.

Сучасні дослідження трактують [3] структурованість навчального змісту як багатовимірний конструкт, що залежить від когерентності всіх компонентів освітньої системи загалом, та когнітивної архітектури окремого індивідуума. Дж. Свеллер, розглядає [6; 7] когнітивні структури, що утворюють базу знань індивіда, як певні ментальні схеми. Вихідною його позицією є те, що навчання зі структуруванням змісту має безпосередньо враховувати обмеження короткострокової робочої пам'яті та сприяти побудові когнітивних схем у довгостроковій пам'яті суб'єкта. Зміст довгострокової пам'яті становлять саме такі схеми – витончені структури, що дозволяють індивідууму виявляти пізнавальну активність, мотивують його навчання. Щоб відбулося ментальне конструювання схеми, освітній процес має нівелювати навантаження на короткострокову пам'ять шляхом активізації й побудови конструктів у довгостроковій пам'яті. Це дозволяє індивідууму ефективно обробляти нову інформацію та конструювати збагачені схеми для забезпечення міцних зав'язків між новими і попередньо опанованими знаннями. Ці конструкти можуть відображати як систему понять і фактів у межах однієї навчальної дисципліни, так і зв'язки між поняттями, фактами і способами пізнавальної діяльності у межах кількох навчальних дисциплін, т.з. міжпредметні (міждисциплінарні) зв'язки. Таким чином, у науковому дискурсі позиціонується погляд на міжпредметні зв'язки (О. Глобін [13]) як на один із факторів, що позитивно впливають на структурування змісту навчання, а, відтак, і на стійкість пізнавальної мотивації здобувачів освіти.

Мета статті – окреслити роль міжпредметних зв'язків навчальних дисциплін «Лінійна алгебри» та «Аналітична геометрія» у формуванні стійкої пізнавальної мотивації студентів – майбутніх учителів математики

Виклад основного матеріалу. Стійкість пізнавальної мотивації – це здатність учня/студента зберігати інтерес до змісту навчання, до самого процесу здобуття знань, незважаючи на зовнішні перешкоди (складність предмета, невдачі на іспитах, втома, соціальний тиск тощо). Проблема полягає в тому, що у багатьох першокурсників в адаптаційний період проявляється так звана «криза мотиву», коли стара, зовнішня мотивація (тиск і контроль з боку школи і батьків, бажання «отримати диплом») швидко вичерпується, а нова, внутрішня (професійний інтерес) ще не сформована. З іншого боку, абстрактність змісту математичних курсів (як от, «Лінійна алгебра» та «Аналітична геометрія») може спровокувати падіння впевненості в собі та переходу від «мотивації досягнення успіху» до «мотивації уникнення невдачі». Для нівелювання цих тенденцій науковці пропонують підхід – зменшення когнітивного навантаження шляхом структурування навчального змісту. Позитивний вплив у цьому аспекті має виявлення міжпредметних зв'язків. Зупинимося більш детально на мотиваційному потенціалі міжпредметних зв'язків лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Навчальні курси «Лінійна алгебра» та «Аналітична геометрія» є обов'язковими освітніми компонентами освітньо-професійних програм першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (математика). У змісті курсу «Лінійна алгебра» відображено сучасний апарат лінійної алгебри. що передбачає, як вказує О. Кострикін у низці навчальних посібників, розробку математичної мови для вираження однієї з найзагальніших природничих ідей – ідеї лінійності. Тому зміст навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» включає в себе основи теорії лінійних рівнянь, теорії визначників, теорії матриць, теорії векторних просторів та лінійних перетворень векторних просторів, теорії форм (зокрема лінійних, білінійних, квадратичних), теорії многочленів. Опановуючи зміст цієї навчальної дисципліни студенти вивчають фундаментальні поняття: n-мірного лінійного векторного простору (ЛВП), арифметичного n-мірного простору, n-мірного вектора, лінійного відображення (лінійного оператору) n-мірного векторного простору, системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), розв'язку СЛАР, сумісної та несумісної, визначеної та невизначеної, еквівалентних СЛАР, перестановок парних і непарних, визначника, порядку визначника, матриці, видів матриць, арифметичних операцій з матрицями, мінора й алгебраїчного доповнення елемента матриці, її рангу, лінійної залежності/незалежності векторів, лінійної комбінації векторів, базису й рангу системи векторів, базису й розмірності ЛВП, координат n-мірного вектора, підпростору ЛВП, ізоморфізму підпросторів ЛВП, скалярного добутку векторів, евклідового векторного простору (ЕВП), унітарного простору, ортогональних векторів і ортогональної системи векторів ЕВП, лінійного оператора (ЛО), його області значень, ядра й дефекту, матриці ЛО, власних значень і власних векторів ЛО, спряженого, самоспряженого, ортогонального лінійного перетворення ЕВП, спектра оператора, лінійної, білінійної і квадратичної форми.

Міжпредметні зв'язки курсу лінійної алгебри виявляються в ході аналізу широкого спектра її застосувань [10; 11]: в інформатиці та веб-технологіях (алгоритм PageRank (пошук Google), в теорії графів та мережевому аналізі, (інформаційний пошук), у статистиці та науці про дані (аналіз головних компонент, факторний аналіз, багатовимірна статистика), машинному навчанні та ШІ (нейронні мережі (матриці ваг), зменшення розмірності, рекомендаційні системи), квантовій фізиці (квантова механіка (вектори станів), квантові обчислення (унітарні перетворення), квантова теорія інформації), у теорії обробки сигналів (стиснення зображень, обробка аудіо, аналіз Фур'є), в економіці та фінансах (модель Леонтьєва, оптимізація портфеля, економетрія), у хімії (теорія молекулярних орбіталей, розрахунки квантової хімії, хімічна кінетика) та в інших галузях знань. Міжпредметні зв'язки лінійної алгебри виявляють свій мотиваційний потенціал, коли вони встановлюються у ході розв'язування конкретних, автентичних завдань інженерного, фізичного, хімічного інформатичного змісту, математичною моделлю яких є, наприклад, система лінійних рівнянь. Такі задачі представлено, зокрема у збірниках [10; 11]. Ми пропонуємо також до розгляду зі студентами наступні задачі.

Задача 1. Інвестор розподіляє 100 000 доларів між трьома видами облігацій: з річною прибутковістю 3%, 4% та 5%. Відомо, що загальний річний дохід від усіх інвестицій має становити 4200 доларів. Сума інвестицій в облігації з 3% та 4% прибутковістю дорівнює сумі інвестицій в облігації з 5% прибутковістю. Яку суму інвестор вклав у кожен вид облігацій?

Задача 2. Фермеру потрібно годувати тварин, використовуючи три види кормів (I, II і III), які містять необхідні поживні речовини: протеїн, вуглеводи та вітаміни. 1 кг першого корму містить 200 г протеїну, 400 г вуглеводів та 100 г вітамінів. 1 кг другого корму містить 300 г протеїну, 200 г вуглеводів та 50 г вітамінів. 1 кг третього корму містить 100 г протеїну, 500 г вуглеводів та 150 г вітамінів. Для щоденного раціону тварин потрібно 1.8 кг протеїну, 2.6 кг вуглеводів та 0.6 кг вітамінів. Скільки кілограмів кожного виду корму необхідно змішати, щоб задовольнити добову потребу тварин у поживних речовинах?

Задача. 3. У лабораторії проводять аналіз суміші, що складається з трьох солей: карбонату калію (K2CO3), карбонату натрію (Na2CO3) та карбонату літію (Li2CO3). Відомо, що маса суміші становить 100 г. При взаємодії суміші з надлишком хлоридної кислоти (HCl) виділилося 45,8 г вуглекислого газу (CO2). Після реакції утворилася суміш хлоридів (KCl, NaCl, LiCl), загальна маса якої склала 111,4 г. Визначте масу кожної солі в початковій суміші.

Задача 4 [11, с. 80]. Дано криптотекст: «ЕЬЩ ИЦЕ ППІ ТЛЧ ТХХ ИШХ ИШХ КПС ГТН ВТУ» зашифрований лінійним шифром третього порядку. Відомо, що дев'ять останніх літер криптотексту мають означати частину підпису ЖЕЙМСБОНД. Розшифруйте повідомлення.

Навчальний курс «Лінійна алгебра» має тісні міжпредметні зв'язки з іншими освітніми компонентами в професійній підготовці майбутнього вчителя математики, зокрема із курсом «Аналітична геометрія». Власне аналітична геометрія, як наука, з'явилася як реалізація ідеї Рене Декарта про універсальний метод. Суть його полягає в тому, що будь-яка задача зводиться до математичної задачі, розв'язування якої своєю чергою зводиться до застосування алгебраїчного методу. Надзвичайно показовим є погляд Ж. Лагранжа: «Поки алгебра і геометрія розвивалися кожна своїм шляхом, розвиток їх був повільний а застосування обмежене. Та коли ці дві науки об'єдналися, вони одна одній додали життєвої снаги і відтоді обидві швидкою ходою рушили вперед до досконалості» [8, с. 30]. Використання міжпредметних зв'язків лінійної алгебри з аналітичною геометрією є одним із найпотужніших механізмів для підвищення стійкості внутрішньої мотивації студентів до вивчення цих дисциплін.

Міжпредметні зв'язки цих дисциплін можна розподілити на кілька класів. По-перше – це «експорт-імпорт» зв'язки (В. Кірман, Н. Тарасенкова), коли математичний апарат однієї навчальної дисципліни використовується для визначення понять або формулювання чи доведення властивостей понять іншої.

Прикладом такого застосування може слугувати відшукання векторного добутку, через детермінанти, якщо вектори задані координатами в прямокутній декартовій системі координат. Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, а $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k}\; x_1\; y_1\; z_1\; x_2\; y_2\; z_2\;\right| = (\left|y_1\; z_1\; y_2\; z_2\;\right|, -\left|x_1\; z_1\; x_2\; z_2\;\right|, \left|x_1\; y_1\; x_2\; y_2\;\right|).$$

Також мішаний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ знаходиться як визначник третього порядку:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \left|x_1\; y_1\;\; z_1\; x_2\;\; y_2\;\; z_2\; x_3\;\; y_3\;\; z_3\;\right|.$$

Крім того, найчастіше в аналітичній геометрії використовуються різні прийоми розв'язування рівнянь та систем рівнянь і нерівностей, зокрема метод Гауса. Як приклад, це відшукання точок перетину прямих і площин, точок дотику до кривих чи поверхонь другого порядку.

Інший клас зв'язків – це зв'язки-«ілюстратори». На їх основі абстракції однієї навчальної дисципліни, як от «Лінійної алгебри» (матриці, вектори, системи рівнянь), наочно візуалізують за допомогою понять, що вивчає інша навчальна дисципліна, а саме, аналітична геометрія (прямі, площини, лінії і поверхні другого порядку, перетворення на площині і в просторі). Наприклад, поняття лінійної оболонки векторів, підпростору розв'язків СЛОР, лінійного многовиду краще засвоюється студентами, якщо супроводжується наочністю із використанням площини та зсуву площини на деякий вектор – направлений відрізок. Зв'язки-ілюстратори «спрацьовують» для візуалізації таких абстрактних понять лінійної алгебри як підпростір лінійного векторного простору, ортогональне доповнення підпростору, ортогональна проекція вектора на підпростір, лінійний оператор векторного простору, лінійна і квадратична форма. Крім суто ілюстративної функції ці зв'язки «підсвічують» можливі сполучні ланки між абстрактним поняттями і їх можливим геометричним конкретним змістом. Наприклад, вивчаючи тему «Лінійні оператори» доцільно вказати на зв'язки між матрицями розмірності 3 на 3 і перетворення тривимірного векторного простору, показати, як матрицею можна задати вже відомі студентам перетворення простору: симетрію відносно початку координат, симетрію відносно однієї осі координат, симетрію відносно деякої координатної площини. Множення матриць можливо пов'язати із перетвореннями площини, проілюструвати прикладом того, як матриця «перетворює фігуру» на площині чи в просторі (обертання, стиснення, зсув). У такий спосіб студенти усвідомлюють, що апарат лінійної алгебри – це мова 3D-графіки та комп'ютерного моделювання. Розв'язування СЛР з трьома невідомими (методом Гауса) доцільно супроводжувати геометричною інтерпретацією: СЛР має єдиний розв'язок – три площини перетинаються в одній точці, безліч розв'язків – площини перетинаються по прямій або співпадають, немає розв'язків – площини паралельні або перетинаються лише попарно. Коли студент бачить, як суто абстрактні поняття можна проілюструвати наочно конкретними прикладами відомих геометричних фігур, тоді абстракція перестає бути перешкодою і стає інструментом пізнання, знижає когнітивне навантаження.

Додаткового поштовху зазнає пізнавальна мотивація, коли студенти опановують нові способи розв'язування задач зі свого попереднього навчального досвіду (шкільного курсу математики), використовуючи математичний апарат лінійної алгебри і аналітичної геометрії, щоб встановити властивості наочно зображених геометричних об'єктів за допомогою координатного і векторного методів суто аналітично, наприклад шляхом дій із матрицями та визначниками. Наведемо приклад типової задачі.

Задача 5. Знайти висоту AH піраміди $ABCD$, якщо

$$A(1,3,6),\ B(0,1,-1), C(3,4,2),\ D(2,-3,-2).$$

Для розв'язування цієї задачі спочатку знаходимо координати векторів, наприклад, $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$. Далі знаходимо об'єм піраміди $ABCD$, який дорівнює одній шостій модуля мішаного добутку цих векторів. Наступним кроком визначаємо площу основи піраміди, як половину довжини векторного добутку $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$. Нарешті висоту AH знаходимо як частку потроєного добутку об'єму піраміди і площі основи. При обчисленнях використовуємо вище наведені формули для обчислення векторного і скалярного добутків.

Ще один клас міжпредметних зав'язків – інтегруючі зв'язки. Вони стають явними для студентів унаслідок розв'язування задач-«мостів» (Rich Tasks). Ці задачі провокуються іншим видом задач, такими, що мають різні способи розв'язування із залученням апарату чи то лінійної алгебри, чи аналітичної геометрії. Наведемо кілька прикладів задач-«мостів» і тих задач, що до них приводять (табл. 1).

Таблиця 1.

Задача	Розв'язування у АГ	Розв'язування у ЛА
Дано три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у просторі R^3. Дослідіть, чи є вони компланарними (чи лежать в одній площині).	Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Якщо він дорівнює нулю, то вектори компланарні.	Скласти матрицю A, стовпцями якої є ці вектори. Обчислити ранг цієї матриці, rank A. Якщо rank A < 3, то вектори лінійно залежні, тобто компланарні.
Задача-міст. Доведіть, що геометричний критерій (мішаний добуток трьох векторів дорівнює 0) еквівалентний алгебричному критерію (rank A < 3). Як це узагальнити для *n*-мірного векторного простору?		
Дано квадрат ABCD, де A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(0; 1). Знайдіть площу фігури, що утворилася після його обертання на 45°	Використати формули повороту, знайти нові координати, обчислити площу (площа залишається незмінною, оскільки поворот – ізометрія).	Визначаємо матрицю повороту на кут α: A = $(cos\, cos\, \alpha \quad -sin\, sin\, \alpha \quad sin\, sin\, \alpha \quad cos\, cos\, \alpha\ )$. Площа нового об'єкта дорівнює добутку площі старого і модуля визначника det A.
Задача-міст. Чи змінюється площа фігури при перетворенні, яке задається матрицею B = (3 0 0 0,5)? Як геометрично інтерпретувати перетворення, що задано матрицею B?		

Такі задачі можна використати у вивченні теми «Зведення квадратичної форми до канонічного виду» у курсі лінійної алгебри та тем «Мішаний добуток векторів», «Зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду» у курсі аналітичної геометрії. Зауважимо, що відповідні теми цих курсів розосереджені в часі, тому студенти спочатку знайомляться із суто аналітико геометричним підходом (через ортогональні перетворення тривимірного простору). Проілюструємо це прикладом

Задача 6 [12]. Визначити тип кривої другого порядку, заданої загальним рівнянням: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + \ a_{33} = 0$.

Для цього рівняння записуємо відповідну симетричну матрицю:

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{12}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{13}\ a_{23}\ a_{33}\ )$$

і в подальшому працюємо з нею.

Шукаємо інваріанти відносно ортогональних перетворень: $S = a_{11} + a_{22}$, $\delta = |a_{11}\ a_{12}\ a_{12}\ a_{22}\ |$, $\Delta = det\ det\ A$. Далі знаходимо корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0.$$

Отримані результати дають змогу звести матрицю A до діагонального виду:

$$\left(\lambda_1\ 0\ 0\ 0\ \lambda_2\ 0\ 0\ 0\ \frac{\delta}{\Delta}\right).$$

Повернувшись до рівняння отримуємо: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{\delta}{\Delta} = 0$. Це рівняння легко зводиться до канонічного вигляду, що дає змогу визначити тип кривої другого порядку.

Використовуючи цей спосіб можна знайти і кут повороту осей координат, і вектор паралельного перенесення, щоб перейти до системи координат $x_2 O_2 y_2$, у якій дана крива має канонічне рівняння. Аналогічним способом можна звести до канонічного вигляду загальне рівняння другого порядку від трьох змінних і визначити тип поверхні другого порядку.

У подальшому вже в курсі лінійної алгебри узагальнюють ці способи, вивчаючи метод Лагранжа, метод ортогональних перетворень і метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного виду. Такі задачі мають потужний як мотиваційний, так і методологічний ефект, оскільки, з одного боку, формують внутрішню мотивацію студентства, з іншого боку – демонструють, як апарат лінійної алгебри використовують для дослідження об'єктів засвоєння в курсі аналітичної геометрії, а відтак, є корисними і в ракурсі здійснення методологічної рефлексії.

Варто наголосити, що міжпредметні зв'язки не можна розглядати тільки у ракурсі математичних понять і фактів, що вивчають у курсах лінійної алгебри і аналітичної геометрії.

Цілком поділяємо погляди Н. Кугай, Л. Сухойваненко, що не менш важливо їх трактувати як зв'язки, що стосуються особливих способів математичної діяльності і методів пізнання (включно із визначенням математичних понять), підкреслюючи їх міждисциплінарну диференціацію. Наприклад, вивчаючи курси лінійної алгебри і аналітичної геометрії студенти мають усвідомити, що поряд із наявними тісними зв'язками між різними поняттями цих дисциплін, мають місце ситуації, коли одні і ті ж самі поняття можуть вводитися і використовуватися в лінійній алгебрі і аналітичній геометрії по-різному. Наприклад, поняття скалярного добутку векторів. У курсі лінійної алгебри скалярний добуток векторів визначається аксіоматично (через систему аксіом), надалі вивчаємо його властивості, ґрунтуючись саме на аксіомах скалярного добутку, затим вводимо поняття норми вектора і доводимо нерівність Коші-Буняковського, яка дає можливість ввести поняття кута між векторами і довести формулу для обчислення скалярного добутку векторів як добутку їхніх норм, що помножений на косинус кута між векторами. Таким чином, у курсі лінійної алгебри до введення поняття скалярного добутку запроваджено аксіоматичних підхід. Натомість у курсі аналітичної геометрії поняття скалярного добутку векторів вводиться як добуток довжин векторів на косинус кута між ними. Потім геометрично (вектори тут класи напрямлених відрізків) доводять властивості, які співпадають з аксіомами скалярного добутку, що задають поняття скалярного добутку в лінійній алгебрі. Важливо, щоб студенти розуміли, що поняття скалярного добутку в лінійній алгебрі є узагальненням цього поняття в аналітичній геометрії.

Виявлення цих різних підходів до введення одного і того ж поняття у курсах лінійної алгебри і аналітичної геометрії також сприяє підвищенню структурованості навчального змісту, що зменшує когнітивне навантаження на студентів. Це виступає ще одним прийомом у формуванні стійкої пізнавальної мотивації здобувачів освіти.

Для верифікації окреслених підходів було проведено анкетування студентів спеціальності А4 Середня освіта математика для виявлення впливу структурування навчального змісту курсів «Лінійна алгебра» і «Аналітична геометрія» шляхом виокремлення їх міжпредметних зв'язків задля формування стійкої пізнавальної мотивації в адаптаційному етапі здобування вищої освіти. Аналіз результатів анкетування формує проблемне поле для подальших узагальнень і рекомендацій.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Міжпредметні зв'язки навчальних дисциплін у вищій математичній освіті мають значний мотиваційний потенціал, оскільки забезпечують структурованість змісту навчання, а відтак дозволяють зменшити когнітивне навантаження у процесі опанування нового змісту студентами. Однак ця проблематика все ще потребує більшої кількості емпіричних досліджень, особливо щодо того, як узгодити міждисциплінарну диференціацію навчальних дисциплін та справжню їх інтеграцію задля забезпечення стійкої пізнавальної мотивації здобувачів освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Ishida, A., Sekiyama, T. (2024). Variables influencing students' learning motivation: Critical literature review. Frontiers in Education, 9, 1445011. Retrieved from: https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1445011.
2. Valenzuela, J., Miranda-Ossandon, J., Muñoz, C., Precht, A., Del Valle, M., Vergaño-Salazar, J-G. (2024). Learning-oriented motivation: Examining the impact of teaching practices with motivational potential. PLoS ONE 19(2): e0297877. Retrieved from: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0297877
3. Evans, P., Vansteenkiste, M., Parker, P. et al. Cognitive Load Theory and Its Relationships with Motivation: a Self-Determination Theory Perspective. Educ Psychol Rev 36, 7 (2024). Retrieved from: https://doi.org/10.1007/s10648-023-09841-2
4. Guay, F. (2021). Applying Self-Determination Theory to Education: Regulations Types, Psychological Needs, and Autonomy Supporting Behaviors. Canadian Journal of School Psychology, 37(1), 75-92. Retrieved from: https://doi.org/10.1177/08295735211055355
5. Chazan, D. J., Pelletier, G. N., Daniels, L. M. (2021). Achievement Goal Theory Review: An Application to School Psychology. Canadian Journal of School Psychology, 37(1), 40-56. Retrieved from: https://doi.org/10.1177/08295735211058319

6. Sweller, J. (2011). Cognitive load theory. In J. P. Mestre & B. H. Ross (Eds.), The psychology of learning and motivation (Vol. 55, pp. 37–76). Academic Press. Retrieved from: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-387691-1.00002-8
7. Sweller, J., Ayres, P., Kalyuga, S. (2011). Cognitive load theory. Springer. Retrieved from: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4
8. Зоря, А. С., Кіро, С. М. (1981). Про математику і математиків. К.: Рад. школа. (Zoria, A. S., Kiro, S. M. (1981). On mathematics and mathematicians. Rad. shkola).
9. Власенко, К., Лов'янова, І., Армаш, Т., Сітак, І., Чумак, О. (2020). Особливості використання електронних ресурсів на прикладі курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти, (12), 5–18. Retrieved from: https://doi.org/10.31865/2414-9292.12.2020.206633 (Vlasenko, K., Lovyanova, I., Armash, T., Sitak, I., Chumak, O. (2020). Features of the use of electronic resources on the example of the course "Linear algebra and analytic geometry". Professionalism of the Teacher: Theoretical and Methodological Aspects, (12), 5–18. Retrieved from: https://doi.org/10.31865/2414-9292.12.2020.206633).
10. Рокіцький, І.О. Панасенко, О.Б. (2012). Застосування лінійної алгебри. Вінниця: Вид. Главацька Р. В., 240 с. (Rokitskyi, I. O., Panasenko, O. B. (2012). Applications of linear algebra. Hlavatska, R. V. Publishers)/
11. Кляцька Л.М., Лещенко Ю.Ю. (2012). Матрична алгебра та її застосування: навч. посіб. Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. 136 с. (Klyatska, L. M., Leshchenko, Y. Y. (2012). Matrix algebra and its applications: A textbook for organizing independent student work. Bohdan Khmelnytskyi National University of Cherkasy).
12. Тарасенкова, Н. А., Коломієць, О. М. (2020). Лінії другого порядку: навч.-метод.посіб для організації самостійної роботи студентів. Черкаси: «Сіяч». 80 с. (Tarasenkova, N. A., Kolomiets, O. M. (2020). Second-order curves: A teaching and methodological guide for organizing independent student work. Siyach Publishers).
13. Глобін, О. І. (2012). Міжпредметні зв'язки в умовах профільного навчання математики : методичний посібник Київ : Педагогічна думка. 88 с. (Globin, O. I. (2012). Interdisciplinary connections in the conditions of specialized mathematics education: A methodological guide. Pedagogichna dumka Publishers.)

Akulenko I. A., Atamas V. V. The Role of Interdisciplinary Links between Linear Algebra and Analytic Geometry in Developing Sustainable Cognitive Motivation of Pre-Service Mathematics Teachers.

The article addresses the relevant problem of developing stable cognitive motivation among students of higher educational institutions during the adaptation period of their studies. The authors conducted an analysis of scientific research that highlights the role of structuring educational content as a factor that positively affects the persistence of cognitive motives of higher education students. The theoretical foundation of the study is based on the principles of John Sweller's cognitive load theory. The authors established that one of the most powerful mechanisms for structuring educational content, and consequently for developing stable intrinsic motivation in students, is the establishment of interdisciplinary connections. The article develops and substantiates a classification of interdisciplinary connections between linear algebra and analytic geometry: "export-import" connections, "illustrative" connections, and integrating connections. The practical contribution of the work is the development of a comprehensive set of specific learning tasks that demonstrate the motivational potential of interdisciplinary connections: tasks with economic and chemical content, problems from cryptography and geometry. Special attention is given to "bridge tasks" (Rich Tasks) that can be solved in various ways using the tools of both disciplines. The authors also emphasize the importance of students understanding different methodological approaches to introducing the same concepts in linear algebra and analytic geometry courses (for example, the axiomatic approach in linear algebra and the geometric approach in analytic geometry when introducing the concept of scalar product). The results of the study can be used in the practice of teaching mathematical disciplines in higher education to enhance the effectiveness of the educational process and develop stable intrinsic

cognitive motivation in students. However, the authors emphasize the necessity for further empirical research, particularly regarding the alignment of interdisciplinary differentiation of academic disciplines and their integration in the context of ensuring stable cognitive motivation among students.

Key words: *interdisciplinary connections, cognitive motivation, structuring of educational content, cognitive load, linear algebra, analytic geometry, chemistry-related problems.*

Подано до друку 22.10.2025
Прийнято до друку 05.11.2025

УДК 372.854:37.091.33:376
DOI 10.24139/2519-2361/2025.02/13-22

O. M. Babenko
ORCID ID 0000-0002-1416-2700
Yu. V. Kharchenko
ORCID ID 0000-0002-8960-2440
A. S. Materiienko
ORCID ID 0000-0003-4184-2944
Сумський державний педагогічний
університет імені А. С. Макаренка

PRINCIPLES OF UNIVERSAL DESIGN IN CHEMISTRY EDUCATION

The article is devoted to the theoretical justification and specification of methodological approaches to the implementation of the principles of Universal Design for Learning (UDL) in the process of teaching chemistry in general secondary education institutions. The relevance of the study is determined by the insufficient development of subject-oriented methodological solutions that integrate UDL principles with the specific features of chemistry as a school subject. The purpose of the article is to identify and describe pedagogical strategies for the organization of learning activities that ensure the implementation of the three core principles of UDL (providing multiple means of engagement, providing multiple means of representation, and providing multiple means of action and expression), taking into account the abstract nature of chemical concepts, the experimental nature of the subject, the multimodality of educational information, and safety requirements. A system of methodological strategies is proposed, which includes: organizing the study of chemistry content through diverse everyday and practical contexts with opportunities for choice and differentiation of roles within research groups; multisensory representation of chemical concepts through the integration of verbal explanations, symbolic notation, physical and virtual models, dynamic visualizations, and tactile tools; systematic use of augmentative and alternative communication (AAC) to support understanding of chemical terminology, processes, and laboratory actions; and providing students with alternative formats for demonstrating learning outcomes while maintaining unified assessment criteria for chemical content. The results obtained indicate that Universal Design for Learning in chemistry teaching methodology functions as a coherent system of practical pedagogical solutions aligned with the objectives of the New Ukrainian School reform.

***Keywords**: Universal Design for Learning, chemistry teaching methodology, multiple means of engagement, multiple means of representation, multiple means of action and expression, augmentative and alternative communication, multisensory approaches, multimodality, accessibility of the educational environment, variability of learning.*

Problem Statement. The reform of the national education system of Ukraine, initiated by the Law of Ukraine “On Education” (2017) and the implementation of the Concept of the New Ukrainian School, sets qualitatively new tasks for pedagogical science and educational practice. Among these tasks, one of the most significant is the creation of an educational environment capable of ensuring equal access to high-quality education for every child, regardless of their individual characteristics, abilities, and educational needs. Within international educational