ЦІЛА ТА ДРОБОВА ЧАСТИНИ ЧИСЛА В ЗАВДАННЯХ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

(Частина 1. Обчислення виразів)

Одінцова О. О.

Загальні положення

Означення 1. ***Цілою частиною*** дійсного числа a називають найбільше ціле число, яке не перевищує даного числа a.

Ціла частина числа a позначається $[a]$ (*ант'є від a*). З означення цілої частини випливає, що $[a] \le a$, причому рівність $[a] = a$ досягається лише тоді, коли число a – ціле.

Приклад 1. $[0] = 0$; $[17] = 17$; $[11{,}38] = 11$; $\left[\frac{1}{5}\right] = 0$; $[-2{,}1] = -3$; $[-100] = -100$; $[\sqrt{2}\,] = 1$.

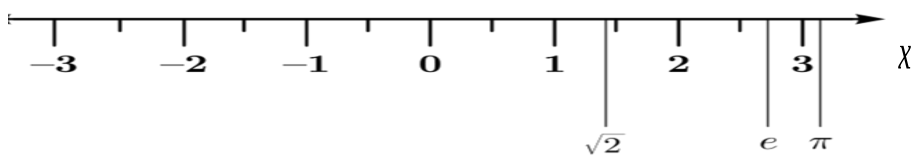

Рис.1.

Аналогічно можна встановити, що $[e] = 2$, а $[\pi] = 3$,$[-e] = = -3$, а $[-\pi] = -4$.

Приклад 2. Довести тотожність $[e]^{[\pi]} + [\pi] = [\pi]^{[e]} + [e]$.

Використовуючи зроблені раніше обчислення, маємо, що

$$[e]^{[\pi]} + [\pi] = 2^3 + 3 = 11,$$

$$[\pi]^{[e]} + [e] = 3^2 + 2 = 11.$$

Отже, $[e]^{[\pi]} + [\pi] = [\pi]^{[e]} + [e]$.

Означення 2. ***Дробовою частиною*** дійсного числа a називають різницю між числом a і його цілою частиною $[a]$.

Дробову частину числа a позначають символом $\{a\}$, тобто $\{a\} = a - [a]$. Оскільки завжди $a - [a] \geq 0$, то $\{a\} \geq 0$ для будь-якого дійсного числа a.

Приклад 3. $\{11\} = 0$; $\{45{,}52\} = 0{,}52$; $\{\frac{19}{5}\} = \{3\frac{4}{5}\} = \frac{4}{5}$;

$\{-75\} = 0$; $\{-4{,}32\} = -4{,}32 - [-4{,}32] = -4{,}32 - (-5) = 0{,}68$;

$\{-\frac{46}{11}\} = -\frac{46}{11} - [-\frac{46}{11}] = -4\frac{2}{11} - (-5) = \frac{9}{11}$;

$\{e\} = e - [e] = e - 2$;

$\{-\pi\} = -\pi - [-\pi] = -\pi - (-4) = 4 - \pi$.

Дробова частина числа може набувати тільки невід'ємних значень, менших за одиницю. Справді,

$$[a] \leq a < [a] + 1,$$

$$0 \leq a - [a] < 1 \text{ та}$$

$$0 \leq \{a\} < 1.$$

Крім того, для довільного дійсного числа

$$a\colon a = [a] + \{a\}.$$

Приклад 4. Обчислити суму

$$[\sqrt[4]{1}] + [\sqrt[4]{2}] + [\sqrt[4]{3}] + \ldots + [\sqrt[4]{2019}].$$

Оцінимо цілі частини в кожному доданку:

– для чисел від 1 до 15 – $[\sqrt[4]{1}] = [\sqrt[4]{2}] = [\sqrt[4]{3}] = \ldots = [\sqrt[4]{15}] = 1$;

– для чисел від 16 до 80 – $[\sqrt[4]{16}] = \ldots = [\sqrt[4]{80}] = 2$;

– для чисел від 81 до 255 – $[\sqrt[4]{81}] = \ldots = [\sqrt[4]{255}] = 3$;

– для чисел від 256 до 624 –$[\sqrt[4]{256}] = \ldots = [\sqrt[4]{624}] = 4$,

– для чисел від 625 до 1295 – $[\sqrt[4]{625}] = \ldots = [\sqrt[4]{1295}] = 5$

– і , нарешті , $[\sqrt[4]{1296}] = \ldots = [\sqrt[4]{2019}] = 6$.

Отже шукана сума:

$15 + 2\cdot 65 + 3\cdot 175 + 4\cdot 369 + 5\cdot 671 + 6\cdot 724 = 9845$.

Для знаходження цілої частини деякого числового виразу слід знайти «обмежувальний» проміжок одиничної довжини, який би містив заданий вираз. Бажано, щоб кінці цього проміжку були цілими числами, тоді нижня ціла границя проміжку і є цілою частиною виразу.

Приклад 5. Обчислити: а) $[lg128]$,

б) $[\frac{1+\sqrt{52}}{2}]$,

в) $[3 + cos\frac{101\pi}{204}]$.

а) Оскільки $2 \le lg\,128 < 3$,

то $[lg\,128] = 2$.

б) Аналогічно $7 \le \sqrt{52} < 8$,

$$8 \le 1+\sqrt{52} < 9,$$

$$4 \le \frac{1+\sqrt{52}}{2} < 4{,}5,$$

тому $[\frac{1+\sqrt{52}}{2}] = 4$.

в) Оскільки $\frac{101\pi}{204} \approx \frac{102\pi}{204} \approx \frac{\pi}{2}$, то

$$0 \le cos\frac{101\pi}{204} < \frac{1}{2},$$

$$3 \le 3 + cos\frac{101\pi}{204} < 3\frac{1}{2}$$ і

$$[\,3+\cos\frac{101\pi}{204}\,]=3.$$

Приклад 6. Обчислити:

$$[\underbrace{\sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019+\ldots+\sqrt{2019}}}}}_{2019\ \text{доданків}}].$$

Зрозуміло, що $44 \le \sqrt{2019} < 45$, оскільки $44^2 = 1936$, а $45^2 = 2025$, тому

$$[\sqrt{2019}\,]=44.$$

Міркуючи аналогічно, отримаємо:

$$2063 \le 2019+\sqrt{2019} < 2064,$$

$$45^2 \le 2019+\sqrt{2019} < 46^2,$$

$$45 \le \sqrt{2019+\sqrt{2019}} < 46 \text{ та}$$

$$[\sqrt{2019+\sqrt{2019}}\,]=45,$$

$$2063 \le 2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019}} < 2064,$$

$$45 \le \sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019}}} < 46 \text{ та}$$

$$[\sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019}}}\,]=45.$$

Аналогічна ситуація буде, коли доданків вже стане 4. Тобто, в подальшому, на значення цілої частини виразу кількість доданків не буде впливати. Тому

$$[\underbrace{\sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019+\ldots+\sqrt{2019}}}}}_{2019\ \text{доданків}}\,]=45.$$

Приклад 7. Обчислити:

$$[\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}}\,].$$

Зрозуміло, що $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+...\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}} \geq 1$.

Оцінимо вираз, починаючи з «внутрішніх» коренів:

$$12 \leq \sqrt[3]{2019} < 13, \text{ оскільки } 12^3 = 1728, \text{ а } 13^3 = 2197.$$

Беручи верхнє значення виразу, отримуємо

$$2018 + \sqrt[3]{2019} < 2018 + 13 = 2031, \text{ тому}$$

$$12 \leq \sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}} < 13,$$

$$2017 + \sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}} < 2017 + 13 = 2030, \text{ тому}$$

$$12 \leq \sqrt[3]{2017+\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}} < 13.$$

Отже, найбільше значення, яке може набувати вихідний вираз – це 13. Замінюємо на 13 більшу частину коренів, тобто

$$\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+...+\sqrt[3]{2019}}} < \sqrt[3]{2+13} = \sqrt[3]{15} < 3,$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+...+\sqrt[3]{2019}}}} < \sqrt[3]{1+3} = \sqrt[3]{4} < 2.$$

Отримаємо, що $1 \leq \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+...\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}} < 2$, тому

$$[\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+...\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}}] = 1.$$

Приклад 8. Обчислити

$$[2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+2018\cdot 2019\cdot 2020}].$$

Позначимо підкореневий вираз через S та перетворимо його наступним чином: кожен доданок суми розпишемо як різницю виразів:

$$1\cdot 2\cdot 3 = \frac{1}{4}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 - 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3), \text{ оскільки}$$

$$\frac{1}{4}(1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3)=\frac{1}{4}\,1\cdot2\cdot3\cdot(4-0)=1\cdot2\cdot3;$$

аналогічно далі:

$$2\cdot3\cdot4=\frac{1}{4}(2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4),$$

$$3\cdot4\cdot5=\frac{1}{4}(3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5),$$

$$\ldots$$

$$2018\cdot2019\cdot2020=\frac{1}{4}(2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021-$$

$$-2017\cdot2018\cdot2019\cdot2020).$$

Додаючи отримані вирази, будемо мати

$$S=\frac{1}{4}(1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5+\ldots+$$

$$2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021-2017\cdot2018\cdot2019\cdot2020)=$$

$$=\frac{1}{4}(2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021-0\cdot1\cdot2\cdot3)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021.$$

Продовжимо перетворення наступним чином:

$$S=\frac{1}{4}(2020-2)\cdot2019\cdot2020\cdot(2019+2)=\frac{1}{4}\cdot2019\cdot2020\cdot$$

$$\cdot(2019\cdot2020-2\cdot2019+2\cdot2020-4)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot2019\cdot2020\cdot(2019\cdot2020-2).$$

Оцінимо отриманий добуток:

$$\frac{1}{4}\cdot(2019\cdot2020-2)^2<\frac{1}{4}\cdot2019\cdot2020\cdot(2019\cdot2020-2)=S=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot((2019\cdot2020)^2-2\cdot2019\cdot2020)<$$

$$<\frac{1}{4}\cdot((2019\cdot2020)^2-2\cdot2019\cdot2020+1)=\frac{1}{4}\cdot(2019\cdot2020-1)^2.$$

Тому

$$2\sqrt{S}=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2019\cdot2020\cdot(2019\cdot2020-2)}\text{ і,}$$

враховуючи знайдені обмеження, маємо

$$2019\cdot2020-2<2\sqrt{S}<2019\cdot2020-1,$$

$$\text{і }[2\sqrt{S}]=2019\cdot2020-2.$$

Іноді знайдений «обмежувальний» проміжок є довшим за 1. У цьому випадку оцінюють різниці заданого виразу та всіх цілих чисел, що містяться у знайденому проміжку для визначення більш точних границь.

Приклад 9. Обчислити цілу частину $log_2 3 + log_3 4$.

Зрозуміло, що

$$2<log_2 3+log_3 3<log_2 3+log_3 4<log_2 4+log_3 9=$$

$$=2+2=4,$$

тобто $2< log_2 3 + log_3 4 < 4$.

Оскільки $3 \in (2, 4)$, то оцінимо різницю

$$(log_2 3+log_3 4)-3.$$

$$log_2 3+log_3 4-3=log_2 3+log_3 2^2-3=$$

$$=log_2 3+2\cdot log_3 2-2-1=log_2 3+2\cdot(log_3 2-1)-log_2 3\cdot log_3 2=$$

$$=log_2 3\,(1-log_3 2)-2\cdot(1-log_3 2)=(log_2 3-2)(1-log_3 2).$$

$$1<log_2 3<2,$$

$$-1< log_2 3 - 2 < 0,$$

$$\text{а } 0 < log_3 2 < 1,\ 0 < 1 - log_3 2 < 1, \text{ тому}$$

$$(log_2 3 - 2)(1 - log_3 2) < 0 \text{ і}$$

$$log_2 3 + log_3 4 - 3 < 0, \text{ а отже,}$$

$$2 < log_2 3 + log_3 4 < 3 \text{ і}$$

$$[log_2 3 + log_3 4] = 2.$$

Приклад 10. Знайти всі натуральні n, при яких $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ є простим числом.

Для розв′язування розглянемо випадки різних остач при діленні n на 5, тобто: $n = 5k$, $n = 5k \pm 1$, $n = 5k \pm 2$.

1) $n = 5k$, $\left[\frac{n^2}{5}\right] = [5k^2] = 5k^2$ (за умови, що k - ціле), $5k^2$ просте тоді і тільки тоді, коли $k = 1$; тоді $n = 5$.

2) $n = 5k \pm 1$, $\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{(5k \pm 1)^2}{5}\right] = \left[5k^2 \pm 2k + \frac{1}{5}\right] = 5k^2 \pm 2k$ (за умови, що k - ціле), $5k^2 \pm 2k = k \cdot (5k \pm 2)$ – просте тоді і тільки тоді, коли $k = 1$, відповідно $n = 4$, $n = 6$;

3) $n = 5k \pm 2$, $\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{(5k \pm 2)^2}{5}\right] = \left[5k^2 \pm 4k + \frac{4}{5}\right] = 5k^2 \pm 4k$ (за умови, що k – ціле), $5k^2 \pm 4k = k \cdot (5k \pm 4)$ – серед чисел такого виду простих немає.

Відповідь: $n \in \{4, 5, 6\}$.

Деякі властивості цілої та дробової частин дійсного числа

1°. *Якщо* $a \notin Z$, *то* $[-a] = -[a] - 1$.

Приклад 11. $[-2{,}5] = -3 = -[2{,}5] - 1$;

$[-\frac{1}{2}] = -1 = -[\frac{1}{2}] - 1$.

2°. *Якщо* $a \notin Z$, *то* $\{-a\} = 1 - \{a\}$.

Приклад 12. $\{-3{,}4\} = 1 - \{3{,}4\} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$;

$\{-\frac{1}{4}\} = 1 - \{\frac{1}{4}\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

3°. $[a+b] = \begin{cases} [a]+[b], & \text{якщо} \quad \{a\}+\{b\}<1, \\ [a]+[b]+1, & \text{якщо} \quad \{a\}+\{b\}\ge 1. \end{cases}$

Приклад 13. $[1{,}5+2{,}4] = [3{,}9] = 3 = [1{,}5] + [2{,}4] = 1 + 2$;

$[1{,}1-2{,}3] = [-1{,}2] = -2 = [1{,}1] + [-2{,}3] = 1 + (-3)$;

$[3{,}5+4{,}5] = [8] = 8 = [3{,}5] + [4{,}5] + 1 = 3 + 4 + 1$.

4°. Якщо $[a] = [b]$, то $|a - b| < 1$.

5°. $\{a+b\} = \begin{cases} \{a\}+\{b\}, & \text{якщо} \quad \{a\}+\{b\}<1, \\ \{a\}+\{b\}-1, & \text{якщо} \quad \{a\}+\{b\}\ge 1. \end{cases}$

Приклад 14. $\{5{,}2 + 3{,}4\} = \{8{,}6\} = 0{,}6 = \{5{,}2\} + \{3{,}4\} = 0{,}2 + 0{,}4$;

$\{3{,}64 + 4{,}36\} = \{8\} = 0 = \{3{,}64\} + \{4{,}36\} - 1 = 0{,}64 + 0{,}36 - 1$.

6°. *Якщо* α *– дійсне додатне число і* b *– натуральне число, то натуральних чисел, які не перевищують* α *та діляться на* b*, буде рівно* $[\frac{\alpha}{b}]$.

Приклад 15. Скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 500 і не діляться ні на 2, ні на 3.

За властивістю 6° цілої частини числа натуральних чисел, що не більші за 500 та кратні 2, буде рівно $[\frac{500}{2}] = 250$, а кратних 3 – $[\frac{500}{3}] = 166$.

Серед 166 чисел, що кратні 3, існують такі, що діляться і на 2, тобто кратні 6 (бо 2 і 3 взаємно прості). Таких натуральних чисел усього існує $[\frac{500}{6}] = 83$.

Отже, чисел, що задовольняють умову завдання, буде

$$500 - [\frac{500}{2}] - [\frac{500}{3}] + [\frac{500}{6}] = 500 - 250 - 166 + 83 = 167.$$

Зауваження 1. Взаємна простота дільників є суттєвою, оскільки в іншому випадку пошук чисел, що діляться одночасно на перше і друге число відбувається за складнішою схемою, в залежності від взаємозв'язків дільників.

7°. *Нехай n – натуральне число, а p – просте число. Тоді показник, з яким просте число p входить до розкладу $n!$ дорівнює :*

$$(1)\quad [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \ldots + [\frac{n}{p^k}]$$

де $p^k \le n < p^{k+1}$. (Якщо ж $p > n$, *то в розкладі $n!$ відсутні числа, що діляться на p).*

Зауваження 2. На практиці обчислення доданків

$$n_s = \left[\frac{n}{p^s}\right] \ (1 \le s \le k)$$

з формули (1) зручніше проводити за такою формулою

$$n_s = \left[\frac{n}{p^s}\right] = \left[\frac{n}{p^{s-1}} : p\right] = \left[\left[\frac{n}{p^{s-1}}\right] : p\right] = \left[\frac{n_{s-1}}{p}\right].$$

Крім того, $\left[\frac{n}{p}\right]$ не що інше, як неповна частка при діленні числа n на p.

Приклад 16. Скількома нулями закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до 701?

Зрозуміло, що лише два простих числа дають у добутку число, що закінчується нулем: це 2 та 5.

Аналізуючи формулу (1), можна зробити висновок, що показник степеня 2 у канонічному розкладі $n!$ ($n \neq 1$) завжди більший за показник степеня 5 у тому ж самому розкладі. Тому кількість нулів у добутку $n!$ – це показник степеня 5 у канонічному розкладі $n!$:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
701 & 5 & & & \\ \cline{2-2}
 & 140 & 5 & & \\ \cline{3-3}
 & & 28 & 5 & \\ \cline{4-4}
 & & & 5 & 5 \\ \cline{5-5}
 & & & & 1
\end{array}$$

$$140 + 28 + 5 + 1 = 174.$$

Таким чином, добуток 701! закінчується 174 нулями.