Рівняння і нерівності з параметрами

1. Лінійні та дробово-раціональні рівняння

$$\boxed{\boldsymbol{ax = b}}$$

$\boxed{\boldsymbol{a \neq 0}}$	$\boxed{\boldsymbol{a = 0}}$	
	$\boldsymbol{b = 0}$	$\boldsymbol{b \neq 0}$
$\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$	$\boldsymbol{0x = 0}$	$\boldsymbol{0x = b}$
	$\boldsymbol{x \in R}$	$\boldsymbol{x \in \emptyset}$

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{1}.}$ При якому значенні m рівняння $mx - 2x = m^2 - 4$ має безліч розв'язків?

$$mx - 2x = m^2 - 4$$

$$(m - 2)x = m^2 - 4$$

Рівняння має безліч розв'язків, якщо $m - 2 = 0$ і $m^2 - 4 = 0$, тобто

$$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$ 1

Відповідь: при $m = 2$.

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{2}.}$ Розв'язати рівняння $x + \frac{x}{a} = b$ залежно від значень параметрів a і b.

D: $a \neq 0$ (якщо $a = 0$, то $x \in \emptyset$)

$$x + \frac{x}{a} = b \Leftrightarrow (a+1)x = ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a + 1 \neq 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{ba}{a+1} \end{cases} \\ \begin{cases} a + 1 = 0 \\ 0x = -b \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{ba}{a+1} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ 0x = 0, x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b \neq 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: при $a = 0$ або ($a = -1$ і $b \neq 0$): $x \in \emptyset$; при ($a \neq -1$ і $a \neq 0$): $x = \frac{ba}{a+1}$; при ($a = -1$ і $b = 0$): $x \in R$.

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{3}.}$ Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{1-x} = \frac{a}{b}$ залежно від значень параметрів a і b.

D: $\begin{cases} b \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ (якщо $b = 0$, то $x \in \emptyset$)

$$\frac{x+1}{1-x} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \{x, b\} \subset D \\ (a+b)x = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \{x, b\} \subset D \\ \begin{cases} a+b \neq 0, a \neq -b \\ x = \frac{a-b}{a+b} \end{cases} \\ \begin{cases} a+b = 0, a = -b \\ 0x = -2b \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \neq 0 \\ a \neq -b \\ x = \frac{a-b}{a+b} \end{cases} \\ \begin{cases} b \neq 0 \\ a = -b \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$$

Перевірка

$$x = \frac{a-b}{a+b} = 1 \Leftrightarrow$$
$$a - b = a + b$$
$$2b = 0$$
$$b = 0$$

Відповідь: при $b = 0$ або при ($b \neq 0$ *і* $a = -b$): $x \in \emptyset$;

при ($b \neq 0$ і $a \neq -b$): $x = \frac{ba}{a+1}$.

---

2. Квадратні рівняння з параметром

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}}$$

$\boxed{\boldsymbol{a = 0}}$

$\boldsymbol{bx + c = 0}$

(див. п. $\mathbf{1}$)

$\boxed{\boldsymbol{a \neq 0}}$

$$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$$

$\boldsymbol{D \geq 0}$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}}$$

$\boldsymbol{D < 0}$

$\boldsymbol{x \in \emptyset}$

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{4}.}$ При якому значенні параметра b рівняння

$$\frac{x^2-(2b+3)x+b^2+3b}{x^2-9} = 0 \text{ має один розв'язок?}$$

ОДЗ: $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \; x \neq \pm 3.$

$$x^2 - (2b+3)x + b^2 + 3b = 0$$

Дане в умові рівняння має один розв'язок, якщо в останньому рівнянні:

1) $D = 0$ і $x_1 = x_2 \in$ ОДЗ **2)** $x_1 \in$ ОДЗ, $x_2 \notin$ ОДЗ і навпаки.

$D = (2b+3)^2 - 4(b^2+3b) = 9, \quad x_1 = 3 + b, \; x_2 = b$

1) Нехай спочатку $x_1 = x_2$, тобто $3 + b = b$ - це рівняння не має розв'язків.

2) Нехай тепер $x_1 \notin$ ОДЗ, $x_2 \in$ ОДЗ.

$x_1 = 3 + b = 3$, тобто $\boxed{b = 0}$ і $x_2 = 0 \in$ ОДЗ

$x_1 = 3 + b = -3$, тобто $\boxed{b = -6}$ і $x_2 = -6 \in$ ОДЗ

$x_1 \in$ ОДЗ, $x_2 \notin$ ОДЗ.

$x_2 = b = 3$, тобто $\boxed{b = 3}$ і $x_1 = 6 \in$ ОДЗ

$x_2 = b = -3$, тобто $\boxed{b = -3}$ і $x_1 = 0 \in$ ОДЗ

Відповідь: $b \in \{0, 3, -3, -6\}$

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{5}.}$ При якому значенні параметра b рівняння

$$\frac{x^2+(1-2b)x+4b-6}{\sqrt{2x^2-3x+1}} = 0 \text{ має один розв'язок?}$$

ОДЗ: $2x^2 - 3x + 1 > 0, \quad x \in (-\infty; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}) \cup (\mathbf{1}; +\infty)$

$$x^2 + (1-2b)x + 4b - 6 = 0$$

Задане рівняння має один розв'язок, якщо:

1) $D = 0$ і $x_1 = x_2 \in$ ОДЗ **2)** $D > 0$ і $x_1 \in$ ОДЗ, $x_2 \notin$ ОДЗ і навпаки

$$D = (1-2b)^2 - 4(4b-6) = (2b-5)^2,$$

$$x_1 = 2b - 3 \quad \text{та} \quad x_2 = 2$$

1) Якщо $D = 0$, тобто $(2b-5)^2 = 0$, $\boxed{b = \frac{5}{2}}$ і $x_1 = x_2 = 2 \in$ ОДЗ

.

2) Нехай $D > 0$ $x_1 = 2 \in$ ОДЗ, тому $x_2 \notin$ ОДЗ, отже $\frac{1}{2} \leq 2b-3 \leq 1$ і $\frac{7}{4} \leq b \leq 2$.

Відповідь: $b = \frac{5}{2}$ або $b \in \left[\frac{7}{4}; 2\right]$

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{6}.}$ При якому значенні параметра a рівняння $x^2 - 2ax + a + 1 = 0$ і $x^2 + ax - a - 1 = 0$ мають спільний корінь?

Нехай рівняння мають спільний корінь x. Тоді він є розв'язком системи: $\begin{cases} x^2 - 2ax + a + 1 = 0 \\ x^2 + ax - a - 1 = 0 \end{cases}$.

Маємо $x = \frac{2(a+1)}{3a}$, $a \neq 0$.

Підставимо його у друге рівняння і знайдемо значення a: 4

$$\left(\frac{2(a+1)}{3a}\right)^2 + a\left(\frac{2(a+1)}{3a}\right) - a - 1 = 0$$

$$(a+1)(4(a+1) + 6a^2 - 9a^2) = 0,$$

$$(a+1)(-3a^2 + 4a + 4) = 0,$$

Коренями останнього рівняння є; $a = -1, a = 2, a = -\frac{2}{3}$.

Відповідь: $a \in \{2, -1, -\frac{2}{3}\}$.

Формули Вієта

$\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$ – корені рівняння $\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{D \geq 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \\ \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \end{cases}}$

Приклад **7**. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ найменша?

1) Умова існування коренів: $D \geq 0$,

$D = a^2 - 4a + 8 > 0$ для довільного дійсного a.

2) Знайдемо a з умови $x_1^2 + x_2^2 \to min$. Застосуємо теорему Вієта:
$x_1 + x_2 = -a,\ x_1 x_2 = a - 2$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2a + 4.$

Маємо квадратичну функцію. Найменше значення вона приймає у вершині: $a = \frac{2}{2} = 1$

Відповідь: при $a = 1$.

Знаки коренів квадратного рівняння

$$\boldsymbol{sign\, x_1 = sign\, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{sign\, x_1 \neq sign\, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{x_i > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{x_i < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases}}$$

Приклад **8**. При якому значенні параметра a рівняння
$x^2 - 2(a-2)x + (a^2 - 2a - 3) = 0$ має різні додатні корені?
Рівняння має два додатні корені, якщо:

$$\begin{cases} D > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 - (a^2 - 2a - 3) > 0 \\ a^2 - 2a - 3 > 0 \\ -2(a-2) < 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо $a \in (3; 3{,}5)$.

Відповідь: при $a \in (3; 3{,}5)$.

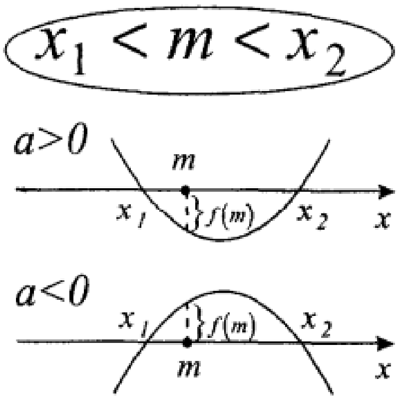
$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{9}.}$ При якому a рівняння $(a+2)x^2 - 2ax + 3a = 0$ має корені різного знака?

З умови випливає, що $a \neq -2$. Рівняння має корені різного знака, якщо:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a(a+2) \geq 0 \\ \frac{3a}{a+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+3) \leq 0 \\ a(a+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\mathbf{-2}; \mathbf{0}).$$

Відповідь: при $a \in (\mathbf{-2}; \mathbf{0})$.

Розташування коренів квадратного рівняння відносно числа



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ f(m)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ f(m)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow af(m)<0$$

Один з коренів більший за m, другий - менший за m.

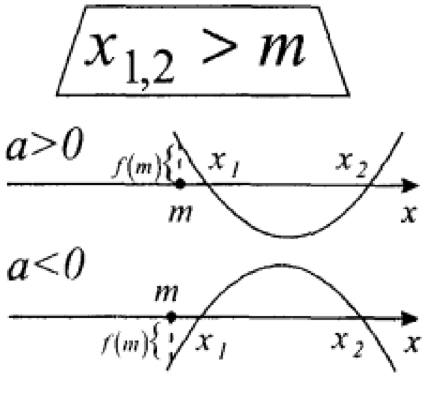
$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{10}.}$ При якому a один з коренів рівняння

$(2a+1)x^2 - ax + a - 2 = 0$ більший, а другий менший за –1?

Маємо: $(2a+1)f(-1) < 0$,

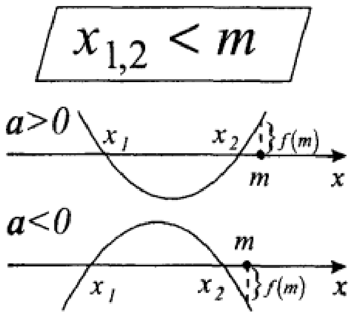
$$(2a+1)(2a+1+a+a-2) = (2a+1)(4a-1) < 0 \Leftrightarrow a \in (-\mathbf{\tfrac{1}{2}}; \mathbf{\tfrac{1}{4}})$$

Відповідь: при $a \in (-0{,}5; 0{,}25)$.



$$\left[\begin{cases} a>0 \\ f(m)>0 \\ D\ge 0 \\ x_в > m \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ f(m)<0 \\ D\ge 0 \\ x_в > m \end{cases}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} D\ge 0 \\ x_в > m \\ af(m)>0 \end{cases}}$$

Обидва корені більші за m



$$\left[\begin{cases} a>0 \\ f(m)>0 \\ D\ge 0 \\ x_{‰} < m \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ f(m)<0 \\ D\ge 0 \\ x_{‰} < m \end{cases}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} D\ge 0 \\ x_{‰} < m \\ af(m)>0 \end{cases}}$$

Обидва корені менші за m.

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{11}.}$ При якому a обидва корені рівняння

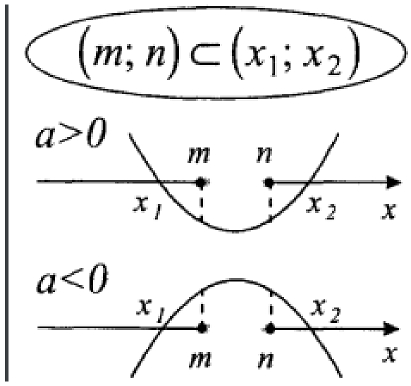
$ax^2 - 4x + 3a + 1 = 0$ менші за 1?

Визначальні умови: $\begin{cases} D \ge 0 \\ x_{\text{вер}} < 1 \\ a \cdot f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4a(3a+1) \ge 0 \\ \frac{4}{2a} < 1 \\ a(4a-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + a - 4 \le 0 \\ a(a-2) > 0 \\ a(4a-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ a \in [-4/3; 0)$$

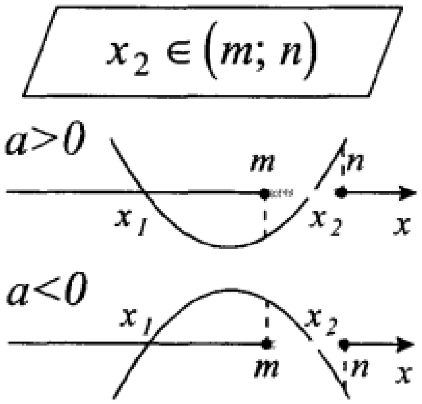
Відповідь: при $a \in [-4/3; 0)$.

Розташування коренів квадратного рівняння відносно інтервала



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)>0\\ f(n)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}af(m)<0\\ af(n)<0\end{cases}$$

Один з коренів менший за m, другий - більший за n.

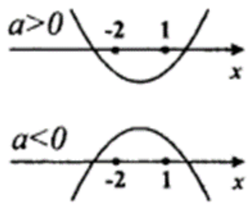


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(m)<0\\ f(n)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ f(m)>0\\ f(n)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}af(m)<0\\ af(n)>0\end{cases}$$

Обидва корені менші за n, але один з коренів більший за m.

Якщо обидва корені більші за m, але один менший n, знаки протилежні.

Приклад **12**. При якому значенні параметра a один з коренів рівняння $ax^2-(3a-2)x+a-2=0$ більший за 1, а другий менший за -2?



За умовою $a\neq 0$. В обох випадках маємо

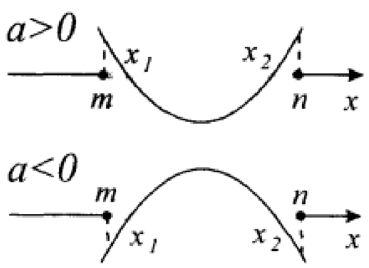
$$\begin{cases}af(-2)<0\\ af(1)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a(4a+6a+a-6)<0\\ a(a-3a+2+a-2)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a(11a-6)<0\\ a(-a)<0\end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;\frac{6}{11})$$

Відповідь: при $a\in(0;\frac{6}{11})$.

Розташування коренів квадратного рівняння відносно інтервала

$$\boxed{x_{1,2} \subset (m;n)}$$



$$\left[\begin{cases} a>0 \\ f(m)>0 \\ f(n)>0 \\ D\geq 0 \\ x_в \in (m,n) \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ f(m)<0 \\ f(n)<0 \\ D\geq 0 \\ x_в \in (m,n) \end{cases}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} D\geq 0 \\ x_в \in (m;n) \\ af(m)>0 \\ af(n)>0 \end{cases}}$$

Обидва корені більші за m, але менші за n.

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{13}}$. При якому значенні параметра a усі розв'язки нерівності $x^2-(2a+1)x+3a\leq 0$ містяться в інтервалі (1;4)?

Маємо:

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ af(1)>0 \\ af(4)>0 \\ x_{вер}\in(1;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-8a+1\geq 0 \\ a>0 \\ a<\frac{12}{5} \\ 2<2a+1<8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\in\left(-\infty;\mathbf{1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\mathbf{1}+\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right) \\ a>0 \\ a<\frac{12}{5} \\ \frac{1}{2}<a<3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[\mathbf{1}+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{12}{5}\right)$$

Відповідь: при $a\in\left[\mathbf{1}+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{12}{5}\right)$.

$\boxed{\text{Приклад } \mathbf{14}.}$ При якому значенні параметра a рівняння

$$x^4 - (1-2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$$

1) Не має розв'язків
2) Має один розв'язок
3) Має чотири розв'язки?

1) Нехай $x^2 = t,$ тоді

$$t^2 - (1-2a)t + a^2 - 1 = 0$$

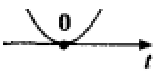
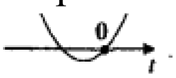
Рівняння не має розв'язків, якщо або $t_{1,2} < 0$, або D<0.

$$\text{а) } t_{1,2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ x_{\text{вер}} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5 - 4a \geq 0 \\ f(0) = a^2 - 1 > 0 \\ \frac{2a-1}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -\mathbf{1})$$

б) $D < 0 \Leftrightarrow 5-4a < 0 \Leftrightarrow a \in (\frac{5}{4}; +\infty)$

$a \in (-\infty, -\mathbf{1}) \cup (\frac{5}{4}; +\infty)$

2) Початкове рівняння має один розв'язок, якщо $f(t) = t^2 - (1-2a)t + a^2 - 1 = 0$ має єдиним розв'язком $t = 0$ або має два кореня: $t_1 = 0$ та $t_1 < 0$.


або


Ці умови визначаються системою: $\begin{cases} D \geq 0 \\ x_{\text{вер}} \leq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Розв'язуючи дану систему, дістанемо $a = -1$

3) Рівняння має 4 розв'язки, якщо $t_{1,2} > 0$,  тобто,

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_{\text{вер}} > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4a \geq 0 \\ a^2 - 1 > 0 \\ \frac{2a-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\mathbf{1}; \mathbf{\frac{5}{4}}).$$