

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Мірошніченко Карина Андріївна

**СПЕЦИФІКА НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ
РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ В УМОВАХ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/ Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

_____ О.С.Чашечникова
доктор педагогічних наук, професор,
професор кафедри математики, фізики
та методик їх навчання

« » _____ 2024 року

Виконавець:

_____ К.А.Мірошніченко

« » _____ 2024 року

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 ЗМІШАНЕ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ЯК ЗАСІБ ПОДОЛАННЯ ОСВІТНІХ ВТРАТ.....	6
1.1. Проблеми навчання математики у сучасних умовах. Дистанційне та змішане навчання	6
1.2. Психолого-педагогічні особливості навчання математики старших підлітків та юнаків	30
1.3. Аналіз програм і підручників математики у контексті дослідження	34
Висновки до першого розділу	42
РОЗДІЛ 2.....	44
НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ В УМОВАХ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ.....	44
2.1. Створення бази для вивчення рівнянь та нерівностей у старшій школі.....	44
2.2 Особливості навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей учнів 7-9 класів.....	51
2.3. Специфіка навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей учнів старшої школи в умовах змішаного навчання	57
Висновки до другого розділу.....	85
ВИСНОВКИ	87
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	89
ДОДАТКИ.....	95

ВСТУП

Актуальність. Перехід до нового формату навчання – дистанційного навчання – стало важливим етапом в еволюції сучасної освіти. Трансформація такого роду відчутною стала абсолютно для всіх суб'єктів навчання, бо перехід від традиційних уроків до віртуальних класів виявився викликом непередбачуваного масштабу. Нестримний потік інформації, віддаленість від учителів та однокласників, а також нестабільність технічних засобів, емоційні труднощі, відсутність самодисципліни тощо створюють надзвичайно тяжкі умови для учнів, які вивчають ключові математичні поняття стосовно розділу рівнянь та нерівностей. Відокремленість від шкільного середовища та відсутність можливості спрямувати свої питання безпосередньо до вчителя ускладнюють процес засвоєння матеріалу. Умови змішаного навчання, часто супроводжувані технічними проблемами та низькою мотивацією, ці фактори роблять навчання учнів старшої школи досить виснажливим завданням.

Необхідно уважно розглядати цей новий контекст, знаходячи ефективні стратегії та інноваційні підходи для забезпечення результативного процесу вивчення рівнянь та нерівностей, адже їх вивчення є важливим для розвитку математичних компетентностей та критичного мислення. В той же час, завдання на розв'язування рівнянь та нерівностей є обов'язковими серед завдань ЗНО/НМТ.

Тому нами обрана тема кваліфікаційної роботи **«Специфіка навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання»**.

Мета дослідження: проаналізувати та розробити рекомендації щодо навчання учнів розв'язуванню рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання у старшій школі.

Згідно з метою дослідження було визначено такі **завдання:**

проаналізувати особливості навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання;

проаналізувати програми та підручники з вивчення теми рівнянь та нерівностей;

обґрунтувати ефективність змішаного навчання (комбінація традиційних уроків та використання Інтернет-ресурсів, відеоуроків тощо) в навчанні розв'язувати рівняння та нерівності в старшій школі;

визначити чинники, що стимулюють або гальмують інтерес учнів до вивчення теми рівнянь та нерівностей.

Об'єкт дослідження: процес навчання математики у старшій школі.

Предмет дослідження: навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання.

Методи дослідження. Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань використано наступні методи:

- теоретичні: вивчення, аналіз та узагальнення наукової літератури, методів щодо опанування та розв'язування рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання;
- емпіричні: спостереження за освітнім процесом з метою вивчення педагогічного досвіду задля більш ефективного проведення контролю знань стосовно визначення рівня підготовки учнів до теми розв'язування рівнянь та нерівностей в старшій школі.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розробці методичних рекомендацій щодо навчальному процесі та створенні більш привабливого та гнучкого матеріалу для учнів (розробка уроків, завдань тощо).

Апробація результатів та публікації. Основні положення і висновки дослідження висвітлено у тезах «Підґрунття навчання учнів розв'язуванню рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання у старшій школі» [13] Звітної студентської науково-практичній конференції фізико-математичного факультету (Суми, 3 травня 2024 року), (Суми, 29 листопада 2024 року).

Структура та обсяг роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел

У **вступі** розглянуто актуальність проблеми, мету та завдання дослідження, об'єкт та предмет дослідження.

У першому розділі **«Змішане навчання математики як засіб подолання освітніх втрат»** розглянуто проблеми навчання математики у сучасних умовах, порівняння різних форм навчання (традиційного, дистанційного та змішаного), психолого-педагогічні особливості навчання математики у старших підлітків та юнаків. Також проведено аналіз програм та підручників математики у контексті дослідження.

У другому розділі **«Навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь та нерівностей в умовах змішаного навчання»** розглянуто пропедевтику вивчення рівнянь та нерівностей, особливості навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей учнів середньої школи (7-9 клсів) та конкретно специфіку навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей учнів старшої школи в умовах змішаного навчання.

У **висновках** представлені висновки до роботи.

Загальний обсяг роботи представлено 97 сторінками друкованого тексту, 8 таблиць та 3 рисунка. Список використаних джерел включає 36 одиниць.

РОЗДІЛ 1

ЗМІШАНЕ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ЯК ЗАСІБ ПОДОЛАННЯ ОСВІТНІХ ВТРАТ

1.1. Проблеми навчання математики у сучасних умовах. Дистанційне та змішане навчання

У сучасному світі освіта в Україні зазнає значних змін з метою подолання впливу негативних чинників. Інформаційні технології розвиваються стрімко, що призводить до появи нових підходів і створення нових методик у навчанні. Одним із таких підходів є змішане навчання, яке поєднує традиційні методи викладання з елементами онлайн-навчання. У процесі вивчення математики, особливо при засвоєнні ключових питань (зокрема розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем), змішане навчання стає ефективним засобом покращення розуміння матеріалу, розвитку самостійності учнів та підвищення їх мотивації до навчання.

Змішане навчання – це освітній підхід, який поєднує традиційне очне навчання з використанням елементів дистанційного навчання із залученням цифрових інструментів. Ця модель спрямована на використання сильних сторін як традиційного, так і онлайн-навчального середовища для створення більш гнучкого, персоналізованого процесу навчання. Змішане навчання дає нам можливість змінити ставлення не лише до того, де і коли відбувається навчальний процес, а й до того, якими ресурсами та засобами підкріплюється саме навчання.

Тобто, такий новий формат навчання являє собою комбінацію традиційної роботи у класі та самостійної роботи учнів за допомогою онлайн-ресурсів. Це дозволяє забезпечити гнучкість у процесі навчання: учні можуть опановувати матеріал у власному темпі, отримуючи доступ до різних джерел інформації та використовуючи цифрові інструменти для розв'язування завдань. Головною

перевагою змішаного навчання є можливість поєднання переваг традиційних форм навчання, таких як безпосереднє спілкування з учителем, з сучасними технологіями, які дають змогу розширити межі класичної освіти.

З власного досвіду (гімназія №1/ліцей №33 м. Суми) можемо підтвердити, що змішане навчання у сучасних умовах є зручним форматом.

Змішане навчання є непоганим варіантом для можливого запобігання освітніх втрат, в першу чергу. Складний для розуміння теоретичний матеріал або розв'язання рівнянь та нерівностей можна винести на очні уроки, теорію та не дуже складні в розумінні теми – на дистанційний формат.

Старшокласники часто стикаються з такими проблемами, як тривожність через складність предмету, страх перед помилками або недостатній рівень вміння працювати самостійно. У таких випадках змішане навчання може стати засобом подолання цих труднощів, оскільки надає можливість учням опрацьовувати матеріал у зручному для них темпі, звертаючись до вчителя лише у разі необхідності.

Розв'язування рівнянь та нерівностей є однією із змістових ліній шкільного курсу математики в старших класах. Ця тема передбачає розвиток низки важливих навичок: логічного мислення, вміння аналізувати та синтезувати інформацію, застосування формул і правил.

Для старшокласників особливо важливо не тільки вміти виконувати стандартні операції, але й розуміти логіку процесу розв'язування та вміти застосовувати знання в різних контекстах. Такі завдання, як розв'язування рівнянь з параметрами або систем нерівностей, вимагають від учнів більш ґрунтовного аналізу та вміння робити обґрунтовані висновки.

Змішане навчання математики, яке поєднує традиційне навчання в класі з онлайн-ресурсами, стає важливим інструментом для подолання освітніх втрат, що виникли під час пандемії COVID-19 та повномасштабного вторгнення російського агресора на українські землі. Цей підхід дозволяє адаптувати навчальний процес до індивідуальних потреб учнів, надаючи їм можливість засвоювати матеріал у зручному темпі.

Поєднання офлайн та онлайн-форматів сприяє більш глибокому розумінню складних математичних концепцій завдяки використанню інтерактивних платформ, відеоуроків та тестів. Учні можуть отримувати зворотний зв'язок у реальному часі. Однією з ключових переваг змішаного навчання є можливість індивідуального підходу до кожного учня. У класі вчитель може оцінити рівень знань учнів і визначити слабкі місця, а використання онлайн-платформ, таких як Всеосвіта, На урок, Google Forms, дозволяє надавати завдання, що відповідають індивідуальному рівню кожного учня.

Змішане навчання також сприяє підвищенню мотивації учнів. Використання різних технологій робить навчальний процес цікавішим і доступнішим. Наприклад, створення інтерактивних математичних моделей у GeoGebra або проходження математичних квестів у Kahoot перетворює навчання на гру, залучаючи учнів до активної роботи. Таким чином учням, навіть старшій школі, буде цікавіше вивчати матеріал, а найголовніше – легше.

Освітні втрати часто пов'язані з недостатнім повторенням або закріпленням вивченого матеріалу. Часто буває так, що «написав і забув», у змішаному навчанні це легко вирішується через комбінування очної роботи з учителем: самостійно опрацьований учнем матеріал закріплюється спільною роботою з вчителем. Або, з власної практики, я робила наступним чином: у класі я пояснювала нову тему, робила фото класної роботи, додатково залишала запис уроку (частіше всього це було зроблено для учнів, які перебувають за межами України). Всі ці матеріали можна було переглянути вдома для кращого розуміння теми. Це особливо корисно для тих, хто потребує більше часу для засвоєння матеріалу або для учня, який має прогалину через відсутність на уроці.

Однак, для ефективної реалізації змішаного навчання важливо враховувати кілька викликів. Зокрема, необхідно забезпечити доступ учнів та педагогів до необхідних технічних засобів і навчити їх правильно користуватися платформами. Особливо це стосується учнів, аби уникнути подальшого загострення нерівного доступу до якісного навчання. Крім того, важливо

зберігати баланс між очним і онлайн-навчанням, щоб уникнути зниження ролі традиційного спілкування між учителем і учнем.

Отже, змішане навчання математики є ефективним рішенням подолання освітніх втрат, що відкриває нові горизонти для індивідуалізації навчання та підвищення обізнаності учнів у предметі.

Крім того, змішане навчання стимулює розвиток самостійності у старшокласників. Вони можуть обирати зручний час для виконання завдань чи перегляд матеріалу, що дозволяє глибше зануритися в навчальний процес. Таке управління навчанням створює умови для виявлення індивідуальних інтересів та сильних сторін учнів, що веде до покращення їх академічних досягнень.

Важливим аспектом цього підходу є інтеграція сучасних технологій у навчальний процес. Використання математичних програм, таких як GeoGebra, і додатків дозволяє учням візуалізувати абстрактні поняття. Це надає можливість краще зрозуміти теми, які традиційно викликали труднощі, наприклад, для швидкого аналізу зміни графіка в залежності від відповідних параметрів, що є дуже доречним щодо вивчення рівнянь та нерівностей, їх систем.

Але, слід зауважити, що (особливо це стосується графіків функцій, які часто використовують при розв'язуванні рівнянь та нерівностей) хоча і математичні платформи та програми є важливим інструментом у вдосконаленні освітнього процесу, однак їх використання вимагає обережного підходу, задля забезпечення ефективності навчання та уникнення можливих негативних наслідків. Важливим моментом є забезпечення того, щоб учні спершу опанували базові знання та вміння, перш ніж переходити до використання сучасних цифрових інструментів. Зокрема, у вивченні тем, пов'язаних із побудовою графіків функцій, про яку вже говорили вище, ключовим завданням є розвиток у школярів здатності самостійно будувати графіки «вручну» та розуміти їхні властивості. Такий підхід формує глибоке розуміння властивостей функцій, які старшокласники використовують при розв'язуванні рівнянь та нерівностей.

Разом із тим, для успішного опанування таких складних тем, важливим є створення гнучкого навчального середовища, яке поєднує традиційне

викладання з сучасними технологіями. Саме змішане навчання стає важливим інструментом для вирішення цього завдання, адже дозволяє одночасно забезпечувати доступ до навчальних матеріалів та зберігати можливість взаємодії учня з учителем.

За результатами проведених співбесід з колегами, маємо наступні висновки: змішане навчання було доцільним рішенням для організації освітнього процесу. Від початку нового 2024-2025 навчального року діти жодного разу не були в стінах навчального закладу, а перебували лише на онлайн навчанні, через це всі учасники освітнього процесу розуміють, з якими труднощами стикаємося зараз, і з якими труднощами у результаті ми будемо працювати у майбутньому. Процес навчання у змішаному форматі має переваги перед дистанційним навчанням. Пропонуємо переглянути порівняльну таблицю, яка відображає аналіз можливостей традиційного, змішаного та дистанційного форматів:

Таблиця 1.1

**Порівняльна характеристика організації навчання за різними форматами
(традиційне, змішане та дистанційне навчання)**

Критерій	Традиційне навчання	Змішане навчання	Дистанційне навчання
Організація робочого середовища	У класі, фізична присутність учнів.	Поєднання роботи у класній кімнаті (наприклад, на етапі пояснення нового матеріалу) і роботи онлайн (наприклад, розміщення	Вдома за комп'ютером, усі уроки проводяться онлайн через Zoom, Google Meet, Microsoft Teams тощо.

		додаткових матеріалів у Google Classroom).	
Організація навчальної діяльності	У класі використання класичної дошки, підручників, групових і фронтальних	Комбінація: у класі – пояснення та обговорення, онлайн – інтерактивні вправи та	Пояснення через презентації, відеоуроки, інтерактивні дошки (наприклад, Miro), використання асинхронних методів
	методів (наприклад, фронтальне пояснення формул на уроці)	відеоуроки (наприклад, тестування в Kahoot)	(відеолекції, завдання на платформах Google Classroom і так далі)
Час на підготовку	Підготовка власних конспектів, друкованих матеріалів для використання під час уроку	Збільшується через потребу підготовки матеріалів як у класі, так і для онлайн-роботи (наприклад, запис відеоуроків або створення електронних тестів)	Найбільший час на підготовку (наприклад, записати відеолекцію, розробити інтерактивні завдання, перевірити сумісність технічних платформ)

Контроль за навчальним процесом за залученістю учня	Легко контролювати учнів під час уроку (наприклад, помічати, хто неуважний чи не виконує завдання)	Контроль більш складний, оскільки учні працюють самостійно онлайн (наприклад, необхідність слідкувати за виконанням завдань у системі)	Найважче контролювати активність учнів: часто не зрозуміло, хто активно працює, а хто відволікається (наприклад, хтось може бути «присутнім», але не залученим у Zoom)
Залежність від матеріально технічного забезпечення	Базові технічні засоби (класична дошка та крейда, підручники, проектор, роздаткові матеріали)	Помірна: потрібно використовувати цифрові ресурси, забезпечити доступ учнів до платформ (наприклад, Google Classroom, інтерактивні дошки)	Висока: обов'язково наявність Інтернету, комп'ютерного обладнання та функціонування онлайн-платформ. Будь-яка технічна проблема може зірвати урок
Комунікація з учнями	Безпосередня, жива взаємодія. Відповіді на запитання в	Часта зміна форм комунікації: очне спілкування у	Переважно онлайн: відповіді на запитання через чати, відеозустрічі або електронну пошту.

	реальному часі, організація дискусії	класі, обговорення через онлайн-чати чи відеоконференції (наприклад, у Microsoft Teams)	Важче підтримувати емоційний контакт з учнями
Оцінювання рівня знань та вмінь учнів	Традиційне: контрольні та самостійні роботи, тести на папері, усне опитування в класі	Поєднання: частина оцінювання проходить у класі (наприклад, письмові роботи), частина – через онлайн-платформи (наприклад, автоматизоване тестування в Google Forms)	Тести на цифрових платформах, усні відповіді через Zoom, завдання з використанням відео чи інтерактивних ресурсів (наприклад, Flipgrid для запису відповідей). Рідко – письмові роботи, які надсилаються
Емоційне навантаження	Робота учнів у звичному середовищі, живий контакт із класом додає мотивації. Іноді	Вище через необхідність переключатися між форматами (наприклад, адаптувати пояснення до очного й онлайн-	Дуже високе: відсутність живого спілкування з учнями, постійна залежність від техніки та інтернету, необхідність встигати вирішувати технічні проблеми

	виникають проблеми з дисципліною	формату, перевіряти виконання учнів онлайн)	(наприклад, організовувати записи уроків для тих, хто пропустив урок), «чорні екрани»
Переваги для вчителя	Живе спілкування з учнями. Звичний формат викладання	Можливість використовувати різноманітні ресурси та методи. Більша гнучкість у підходах до навчання. - Розширення професійного досвіду	Навчання новим технологіям. Робота з учнями у різних часових форматах. Можливість створити базу цифрових матеріалів, що згодом спрощує підготовку до уроків
Недоліки для вчителя	- Менша гнучкість. - Залежність від фіксованого розкладу. - Обмеженість у застосуванні сучасних технологій	- Високе навантаження через необхідність підготовки матеріалів для обох форматів. - Залежність від технічних умов. - Складнощі в оцінюванні самостійності учнів під час	- Висока технічна залежність. - Важче підтримувати увагу та мотивувати учнів. - Велике навантаження на організацію процесу та контроль виконання завдань

		виконання онлайн-завдань	
--	--	-----------------------------	--

Окрім вчителів звичайно дуже сильно страждають і учні. Вони розгублені, невпевнені, немотивовані на досягнення чогось нового через такі формати навчання. Нижче представлена порівняльна таблиця, яка відображає відгуки учнів стосовно різного формату навчання:

Таблиця 1.2

Порівняльна таблиця особливостей навчання у традиційному, змішаному та дистанційному форматах

Критерій	Традиційне навчання	Змішане навчання	Дистанційне навчання
Місце навчання	У класі разом із однокласниками. Сиджу за партою, слухаю пояснення вчителя, на перерві спілкуємось	Частина навчання в школі, частина – вдома або онлайн. Наприклад, після уроку з фізики виконую домашнє завдання на платформі Google Classroom	Навчаюся вдома за комп'ютером. Наприклад, дивлюся відеоурок з математики на платформі Zoom або в записі
Форма взаємодії	Безпосереднє спілкування з учителем і однокласниками. Наприклад, можу швидко поставити запитання під час уроку	Взаємодія в класі під час очних занять і через онлайн-платформи. Наприклад, обговорюю задачу в класі, а додаткові	Взаємодія лише онлайн. Наприклад, пишу повідомлення у чаті Zoom чи отримую відповіді на питання

		питання ставлю в чаті Microsoft Teams	електронною поштою
Розклад навчання	Фіксований: маю уроки за розкладом у визначений час. Наприклад, математика починається о 10:00, і я повинен бути присутнім у класі	Частково гнучкий. Наприклад, на уроки в школі приходжу за розкладом, але завдання з біології можу виконати вдома у зручний для мене час	Дуже гнучкий: можу виконувати завдання чи переглядати відео-уроки у своєму темпі. Наприклад, якщо пропустив урок, переглядаю запис у будь-який час
Контроль рівня знань та вмінь	Учитель контролює мою роботу в реальному часі. Наприклад, під час письмової контрольної роботи я не можу використовувати допоміжні матеріали	Частина завдань перевіряється в класі (наприклад, тести), а частина — через онлайн-платформи, де можу отримати швидкий результат (наприклад, автоматична перевірка тестів у Google Forms)	Контроль здебільшого онлайн. Наприклад, виконую тести вдома, але не завжди впевнений, чи результати є об'єктивними через можливість використання підручників
Доступ до ресурсів	Використовую друковані підручники,	Комбінація друкованих і цифрових ресурсів.	Більше використовую цифрові матеріали.

	роздаткові матеріали, можу конспектувати в зошиті	Наприклад, у класі працюю з підручником, а вдома користуюся онлайн-додатком Geogebra для задач з математики	Наприклад, читаю онлайн-підручник, виконую інтерактивні завдання на різних платформах або дивлюся відео на YouTube, використовую друковані підручники
Самостійність	Швидше отримую допомогу від вчителя	Помірна. Наприклад, у класі можу отримати підтримку вчителя, а вдома повинен самостійно знайти відповідь, використовуючи Інтернет або додаткові матеріали	Висока. Наприклад, маю самостійно організовувати свій день, виконувати всі завдання без прямого нагляду вчителя
Мотивація	Вища через живе спілкування та присутність учителя і однокласників	Помірна. Наприклад, в класі я більш мотивований працювати, але вдома можу втратити	Нижча через відсутність безпосередньої взаємодії з учителем і однокласниками. Наприклад, часто

		концентрацію через інші заняття чи бажання відволіктися на соціальні мережі	відчуваю себе ізольованим або втомлююся від тривалої роботи за комп'ютером
Складність навчання	Відчуваю постійну підтримку вчителя. Наприклад, він може одразу допомогти, якщо щось не зрозуміло	Складніше, оскільки потрібно самостійно виконувати частину завдань і звертатися до додаткових ресурсів (наприклад, шукати пояснення задач у відеоуроках)	Найскладніше через необхідність високої самодисципліни. Наприклад, можу не виконати завдання вчасно, якщо сам себе не проконтролюю
Переваги	- Живе спілкування з учителем і друзями. - Швидка відповідь на запитання. - Чіткий розклад. - Простий доступ до друкованих матеріалів	- Комбінація різних способів навчання. - Гнучкість у виконанні завдань вдома. - Доступ до цифрових ресурсів. - Розвиток самостійності	- Гнучкий графік. - Можливість навчатися у своєму темпі. - Великий вибір цифрових матеріалів і платформ. - Відсутність потреби витрачати час на дорогу до школи

Зауваження	- Фіксований розклад. - Можливість відчуття перенасиченості від постійних занять у класі. - Залежність від учителя	- Потреба налаштовуватися на різні формати навчання. - Складнощі у пошуку балансу між онлайн і очними завданнями. - Високі вимоги до технічного забезпечення вдома	- Відсутність живого спілкування. - Залежність від техніки, Інтернету. - Можливі відволікання під час роботи вдома. - Важкість у підтриманні мотивації та концентрації
-------------------	--	--	---

З приводу самостійності учнів: змішане навчання математики також спонукає учнів до активної участі у процесі навчання. Завдяки можливості працювати в групах, учні мають шанс обговорювати проблеми, ставити запитання та отримувати зворотний зв'язок від однокласників. Така соціальна взаємодія формує навички командної роботи, розвиває критичне мислення, які є надзвичайно важливими в сучасному світі.

Адаптивне навчання, що є невід'ємною частиною змішаного підходу, дозволяє диференціювати навчальний процес. Вчитель математики може отримувати дані про успіхи та прогалини щодо вивченого матеріалу кожного учня, відповідно коригуючи конспекти власних уроків, підтримуючи тих, хто найбільше потребує допомоги. Це забезпечує індивідуальний підхід до кожного учасника освітнього процесу, що може позитивно впливати на самооцінку та мотивацію учня.

Важливо наголосити, що впровадження ефективного змішаного навчання не є миттєвим рішенням. Це процес, що вимагає часу, ресурсів та колективних зусиль. Проте, результати, які ми спостерігаємо вже сьогодні, свідчать про те, що

такий підхід має потенціал для створення умов для більш зацікавленого, активного та результативного навчання учнів.

Змішане навчання, порівняно з дистанційним, не лише підвищує рівень залученості учнів, але й сприяє розвитку їхньої автономії. Учні отримують можливість самостійно управляти своїм навчальним процесом. Це, у свою чергу, формує у старшокласників відповідальність за майбутні успішні результати. Змішане навчання сприяє інтеграції різноманітних ресурсів та інструментів у навчальний процес. Учні у вільному доступі можуть використовувати відео, інтерактивні платформи та онлайн-курси, що робить навчання більш цікавим і насиченим. Урізноманітнення підходів до освіти допомагає підтримувати увагу школярів та заохочує їх до більш ґрунтовного вивчення теми.

Нарешті, змішане навчання готує учнів до навчання в умовах, що постійно змінюються. У сучасному світі, де інформація швидко застаріває, здатність до адаптації та самовдосконалення стає незамінною рисою конкурентоспроможної людини. Тому учні, які проходять через змішане навчання, краще підготовлені до викликів, з якими вони можуть зіткнутися у майбутньому.

Під час роботи у змішаному форматі, разом із великою кількістю переваг, також має місце достатня кількість недоліків. Першою і найголовнішою проблемою є початок роботи у середовищі нової освітньої платформи, яка допомагає покращити вивчення математики. Перехід на нові програми онлайн-навчання викликає багато труднощів й у вчителів. Із власного досвіду і досвіду колег, бачимо, що знайомство з новими платформами займає немало часу, а дистанційне навчання підкреслює нерівність у доступі до ресурсів. В цьому навчальному році ми разом з учнями переходили на нову освітню платформу – Microsoft Teams, до цього працювали в Google Classroom. Порівняємо використання цих платформ, аналізуючи власний досвід (табл. 1.3).

Порівняльна характеристика платформ Google Classroom та Microsoft Teams для організації навчального процесу

Характеристика	Google Classroom	Microsoft Teams	Порівняння
Інтерфейс користувача	Простий, мінімалістичний, інтуїтивно зрозумілий. Орієнтований на навчання, зосереджений на створенні завдань та матеріалів	Багатофункціональний, трохи складніший для освоєння. Інтегрований з іншими інструментами Microsoft 365	Google Classroom: Підходить для швидкого старту та базового використання. Teams: Потребує більше часу для адаптації, але пропонує більше можливостей
Інструменти для комунікації	Коментарі до завдань, електронна пошта. Чати мають базову функціональність	Потужний чат, відеоконференції, функції планування зустрічей. Інтеграція з Outlook	Teams: Більш розвинені функції комунікації, зручні для дистанційного та гібридного навчання

Інтеграція з іншими сервісами	Повністю інтегрується з Google Drive, Docs, Sheets, Slides та ін.	Інтеграція з OneDrive, Word, Excel, PowerPoint, Forms	Google Classroom: Простий обмін файлами через Google Drive. Teams: Більш потужні офісні інструменти Microsoft для роботи з документами
Створення завдань та тестів	Легке створення завдань і тестів через Google Forms. Обмежені можливості аналізу результатів	Зручне створення завдань, тестів через Microsoft Forms. Більш розширені аналітичні можливості	Teams: форми тестування, з автоматичною оцінкою і аналізом
Доступ до навчальних матеріалів	Зберігання в Google Drive. Простий доступ до матеріалів через пошук і категоризацію	Зберігання в OneDrive або каналах Teams. Потрібно налаштовувати структуру каналів	Google Classroom: Простий доступ без додаткових налаштувань. Teams: Більш гнучка структура, але вимагає

			попередньої організації
Організація класів та груп	Автоматична синхронізація з Google Workspace. Легке додавання та управління учасниками	Організація класів через Teams. Можливість створення окремих каналів для різних тем або груп	Teams: Більш гнучка структура для класів, з поділом на підгрупи. Classroom: Простий і швидкий підхід до організації класів
Мобільний додаток	Легкий і швидкий. Зручний для завантаження та перегляду матеріалів	Функціональний, але складніший інтерфейс для новачків	Classroom: Кращий для швидкого використання на ходу. Teams: Більш розширені функції, але потребує звикання
Відеозустрічі	Немає вбудованого відеозв'язку, потрібно використовуват	Вбудовані відеоконференції з розширеними функціями	Teams: Більш різноманітніший список форматів зустрічей для

	и Google Meet окремо	(розділення на групи, підняття рук, запис)	дистанційного навчання
Аналітика та оцінювання	Обмежена аналітика. Ручна обробка оцінок та звітів	Розширені можливості аналітики успішності, візуалізація даних	Teams: Краща для відстеження прогресу учнів
Безпека та конфіденційність	Використовує політику безпеки Google. Дані зберігаються в хмарі Google	Використовує політику безпеки Microsoft. Дані зберігаються в Microsoft 365	Обидві платформи відповідають високим стандартам безпеки, але організація даних залежить від вибору інфраструктури

Проаналізувавши програми, можна зробити загальний висновок: Google Classroom підходить для шкіл та вчителів, які потребують простого інструменту для управління навчанням без складних функцій. Microsoft Teams більше орієнтований на глибоку інтеграцію з іншими інструментами, що робить його привабливим, таким, що підходить для складніших організаційних потреб та дистанційного навчання.

Але не всі учні та вчителі мають однакові матеріально-технічні можливості для використання Інтернету або відповідної техніки, що може призводити до значних проблем у організації навчання. У цьому контексті важливо розробляти індивідуальні програми, які враховуватимуть різні рівні підготовки та можливості учнів та вчителів.

Якщо опустити вищезгадані труднощі, то ще однією з головних проблем є зниження мотивації учнів, які зазвичай відчують меншу зацікавленість у вивченні предмету без безпосереднього контакту з викладачем. Відсутність живого спілкування ускладнює процес пояснення концепцій та вирішення завдань, що негативно впливає на засвоєння матеріалу.

Аналіз власного досвіду роботи та досвіду роботи колег (гімназія 1/ліцей №33 м. Суми) можна зазначити безліч труднощів, що виникають під час ознайомлення та засвоєння нового матеріалу: найперше – вимкнені камери. Неможливо контролювати учнів за чорними екранами та долучити їх до спільної роботи на уроці. Інтерес до навчання зникає з кожним наступним уроком. Тому на плечах вчителя важка робота – не лише надавати освітні послуги, але ще і мотивувати до отримання цих освітніх послуг, що є дуже енергозатратним.

Зворотній зв'язок. Розв'язування рівнянь та нерівностей, особливо – нових для учнів – тригонометричних, показникових, логарифмічних, більш складних – з параметрами, рівняння, що містять змінну під знаком модуля, вимагає високого рівня теоретичних знань та практичних навичок. Учні можуть мати труднощі з розумінням або застосуванням нових понять, але через страх виглядати некомпетентними або недостатньо підготовленими, вони часто відкрито не говорять про це. Учні старших класів можуть відчувати невпевненість у власних знаннях та неохоче звертатися за допомогою. Це може бути пов'язано з бажанням самостійно вирішити проблему, побоюванням помилитися перед однолітками або відчуттям, що запитання можуть здатися «недоречними». Це знижує їхню активність у процесі зворотнього зв'язку. Зниження мотивації до навчання, що може виникати через складність матеріалу, впливає на готовність учнів давати зворотний зв'язок. Якщо вони не бачать практичної цінності теми або не відчують, що мають достатньо часу чи ресурсів для глибокого опрацювання матеріалу, вони можуть уникати дискусій з учителем.

Під час змішаного навчання значна частина взаємодії відбувається онлайн. Цифрові формати навчання мають певні обмеження у порівнянні з класичними: складніше налагодити ефективний діалог, учні можуть соромитися писати

повідомлення або задавати запитання в чатах. Відсутність прямої взаємодії з вчителем часто призводить до зниження залученості учнів.

Але, власне, українська система освіти стикається з численними викликами, одним із яких є недостатня кількість часу для зворотного зв'язку між учителем і учнем через щільність шкільної програми. Шкільні програми, які є структурованими для охоплення великого обсягу матеріалу, часто залишають вчителям мало можливостей для обговорення проблемних тем, що значно впливає на якість навчання. На кожен урок зазвичай відводиться чіткий час із заздалегідь визначеним планом. Такий підхід дозволяє вчителю забезпечити послідовність у викладанні, але створює суттєві обмеження, коли учням необхідно більше часу на осмислення складного матеріалу або обговорення незрозумілих моментів. Як наслідок, проблемні теми часто залишаються недоопрацьованими, що знижує мотивацію і результати навчання.

Ефективний зворотний зв'язок є невід'ємною частиною якісної освіти. Він дозволяє виявити слабкі місця в розумінні матеріалу, скоригувати підхід до навчання і розвивати самостійність учня. Проте через високий темп програми вчителі змушені обмежувати зворотний зв'язок або переносити його на позаурочний час. Це створює додаткове навантаження на всіх суб'єктів навчання і робить навчальний процес менш гнучким.

Щоб вирішити проблему з достатньою наявністю ефективного зворотного зв'язку, необхідно переглянути структуру шкільних програм. Зменшення обсягу матеріалу на користь глибшого опрацювання основних тем може стати одним із дієвих рішень. Також доцільно інтегрувати більше часу для рефлексії, дискусій і практичних завдань у кожен урок. Використання сучасних технологій, таких як інтерактивні платформи для тестування й обміну інформацією, також може значно полегшити процес зворотного зв'язку.

Не менш важливою проблемою є наявність психологічних бар'єрів. Зворотний зв'язок часто пов'язаний із саморефлексією та визнанням того, що щось не зрозуміло або викликає труднощі. Це може бути емоційно непросто для

учнів, які бояться осуду з боку однолітків чи вчителя. Відсутність атмосфери довіри може пригнічувати бажання ділитися труднощами.

Але, якщо правильно з'єднати онлайн та офлайн компоненти, врахувати всі вищезгадані розповсюдженні труднощі, можна знайти вирішення цих проблем. Саме змішане навчання дозволяє зміцнити практичні навички учнів, поєднуючи теорію з практикою, створюючи безпосередній зв'язок між учнями та вчителями. Це може дати можливість для більш гнучкого та індивідуального підходу до навчання, де кожен учень матиме можливість вчитися у зручному для нього темпі.

Для ефективної реалізації змішаного навчання необхідно впроваджувати сучасні технології, які не лише допомагають відтворювати процес навчання, але й підвищують інтерес учнів. Використання інтерактивних платформ та інструментів може суттєво покращити розуміння матеріалу. Наприклад, завдання з використанням геометричних малюнків або комп'ютерних симуляцій можуть допомогти учням візуалізувати графіки функцій, їх особливості, різного виду залежності, проаналізувати зміну коренів рівнянь та нерівностей з параметрами тощо. Вчитель навчається разом з дітьми, тому коли виникають проблеми, всі учасники освітнього процесу перетворюються на велику команду, яка сумлінно розв'язує кожну проблему.

Крім того, важливо створювати мотиваційний контент, про який мова йшла вище, який підвищує залученість учнів. Проекти, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями, можуть стати чудовими прикладами, які показують важливість опанувати відповідними знаннями та навичками з відповідної теми. Завдяки таким завданням учні можуть зрозуміти практичне застосування математики, що робить предмет більш цікавим та актуальним для їхнього життя.

У підсумку, адаптація навчання до сучасних умов вимагає активної співпраці вчителів, учнів та батьків. Запроваджуючи інноваційні підходи та технології, ми можемо не лише підвищити мотивацію, але й забезпечити якісну освіту для кожного учня, незалежно від їхніх початкових можливостей.

Для ефективної реалізації змішаного навчання важливо також враховувати індивідуальні потреби учнів. Використання адаптивних навчальних платформ, які дозволяють налаштовувати темп і складність матеріалу відповідно до особистих здібностей учнів, може значно покращити їхнє навчання. Такі технології дозволяють вчителям слідкувати за прогресом учнів та надавати додаткову підтримку та ресурси у разі необхідності.

Інтеграція соціальних мереж та комунікаційних інструментів у навчальний процес може сприяти підвищенню зацікавленості учнів та легкості у розумінні тем. В соціальній мережі TikTok все частіше зустрічаються короткі відео з поясненням алгоритмів розв'язування базових завдань. Цікаво слідкувати за тим, як діти надсилають відео і діляться своїми враженнями щодо почутого та побаченого. Але іноді надсилають відео, в яких помічають помилки. Аналізуючи таке відео, учні краще розуміють важливість навчання не за допомогою популярного чату GPT, а саме через спілкування із вчителем. Також варіант створення віртуальних груп (поділ на «кімнати» у середовищі Google Meet) для обговорення розв'язування завдань під час уроку, спільних проектів або участі в онлайн-конкурсах дозволяє учням відчувати себе частиною команди, що, в свою чергу, стимулює їх до активнішої участі у навчальному процесі. Навіть звичайне обговорення домашнього завдання вже мотивує на аналіз матеріалу, отриманого на уроці. Взаємодопомога впливає на мотивацію.

Зрештою, підвищення якості надання освітніх послуг в умовах змішаного навчання вимагає постійного вдосконалення. Вчителям слід активно шукати нові методи і підходи, обмінюватись досвідом та практиками, щоб забезпечити максимально ефективне навчання. Тільки в такій співпраці можна досягнути справжніх результатів. Українські освітні ресурси надають величезні можливості для підвищення кваліфікації та обміну досвідом.

Наприклад:

- Prometheus – пропонує безкоштовні масові відкриті онлайн-курси для вчителів. Тематика курсів включає інноваційні методи навчання, цифрові технології та психологічні аспекти викладання.

- На Урок – ресурс, який надає готові матеріали для проведення уроків, вебінари та можливість участі в професійних конкурсах для обміну найкращими практиками.
- Всеосвіта – платформа, яка дозволяє створювати тестування, інтерактивні завдання та отримувати сертифікати підвищення кваліфікації.
- Освіторія – одна з найвідоміших українських освітніх платформ, яка публікує корисні статті, відео та кейси для педагогів. «Освіторія» є джерелом новітніх тенденцій в освіті та підтримує вчителів у процесі адаптації до сучасних викликів.

Однією з ключових умов успішного змішаного навчання є взаємодія між учителями як колегами. Обмін досвідом і практиками допомагає вчителям уникати повторення помилок іншими, впроваджувати нові ідеї та швидше адаптуватися до змін. Спільноти педагогів на базі українських платформ, таких як Google Classroom, Microsoft Teams, а також форуми на ресурсах, як-от На Урок, дозволяють обговорювати актуальні проблеми та спільно знаходити рішення.

Наприклад, у рамках вебінарів на платформі «Всеосвіта» вчителі діляться практичними кейсами використання інтерактивних технологій на уроках математики, фізики чи української мови. А «Освіторія» регулярно висвітлює інтерв'ю з провідними освітянами та розробляє корисні поради щодо інтеграції нових підходів у навчальний процес.

Варто зазначити, що технології навчання постійно змінюються, тому вчителям необхідно бути готовими до впровадження інновацій у навчальний процес. Залучення новаторських інструментів, таких як віртуальна реальність або інтерактивні платформи, може створити захоплююче середовище для учнів, яке підвищить їхню мотивацію та зацікавленість у навчанні. Участь в тренінгах та вебінарах дозволяє педагогу підтримувати високий рівень кваліфікації і бути в курсі сучасних тенденцій в освіті.

Також важливо зауважити, що для ефективного впровадження змішаного навчання потребується постійний аналіз та оцінювання результатів. Вчителі

можуть використовувати різноманітні інструменти для збору даних про успішність учнів, що дозволяє вчасно виявити проблеми та вжити необхідних заходів. Регулярний зворотній зв'язок з учнями, про які говорилося вище, також є цінними, адже вони допомагають адаптувати навчальний процес відповідно до очікувань та потреб навчальної спільноти. Тому налаштування комфортної атмосфери є вирішальним етапом для співпраці учнів з вчителем.

Окрім того, важливу роль відіграє підтримка батьків у процесі змішаного навчання. Взаємодія між вчителями і батьками може створити потужну мережу підтримки, яка допомагає учням впевненіше пересуватися у здобутті знань. Інформування батьків про прогрес їхніх дітей та важливі етапи навчання стане додатковим стимулом для учнів.

1.2. Психолого-педагогічні особливості навчання математики старших підлітків та юнаків

Навчання математики старших підлітків та юнаків є складним і багатоаспектним процесом, що вимагає врахування психологічних, педагогічних та соціальних чинників. Цей період розвитку учнів характеризується суттєвими змінами в когнітивній, емоційній і соціальній сферах, що безпосередньо впливає на їхнє сприйняття навчального матеріалу, здатність до самостійної роботи та мотивацію до навчання.

Для цієї вікової групи характерна висока чутливість до успіхів і невдач. Позитивний зворотний зв'язок, включення в навчання елементів гейміфікації, наприклад, використання освітніх платформ типу Kahoot або Quizizz, сприяє підтримці інтересу до математики.

- **Створення ситуацій успіху.** Навіть невеликі досягнення мають бути позитивно підкреслені. Наприклад, вчитель може демонструвати прогрес учнів у вирішенні задач різного рівня складності.

- **Зв'язок із реальним життям.** Пояснення, як математичні концепції застосовуються в житті, наприклад, у фінансовій сфері чи ІТ, допомагає підвищити інтерес до предмету.
- **Гейміфікація.** Використання ігор, онлайн-платформ (Kahoot, Quizizz) та конкурсів сприяє створенню змагальної атмосфери, що мотивує учнів працювати краще.

Математика, як основний предмет, викликає широкий спектр емоцій – від зацікавленості до тривоги. Розуміння того, як створити позитивне навчальне середовище та підтримувати мотивацію учнів, стає важливим завданням для педагогів. Емоційна підтримка з боку вчителя та створення безпечного середовища для навчання допомагає знижувати тривожність під час вивчення складних тем.

Емоційний стан учня безпосередньо впливає на його здатність засвоювати нові знання. Дослідження, такі як праці К. Ізарда про роль емоцій у когнітивних процесах, демонструють, що позитивні емоції сприяють покращенню уваги, зацікавленості та пам'яті. У контексті навчання математики це передбачає: створення ситуацій успіху для формування впевненості; використання гумору та ігрових елементів для зниження напруги; підтримка зацікавленості шляхом інтеграції математичних задач у реальні життєві ситуації.

Як зазначено в роботах Ж. Піаже, у старшому підлітковому віці (14–16 років) та юнацькому віці (16–18 років) у школярів відбувається активний розвиток абстрактного мислення. Вони поступово переходять від конкретного операційного мислення, характерного для молодших школярів, до формально-логічного мислення, здатного оперувати абстрактними поняттями, символами та моделями.

Математика, як дисципліна, особливо потребує сформованості таких когнітивних умінь:

- 1) учні повинні мати здатність відходити від конкретних об'єктів і оперувати математичними моделями, абстрактними поняттями, як-от змінні, функції, рівняння;

- 2) здатність вибудовувати причинно-наслідкові зв'язки, аналізувати взаємозалежності між компонентами математичних формул;
- 3) вміння самостійно будувати математичні моделі, що описують реальні явища, реальні процеси.

Водночас не у всіх учнів в цьому віці розвиваються ці навички однаковими темпами. Деякі школярі швидко засвоюють абстрактні поняття, тоді як інші потребують додаткової підтримки й постійної опори на конкретні приклади.

Мотивація є ключовим фактором успішного навчання математики. У старшому підлітковому та юнацькому віці мотивація зазнає значних змін:

- зовнішня мотивація: у багатьох учнів переважає бажання отримати хороші оцінки, скласти ЗНО/НМТ, або вступити до університету. Такий підхід може бути ефективним у короткостроковій перспективі, але часто не сприяє глибокому засвоєнню знань;
- внутрішня мотивація: інтерес до математики як до предмета формується у школярів, якщо вони бачать її практичне застосування або якщо їм вдається зрозуміти її логіку та красу.

Для підвищення мотивації учня вчителям необхідно демонструвати реальну користь застосування математики в житті, підкреслюючи зв'язок предмету із різними професіями, науками та технологіями. Наприклад, задачі з геометрії можуть демонструвати принципи дизайну та архітектури, а завдання з алгебри – способи аналізу економічних даних.

У старшому шкільному віці учні часто стикаються з емоційними труднощами, такими як страх перед складними темами або невпевненість у власних силах. Математика, з її високим рівнем абстракції, нерідко сприймається школярами як складний навчальний предмет.

1. Страх помилок: багато учнів бояться робити помилки, особливо в старших класах, коли результати виконання завдань мають значний вплив на можливість подальшого здобуття освіти.

2. Невпевненість у собі: якщо учень у минулому мав труднощі з математикою, це може сформувати у нього негативне ставлення до предмета.

Для подолання цих емоційних бар'єрів учителю математики важливо створювати атмосферу підтримки на уроках. Акцентування уваги на тому, що помилки є природною частиною навчання, а також похвала вчителя навіть за невеликі успіхи можуть значно підвищити впевненість учнів.

У старшій школі соціальна взаємодія стає надзвичайно важливою для учнів. Вони прагнуть до співпраці з однолітками та отримують задоволення від колективного обговорення складних завдань. Це відкриває широкі можливості для використання групових методів навчання математики.

1. Робота в групах: учні можуть розв'язувати складні задачі спільно, обмінюючись ідеями та пропозиціями. Такий підхід сприяє не лише більш глибокому засвоєнню матеріалу, а й розвитку комунікативних навичок.
2. Проектна діяльність: розробка математичних проектів, наприклад, аналіз реальних статистичних даних або побудова математичних моделей, дозволяє старшокласникам відчувати себе дослідниками та розкрити творчий потенціал.

Ефективне викладання математики в старшій школі вимагає від учителя високого рівня професіоналізму та здатності адаптувати підходи до різних учнів.

1. Індивідуальний підхід: учитель має враховувати рівень підготовки та інтереси кожного учня. Для цього можна використовувати диференційовані завдання та гнучкий темп викладання.
2. Інтерактивні методи: використання сучасних технологій, таких як онлайн-платформи або інтерактивні дошки, дозволяє зробити уроки цікавішими, а навчальний матеріал більш доступним.
3. Зворотний зв'язок: регулярне надання учням зворотного зв'язку щодо їхніх успіхів та помилок допомагає формувати у них усвідомлення власного прогресу.

Сучасні технології відкривають нові можливості для навчання математики старшокласників. Використання інтерактивних програм, онлайн-ресурсів та математичних симуляторів дозволяє учням глибше розуміти складні концепції та розвивати навички самостійного навчання.

1. Графічні калькулятори: використання графічних калькуляторів на уроках дозволяє учням швидко аналізувати властивості функцій та знаходити їх графіки.
2. Онлайн-платформи: такі ресурси, як GeoGebra або Desmos, пропонують інтерактивні вправи та візуалізації, які допомагають учням краще зрозуміти абстрактні поняття.
3. Дистанційне навчання: використання платформ, як-от Microsoft Teams чи Google Classroom, дозволяє організовувати навчання навіть у періоди відсутності очного викладання.

Успішне навчання математики у старшій школі залежить не лише від учителя, але й від співпраці всіх учасників освітнього процесу. Лише спільними зусиллями можна створити умови, які дозволять кожному учню розкрити свій потенціал.

1.3. Аналіз програм і підручників математики у контексті дослідження

Аналіз програм і підручників з математики є важливим етапом у дослідженні специфіки навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь та нерівностей, особливо в умовах змішаного навчання. Важливо розуміти, як структура програм, зміст підручників і методичні рекомендації сприяють або, навпаки, обмежують можливості впровадження нових підходів. У цьому контексті розглянемо програми та підручники, які використовуються в українських школах, і проаналізуємо їхню відповідність сучасним вимогам змішаного навчання.

Програма з математики для старшокласників містить основні вимоги до формування математичних знань, умінь та навичок учнів. Вона визначає, які теми необхідно вивчити, яку кількість годин слід приділити вивченню кожної теми, а також формулює очікувані результати навчання.

Змістова лінія рівнянь, нерівностей та їх систем у шкільному курсі математики представлено вивченням таких рівнянь та нерівностей:

- лінійні;
- квадратні;
- дробово-раціональні;
- ірраціональні;
- логарифмічні та показникові рівняння та нерівності;
- тригонометричні;

а також розглядають:

- системи рівнянь та нерівностей;
- рівняння з параметрами;
- рівняння, що містять змінну під знаком модуля.

Програма передбачає розв'язування цих рівнянь і нерівностей як аналітичними методами, так і графічними. Для умов змішаного навчання важливим є те, що багато з цих тем можуть ефективно опрацьовуватися за допомогою онлайн-інструментів та платформ. Аналіз програм, для детальнішого і зручного ознайомлення, представлення у вигляді таблиці:

Таблиця 1.4

Порівняння програм з алгебри для 10 та 11 класів

	Програма для 10 класу	Програма для 11 класу
Зміст навчання	Лінійні, квадратні, ірраціональні, дробово-раціональні рівняння, функції.	Розв'язування тригонометричних рівнянь, методи розв'язування складних рівнянь, функції.

Методи навчання	Традиційне викладання, покрокові пояснення, вправи, онлайн-ресурси.	Поглиблене навчання, інтерактивні методи, використання візуалізації функцій.
Завдання для учнів	Завдання базового та середнього рівня складності.	Завдання середнього та високого рівня складності.
Ресурси для змішаного навчання	Використання онлайн-курсів та відеоуроків.	Використання віртуальних лабораторій, інтерактивних платформ.
Проблеми для учнів	Складність вивчення ірраціональних рівнянь і нерівностей.	Складність вивчення тригонометричних рівнянь та застосувань функцій.
Проблеми для вчителів	Недостатнє оснащення шкіл для ефективного змішаного навчання.	Високий рівень складності матеріалу для індивідуальної роботи учнів у змішаному форматі.

Аналіз програм з алгебри для 10 та 11 класів

1. Програма для 10 класу:

- зміст програми: програма для 10 класу орієнтована на закріплення базових математичних знань і вмінь, зокрема, розв'язання лінійних та квадратних рівнянь, дробово-раціональних рівнянь, ірраціональних рівнянь, показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей. Програма також охоплює основи теорії функцій та їх графічного зображення.
- методика навчання: програма зосереджена на традиційному підході до викладання, із використанням покрокових пояснень та чіткої структури теоретичного матеріалу. Використовуються традиційні методи: пояснення теорії, розв'язування прикладів, виконання вправ. Для цього року характерне введення елементів змішаного навчання (поєднання

традиційного навчання з онлайн-ресурсами, відео-уроками та інтерактивними завданнями).

- проблеми та труднощі: однією з основних проблем для учнів і вчителів є освоєння більш складних типів рівнянь (ірраціональних, показникових), що вимагає значних зусиль та часу на детальне пояснення кожного кроку. Для вчителів у форматі змішаного навчання важливим є інтеграція традиційних методів і новітніх цифрових інструментів, що може бути важким через недостатню технічну оснащеність шкіл.

2. Програма для 11 класу:

- зміст програми: програма для 11 класу націлена на поглиблене вивчення функцій, систем рівнянь, а також розв'язування складних рівнянь і нерівностей. Учні вивчають додаткові теми, такі як методи розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей, вивчення властивостей функцій та застосування їх до складних завдань. Програма також включає роботу з логарифмічними та показниковими функціями.
- методика навчання: у 11 класі акцент робиться на поглибленому розумінні матеріалу. Використовуються як традиційні методи (розв'язування прикладів і вправ), так і інтерактивні методи навчання, зокрема використання комп'ютерних програм для візуалізації функцій і рівнянь. У цьому класі також активно застосовуються онлайн-платформи та віртуальні лабораторії.
- проблеми та труднощі: В умовах змішаного навчання проблема полягає в складності організації індивідуальної роботи з учнями, оскільки вчителі можуть не мати достатнього досвіду в управлінні онлайн-уроками, а учні – відповідальності за самостійне навчання. Також складніші теми, такі як методи розв'язування тригонометричних рівнянь, потребують чітких пояснень та додаткової практики, що може бути важким у форматі змішаного навчання.

Аналіз програм з математики показує, що вони розроблені з акцентом на формування ключових компетентностей учнів, однак не завжди враховують нові

вимоги до змішаного навчання. Традиційні підходи до викладання часто орієнтовані на класичні методи навчання, в той час як сучасні освітні тренди потребують більшої інтеграції технологій.

Основна проблема полягає в тому, що програма недостатньо враховує можливості онлайн-платформ та інструментів, які могли б значно підвищити якість навчання і полегшити роботу вчителів і учнів у змішаному навчанні.

Програма передбачає застосування різних методів розв'язування рівнянь та нерівностей, що відповідає вимогам сучасної освіти, де акцент робиться на креативність і пошук альтернативних шляхів до розв'язання проблем.

Щодо навчальних матеріалів, то у вітчизняних школах для старшокласників використовуються кілька основних підручників з математики, серед яких найбільш популярні такі автори: Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., О.С. Істер, Тарасенкова Н.А., Бурда М.І., Колесник Т.В.. Кожен із цих підручників має свої особливості щодо викладу матеріалу та підходів до розв'язування рівнянь та нерівностей.

У вигляді таблиці 1.5 представлено аналіз підручників.

Таблиця 1.5

Порівняльна характеристика підручників з алгебри

	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.	Тарасенкова Н.А., Бурда М.І., Колесник Т.В.	Істер О.С.
Рівняння, що розглядаються	Лінійні, квадратні, дробово- раціональні, ірраціональні, показникові,	Лінійні, квадратні, ірраціональні, логарифмічні	Лінійні, квадратні, дробово- раціональні, тригонометричні

	логарифмічні, тригонометричні		
Нерівності, що розглядаються	Лінійні, квадратні, ірраціональні, показникові, логарифмічні	Лінійні, квадратні, дробово- раціональні	Лінійні, квадратні, тригонометричні, ірраціональні
Розписування теоретичного матеріалу	Теорія чітко структурована, використано схеми і таблиці. Детально розписані алгоритми розв'язання	Теорія менш структурована, акцент на прикладах. Алгоритми подано стисло	Теорія добре структурована, подано основні визначення і властивості. Деякі алгоритми менш детальні
Розписування розв'язання прикладів	Детальні покрокові розв'язання з поясненням кожного кроку	Приклади подані скорочено, деякі кроки не пояснено	Покрокові розв'язання, але іноді бракує пояснень для складних прикладів
Рівень складності прикладів	Завдання різного рівня складності, від простих до олімпіадних	Більшість прикладів середньої складності, є прості, але складних менше	Завдання здебільшого середньої складності, складні приклади подано як додаткові

Рівень завдань у вправниках	Вправи поділено на базовий, середній і високий рівні складності. Багато задач на розвиток логіки	Завдання переважно базового та середнього рівня. Завдань високої складності небагато	Завдання поділено за рівнем складності, але акцент зроблено на базовий і середній рівні
Особливості завдань	Є цікаві завдання на прикладне застосування (економіка, фізика). Багато комбінаторних задач	Задачі спрямовані на закріплення навичок. Менше задач на прикладне застосування	Є завдання на прикладне застосування, але вони менш різноманітні
Додаткові матеріали	Розглядаються методи розв'язання, задачі для підготовки до ЗНО	Додаткових матеріалів мало, є блоки для самоперевірки	Є блоки для повторення, задачі для самостійного розв'язання

Для того щоб зробити підручники більш адаптованими до змішаного навчання, необхідно:

- створювати додаткові онлайн-матеріали: наприклад, завдання з підручника можуть бути доповнені відеоуроками на таких платформах, як Khan Academy, де учні можуть подивитися пояснення до теоретичних понять;

- інтегрувати цифрові інструменти: учні повинні мати можливість використовувати онлайн-калькулятори, графічні редактори та платформи для візуалізації математичних понять, таких як Wolfram Alpha чи Desmos;
- оновлювати програмне забезпечення підручників: створення інтерактивних версій підручників з посиланнями на додаткові онлайн-ресурси значно покращить якість навчання в умовах змішаного формату.

Пропонуємо ознайомитися з аналізом підручників з математики з теми розв'язування рівнянь та нерівностей в різних країнах.

Структура підручника: у США і Канаді акцент на чітке розділення тем та подачу матеріалу в логічному порядку, що дозволяє учням зосередитися на кожному типі рівнянь окремо. У Німеччині структура більш детальна і поетапна, що дає змогу поступово переходити до складніших рівнянь. У Фінляндії рівняння інтегровані у реальні життєві задачі, що дозволяє краще зрозуміти їх практичне застосування.

Методика навчання: всі підручники сприяють розумінню концепцій, але методика навчання варіюється. У США більше уваги приділяється базовому розумінню через приклади, у Канаді – через проектну діяльність, у Німеччині – через аналітичне розв'язування, а у Фінляндії – через критичне мислення та візуалізацію.

Зворотний зв'язок: у підручниках США та Німеччини є чітка система самоперевірки, що дозволяє учням перевіряти свої знання без допомоги вчителя. У Фінляндії та Канаді основний зворотний зв'язок базується на групових обговореннях і дискусіях, що стимулює колективну діяльність.

Інтерактивні елементи: підручники США і Канади включають більше інтерактивних елементів (практичні завдання, проектні роботи), що стимулює активну участь учнів у процесі навчання. Фінляндія використовує візуальні елементи для пояснення, що також є інтерактивним підходом, тоді як у Німеччині надається більша увага самостійним завданням.

Практичні приклади: у всіх підручниках акцент на практичних прикладах, які дозволяють учням побачити, як рівняння використовуються в реальному

житті, але у Фінляндії цей підхід є більш інтегрованим у контекст життєвих ситуацій, а в США та Канаді – через приклади та завдання, що стосуються реальних проблем.

Переваги і недоліки: всі підручники мають свої переваги та недоліки в контексті подачі матеріалу, інтерактивності та зворотного зв'язку. США виділяється простотою, але швидкістю подачі матеріалу, Фінляндія – використанням критичного мислення, але недостатньою структурованістю, Німеччина – чіткістю, але відсутністю інтерактивності, а Канада – можливістю застосування знань у реальних ситуаціях, але складними проектами для деяких учнів.

Аналіз підручників з різних країн показує, що: багато підручників включають інтерактивні елементи, які заохочують учнів до активної участі в навчальному процесі; важливість застосування математичних концепцій у реальному житті відзначається в усіх підручниках, що допомагає учням зрозуміти, чому важливо вивчати математику; підходи, які заохочують співпрацю між учнями, виявляються більш ефективними для отримання зворотного зв'язку та розвитку критичного мислення.

Висновки до першого розділу

Аналіз джерел та досвіду роботи вчителів, дають змогу стверджувати, що основні переваги змішаного навчання включають:

- гнучкість навчального процесу: учні мають змогу самостійно обирати час для вивчення матеріалу та опрацьовувати його у зручному темпі;
- розширений доступ до ресурсів: інтерактивні платформи, відеоуроки, симуляції та тести забезпечують якісну підтримку учням;
- покращення мотивації: застосування ігрових методик, таких як математичні квести чи інтерактивні завдання, стимулює інтерес учнів.

Розглянуто виклики, пов'язані із забезпеченням технічної доступності для учнів і вчителів, та необхідність адаптації традиційної методики викладання до нових реалій. Для успішного впровадження змішаного навчання важливо дотримуватись індивідуального підходу, використовувати сучасні технології, а також зосереджуватись на формуванні самостійності та мотивації учнів.

Представлений аналіз підручників допомагає краще зорієнтуватися на відповідність програми та можливостей сучасної освіти в умовах змішаного навчання.

РОЗДІЛ 2

НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ В УМОВАХ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ

2.1. Створення бази для вивчення рівнянь та нерівностей у старшій школі

Пропедевтика вивчення рівнянь і нерівностей починається ще в молодших класах, коли учні знайомляться з поняттям числа, арифметичними діями та відношеннями між числами. Цей етап формує базові математичні уявлення, які є необхідними для подальшого розуміння алгебраїчних конструкцій.

Основними цілями пропедевтики є:

- 1) формування інтуїтивного розуміння понять рівності, невідомого, співвідношень між елементами;
- 2) розвиток умінь аналізувати структури задач, розпізнавати закономірності та шукати шляхи до їх вирішення;
- 3) підготовка до абстрактного мислення через конкретні приклади.

Наприклад, у початкових класах учні знайомляться з простими рівностями наприклад $3 + x = 7$, де « x » – невідома величина. Такі завдання створюють основу для розуміння принципу зворотних операцій, який стане ключовим при розв'язуванні рівнянь у старших класах.

У початковій школі важливо забезпечити поступовий перехід від конкретних числових прикладів до абстрактних понять. Використання графічних схем, маніпулятивних матеріалів та ігрових завдань дозволяє учням краще зрозуміти логіку порівняння чисел і встановлення співвідношень.

Наприклад, задачі з нерівностями можна починати з порівняння предметів: «У Марійки 5 яблук, а у Тараса — 3. Хто має більше яблук?» Такі приклади готують учнів до розуміння математичного запису $3 < 5$, що є основою для вивчення нерівностей.

Ще одним важливим аспектом є введення понять змінних через прості ігрові ситуації. Завдання типу «Яке число треба додати до 4, щоб отримати 9?» розвивають логіку та навички пошуку невідомого елемента, що є основою рівнянь.

У середній школі (5–7 класи) починається систематичне вивчення рівнянь та нерівностей. Основна мета цього етапу — закріпити поняття невідомого, рівності та нерівності, а також навчити основним методам їх розв'язування.

Ключовими методами пропедевтики на цьому етапі є:

- 1) індуктивний підхід: учні спочатку аналізують конкретні приклади, після чого узагальнюють свої спостереження;
- 2) графічний підхід (починаючи з 6 класу): використання графіків і візуалізацій допомагає зрозуміти взаємозв'язок між величинами;
- 3) контекстуалізація задач: реальні приклади (наприклад, задачі з фінансів чи фізики) дозволяють зрозуміти практичне значення рівнянь та нерівностей.

Наприклад, пропедевтика розв'язування лінійних рівнянь може починатися з обговорення задач на співвідношення, таких як «Скільки коштує одна ручка, якщо три коштують 12 гривень?».

Пропонуємо детальніше розглянути кожен підхід.

Індуктивний підхід займає центральне місце у процесі пропедевтики математичних понять, зокрема рівнянь та нерівностей. Його сутність полягає у переході від конкретних прикладів до загальних закономірностей, що дає змогу учням самостійно відкривати математичні істини, формуючи стійкі знання та практичні навички. Цей підхід стає особливо важливим у контексті української школи, де рівняння та нерівності становлять фундамент алгебраїчного мислення і застосовуються як у повсякденному житті, так і у професійній діяльності.

Розглянемо індуктивний метод у пропедевтиці рівнянь і нерівностей, його роль на різних етапах навчання, переваги порівняно з іншими методами та практичні приклади використання.

Індукція як метод навчання має давню історію. Ще у працях філософів та математиків античності її визначали як процес, за допомогою якого пізнання

будується на основі узагальнення досвіду. У сучасній педагогіці цей підхід ґрунтується на логічному переході від конкретного до загального, що сприяє кращому засвоєнню понять.

Педагогічна цінність індуктивного підходу полягає у наступному:

- 1) формування навичок аналізу та узагальнення, тобто учні не просто запам'ятовують формули чи алгоритми, а самостійно доходять до них, що сприяє глибшому розумінню;
- 2) розвиток критичного мислення;
- 3) підвищення мотивації: відчуття відкриття нових знань власними силами стимулює інтерес до навчання.

У початковій школі індукція допомагає закласти фундаментальні уявлення про рівності, нерівності та пошук невідомого. На цьому етапі навчання базується на практичних і конкретних прикладах.

У середніх класах учні вже знайомі з базовими поняттями і готові до систематичного вивчення рівнянь та нерівностей. Індукція стає основою для введення складніших тем, таких як лінійні рівняння, системи рівнянь та нерівностей.

Узагальнення на основі прикладів. Учитель пропонує розв'язати кілька рівнянь. Після розв'язання учні аналізують, які дії вони виконували: додавання, віднімання, ділення чи множення. Учитель допомагає сформулювати загальний принцип: «Щоб знайти невідоме, потрібно виконати зворотну дію до тієї, яка зазначена в рівнянні».

Аналізуючи приклади, учні доходять висновку, що нерівність залишається справедливою, якщо до обох її частин додати або відняти однакове число. Учитель допомагає сформулювати це правило й використовувати його у розв'язуванні нерівностей.

Переваги індуктивного підходу у пропедевтиці:

- 1) легкість засвоєння: початок із простих прикладів робить складні поняття доступними для учнів із різними рівнями підготовки;

- 2) включення учнів у процес відкриття знань: індукція сприяє активному мисленню та підвищує інтерес до навчання;
- 3) універсальність методу: індуктивний підхід можна застосувати як на початковому, так і на складному рівнях вивчення теми.

Індуктивний підхід є ключовим методом пропедевтики у вивченні рівнянь та нерівностей. Він забезпечує глибоке засвоєння матеріалу через самостійне відкриття закономірностей і формування аналітичного мислення. Завдяки переходу від конкретного до загального учні отримують не лише математичні знання, але й навички критичного аналізу, що є основою успішного навчання. Впровадження індуктивного методу в українській школі сприятиме підготовці учнів до вирішення реальних задач і успішного подальшого навчання.

Графічний метод є потужним інструментом для розв'язування рівнянь і нерівностей. Цей метод дозволяє учням візуалізувати математичні поняття, розвивати просторове мислення та інтуїтивно розуміти взаємозв'язки між математичними об'єктами. У сучасній освітній практиці графічний підхід є невіддільною частиною ефективного навчання, особливо в умовах змішаного навчання.

Графічний підхід базується на візуалізації математичних задач через побудову графіків. Його основна мета – забезпечити учням інтуїтивне розуміння складних алгебраїчних конструкцій.

Графічний підхід забезпечує учням:

- 1) інтуїтивне розуміння: візуалізація функцій і нерівностей дозволяє учням краще зрозуміти поняття коренів рівняння, екстремумів функції, перетинів графіків тощо;
- 2) розвиток просторового мислення: учні вчаться аналізувати форми графіків, їхні точки перетину та області визначення;
- 3) мотивацію до навчання: графічні методи викликають інтерес до математики, адже візуалізація часто є більш захопливою, ніж традиційні алгебраїчні обчислення.

Математика традиційно вважається абстрактною наукою, але її цінність проявляється саме у практичному застосуванні. Контекстуалізація задач, як метод навчання, дозволяє пов'язати абстрактні математичні концепції з реальними життєвими ситуаціями, що робить навчання більш доступним, цікавим і корисним для учнів.

Контекстуалізація задач — це метод навчання, при якому математичні задачі пов'язуються з реальними ситуаціями чи іншими предметами. Основна мета цього підходу — показати учням, що математика має практичне значення і може бути застосована у повсякденному житті.

Основні принципи контекстуалізації:

- 1) завдання повинні бути зрозумілими та близькими до життєвого досвіду учнів;
- 2) поставлена проблема повинна мотивувати учнів до її вирішення;
- 3) контекст задачі має сприяти формуванню міжпредметних зв'язків.

Наприклад, задача на розв'язування нерівності може бути пов'язана з фінансами: «Яка максимальна кількість товарів можна придбати, маючи бюджет у 500 гривень, якщо один товар коштує 80 гривень?»

Контекстуалізація задач особливо важлива на етапі пропедевтики, коли учні тільки знайомляться з поняттями рівнянь та нерівностей. Такий підхід дозволяє створити логічний зв'язок між теоретичними поняттями та їх практичним застосуванням.

Роль контекстуалізації задач у пропедевтиці:

- 1) формування базових уявлень: через життєві ситуації учні легше розуміють поняття рівності, змінної та нерівності;
- 2) розвиток інтересу до предмета: коли учні бачать, що математика допомагає вирішувати реальні проблеми, вони стають більш зацікавленими у вивченні;
- 3) міжпредметна інтеграція: контекстуалізовані задачі можуть поєднувати математику з фізикою, економікою чи біологією, наприклад, задачі про рух, витрати, пропорції тощо.

Завдання на нерівності

Приклад: «Ваша сім'я планує витратити не більше 2000 гривень на подорож. Квиток на автобус коштує 300 гривень на людину. Скільки людей може поїхати?»

Нерівність виглядає так: $300x \leq 2000$

Розв'язок: $x \leq \frac{2000}{300}$, якщо виконати ділення, то приблизно будемо мати відповідь у 6,67. Отже, подорож можуть дозволити собі максимум 6 осіб.

1. Завдання на системи рівнянь

Приклад: «Фермер продає яблука та груші. За 3 кг яблук і 2 кг груш він отримав 200 гривень, а за 2 кг яблук і 4 кг груш — 240 гривень. Яка ціна 1 кг яблук і груш?»

Система рівнянь:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 200 \\ 2x + 4y = 240 \end{cases}$$

Розв'язок показує, що $x = 40$, $y = 50$, тобто 1 кг яблук коштує 40 гривень, а 1 кг груш — 50 гривень.

2. Завдання на графічний метод

Приклад: «Підприємець планує випустити продукцію, але його прибуток залежить від кількості вироблених товарів за формулою $P(x) = -2x^2 + 8x + 5$. Побудуйте графік функції та визначте, при якому обсязі виробництва прибуток буде максимальним».

Після побудови графіка учні бачать, що максимум прибутку досягається при $x = 2$, тобто при випуску 2 одиниць продукції.

Переваги контекстуалізації задач:

- 1) наочність: завдяки контексту учні можуть уявити реальну проблему, що робить навчання більш зрозумілим і захопливим;
- 2) розвиток критичного мислення: учні вчаться аналізувати ситуації, виділяти ключові параметри та формулювати задачі у вигляді рівнянь чи нерівностей;
- 3) підвищення мотивації: реальні завдання демонструють практичність математики, заохочуючи учнів до активної участі в навчанні;

- 4) інтеграція з іншими дисциплінами: контекстуалізовані задачі дозволяють створювати міждисциплінарні зв'язки, що є важливим для розвитку системного мислення.

Контекстуалізація задач чудово вписується у формат змішаного навчання.

Учні можуть:

- 1) досліджувати реальні проблеми онлайн: використання симуляцій чи інтерактивних платформ для аналізу задач (наприклад, фінансових моделей);
- 2) переглядати відеоуроки з реальними прикладами: це дозволяє їм зрозуміти сутність задач ще до очного уроку;
- 3) брати участь у групових проєктах: наприклад, розробка математичної моделі витрат на шкільний захід.

Обмеження та шляхи їх подолання:

- 1) недостатній зв'язок з теорією: якщо акцент робиться лише на контексті, учні можуть не засвоїти математичний апарат. Вирішенням є пояснення теоретичної основи під час розв'язування.
- 2) складність формулювання задач: вчителі потребують підготовки, щоб створювати якісні контекстуалізовані завдання. Проведення методичних семінарів може допомогти розв'язати цю проблему.
- 3) труднощі для учнів з низькою мотивацією: не всі учні можуть зрозуміти значення задач. Використання знайомих контекстів (спорт, покупки, подорожі) підвищує зацікавленість.

Контекстуалізація задач є одним із ключових методів пропедевтики у навчанні рівнянь та нерівностей. Вона дозволяє створити зв'язок між абстрактними математичними поняттями та реальними ситуаціями, розвиваючи практичні навички учнів. У поєднанні зі змішаним навчанням цей метод відкриває нові можливості для інтерактивного та індивідуалізованого навчання, враховуючи різний рівень підготовки та інтересів учнів. Контекстуалізація сприяє підвищенню мотивації, оскільки учні бачать практичну цінність математики у реальних життєвих ситуаціях. Використання задач, пов'язаних із

фінансами, фізикою чи соціальними проблемами, дозволяє формувати міждисциплінарні зв'язки та розвивати системне мислення.

Такий підхід також допомагає учням оволодівати ключовими компетентностями 21-го століття, включаючи критичне мислення, навички аналізу даних і розв'язування практичних проблем. У перспективі контекстуалізація задач створює основу для успішного навчання не лише в математиці, але й у багатьох інших галузях, які потребують аналітичного підходу.

2.2 Особливості навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей учнів 7-9 класів

У 7-9 класах достатню увагу приділяють функціям та їх графікам.

Приклад: для введення поняття рівності та нерівності можна використати графіки. Наприклад, побудова графіків функцій $y = x^2$ і $y = 3x - 4$ демонструє, що розв'язки рівняння $x^2 = 3x - 4$ — відповідають точкам перетину відповідних графіків.

Приклади використання графічного методу

1. Графічне розв'язування рівнянь

Розв'язання рівнянь через графіки дає змогу наочно побачити корені як точки перетину графіка функції з віссю x .

Приклад: рівняння $x^2 - 4 = 0$ можна розв'язати алгебраїчно ($x = \pm 2$), але графічно це виглядає як перетин параболи $y = x^2 - 4$ з віссю x у точках $(-2, 0)$ та $(2, 0)$.

2. Графічне розв'язування систем рівнянь

Для системи рівнянь $y = 2x + 1$ і $y = -x^2 + 3$ графіки будуються як пряма та парабола. Їхні точки перетину є розв'язками системи. Учні можуть визначити ці точки візуально або обчислити аналітично після побудови графіків (рис. 2.1).

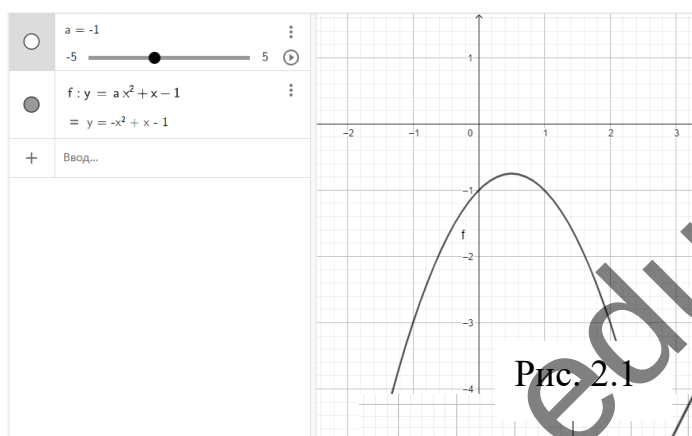
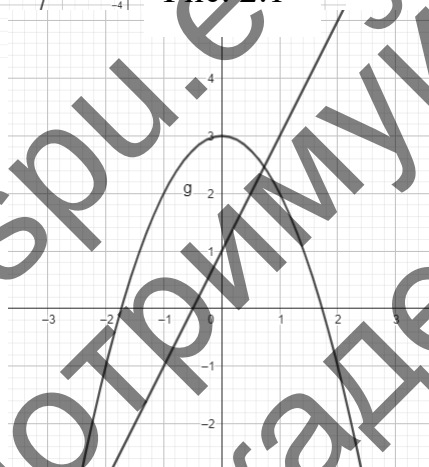


Рис. 2.1

Графіки
яких областях одна

Приклад:
 $3x + 2 > 0$. Побудова
у зошиті та за
GeoGebra.



3. Графічне
розв'язування нерівностей
допомагають зрозуміти, у
функція більша за іншу.
розглянемо нерівність $x^2 -$
параболи $y = x^2 - 3x + 2$
допомогою програми

Переваги графічного підходу:

- 1) наочність: графіки дозволяють учням бачити, а не лише розраховувати. Це особливо корисно для учнів, які мають труднощі з абстрактними обчисленнями;
- 2) інтерактивність: використання цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos) додає інтерактивності, дозволяючи змінювати параметри функцій і миттєво бачити зміни в графіках, наприклад: маємо функцію $y = ax^2 + x - 1$, на рисунку 2.2 та 2.3 представлені графіки, в залежності від значення параметра a ;

Рис. 2.3



3) міжпредметні зв'язки:

графіки можна застосовувати у фізиці (наприклад, для аналізу руху) та економіці (для побудови кривих попиту й пропозиції);

4) глибше розуміння: учні не лише запам'ятовують правила, а й розуміють їхню логіку, спостерігаючи графічні зміни.

Графічний підхід підходить для змішаного навчання, де учні можуть:

- 1) використовувати цифрові інструменти: програми на кшталт GeoGebra дозволяють учням самостійно будувати графіки вдома, експериментуючи з параметрами функцій;
- 2) отримувати миттєвий зворотний зв'язок: інтерактивні вправи на освітніх платформах допомагають учням оцінити правильність своїх рішень;
- 3) переглядати відео та інтерактивні презентації: це дозволяє учням повторювати матеріал у зручний для них час.

Приклад: учитель може підготувати інтерактивний урок, де учні досліджують, як змінюється графік функції $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) при зміні коефіцієнтів a , b , c .

Попри значні переваги, графічний підхід має й деякі обмеження:

- 1) технічна залежність: учні потребують доступу до комп'ютерів і програмного забезпечення. Рішенням може бути забезпечення доступу до комп'ютерних класів або використання мобільних додатків;
- 2) обмеженість у точності: графічний метод іноді дає приблизні результати, особливо для складних рівнянь. Це можна компенсувати, поєднуючи графічний підхід із аналітичними розрахунками;
- 3) висока складність для початківців: учні, які не мають базових навичок побудови графіків, можуть відчувати труднощі. Вирішенням є поступове введення графічного методу, починаючи з простих прикладів.

Графічний підхід є ефективним інструментом пропедевтики у вивченні рівнянь та нерівностей. У поєднанні з сучасними технологіями графічний підхід дозволяє інтегрувати візуалізацію в освітній процес, роблячи навчання більш наочним, динамічним та доступним для учнів з різними стилями навчання. Використання інтерактивних інструментів, таких як графічні калькулятори та платформи на кшталт GeoGebra, підвищує зацікавленість учнів і дозволяє їм експериментувати з математичними моделями.

Коли учні опановують на початковому рівні поняття ОДЗ, переважно для дробово-раціональних виразів. Учням пояснюється, що ділення на нуль є неможливим в шкільному курсі математики, тому необхідно виключити значення змінної, які перетворюють знаменник в нуль.

Практика показує, що діти дуже часто забувають про знаходження області визначення заданого виразу. Також популярною помилкою є виключення не всіх значень змінної. Розглянемо приклад: учням слід визначити ОДЗ для виразу $\frac{2}{x^2-4}$. Зазвичай виключають лише одне значення $x = 2$, забуваючи про друге значення $x \neq -2$. Проаналізуючи цей приклад і поведінку учнів, слід наголосити на тому,

що багато учнів не помічають необхідності використання формул скороченого множення.

Учні переходять до розв'язання дробово-раціональних рівнянь у 8 класі, таких як $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x} = \frac{x+1}{x-5}$, де обов'язковим етапом є знаходження ОДЗ – знаменник не дорівнює нулю.

Квадратні рівняння учні починають розв'язувати лише у 8 класі, до цього школяри розкладають многочлен другого степеня на множники за допомогою формул скороченого множення. І вже після цього розв'язують отримане рівняння за правилом: якщо добуток дорівнює 0, значить один з множників дорівнює нулю.

Нерівності психологічно складніше сприймаються учнями, ніж рівняння. Вони не розуміють що саме потрібно з ними робити, тому часто повторюємо дітям, що перед ними майже звичайне рівняння. Після цього вони розуміють, що потрібно знайти корені рівняння, але кожного разу змінюючи знак рівності на знак нерівності.

Слід наголосити на тому, що з нерівностями варто бути уважними. Перші правила для роботи з нерівностями:

- якщо до обох частин нерівності додати або відняти одне і те ж число, знак нерівності не зміниться;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на додатне число, знак нерівності не зміниться;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на від'ємне число, знак нерівності змінюється на протилежний.

На цьому етапі діти починають допускатися помилок – учні часто не змінюють знак нерівності при діленні на від'ємне число, що призводить до неправильних розв'язків.

Приклад: розв'яжемо нерівність $-3x > 9$

(ділимо на -3)

$x < -3$ (зміна знака нерівності).

Якщо учень не враховує зміну знака, він може отримати $x > -3$, що є помилковим значенням. Ця помилка є дуже поширеною, тому кожного разу слід звертати увагу на ділення або множення нерівностей на від'ємне значення.

Багато питань виникають під час розв'язання рівнянь та нерівностей з модулями. В першу чергу слід в 6 класі звернути увагу на це поняття. Варто переконатися, що діти дійсно зрозуміли означення модуля. В старших класах для ускладнення рівнянь та нерівностей додають саме модуль. Невірне застосування властивостей модуля, учні можуть неправильно розглядати випадки, що призводять до помилок.

Обов'язковим етапом є ознайомлення з темою властивістю степенів і коренів, властивості степенів з цілим показником. Методика викладання цієї теми повинна бути побудована таким чином, щоб учні змогли не лише засвоїти теоретичні поняття, але й застосувати їх на практиці для розв'язування більш складних завдань (наприклад, для розв'язування показникових рівнянь та нерівностей).

На початковому етапі важливо дати учням чітке розуміння, що таке степені та корені, їх значення та роль у математичних виразах. Можна почати з конкретних прикладів, наприклад, обчислення простих степенів ($2^4, 5^2$) та коренів ($\sqrt{16}, \sqrt{25}$) і продемонструвати їх використання в реальних задачах.

Далі учні знайомляться з основними властивостями степенів, такими як:

- властивості множення та ділення степенів з однаковими основами:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$a^n : a^m = a^{n-m};$$

- властивості піднесення степеня до степеня: $(a^n)^m = a^{nm};$

- властивості степеня з від'ємним показником: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0;$

- властивості степеня з дробовим показником:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, n > 0.$$

Ці властивості необхідно навчити учнів використовувати при виконанні перетворень виразів і вирішенні рівнянь.

Учні повинні також усвідомити основні властивості коренів, зокрема:

- корінь добутку чисел: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- корінь частки чисел: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0$;
- властивості перетворення коренів в степінь: $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}, n > 0$.

Ці властивості важливі для спрощення виразів та розв'язування ірраціональних рівнянь.

2.3. Специфіка навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей учнів старшої школи в умовах змішаного навчання

Звичайно впоратися із складністю виконання завдань на розв'язання рівнянь та нерівностей можна за допомогою практики, але не всі старшокласники готові присвячувати достатньо часу самостійному виконанню завдань. Відсутність регулярної практики посилює прогалини в знаннях. Також прогалини в знаннях учні отримують і через зовнішні фактори – початок пандемії, а потім війни. Школярі пережили значні освітні втрати через дистанційне навчання під час пандемії та збройну агресію. Ці фактори вплинули на: якість засвоєння базового матеріалу, необхідного для теми рівнянь і нерівностей; переривання навчального процесу, що ускладнило формування логічного ланцюжка знань; емоційний стан учнів, які відчувають стрес і тривогу.

Специфіка вивчення математики у старших класах полягає у необхідності балансу між теоретичними знаннями та практичними навичками. Розуміння основних математичних концепцій, формування логіки й критичного мислення готують учнів жити у сучасному світі, де аналітичні навички стають основою для професійного успіху. Важливо, щоб викладання математики було інтерактивним, індивідуалізованим та орієнтованим на майбутні потреби учнів. У 2024-2025 році змішане навчання залишається одним із ключових форматів освітнього процесу в Україні, особливо у вивченні математики в старшій школі.

Математика в старшій школі охоплює поглиблене вивчення тем таких як тригонометрія, початки математичного аналізу, системи рівнянь та нерівностей, які потребують ретельного пояснення та закріплення. У змішаному форматі викладання таких тем для зручності, зазвичай, ділиться на декілька етапів:

Перший етап – підготовка: учні отримують базові знання відвідавши урок математики, або з аналізу прочитаного параграфа та відеоуроків для самостійного вивчення; з популярністю змішаного навчання. В мережі Інтернет є дуже багато матеріалів, які допоможуть самостійно ознайомитися з темою, але вчителя ніхто замінити не зможе. Для кращого розуміння обов'язково слід переглядати записи уроків (якщо у вчителя є можливість їх виконувати), класну роботу (до речі, це є зручним для учнів, які були відсутні на уроці, бо навіть з таким мінімум учням вже набагато легше буде розібратися в темі; також варто виставляти класні роботи для учнів, які навчаються за межами України – для ознайомлення з відповідним оформленням завдань).

Другий етап – практика: на офлайн-заняттях акцент робиться на розв'язуванні завдань під контролем вчителя, на цьому етапі вчитель також перевіряє результат онлайн зустрічей та самостійного опрацювання матеріалу. Також на цьому етапі у вчителя є можливість коригувати засвоєнні знання. Спілкуючись з учнями не за «чорними квадратами», картинка отриманих знань стає реалістичною і зрозуміло куди і як правильно рухатися далі. Звичайно іноді такі дії потребують правок в календарно-тематичному плануванні, що не є зручним моментом. Іноді правки потребують і дати запланованих відповідних уроків, самостійних робіт тощо.

Третій етап – закріплення: обов'язкове проведення онлайн-тестів або домашніх проєктів, що дозволяє оцінити рівень засвоєних знань.

З переходом до змішаного навчання, цифрові технології стали ще більш популярними серед вчителів математики. Інтерактивні програми та ресурси є важливими для вивчення абстрактних понять, наприклад, графічні редактори, про які згадували вище у представленій роботі, допомагають у побудові графіків, важких для розуміння фігур, перерізів тощо. Симуляції полегшують розуміння

понять похідної чи інтеграла. Онлайн-платформи (наприклад Moodle, Google Classroom тощо) забезпечують зручний доступ до завдань та автоматичну перевірку результатів.

Дуже важливим аспектом є створення середовища, яке допоможе відчувати всім учасникам освітнього процесу підтримку навіть під час дистанційного навчання. Як учитель до учнів, так і учні до вчителя повинні мати повагу, терпіння та бажання до співпраці. Вчителям також слід допомагати справлятися зі стресом, який може виникати через зміну формату навчання, перевантаженням. З власного досвіду маю абсолютну впевненість, що звичайна зацікавленість від учнів вже мотивує та дає сили на подальшу роботу.

Навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності в старшій школі в умовах змішаного навчання викликає труднощі. Ця складність обумовлена як специфікою матеріалу, так і впливом зовнішніх факторів, яку формують освітнє середовище. Вивчення рівнянь та нерівностей є не лише математичним викликом, але й важливим етапом у розвитку критичного мислення, аналітичних навичок і здатності до систематизації інформації.

У старших класах діти знайомляться з такими типами рівнянь та нерівностей:

- ірраціональні рівняння/нерівності;
- тригонометричні рівняння/нерівності на;
- показникові рівняння/нерівності;
- логарифмічні рівняння/нерівності.

Ці теми є важливими для підготовки до національного мультипредметного тесту (НМТ) та подальшого навчання в університетах. Умови змішаного навчання відкривають нові можливості, але водночас ставлять перед вчителями низку викликів, про які говорилося в першому розділі дослідження.

Перед вивченням показникових, логарифмічних, ірраціональних та тригонометричних рівнянь та нерівностей слід провести діагностичну роботу (Додаток А), яка покаже рівень підготовки учнів до знайомства з новими видами рівнянь та нерівностей.

Ця робота спрямована на перевірку базових знань та навичків учнів із тем лінійні та квадратні рівняння та нерівності, основи роботи з функціями, графіками та областю допустимих значень. А також, результати даної діагностичної роботи дозволить оцінити розуміння математичних понять, які є необхідними для вивчення ірраціональних, тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Робота складається з трьох рівнів складності:

початковий рівень – передбачає перевірку елементарних навичок;

достатній рівень – завдання на логічне мислення та аналіз;

високий рівень – завдання із використанням комбінованих підходів.

Обов'язково слід прописати критерії оцінювання і яке значення буде мати кожен отриманий результат: в початковому рівні кожне завдання 2 бали, в середньому – 3 бали, високий – 4 бали, тобто максимальна кількість балів – 30 балів. Якщо учень отримав:

- 0-10 балів, його рівень знань слід оцінити як недостатній, тобто учень потребує значної підтримки;
- 11-20 балів: середній рівень, слід повторити основи;
- 21-30 балів – достатній рівень підготовки учня, готовність до вивчення нових типів рівнянь та методів їх розв'язування.

На цьому етапі можна визначити хто має прогалини, в якій кількості, а також у вчителя буде час на корекцію календарно-тематичного планування, відповідно до отриманих результатів. В умовах змішаного навчання легше подолати освітні втрати, тому що вибір формату, в якому учень працюватиме над опануванням втраченого, великий:

- інтерактивні цифрові платформи для індивідуальної роботи;
- впровадження гібридного графіка консультацій;
- гейміфікація та інтерактивні завдання;
- використання методів «перевернутого класу»;
- регулярний моніторинг успішності;

– психологічна підтримка учнів.

Пропонуємо детально розглянути кожен із варіантів подання освітніх втрат.

1. Інтерактивні цифрові платформи для індивідуальної роботи

Суть методу: використання платформ, які забезпечують персоналізований підхід до навчання, дозволяє учням самостійно опановувати пропущений матеріал у власному темпі.

Приклади платформ: Google Classroom, Moodle, Microsoft Teams.

Робота відбувається наступним чином: учитель завантажує на платформу відеоуроки, інтерактивні вправи, тести; учні виконують завдання самостійно, отримуючи миттєвий зворотний зв'язок; учитель аналізує результати для виявлення прогалин.

Цей варіант є непоганим, так як: учень може самостійно обирати час, який буд більш ефективний для вивчення матеріалу, в залежності від власного графіку; а також є можливість повторювати матеріал (саме через цю ідею іноді краще тест відкрити з не однією спробою, тобто щоб учень мав можливість пройти тест декілька разів для більшого закріплення вивченого матеріалу).

2. Впровадження гібридного графіка консультацій

Суть методу: організація очних консультацій для груп учнів, які мають прогалини у знаннях.

Після вивчення теми в дистанційному форматі проводяться регулярні очні консультації. Учні працюють у малих групах над проблемними завданнями. Учитель фокусується на поясненні найскладніших моментів.

Наприклад, після дистанційного опрацювання теми «Система нерівностей» учитель організовує практичний семінар для аналізу типових помилок.

Цей метод подолання освітніх втрат є зручним, тому що зменшує навчальний стрес у всіх учасників освітнього процесу, а також учні мають можливість отримати індивідуальну традиційну допомогу від вчителя.

3. Гейміфікація та інтерактивні завдання

Суть методу: використання ігрових елементів для відновлення мотивації учнів до навчання. Для цього можна використовувати, наприклад, програму Kahoot. Учні виконують інтерактивні завдання у форматі змагань.

Задачі розробляються з урахуванням тем, які викликали найбільші труднощі.

Прикладом може бути повторення теми «Показникові рівняння», під час повторення проводиться онлайн-вікторина з кількома рівнями складності. А також, можна скористатися ідеєю об'єднання учнів в команди, в такому випадку учні будуть допомагати один одному пройти математичний квест.

Саме такий метод впливає не лише на подолання прогалин у навчанні, але і підвищує інтерес до навчання та розвиває командної роботи.

4. Використання методів «перевернутого класу»

Суть методу: учні самостійно вивчають новий матеріал вдома через відеоуроки, а на уроці відпрацьовують практичні навички. Тобто учитель записує відеоуроки, які учні переглядають до уроку. На заняттях відбувається обговорення складних моментів та виконання вправ.

Наприклад, учні переглядають відеоурок із розв'язання логарифмічних рівнянь, а на уроці аналізують типові помилки та працюють над складнішими прикладами.

Перевагами такого формату роботи є ефективне використання часу на уроці, що заваз в пріоритеті через відповідні обставини в країні. Також цей метод спрямований на розвиток самостійності, що є дуже корисним в суспільстві.

5. Регулярний моніторинг успішності: постійне відстеження прогресу учнів через онлайн-оцінювання та зворотний зв'язок за допомогою таких платформ. Як Google Forms, Moodle – щотижня учні проходять тестування на засвоєння нової теми; учитель аналізує результати та планує додаткові заняття для слабших учнів.

Такий метод є дуже ефективним для виявлення прогалин, звичайно, якщо враховувати академічну доброчесність учнів (абсолютно самостійне виконання

всіх завдань, без використання мережі Інтернет та штучного інтелекту. А також така форма дозволяє коригувати навчальний процес.

6. Психологічна підтримка учнів: робота з мотивацією та емоційним станом учнів для підвищення їхньої залученості до навчання впровадженням індивідуальних бесід з учнями, які відчують труднощі, через які втрачають мотивацію. Також, якщо ж можливість, залучення психологів для проведення тренінгів із подолання стресу також буде непоганим варіантом для підвищення мотивації.

Ці кроки будуть впливати на появу комфортного середовища для навчання, підвищення впевненості учнів у власних силах та можливостях опановувати нове.

Подолання освітніх втрат у форматі змішаного навчання потребує комплексного підходу. Інтерактивні платформи, гейміфікація, регулярний моніторинг і персоналізовані завдання допомагають компенсувати пропущений матеріал, а психологічна підтримка забезпечує комфортну атмосферу для навчання. Завдяки цим методам учні не лише наздоганяють пропущене, а й розвивають навички самостійного навчання, які є ключовими у сучасному світі.

Ознайомившись із рівнем знань та базою, з якою надалі працюватимуть учасники освітнього процесу, учні переходять до вивчення нових рівнянь та нерівностей. Обов'язково слід визначитися із метою і поступово рухатися до опанування теми.

При розв'язанні рівнянь та нерівностей дуже часто використовують метод заміни змінної. Його використовують для спрощення виразу, коли рівняння має однакові елементи (наприклад квадратний тричлен чи тригонометричну функцію), коли рівняння виглядає складним та «незрозумілим». Вводять зміну (зазвичай однаковий елемент заміняють буквою t , виконують заміну, та розв'язують вже легше рівняння. На цьому етапі учні роблять популярну помилку – забувають перейти до початкової змінної. Якщо для рівняння потрібно аналізувати ОДЗ, обов'язково слід перевірити отримані корені (також популярна помилка у вигляді ігнорування ОДЗ).

Заміна змінної дозволяє звести рівняння або нерівність до лінійного чи квадратного вигляду, з якими учні вже дуже добре знайомі. Цей метод використовується абсолютно у всіх типах рівнянь, але слід пам'ятати про область допустимих значень, бо через заміну змінної іноді учні втрачають корень, або навпаки – записують у відповідь корні, які не належать до ОДЗ.

Тому цей метод є ефективним: відбувається спрощення умови, рівняння або нерівність перетворюється на простіше; після заміни змінної можна використовувати стандартні підходи, наприклад, формули знаходження коренів квадратного рівняння. Але з великих недоліків є обмеження ОДЗ: тобто важливо перевірити, чи відповідають усі отримані розв'язки початковій умові рівняння; іноді введення додаткової змінної може ускладнити задачу.

Метод заміни змінної – це поширений та потужний інструмент у розв'язуванні рівнянь і нерівностей у курсі алгебри. Він дозволяє впорядкувати процес розв'язання та знайти розв'язки навіть для складних завдань. Використання цього методу вимагає уважності до ОДЗ і ретельної перевірки результатів, але при правильному застосуванні він значно полегшує роботу з рівняннями та нерівностями.

Метод інтервалів є одним із ключових інструментів для розв'язання нерівностей у шкільному курсі математики. Цей метод забезпечує системний підхід до аналізу знаків функцій на числовій осі, дозволяючи учням ефективно розв'язувати раціональні, ірраціональні та деякі види трансцендентних нерівностей. У старших класах метод інтервалів використовується для розв'язування складних завдань, які готують учнів до складання НМТ та подальшого навчання в університетах.

Метод інтервалів базується на аналізі знаків функції на числовій осі. Основна ідея полягає у визначенні проміжків, де функція приймає додатне чи від'ємне значення. Цей метод краще розглянути на практиці, використовуючи фрагмент уроку, який представлено в Додатку Б.

Метод інтервалів є важливим інструментом у курсі алгебри старшої школи. Його застосування сприяє формуванню в учнів логічного мислення, вмінню

аналізувати числові дані та робити висновки. Для успішного засвоєння методу необхідно дотримуватись чіткого алгоритму, уникати типових помилок, таких як ігнорування ОДЗ, помилки у визначенні знаків або неврахування рівсноті, і залучати сучасні технології для візуалізації процесу розв'язання.

Після кожного нового вивченого рівняння або нерівсноті слід проводити тестування, в результаті якого учасники освітнього процесу будуть мати чітке представлення стосовно рівня опанування теоретичним матеріалом та навичками. У відтворенні цієї ідеї допоможуть різні платформи, про які вже згадували у цьому дослідженні (Всеосвіта, На Урок тощо).

Розглянемо вивчення нових типів рівнянь та нерівностей поступово.

Етапи методології розв'язування ірраціональних рівнянь

Розв'язування ґрунтується на чіткій послідовності дій, яка допомагає учням уникнути типових помилок і досягти глибокого розуміння теми. Основні етапи такі:

1. Визначення області допустимих значень (ОДЗ): учні мають усвідомити, що кожне ірраціональне рівняння визначене лише для тих значень змінної, при яких вираз під коренем є невід'ємним. Цей етап є обов'язковим і виконується перед будь-якими іншими перетвореннями.
2. Позбавлення ірраціональності: основний прийом розв'язання полягає у піднесенні обох частин рівняння до квадрату. При цьому вчитель має наголосити на важливості перевірки одержаних коренів, оскільки піднесення до квадрату може спричинити появу сторонніх коренів.
3. Робота з рівнянням після піднесення до квадрату: рівняння, яке отримали в результаті, може бути лінійним, квадратним чи містити додаткові ірраціональні елементи (на цьому етапі слід ще раз проаналізувати ОДЗ).
Учні застосовують відповідні методи залежно від типу рівняння.
4. Перевірка отриманих розв'язків: перевірка є обов'язковою, оскільки лише вона гарантує відповідність розв'язків початковому рівнянню.

Розглянемо рівняння:

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$$

1. Визначення ОДЗ: щоб корені були визначені, вирази під радикалами мають бути невід'ємними:

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$$

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

З урахуванням обох умов:

$$x \geq 1$$

2. Позбавлення ірраціональності: підносимо обидві частини рівняння до квадрату (пам'ятаючи про умову піднесення до квадрату: піднесення можливе лише тоді, коли обидві частини рівності невід'ємні):

$$(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1})^2 = 5^2$$

Розкриваємо квадрат суми:

$$(x+4) + 2\sqrt{(x+4)(x-1)} + (x-1) = 25$$

Спростуємо:

$$2x + 3 + 2\sqrt{(x+4)(x-1)} = 25$$

Переносимо $2x + 3$ в праву частину:

$$2\sqrt{(x+4)(x-1)} = 22 - 2x$$

Ділимо обидві частини на 2:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = 11 - x$$

3. Піднесення до квадрату вдруге – щоб позбутися кореня, знову підносимо обидві частини до квадрату:

$$(x+4)(x-1) = (11-x)^2$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2 + 4x - x - 4 = 121 - 22x + x^2$$

Спростуємо:

$$x^2 + 3x - 4 = 121 - 22x + x^2$$

Переносимо все до однієї частини, при цьому x^2 самознищується:

$$3x - 4 - 121 + 22x = 0$$

$$25x - 125 = 0$$

$$x = 5$$

4. Перевірка кореня: підставляємо $x = 5$ у початкове рівняння:

$$\sqrt{5+4} + \sqrt{5-1} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$$

Отримане значення задовольняє рівняння.

Відповідь: $x = 5$

Методологічні аспекти викладання:

1. Етапність пояснень: вчитель повинен чітко структурувати урок, виділяючи кожен етап. Наприклад, після визначення ОДЗ варто перевірити, чи всі учні розуміють, чому ця умова важлива.
2. Використання наочності: для складніших ірраціональних рівнянь доцільно використовувати графіки функцій (наприклад, побудову $\sqrt{x+4}$ та $5 - \sqrt{x-1}$), щоб показати точки перетину. Це допомагає візуально зрозуміти, що розв'язків може бути кілька або жодного.
3. Акцент на перевірці коренів: учні часто ігнорують цей етап. Важливо пояснити, що сторонні корені виникають через піднесення до квадрату. Під час перевірки вчитель може попросити учня письмово обґрунтувати, чому певні корені задовольняють або не задовольняють ОДЗ.
4. Включення інтерактивних завдань: вчитель може використовувати онлайн-платформи (наприклад, GeoGebra або Desmos) для демонстрації процесу піднесення до квадрату й аналізу отриманих розв'язків.

Розв'язування ірраціональних рівнянь у старшій школі – це процес, що потребує чіткої структурованої методології, включення графічних методів і обов'язкової перевірки коренів. Вчитель має приділяти увагу як теоретичним аспектам, так і формуванню в учнів практичних навичок аналізу та логічного мислення.

Щодо ірраціональних нерівностей, їх розв'язування вимагає системного підходу, розуміння властивостей виразів та вміння застосовувати методи розв'язування нерівностей у поєднанні з областю допустимих значень (ОДЗ).

Вивчення процесу розв'язування ірраціональних нерівностей починаються з визначення ірраціональної нерівності: ірраціональні нерівності містять невідому під знаком кореня.

Загальний вигляд: $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ або $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$.

Важливо враховувати, що:

- 1) вираз $\sqrt{f(x)}$ визначений лише для $f(x) \geq 0$;
- 2) при переході до рівносильної нерівності потрібно звести до квадрата обидві частини, що можливо лише за певних умов (згадувалося при розв'язанні ірраціональних рівнянь).

Як і при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, розв'язування нерівностей також починають відразу від визначення умови існування виразу $\sqrt{f(x)}$ (знаходження ОДЗ). Далі алгоритм аналогічний до процесу розв'язування ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин до квадрату, додатковий аналіз, метод інтервалів, наприклад, для розв'язування нерівностей, перевірка кінцевих результатів.

Розглянемо розв'язування ірраціональної нерівності:

$$\sqrt{x+2} \leq x$$

Обов'язкове визначення ОДЗ: ліва частина існує лише при умові, якщо підкореневий вираз більше або дорівнює нулю: $x+2 \geq 0$, тобто $x \geq -2$.

Виконуємо піднесення до квадрата:

$$(\sqrt{x+2})^2 \leq x^2 \Rightarrow x+2 \leq x^2$$

В результаті отримуємо квадратну нерівність $x^2 - x - 2 \geq 0$, яку розв'язуємо за допомогою знань з середньої школи. Розв'язуємо відповідне рівняння: $x^2 - x - 2 = 0$. Маємо корені $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Після цього будуємо числову пряму та позначаємо отримані точки, в результаті отримаємо інтервали: $(-\infty; -1), (-1; 2), (2; +\infty)$ (рис. 2.4).

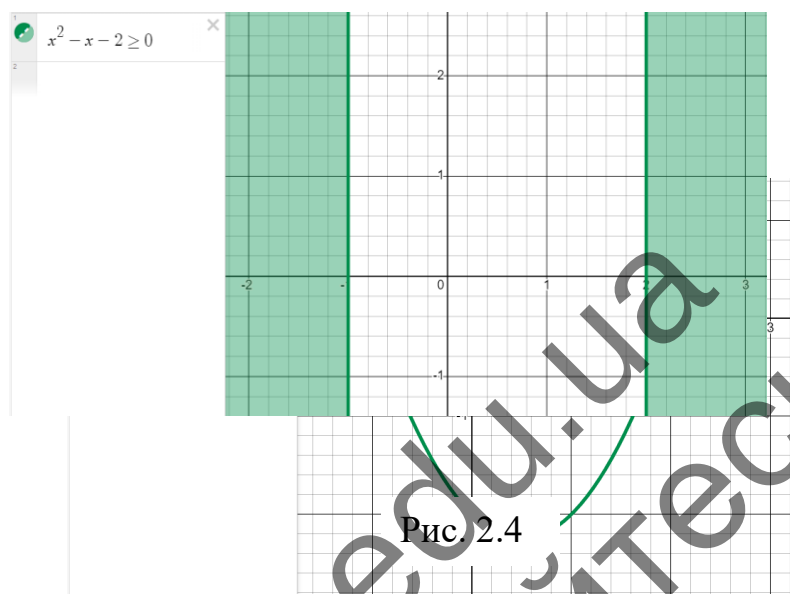


Рис. 2.4

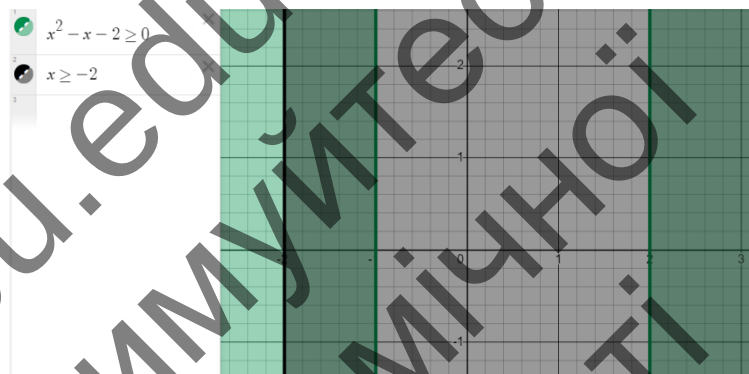
При підстановці значення -1 маємо від'ємний підкореневий вираз, що не задовольняє умову.

Знак визначаємо за допомогою властивостей функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (графік функції над віссю Ox , отже функція y у відповідних проміжках набуває додатних значень, над віссю Oy – від'ємних значень). Використовуючи цю інформацію, маємо інтервали значень x , при яких дана нерівність має значення більші нуля: $x \in (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$ (рис. 2.5).

Звертаємо увагу на ОДЗ, на знаходимо перетин інтервалів, маємо: $x \in [2; +\infty)$ (рис. 2.6).

Відповідь: $x \in [2; +\infty)$.

Рис. 2.6



Учні повинні зсвоїти, що розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей потребує обов'язкового врахування ОДЗ та перевірки розв'язків.

Побудова графіків функцій допомагає учням візуально зрозуміти розв'язок, особливо коли кореневі вирази порівнюються з лінійними чи квадратичними функціями. На початковому етапі важливо розв'язувати задачі з одним коренем. Згодом переходять до складніших прикладів, де під коренем стоїть вираз із параметрами чи кілька кореневих виразів.

Серед типових помилок:

- некоректне піднесення до квадрата (не враховано знак);
- ігнорування ОДЗ;
- відсутність перевірки кінцевого розв'язку.

Етапи методології розв'язування тригонометричних рівнянь

На початковому етапі важливо навчити учнів розпізнавати тип тригонометричного рівняння:

- лінійне ($\sin x = a$, $\cos x = a$);
- квадратне ($\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$);
- рівняння з декількома тригонометричними функціями ($\sin x + \cos x = \sqrt{2}$);

- о параметричне.

Учні мають зрозуміти, що від виду рівняння залежить метод його розв'язання, також слід наголосити на необхідності врахування властивостей тригонометричних функцій, щоб виключити значення, за яких рівняння не має змісту (тобто процес знаходження ОДЗ). Наприклад, якщо рівняння містить функцію $\tan x$, слід встановити, що $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Підбір методу розв'язання: у залежності від виду рівняння обирається метод:

- о із застосуванням визначення тригонометричних функцій;
- о використанням тригонометричних тотожностей;
- о перетворенням до квадратного рівняння;
- о зведенням рівняння до однієї функції.

Розв'язування рівняння та визначення загального виду розв'язків: основне завдання на цьому етапі – знайти розв'язки, що задовольняють рівняння. Потрібно враховувати періодичність тригонометричних функцій, щоб записати розв'язки у загальному вигляді.

Перевірка є обов'язковим етапом, особливо якщо рівняння містить квадратні вирази, тотожні перетворення чи обмеження, накладені ОДЗ.

Практичний приклад розв'язування тригонометричного рівняння

Розглянемо рівняння:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

Аналіз рівняння: це квадратне рівняння відносно $\sin x$. Його вигляд дозволяє використати метод розкладання на множники.

Визначення ОДЗ: тригонометрична функція $\sin x$ визначена для всіх значень x , тому обмежень на область визначення немає. Проте потрібно врахувати, що $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Розв'язування рівняння: вводимо заміну: $t = \sin x$. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Розв'язуємо квадратне рівняння за формулою:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Підставляємо $a = 2, b = -3, c = 1$:

$$t_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Отримуємо два корені:

$$t_1 = \frac{3 + 1}{4} = 1, \quad t_2 = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}$$

Повертаємося до $\sin x$:

$$\sin x = 1 \quad \text{або} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

Визначення загального вигляду розв'язків

1. для $\sin x = 1$: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
2. для $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ або $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
спростуємо: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ або $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Перевірка розв'язків: обидва значення $\sin x = 1$ і $\sin x = \frac{1}{2}$ належать проміжку $[-1; 1]$, тому додаткова перевірка не потрібна.

Загальний розв'язок: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Важливо чітко розділити урок на етапи: аналіз рівняння, обрання методу розв'язання, визначення загального виду розв'язків, перевірка.

Учням легше зрозуміти тригонометричні рівняння через аналогію з алгебраїчними рівняннями, наприклад, під час розв'язування квадратних рівнянь.

Використання графічних методів, наприклад, побудова графіків $\sin x$ і горизонтальних ліній $y = a$, допомагає візуально уявити розв'язки.

Завдання, пов'язані з реальними прикладами (фізичні коливання, хвильові процеси), допоможуть учням зрозуміти, чому важливо знати розв'язки тригонометричних рівнянь.

Методологія розв'язування тригонометричних рівнянь має бути чіткою, структурованою і включати пояснення кожного кроку. Особливу увагу слід приділяти формуванню в учнів вміння визначати вид рівняння та обирати відповідний метод розв'язання. Інтерактивний підхід і застосування наочності сприяють кращому розумінню та засвоєнню теми.

Щодо тригонометричних нерівностей, починаємо з означення поняття: це нерівності, що містять тригонометричні функції. Їх загальний вигляд:

$$f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) > 0 \text{ або } f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) \leq 0$$

де f — функція, що включає тригонометричні вирази.

Для розуміння методів розв'язування нерівностей важливо враховувати властивості тригонометричних функцій:

1. періодичність:

- $\sin x$ і $\cos x$ мають період $T = 2\pi$;
- $\tan x$ і $\cot x$ мають період $T = \pi$.

2. область визначення:

- $\sin x, \cos x \in [-1; 1]$;
- $\tan x, \cot x \in R$, тобто значення можуть бути будь-якими дійсними числами.

3. знаки функцій на основі чотирьох чвертей тригонометричного кола.

Алгоритм розв'язування.

1. Зведення нерівності до базової форми:

- нерівність спрощується так, щоб тригонометрична функція була ізольована. Наприклад: $\sin x > \frac{1}{2}$, $\cos x < 0$, $\tan x \geq 1$.

2. Розв'язання базової нерівності на основі одиничного кола:

- використовують геометричний підхід до розв'язування на тригонометричному колі.

- о визначають інтервали, де тригонометрична функція задовольняє умові.

3. Врахування періодичності функцій.

4. Розв'язок будується з урахуванням основного періоду функції:

$$x = x_0 + Tn, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Запис загального розв'язку: об'єднання інтервалів і запис розв'язків з урахуванням періодичності.

Методи розв'язування тригонометричних нерівностей

Метод інтервалів застосовується до нерівностей, де тригонометричний вираз можна перетворити в добуток або частку:

$$f(\sin x, \cos x) \geq 0 \quad \text{або} \quad f(\sin x, \cos x) \leq 0.$$

Алгоритм:

1. Знаходять нулі функції (корені рівняння).
2. Позначають ці точки на тригонометричному колі.
3. Визначають знаки на інтервалах і вибирають потрібні.

Розв'язання за допомогою геометричного кола базується на геометричній інтерпретації тригонометричних функцій:

- $\sin x$ – ордината точок кола,
- $\cos x$ – абсциса точок кола,
- $\tan x, \cot x$ – відношення ординати до абсциси.

На основі кола визначають інтервали, що задовольняють умові нерівності.

Для складніших виразів застосовують тригонометричні тотожності:

- основна тотожність: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- формули подвійного аргументу, пониження степеня, перетворення добутків у суми.

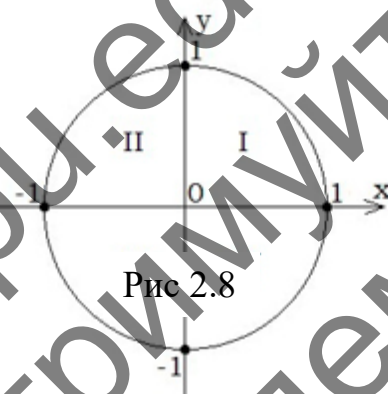
Приклад: Розв'яжіть нерівність

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Задаємо на одиничному колі значення $\sin x = \frac{1}{2}$. Це відповідає точкам:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ та } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Наступни кроком є визначення інтервалів: знак $\sin x > 0$ означає, що значення функції знаходяться у I та II чвертях (так як значення $\sin x$ визначаємо за ординатою – рис 2.8).



Тому нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ виконується на інтервалі: $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

Оскільки $\sin x$ є періодичною функцією з періодом 2π , загальний розв'язок має вигляд: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Так як тригонометричне коло – ключовий інструмент для розуміння розв'язків нерівностей, учні повинні вміти працювати з точками і визначати чверті.

Вивчення розв'язування рівнянь та нерівностей потребує поступового ускладнення умови, тому спочатку розглядаються прості нерівності, як-от $\sin x > a$, потім вводяться складніші задачі з використанням тотожностей.

Використання графіків тригонометричних функцій допомагає учням краще розуміти розв'язки.

Наступним видом рівнянь та нерівностей, з якими знайомляться учні, є показникові рівняння та нерівності. Учні повинні навчитися визначати тип рівняння та спосіб його спрощення:

- стандартне показникове рівняння ($2^x = 8$);
- рівняння зі змінними у показниках ($3^{x+2} = 27^{x-1}$);
- рівняння зі складними виразами у основах або показниках ($5^{x^2} = 25^{x+1}$).

Перший крок — розпізнавання форми рівняння і розуміння, до якого методу розв’язання варто звернутися.

Обов’язково слід застосовувати властивості показникової функції:

- $a^x > 0$ для $a > 0, a \neq 1$;
- функція a^x зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$;
- якщо $a^x = a^y$, то $x = y$ за умови $a > 0$ і $a \neq 1$.

Під час перетворень важливо зводити рівняння до спільної основи, якщо це можливо. Для складніших рівнянь використовуються логарифми або метод заміни. Але, оскільки при перетворенні рівняння можлива поява додаткових коренів, важливо перевірити отримані значення, підставивши їх у початкове рівняння.

На етапі розв’язування вже спрощеного рівняння, застосовуються методи розв’язування алгебраїчних рівнянь (знаходження коренів лінійного або квадратного рівняння).

Розглянемо рівняння:

$$3^{x+1} = 27^{x-2}$$

Це показникове рівняння зі змінною у показниках степеня. Основи 3 і 27 можна звести до однієї основи: представимо 27 у вигляді степеня числа 3:

$$3^{x+1} = (3^3)^{x-2}$$

Застосуємо властивість степеня:

$$3^{x+1} = 3^{3(x-2)}$$

Дане показникове рівняння рівносильне рівнянню:

$$x + 1 = 3(x - 2)$$

Отримуємо лінійне рівняння. Починаємо із розкриття дужок:

$$x + 1 = 3x - 6$$

Далі продовжуємо розв'язувати за звичним алгоритмом:

$$x - 3x = -6 - 1$$

$$-2x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-2}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Підставимо отримане значення у початкове рівняння:

$$3^{\frac{7}{2}+1} = 27^{\frac{7}{2}-2}$$

Зліва:

$$3^{\frac{9}{2}} = \sqrt{3^9} = 27 \cdot \sqrt{3}$$

Справа:

$$27^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27^3} = 27 \cdot \sqrt{3}$$

Ліва і права частини рівняння рівні, отже, $x = \frac{7}{2}$ — правильний розв'язок.

Відповідь: $x = \frac{7}{2}$.

Важливо навчити учнів виконувати кожен етап окремо, починаючи з аналізу структури рівняння і закінчуючи перевіркою розв'язків. Виконання чітких кроків допомагає уникнути помилок.

Використання графіків показникових функцій допомагає учням краще зрозуміти їх поведінку, особливо коли йдеться про зростання, спадання і область визначення.

Учням слід продемонструвати різні способи розв'язання одного й того ж рівняння, наприклад:

- зведення до спільної основи;
- застосування логарифмів;
- використання заміन змінних.

Використання прикладів із реального життя (наприклад, задач на зростання населення, радіоактивний розпад або приріст інвестицій) робить показникові рівняння більш цікавими для учнів.

На кожному етапі розв'язування учням слід пропонувати самостійно пояснювати виконані дії, що сприяє формуванню їх математичної грамотності.

Методика розв'язування показникових рівнянь базується на послідовному аналізі структури рівняння, чіткому визначенні методів його спрощення та перевірці розв'язків. Важливо вчити учнів бачити властивості показникової функції та ефективно використовувати її у розв'язанні практичних і теоретичних задач. Інтерактивний підхід, включення графічних методів і акцент на реальні застосування роблять цю тему доступною і корисною для старшокласників.

Щодо показникових нерівностей. Як і з рівняннями алгоритм розв'язування аналогічний: зведення нерівностей до спільної основи; якщо потрібно – логарифмування (за умови, що обидві нерівності додатні, можна застосувати логарифмування з основою $a > 0, a \neq 1$); застосування властивостей функцій (врахування зростання або спадання функцій для вибору знаку нерівностей); перехід до рівносильної нерівності (при умові, що основи рівні) та перевірка отриманих значень.

Показникові нерівності – це нерівності, в яких змінна знаходиться в показнику степеня.

Загальний вигляд: $a^f(x) > b$, $a^f(x) \geq b$, $a^f(x) < b$, $a^f(x) \leq b$, де:

- $a > 0, a \neq 1$ – основа показникової функції,
- $f(x)$ – деяка функція від x ,
- b – число або інша функція.

Щоб правильно розв'язувати показникові нерівності, учні повинні опанувати властивості показникової функції:

1. Область визначення: $x \in R$ (змінна в показнику степеня).
2. Область значень: $y > 0$ для всіх x .
3. Зростаюча та спадна функція:

- Якщо $a > 1$, то функція $y = a^x$ зростаюча.
- Якщо $0 < a < 1$, то функція $y = a^x$ спадна.

4. Нулі функції: $a^x \neq 0$ для будь-якого значення x .

Слід пам'ятати про ключове правило для показникових нерівностей:

- якщо $a > 1$, то нерівність зберігається:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x);$$

- якщо, то знак нерівності змінюється на протилежний:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Розглянемо нерівність виду $2^{3x-1} > 8$. Ціль – зведення двох частин нерівності до однакових основ (цей процес був розглянутий вище). Представляємо число 8 як 2^3 , та маємо: $2^{3x-1} > 2^3$.

Оскільки $2 > 1$ (функція зростаюча), знак нерівності для показників залишається тим самим:

$$3x - 1 > 3$$

Розв'язуємо лінійну нерівність:

$$3x > 4$$

$$x > \frac{4}{3}$$

$$x > 1\frac{1}{3}$$

Відповідь: $x > 1\frac{1}{3}$.

Нерівність виду: $4^x - 2^{x+1} > 0$ раціонально буде розв'язувати за допомогою заміни змінної.

Вводимо змінну: $2^x = t$, де $t > 0$. Тоді $t^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$.

Нерівність набуває наступного вигляду: $t^2 - 2t > 0$.

Отримали квадратну нерівність, яку розв'язуємо за допомогою методів інтервалів:

$$t(t - 2) > 0$$

$$t = 0 \qquad t - 2 = 0$$

$$t = 2$$

Маємо інтервали: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 2.9).

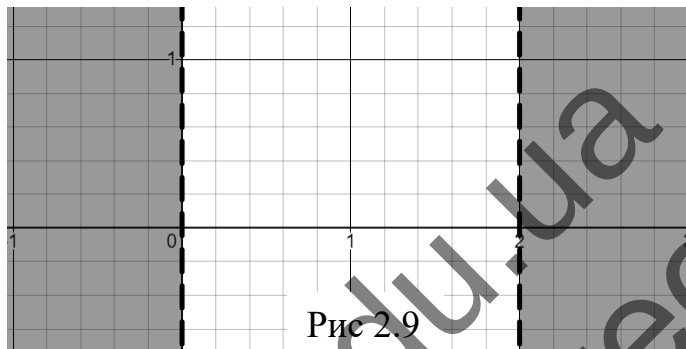


Рис 2.9

Визначаємо знаки функції $y = t^2 - 2t$ за її графіком на відповідних отриманих проміжках (якщо графік над віссю Ox – функція має додатні значення, якщо під віссю – від’ємні). За умовою функція більше нуля, отже потрібні додатні значення (графік над віссю Ox) (рис 2.10).

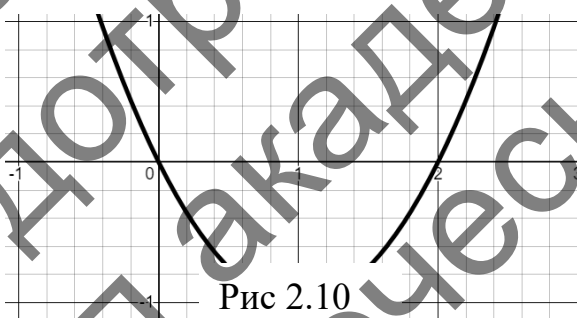


Рис 2.10

Маємо: $t \in (2; +\infty)$.

Повертаємося до змінної x :

$$2^x > 2 \Rightarrow x > 1.$$

Відповідь: $x > 1$.

Перед розв’язуванням нерівностей, учні повинні чітко розуміти властивості показникової функції, а також правила зміни знаку нерівності.

Під час розв’язування вчителю слід показати кілька підходів: зведення до однакової основи, логарифмування та використання методу заміни змінної.

Графічний метод допомагає наочно пояснити розв’язок нерівностей, особливо коли потрібно дослідити інтервали.

Щоб закріпити навички, учні повинні розв'язувати завдання різної складності.

Поступово наближаємося до логарифмічних рівнянь, в яких змінна входить у логарифм. Їх розв'язання базується на розумінні властивостей логарифмів, функцій та логарифмічних тотожностей. Розв'язання таких рівнянь допомагає учням засвоїти теоретичну основу логарифмів і застосувати його для аналізу функцій і задач.

Щоб розв'язувати логарифмічні рівняння, учні повинні засвоїти:

1. Визначення логарифма:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

2. Властивості логарифмів:

$$- \log_a(mn) = \log_a m + \log_a n;$$

$$- \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n;$$

$$- \log_a(m^k) = k \cdot \log_a m;$$

$$- \log_a a = 1, \log_a 1 = 0.$$

3. Область визначення логарифмічної функції: логарифм визначений лише для додатних значень: $m > 0, a > 0, a \neq 1$.

4. Властивості логарифмічної функції:

функція $\log_a x$ зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$;

- область визначення: $x > 0$;

- область значень: $y \in (-\infty; +\infty)$.

5. Логарифмічна рівність: якщо $a > 0, a \neq 1, \log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$, за умови $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$.

Як і в попередніх видах рівнянь та нерівностей, перед розв'язуванням слід проаналізувати рівняння та область допустимих значень (ОДЗ). На першому етапі визначається ОДЗ рівняння, що забезпечує знак плюс в аргументах усіх логарифмів у рівнянні.

Наприклад, для рівняння: $\log_2(x - 1) + \log_2(2x - 3) = 3$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}, \begin{cases} x > 1 \\ 2x > 3 \end{cases}, \begin{cases} x > 1 \\ x > 1,5 \end{cases} \quad \text{отже } x > 1,5.$$

Зводимо рівняння до зручнішого вигляду за допомогою властивостей логарифмів.

$$\text{Наприклад, у попередньому рівнянні: } \log_2((x-1)(2x-3)) = 3.$$

Заміна логарифмічної рівності степеневою – використовуємо еквівалентність логарифмічної форми:

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

Для прикладу:

$$(x-1)(2x-3) = 2^3$$

$$(x-1)(2x-3) = 8$$

Отримали алгебраїчне рівняння, а саме квадратне (в майбутньому):

$$2x^2 - 5x + 3 = 8$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 8 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 40}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{4}$$

Перевірка розв'язків: отримані значення перевіряємо на відповідність ОДЗ. Тобто, знаходимо наближене значення отриманих коренів і перевіряємо умови $x > 1,5$.

У підсумку вказуємо всі корені, які задовольняють ОДЗ.

Розв'яжемо рівняння:

$$\log_3(x^2 - 5x + 6) = 1$$

$$1. \text{ ОДЗ: } x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(x-2)(x-3) > 0$$

Інтервали: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

За означенням логарифма:

$$x^2 - 5x + 6 = 3^1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 3$$

Отримаємо квадратне рівняння: $x^2 - 5x + 3 = 0$, корені якого рівні:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Виконуємо перевірку ОДЗ: отримані корені належать ОДЗ.

Відповідь: $x_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Учні мають чітко розуміти кожен етап: визначення ОДЗ, використання властивостей логарифмів, спрощення виразів.

За допомогою графіка аналізуємо властивості логарифмічної функції (ілюструємо область визначення, зростання/спадання), знаходимо точки перетину з графіками інших функцій.

Учням слід запропонувати різноманітні задачі, включаючи реальні приклади (наприклад, задачі з використанням логарифмів у фінансових розрахунках чи фізиці).

Виконання спільних завдань (наприклад, складання рівнянь за заданими умовами) сприяє формуванню математичних компетентностей.

Після розв'язання рівняння учням слід перевіряти розв'язки через ОДЗ, що зменшує кількість механічних помилок.

Використання онлайн-ресурсів (графічних калькуляторів чи інтерактивних тренажерів) для побудови функцій і візуалізації розв'язків рівнянь.

Логарифмічні нерівності. Щоб успішно навчити учнів розв'язувати логарифмічні нерівності, потрібно забезпечити їх теоретичними знаннями та навичками, зокрема:

1. означення логарифма та його області визначення. Логарифм визначений лише для додатних аргументів: визначено, якщо $\log_a f(x)$, визначено, якщо $f(x) > 0$.
2. область визначення нерівності: розв'язування логарифмічної нерівності завжди починається з визначення області допустимих значень (ОДЗ).
3. властивості логарифмічної функції:

- функція $\log_a x$, є зростаючою при $a > 1$ і строго спадною при $0 < a < 1$;
- від цього залежить, як знак нерівності змінюється при переході до степеневого запису:
 - якщо $a > 1$, то знак нерівності зберігається.
 - якщо $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюється на протилежний.

4. еквівалентні перетворення логарифмічних нерівностей: для нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$:

- якщо $a > 1$: $f(x) > g(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$;
- якщо $0 < a < 1$: $f(x) < g(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$;

5. стандартні форми логарифмічних нерівностей – логарифмічні нерівності часто мають вигляд:

- $\log_a f(x) > c$;
- $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Розв'яжемо нерівність:

$$\log_2(x - 1) > 2$$

Визначення ОДЗ: аргумент логарифма має бути додатним:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1.$$

Перетворення нерівності: відповідно до означення логарифма:

$$\log_2(x - 1) > 2 \Rightarrow x - 1 > 2^2$$

$$x - 1 > 4 \Rightarrow x > 5$$

Об'єднання з ОДЗ

З урахуванням ОДЗ $x > 1$, остаточний розв'язок: $x > 5$

Відповідь: $x > 5$

Розв'язок нерівності: $x \in (5; +\infty)$.

Приклад:

Розв'яжемо нерівність:

$$\log_3(x^2 - 5x + 6) \leq \log_3(x - 1)$$

Крок 1. Визначення ОДЗ:

ОДЗ визначається з умов:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3, \\ x > 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ x > 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \\ x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$$

Крок 2. Перетворення нерівності:

На ОДЗ функція $\log_3 x$ зростає ($a = 3 > 1$):

$$x^2 - 5x + 6 \leq x - 1$$

Крок 3. Перехід до квадратної нерівності:

$$x^2 - 6x + 7 \leq 0$$

Корені $x^2 - 6x + 7 = 0$:

$$x_1 = 3 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{2}$$

Інтервали: $(-\infty; 3 - \sqrt{2}]$, $[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}]$, $[3 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Знак визначаємо на кожному інтервалі. Знак «-» на $[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}]$.

Крок 4. Врахування ОДЗ

ОДЗ: $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$, тому: $x \in [3 - \sqrt{2}; 2) \cup (3; 3 + \sqrt{2}]$.

Відповідь: $x \in [3 - \sqrt{2}; 2) \cup (3; 3 + \sqrt{2}]$.

Тобто, учні мають чітко усвідомлювати порядок дій: ОДЗ $\rightarrow$ спрощення $\rightarrow$ розв'язання $\rightarrow$ перевірка. Для складних логарифмічних нерівностей доцільно використовувати графіки функцій для візуалізації області розв'язків.

Задачі, де учні будують графіки логарифмічних функцій, допомагають краще зрозуміти залежність між параметрами рівняння. Демонстрація практичних застосувань логарифмічних нерівностей, наприклад, у задачах про фінансові розрахунки чи фізичні процеси. Пропонувати завдання з різним рівнем складності, щоб учні практикували як базові, так і складні методи.

Висновки до другого розділу

Рівняння та нерівності є однією із змістових ліній навчання алгебри, охоплюючи широкий спектр завдань.

Формат змішаного навчання відкриває нові можливості завдяки інтеграції мультимедійних матеріалів, онлайн-вправ і тестів, але створює виклики через недостатнє технічне забезпечення учнів і вчителів та складнощі організації самостійної роботи. Для ефективного навчання важливо використовувати мультимедійні ресурси, розробляти рекомендації щодо організації самостійної роботи учнів у змішаному форматі, а також проводити регулярну підготовку педагогів до застосування нових технологій. Сучасні дослідження підтверджують необхідність адаптації навчальних програм до умов цифровізації, що сприятиме підвищенню зацікавленості учнів та забезпеченню якісного засвоєння теми. Аналіз літератури виявив велику кількість наукових і методичних праць, присвячених розв'язуванню рівнянь і нерівностей, що охоплюють різноманітні методи викладання, особливості використання інтерактивних технологій і організації навчального процесу у змішаному форматі. Рекомендовано приділяти більше уваги розробці інструментів для самостійної роботи учнів, деталізації алгоритмів розв'язання задач і забезпеченню вчителів сучасними методичними матеріалами для ефективного викладання.

ВИСНОВКИ

У роботі було проаналізовано сучасні проблеми математичної освіти, які загострилися в умовах дистанційного навчання. Виявлено, що змішаний формат навчання є необхідним засобом подолання освітніх втрат, спричинених кризовими ситуаціями, такими як пандемія, повномасштабне вторгнення. Встановлено, що ефективність змішаного навчання залежить від урахування психолого-педагогічних особливостей старшокласників, зокрема їхнього вікового розвитку, когнітивних потреб та мотиваційних установок. Проведений аналіз програм і підручників з математики дозволив визначити сильні й слабкі сторони їхньої структури та змісту щодо вивчення теми розв'язання рівнянь і нерівностей.

Проаналізовано базу для ефективного навчання учнів розв'язуванню рівнянь і нерівностей у старшій школі, що закладається в основній школі; етапи підготовки учнів, що включають систематичне формування базових навичок розв'язування алгебраїчних рівнянь і нерівностей. Детально розглянуто специфіку навчання старшокласників в умовах змішаного формату. Особливий акцент зроблено на використанні інноваційних технологій, адаптації змісту навчання до сучасних викликів і потреб.

Специфіка змішаного навчання дозволила використати сучасні онлайн-інструменти, зокрема платформу Desmos, яка сприяє візуалізації рівнянь і нерівностей та розвитку аналітичного мислення. За допомогою Desmos учні мали можливість досліджувати графіки рівнянь, знаходити точки перетину, аналізувати властивості відповідних функцій. Використання цього інструмента забезпечило інтерактивність навчального процесу та підвищило рівень залученості учнів.

Детально розписано методику вивчення різних типів рівнянь і нерівностей, зокрема показникових, логарифмічних, тригонометричних, ірраціональних. Для кожного типу розроблено покрокові алгоритми розв'язання, рекомендації для вчителів щодо організації роботи в умовах змішаного навчання, а також

прикладі інтерактивних завдань. Окрему увагу приділено труднощам, які виникають у учнів під час засвоєння матеріалу, та запропоновано шляхи їх подолання.

Практичні результати дослідження можуть бути застосовані в навчальному процесі для підвищення якості математичної освіти, зокрема у формуванні математичних компетентностей старшокласників. Змішане навчання показало свою ефективність у контексті гнучкого управління навчальним процесом і стимулювання когнітивної активності учнів.

Нами розроблені конспект уроку, презентація до нього, діагностичну роботу, яка допоможе проаналізувати рівень підготовки школярів до вивчення нового у старшій школі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антошків М. С. Врахування психологічних особливостей студентів цифрового покоління шляхом організації змішаного навчання. Фізико-математична освіта. 2018. № 1(15). С. 128-131.
2. Ачкан В.В. Організація дослідницької діяльності у процесі вивчення рівнянь та нерівностей як засіб формування математичних компетентностей старшокласників / В.В. Ачкан // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). — № 2. — Бердянськ: БДПУ, 2008. — С. 126 – 131.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)» підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти, 2018 – 288 с.
4. Біографія та науковий доробок Жана Піаже [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://osvita.ua/vnz/reports/psychology/9823/>
5. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. / О.В. Скрипченко., Л. В. Волинська, З. В. Огороднійчук та ін. — К.: Просвіта, 2001. — 416 с.
6. Гонтаренко Ю.В. Логарифмічні рівняння: методи розв'язання та їх застосування в школі / Ю.В. Гонтаренко. — Київ: Освітні технології, 2023. — 208 с.
7. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. — К.: Либідь, 1997. — 206 с.
8. Гриньова О.С. Математика в умовах змішаного навчання: методика, практики, інструменти / О.С. Гриньова. — Харків: Освітній процес, 2022. — 192 с.
9. Давиденко М.О. Методика викладання математичних рівнянь і нерівностей у 11 класі в умовах змішаного навчання / М.О. Давиденко. — Київ: Нова освіта, 2021. — 204 с.
10. Дьяков С.О. Методика розв'язування логарифмічних рівнянь у старшій школі / С.О. Дьяков. — Львів: Математична освіта, 2021. — 176 с.

11. Жук Н.І. Методика викладання алгебри в старшій школі: новітні підходи / Н.І. Жук. — Київ: Нова школа, 2022. — 208 с.
12. Завадська Н.П. Ірраціональні рівняння та нерівності в старшій школі: сучасні методи навчання / Н.П. Завадська. — Київ: Педагогіка, 2022. — 204 с.
13. Збірник тез «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи» [Електронний ресурс]: dSPACE.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/23431/1/Zaac.pdf
14. Змішане навчання: як організувати якісний освітній процес в умовах війни - Державна служба якості освіти України [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://sqe.gov.ua/zmishane-navchannya-yak-organizuvati-yaki/>
15. Квітка Л.Ю. Інноваційні технології в алгебрі: від традиційного до змішаного навчання / Л.Ю. Квітка. — Харків: Вища школа, 2023. — 216 с.
16. Коваленко В.М. Методика викладання математичних рівнянь і нерівностей в старшій школі: теоретичні та практичні аспекти / В.М. Коваленко. — Харків: Видавництво «Математика», 2022. — 220 с.
17. Козак В.В., Соловйова І.А. Алгебра і геометрія для старшої школи: нові методи навчання / В.В. Козак, І.А. Соловйова. — Київ: Технологія освіти, 2022. — 184 с.
18. Костенко І.Г. Теоретичні аспекти викладання логарифмічних рівнянь в старшій школі / І.Г. Костенко. — Київ: Освітня думка, 2022. — 200 с.
19. Костюк О.Б., Щербань Т.А. Змішане навчання у викладанні алгебри в школах: методичні поради / О.Б. Костюк, Т.А. Щербань. — Одеса: Математичні науки, 2023. — 184 с.
20. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака]. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.
21. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики/ Науковометодичний посібник. — Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. — 148 с
22. Лазаренко О.С. Розв'язування логарифмічних рівнянь в старшій школі: методика та практичні вправи / О.С. Лазаренко. — Харків: Видавництво «Математика», 2023. — 196 с.

23. Литвиненко Н.Ю. Математика у старшій школі: змішане навчання і сучасні підходи / Н.Ю. Литвиненко. — Київ: Педагогіка, 2023. — 176 с.
24. Мартиненко І.С. Методика навчання математики в умовах змішаного навчання / І.С. Мартиненко. — Черкаси: Академія, 2021. — 192 с.
25. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. «Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень)» підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Гімназія, 2019 – 352 с.
26. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)» підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Гімназія, 2018 – 256 с.
27. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 10 клас. Х.: Гімназія. 2018.
28. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). К.: Генеза. 2018.
29. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 11 клас. К.: Генеза. 2018.
30. Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/programy-10-11-klas/matematika.-riven-standartu.docx>.
31. Морозов П.О. Методика викладання показникових рівнянь у старшій школі / П.О. Морозов. — Київ: Вища школа, 2021. — 180 с.
32. Навчальні програми для 10-11 класів | Міністерство освіти і науки України [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
33. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні (Методичні рекомендації) [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/712224/1/Metod%20recomend.pdf>

34. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні : методичні рекомендації [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://undip.org.ua/library/navchannia-matematyky-v-starshiy-shkoli-na-profilnomu-rivni-metodychni-rekomendatsii/>
35. Навчання учнів розв’язування завдання з параметрами як засіб розвитку прогностичного мислення. Тригонометричні рівняння з параметрами ЧЗБ Чашечникова О.С. , Бардакова О.Г. Актуальні питання природничо-математичної освіти. 1 (13), 92-103
36. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 10 клас. Х.: Ранок. 2018. 272 с
37. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) 10 клас. Х.: Ранок. 2018.
38. Нелін Є. П., Долгова О.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 11 клас. К.: Генеза. 2018
39. Ознайомлення учнів основної школи з елементами математичного моделювання (на прикладі змістової лінії «рівняння, нерівності та їх системи») О.С. Чашечникова, І.С. Нейчева, Актуальні питання природничо-математичної освіти, 50
40. Орлов В.П. Тригонометричні рівняння та нерівності: методи розв'язування в старшій школі / В.П. Орлов. — Київ: Генеза, 2023. — 188 с.
41. Панченко Т.М. Розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей в старшій школі / Т.М. Панченко. — Одеса: Математична освіта, 2023. — 200 с.
42. Платформа Prometheus [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://prometheus.org.ua>
43. Платформа Всеосвіта [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://vseosvita.ua>
44. Платформа На Урок [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://naurok.com.ua>
45. Платформа Освіторія [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://osvitoria.media>

46. Прус А.В. Прус А.В. Модуль у рівняннях та нерівностях: Навчально-методичний посібник. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. - 32 с.
47. Психологічні особливості розвитку мотивації навчальної діяльності школярів [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://vseosvita.ua/library/embed/01003e6t-3d11.docx.html>
48. Романюк В.Я., Дутко Л.І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. – Львів: Тріада плюс, 2004.
49. Садовий С.П. Методика викладання тригонометричних рівнянь та нерівностей у старшій школі / С.П. Садовий. — Київ: Освітні технології, 2023. — 192 с.
50. Сіточкін С.Ю. Математика: Алгебра. 10-11 класи. Підготовка до ЗНО / С.Ю. Сіточкін. — Київ: Підручники і посібники, 2022. — 220 с.
51. Створення творчого середовища в умовах диференційованого навчання математики: монографія ОС Чашечникова - Суми: Видавництво ПП Вінниченко МД, ФОП ..., 2011 Цитується: 46
52. Сухомлинська В.О. Математика в умовах змішаного навчання: методика і практика / В.О. Сухомлинська. — Київ: Педагогічна думка, 2023. — 168 с.
53. Тарас Гриценко «ПОЗИТИВНІ ТА НЕГАТИВНІ АСПЕКТИ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ В КОНТЕКСТІ ІННОВАЦІЙ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ» [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://dkrkm.org.ua/cache/2023-2024/konf/260424/zbirnyk.pdf#page=153>
54. Теорія когнітивного розвитку Піаже: 4 стадії – Психологер [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://psychologer.com.ua/teoriia-kohnityvnoho-rozvytku-piazhe/>
55. Учбова мотивація старших школярів і процес її формування [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/5457978/page:3/>
56. Ушаков В.А. Тригонометричні рівняння та нерівності в навчанні математики / В.А. Ушаков. — Харків: Математика, 2022. — 180 с.
57. Хмельницька С.М. Ірраціональні рівняння в контексті сучасної математичної освіти / С.М. Хмельницька. — Одеса: Педагогічна книга, 2022. — 192 с.

58. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності: Навчальний посібник.-Тернопіль: «Тайп», 2018.
59. Цибульська А. Деякі способи розв'язування ірраціональних рівнянь. Урок – практикум, 11 клас: Нестандартний урок // Математика. – 2006. – № 3. – С.13 – 18.
60. Чашечникова О. С. Вплив індивідуальних особливостей учнів на засвоєння навчального матеріалу з математики. / Чашечникова О. С / Математика. – 2008. - №19(463). – С. 1-6.
61. Чередніченко В.Ю. Інноваційні методи в навчанні математики в умовах змішаного навчання / В.Ю. Чередніченко. — Львів: Математика, 2022. — 208 с.
62. Щербань Н.С. Методи розв'язування тригонометричних рівнянь в умовах змішаного навчання / Н.С. Щербань. — Черкаси: Вища школа, 2023. — 212 с.
63. Що таке Kahoot! і чому його варто спробувати для організації дистанційного навчання [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://buki.com.ua/news/shcho-take-kahoot-i-chomu-yoho-varto-sprobuvaty-dlya-orhanizatsiyi-dystantsiynoho-navchannya/>
64. Юрченко Л.В. Методика розв'язування ірраціональних рівнянь у 11 класі / Л.В. Юрченко. — Харків: Математична школа, 2022. — 176 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Діагностична робота

Початковий рівень

1. Розв'яжи рівняння: $3x - 7 = 8$.
2. Знайдіть розв'язок нерівності: $2(7x - 8) > 4$.
3. При якому значенні змінної не має змісту вираз: $\frac{4x}{5x^2 - 15x}$.

Достатній рівень

4. Розв'яжіть рівняння: $x^2(x - 4)(x + 4) = 24 - 2x^2(x^2 + 5)$.
5. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності: $\frac{3x^2 + 2}{4} - \frac{x - 3}{2} \geq 2$.
6. Знайдіть область визначення функції: $y = \frac{2x}{\sqrt{-6 - 5x - x^2}}$.

Високий рівень

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2 \\ \frac{3}{x-y} + \frac{4}{x+y} = 7 \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} (a-1)(a-8) - 5a \geq (a-9)(a+9) + 1 \\ \frac{24a-5}{9} > 2a-1 \end{cases}$$

9. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - (a+2)x + 4 = 0$ має два кореня?

Додаток Б

Конспект на тему: Розв'язування нерівностей методом інтервалів**Мета:**

- пізнавальна: встановити рівень володіння учнями основними теоретичними та практичними знаннями; оновити знання учнів про метод інтервалів для розв'язування нерівностей; пригадати алгоритм та основні етапи застосування методу інтервалів; практично застосовувати метод для розв'язування нерівностей різних типів;
- розвиваюча: уточнити та оновити навички аналізу знаків нерівностей для отримання достовірних результатів; усвідомити вадливість коректного визначення знаків функцій на проміжках числової осі; розвинути критичне мислення через розв'язування задач різного виду; розвивати зв'язне усне й писемне мовлення, творчу увагу;
- виховна: сприяти формуванню уважності та відповідальності в процесі математичного аналізу; мотивувати учнів до повторення та закріплення знань, підвищуючи впевненість у своїх силах та можливостях.

Тип уроку: узагальнення та систематизація отриманих знань.

Обладнання: комп'ютер, дошка, презентація, картки-пам'ятки.

Хід уроку**I Організаційний момент**

Вітаю, шановні учні! Пропоную провести аналіз присутніх, а після перейти до нашої спільної роботи.

(.....)

Як ваші справи? Як ваш настрій? Готові до уроку?

(перевірка готовності до уроку)

II Повідомлення теми й мети уроку

Сьогодні ми з вами повторимо метод, який є ключовим інструментом в алгебрі для розв'язування нерівностей – метод інтервалів.

Метою уроку є визначення рівня вашої підготовки для швидкого, а найголовніше, якісного і точного розв'язання різного виду нерівностей саме за допомогою методу інтервалів.

III Мотивація навчальної діяльності

Ми прекрасно з вами знаємо, що в математиці існує декілька способів, які ми можемо використати при розв'язанні задач. Але ми повинні цінувати свій час, тому кожного разу обираємо раціональний спосіб. Да і ми знаємо, що математики – народ лінивий, тому без потреби напружуватися не будуть. Пропоную розглянути приклад:

$$(x - 1)(x + 2)(x - 4) > 0$$

Слід розглянути багато варіантів: коли добуток буде додатнім, тобто: $+++; +--; -+-; ---$ або від'ємним, тобто: $++-; +-+; -+-; ---$ і тд..

На це ми будемо витратити багато часу. Метод інтервалів, в свою чергу, передбачає всього кілька ключових кроків:

- знайти корені або точки, де вираз дорівнює нулю або не визначений;
- розбити числову пряму на інтервали;
- перевірити знак виразу на кожному інтервалі.

Ці кроки досить зрозумілі та логічні, а найголовніше не потребують великих часових витрат, що робить метод легким для засвоєння.

IV Відтворення та коригування опорних знань

Детальніше розглянемо алгоритм, використовуючи елементарний приклад:

$$(x - 1)(x + 2)(x - 4) > 0$$

Почнемо з області визначення функції (пригадаємо що ми називаємо областю визначення функції):

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

$$D(f): x \in R$$

Наступним етапом буде знаходження нулів функції, нагадайте мені, будь ласка, ще раз що ми називаємо нулями функції (відповідь: нулі функції, це

значення x (арументу), при яких функція дорівнює нулю). Коли добуток дорівнює нулю? (відповідь: коли один з множників дорівнює нулю).

Тобто ми з вами розглядаємо наступні варіанти:

$$x - 1 = 0 \quad x + 2 = 0 \quad x - 4 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -2 \quad x = 4$$

Отже, нулі функції: $x = 1$; $x = -2$; $x = 4$

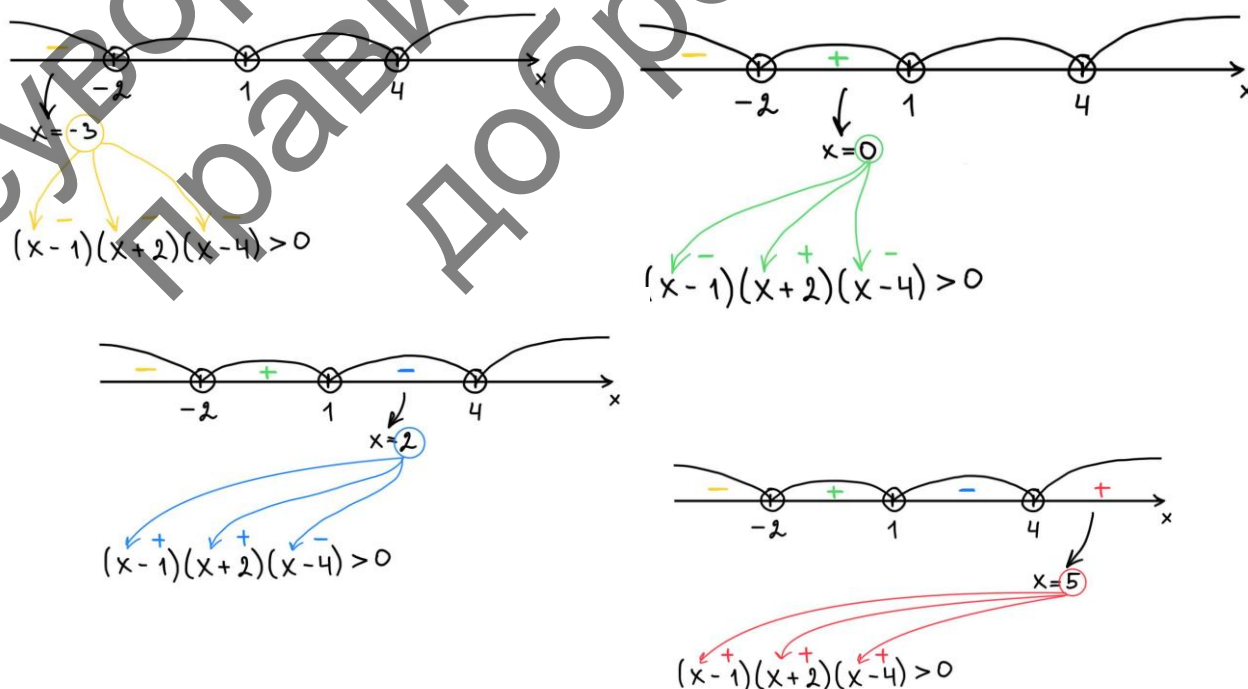
Далі, використовуючи координатну пряму, ми позначаємо отримані нулі функції:

Потім,

функції на

отриманому інтервалі:

Як це зробити? Слід з кожного інтервалу взяти число, яке належить обраному інтервалу, та підставити його у кожен дужку нашої нерівності, проконтролювавши всі отримані знаки маємо:



Звертаючи увагу на знак нерівності в умові, нам потрібні інтервали, на яких функція має знак плюс, бо значення повинні бути саме більше нуля за умовою нерівності. Враховуючи знак нерівності (строгий/нестрогий), ми запишемо розв'язання у вигляді інтервалів з відповідними дужкам. Давайте пригадаємо, якщо знак строгий, тобто лише більше або лише менше, які дужки будуть в інтервалі у відповіді? (круглі $()$ – числа на кінцях інтервалів не включаємо), якщо нестрогий, тобто більше або дорівнює і менше або дорівнює? (квадратні $[]$ – числа на кінцях інтервалів включаємо) (слайд 5). І, тепер, запишемо остаточну відповідь:

$$x \in (-2; 1) \cup (4; +\infty)$$

V Узагальнення та систематизація понять

Пропоную перейти до більш цікавих нерівностей, бо ви будете мати справу з ними в процесі складання НМТ.

Але перед цим слід повторити квадратні рівняння та алгоритми їх розв'язання.

(Далі разом із дітьми пригадаємо основне, що стосується квадратних рівнянь та методів знаходження їх коренів за допомогою слайду 6)

1. Квадратне рівняння (КР) – це... (рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$)
2. Яких існує два способи розв'язання КР? (знаходження коренів за формулою дискримінанту та т. Вієта)
3. Формула дискримінанту? ($D = b^2 - 4ac$; $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$)
4. Теорема Вієта $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
5. Що є графіком квадратного тричлена? (парабола)
6. Якщо $a = -1$, то вітки параболи ... (опущені до низу)
7. Якщо графік – парабола – над віссю x , то знак функції ... (функція там має знак +), якщо під – (функція має знак -)

Зверніть увагу на дошку (слайд 7 та 8), ви бачите інформацію стосовно значень дискримінанту та коефіцієнту a . (Якщо D більше від нуля, менше та

дорівнює йому). Прокоментуйте табличку. (Якщо $D = 0$, то вершина параболи знаходить на вісі x ; якщо $D < 0$, то парабола «в повітрі» – над віссю x ; якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь x два рази).

Пропоную оновити знання, виконавши завдання на фото (виконуємо усно завдання із слайду 9). Відповіді:

1. Коефіцієнт a (старший коефіцієнт) більше від нуля, отже вітки параболи будуть угору;
 - дискримінант більше нуля, отже парабола буде мати дві точки перетину з віссю x . (на слайді звернути увагу на знаки функції з утворених інтервалів);
2. старший коефіцієнт менший за нуль, тобто вітки будуть опущені донизу;
 - дискримінант менший від нуля, тобто парабола не буде мати точок перетину з віссю x ;
3. старший коефіцієнт менший за нуль, тобто вітки будуть опущені донизу;
 - дискримінант більший від нуля, отже з віссю x парабола має дві спільні точки;
4. старший коефіцієнт більший від нуля – вітки вгору;
 - дискримінант рівний нулю, отже лише вершина параболи буде належати вісі x . (слід пригадати формули знаходження вершини параболи)

Завдання (слайд 10)

VI Підсумок уроку. Рефлексія

Підведемо підсумок (завдання та питання на слайді 12 презентації).

Відповіді:

1. Записуємо функцію, знаходимо область визначення, знаходимо нулі функції, позначаємо на координатному промені, визначаємося із знаками на отриманих інтервалах, обираємо відповідні інтервали, записуємо відповідь.

2. Слід взяти будь-яке число з отриманого проміжку і підставити в умову нерівності, обчислити і визначитися із знаком в дужках.

3. Змінюється на протилежний.

4. вітки параболи донизу опущені, парабола має дві точки перетину з віссю x .

5. В залежності від знаку нерівності, якщо він строгий – включаємо, якщо ні – не включаємо.

Які були труднощі? Чи залишилися запитання? Чи все було зрозуміло?

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
правил академічної
добросовісності