Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Ленчик Ірина Юріївна

ФОРМУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ (У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ)

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:
Чкана Ярослав Олегович,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики
та методик їх навчання
«____» _____________ 2024 року
Виконавець:
Ленчик І. Ю.
студентка групи М-6
«____» _____________ 2024 року

Суми 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. У сучасному світі кожна людина зустрічається з безліччю задач, для яких існують визначені правила (інструкції, команди), що пояснюють виконавцю, як розв'язувати проблему, що виникла. Чим точніше будуть сформульовані такі правила, тим швидше фахівець опанує їх і буде їх застосовувати. І це стосується будь-якої сфери людського життя. Іншими словами, сучасна людина повинна мати високий рівень алгоритмічної культури.

Особливо проблема формування алгоритмічної культури актуалізується в навчанні математики, оскільки доволі часто вчителі зіштовхується з проблемою навчання учнів розв'язувати задачі традиційними методами. З одного боку, навіть після розв'язування декількох типових задач учні іноді не можуть розв'язати аналогічну задачу. З іншого боку, з вивченням все більшого обсягу навчального матеріалу виникає протиріччя: маючи певні знання (вивчивши правила), учні не знають, як їх застосовувати до розв'язування задач. Це вимагає пошуків методів й прийомів, які спрямовані на вміння учнів застосовувати отримані знання. Пропонується розробляти «підказки» до розв'язування задач, створювати загальні схеми розв'язування задач певного типу, виділяти опорні задачі тощо, тобто вчити учнів мислити за алгоритмом, формувати в них високий рівень алгоритмічної культури.

Дослідники пропонують досить різноманітний спектр засобів та методів формування алгоритмічної культури старшокласників. Це і програмування, і використання алгоритмізації самого процесу навчання, і застосування алгоритмічного підходу в шкільному курсі математики. Серед ефективних засобів формування алгоритмічної культури старшокласників виділяють системи обчислювальних задач, оскільки процес їх розв'язування алгоритмізовується.

Але наразі спостерігається недостатня пркотична розробленість проблеми використання обчислювальних задач з метою формування алгоритмічної культури старшокласників, що і зумовлює вибір теми магістерського дослідження «**Формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики (у процесі розв'язування задач)**».

Аналіз останніх досліджень. Поняття «алгоритмічна культура» розглядали багато вчених психологів та методистів. Проблемі розвитку алгоритмічного мислення в навчанні математики приділяли увагу М. І. Бурда, М. П. Лапчик, В. М. Монахов, І. Ф. Тесленко та ін., формування алгоритмічної культури (як складника інформатичної) розглядали М. І. Жалдак, М. М. Левшин, Ю. С. Мельник, Н. В. Морзе, С. Й. Шварцбурд та ін., у процесі вивчення інших навчальних дисциплін алгоритмічний підхід використовували Н. М. Бібік, М. О. Данилов, І. Я. Лернер, М. І. Паламарчук, М. М. Скаткін та ін.

Мета дослідження – дослідити особливості формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики.

Згідно з метою дослідження було визначено такі **завдання:**

1. Проаналізувати й узагальнити науково-теоретичні дослідження про методичні особливості формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики.

2. Дослідити психологічні особливості сучасних старших підлітків з позицій формування алгоритмічної культури.

3. Розглянути теоретичні засади алгоритмізації навчання математики як шлях формування алгоритмічної культури старшокласників.

4. Проаналізувати актуальний стан програмового матеріалу в контексті дослідження.

5. Обгрунтувати потенціал задач для формування алгоритмічної культури старшокласників на уроках математики.

6. Здійснити аналіз цифрових засобів орієнтованих на формування алгоритмічної культури старшокласників.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів закладів загальної середньої освіти.

Предмет дослідження – процес формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики.

Методи дослідження. Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань використано наступні методи:

- теоретичні: вивчення, аналіз і узагальнення психолого-педагогічної й спеціальної методичної літератури з предмету дослідження для з'ясування науково-теоретичних засад формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики; аналіз програмового матеріалу з теми дослідження з метою з'ясування актуального стану досліджуваної проблеми;

- емпіричні: цілеспрямоване спостереження за процесом формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики під час проходження педагогічної практики у закладах загальної середньої освіти; вивчення й узагальнення педагогічного досвіду для обґрунтування ефективності процесу формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики.

Практичне значення здобутих результатів полягає у розробці методичних рекомендацій формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики.

Одержані в дослідженні результати можуть бути використані у освітньому процесі навчання математики учнів старшої школи, у процесі розробки навчальних програм з математики.

Апробація результатів дослідження. Основні положення і висновки дослідження висвітлено у публікації «Психологічні особливості сучасних старших підлітків у контексті розвитку алгоритмічного мислення» у матеріалах IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023» Форум молодих дослідників» (17 листопада 2023 р., м. Суми) [12], «Сутність поняття «алгоритмічна культура» та «Використання алгоритмічного підходу в шкільному курсі математики» у матеріалах Звітної студентської конференції (3 травня 2024 р., м. Суми) [11; 12].

Структура та обсяг магістерської роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

У вступі розглянуто актуальність роботи, визначено об'єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Теоретичні засади формування алгоритмічної культури» розкрито сутність таких суміжних понять як «алгоритм», «алгоритмічні уміння», «алгоритмічні здібності», «алгоритмічне мислення» та «алгоритмічна культура»; проаналізовано кореляцію евристичного та алгоритмічного мислення; описано психологічні особливості сучасних старших підлітків у контексті дослідження, акцентуючи увагу на розвитку математичного мислення та алгоритмічного мислення як окремої форми абстрактного мислення; приділено увагу проблемі алгоритмізація самого процесу навчання математики.

У другому розділі «Формування алгоритмічної культури старшокласників при вивченні математики» описано особливості використання алгоритмічного підходу в шкільному курсі математики, зосередившись на тому, які саме види діяльності чи процеси можуть бути алгормізовані; обгрунтовано потенціал обчислювальних задач для формування алгоритмічної культури старшокласників на уроках математики; здійснено аналіз цифрових засобів, орієнтованих на формування алгоритмічної культури старшокласників та допоміжно проаналізовано зміст шкільних підручників з інформатики на предмет цифрових засобів, які використовуються для розв'язування обчислювальних задач математичного змісту; розроблено конспекти уроків «Побудова перерізів многогранників», «Розв'язування рівнянь з параметрами», спрямованих на формування алгоритмічної культури старшокласників.

Загальний обсяг магістерської роботи – 87 сторінок. Список використаних джерел включає 38 найменування. У тексті міститься 58 рисунків.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей та вчителям математики закладів загальної середньої освіти.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНОЇ КУЛЬТУРИ

1.1. Сутність поняття «алгоритмічна культура»

Перш ніж розібратися в змісті поняття «алгоритмічна культура», варто розкрити зміст поняття «алгоритм». Алгоритм – це певна послідовність елементарних дій (операцій), які сприймаються однозначно через їх простоту і виконуються усіма. По-іншому, алгоритм – це система вказівок (приписів) про дії, які потрібно виконати, причому вказано, які з них і як треба виконувати. З алгоритмами людина зустрічається кожного дня. Прикладами повсякденних алгоритмів є правило переходу через вулицю (спочатку подивитися наліво, потім подивитися направо, а потім перейти дорогу), кулінарний рецепт (спочатку додати один інгрідієнт, потім інший, потім перемішати тощо). Тому поняття алгоритму інтуїтивно зрозуміло навіть дітям дошкільного віку. І те означення, яке подано вище, прийнято називати інтуїтивним, воно не є точним.

Алгоритм, наприклад, описує загальний метод розв’язування класу однотипних завдань, тобто алгоритм є формою виразу цього методу. З цією ж метою в шкільному курсі математики часто використовуються правила. Правило – це «згорнутий» алгоритм. В. А. Кушнір, Р. Я. Ріжняк вважають, що «будь-який алгоритм можна назвати правилом, але не всяке правило можна назвати алгоритмом: у формулюванні правила часто чітко не виділяються всі кроки – воно не володіє в цьому випадку властивістю детермінованості» [9]. Для того, щоб правила або вказівки можна було вважати алгоритмами, побрібно, щоб вони задовольняли наступні вимоги:

- «повинні бути чітко перераховані всі операції і вказані умови, які визначають порядок застосування цих операцій;

- кожна операція та кожна умова повинні бути точно визначені;

- кожна операція виконується однозначно;

- учні, для яких дається дана вказівка, володіють всіми операціями, які перелічені у вказівці;

- точне виконання усіх вказаних операцій із урахуванням умов їх виконання і порядку завжди приводить до результату» [18].

З поняттям «алгоритм» тісно пов’язано поняття «алгоритмічні уміння», «алгоритмічні здібності» та «алгоритмічне мислення».

Алгоритмічні вміння включають вміння розчленовувати складні дії на елементарні кроки і представляти їх у вигляді організованої сукупності останніх, вміння планувати свої дії та суворо дотримуватися цього плану у своїй діяльності, вміння висловлювати свої дії зрозумілими мовними засобами.

Алгоритмічні здібності – це специфічні індивідуальні здібності особистості, що виражаються у схильності мислення до знаходження узагальнених способів розв’язування завдань, до оволодіння узагальненими поняттями, правилами, спрямованими на швидке та успішне досягнення нових, значущих результатів у навчально-пізнавальній діяльності.

Алгоритмічне мислення є невід’ємним складником інтелектуального розвитку людини. «Молодій людині сьогодні потрібні вміння планувати послідовність дій для досягнення мети, передбачати можливі наслідки» [32]. Згідно з Концепцією Нової української школи культура алгоритмічного мислення є важливим складником інформаційно-цифрової та математичної компетентностей школяра [6]. О. В. Шаран вважає, що основними компонентами алгоритмічного мислення є «структурний аналіз завдання, розбивка великого завдання на малі, зведення нерозв’язаного завдання до раніше розв’язаних, планування можливих ситуацій і реакцій на них, розуміння й використання формальних способів запису розв’язання» [33]. Ці компоненти мають універсальний характер і можуть застосовуватися майже у всіх сферах людської діяльності.

Ю. С. Мельник під здатністю алгоритмічно мислити розуміє «вміння розв'язувати завдання різноманітного характеру, що вимагають складання прогнозованого плану дій для досягнення бажаного результату та адекватних форм прийняття правильних рішень» [16].

З метою формування алгоритмічного мислення школярів потрібно використовувати алгоритми в освітній діяльності. Наприклад, на уроках математики це «правила виконання операцій, перетворень, побудова різних моделей задачі (текстової, предметної, предметно-схематичної, схематичної, математичної)» [16].

Внаслідок використання алгоритмів в освітньому процесі відбувається «формування обчислювальних навичок і вмінь учнів, доведення їх до автоматизму; попередження помилок учнів; структурування роботи над завданням, усунення наявних помилок; навчання самоаналізу, самоконтролю; планування діяльності для виконання завдання; організація пошуково-дослідницької діяльності учнів» [33].

Деякі дослідники вважають, що формування алгоритмічного мислення знецінює творче мислення. Але ми не погоджуємося в цією позицією, оскільки, по-перше, алгоритмічна діяльність полягає у тому, що учні узагальнюють розв'язування певного класу математичних задач, що є більш складною задачею ніж розв'язування певної задачі з певними вхідними даними; по-друге, алгоритмічна діяльність задіює і абстрактне мислення; по-третє, алгоритмічний підхід створює підґрунтя, основу для творчого застосування сформованих знань та вмінь учнів, підвищує осмисленість засвоєння, полегшує і прискорює вивчення програмного матеріалу [34].

Традиційно евристика та алгоритм були поняттями, які протиставляють одне одному. Алгоритм розуміється як певна механічна дія, що однозначно призводить до розв'язку, а евристика – як спрямований пошук розв'язку, що не гарантує, однак, його досягнення. Евристика як момент відкриття нового пов'язується з інсайтом, «осяянням», миттєвим знаходженням розв'язку задачі внаслідок здійснення усвідомленого чи неусвідомленого процесу його пошуку. Евристична діяльність спрямована на виявлення раніше невідомих закономірностей: це процедура попереднього оцінювання, що дозволяє перевіряти, оцінювати та удосконалювати теорії. Інструментами евристики є аналіз, синтез, контроль та висунення гіпотез. Однією з тенденцій розвитку евристичного підходу на сучасному етапі є перехід від класичного протистояння евристики і алгоритму. Два процеси стають комплементарними, оскільки, «з одного боку, розробка алгоритму вимагає творчого мислення, з іншого – складаються евристичні алгоритми» [4]. Взаємодія алгоритму та евристики відбиває ідеальний процес подолання труднощів: універсальний метод у поєднанні із вдалим осяянням. У сукупності вони забезпечують гнучкість прийняття рішення: кожен суб'єкт вибудовує алгоритм прийняття рішення, виходячи з евристичних механізмах.

Зауважимо, що важливу роль у навчанні відіграє формування різноманітних автоматизованих дій – навичок (умінь розв'язувати стандартні задачі). Ці навички є необхідною складовою творчого процесу (розв'язування складних і нестандартних задач), оскільки без них він неможливий. Тобто, високий рівень розвитку творчого мислення неможливий без відповідного рівня розвитку алгоритмічного мислення. Іншими словами, високий рівень сформованості творчого мислення неможливий без високого рівня сформованості алгоритмічного мислення. В якості підтвердження цієї тези наведемо приклад розв'язування задач з параметрами, що є творчим процесом, але не без використання певних алгоритмів. І до того ж алгоритмізація супроводжує не весь освітній процес, а лише ті його компоненти, де вона видається доцільною.

Поряд із поняттям «алгоритмічне мислення» використовується і поняття «алгоритмічна культура».

Ю. С. Мельник в зміст поняття «алгоритмічна культура» вкладає наступні компоненти (рис.1.1) [15]. І хоча ці компоненти сформульовано в контексті навчання інформатики, але «раціональне зерно» для навчання математики ми можемо виокремити.

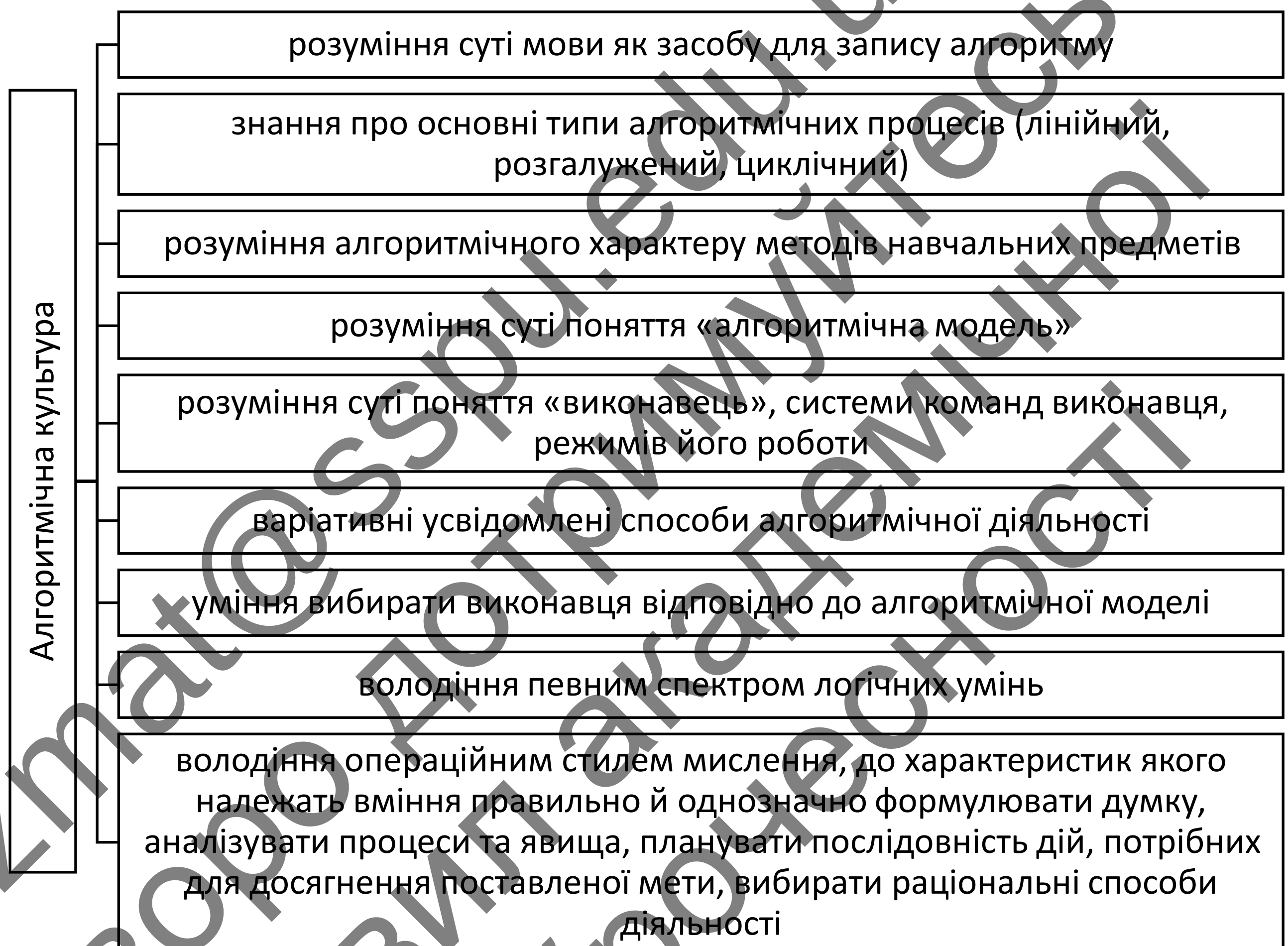


Рис.1.1. Компоненти поняття «алгоритмічна культура» (за Ю. С. Мельник)

За Ю. С. Мельник «алгоритмічна культура – це сукупність специфічних знань, умінь і навичок, потрібних для розкриття сутності та властивостей алгоритму, оволодіння способами його запису, основними типами алгоритмічних процесів, що на сучасному етапі розвитку суспільства мають бути невід’ємною складовою загальної культури кожної людини» [15].

Але всі розглянуті означення, на нашу думку, вузькоспрямовані, тобто вони розкривають зміст поняття «алгоритмічна культура» надто вузько, тільки в контексті навчання інформатики, або написання комп'ютерних алгоритмів на певних мовах програмування.

Насправді ж, зміст поняття «алгоритмічна культура» значно ширший. Наприклад, В. Корольський та А. Капіносов розкривають зміст поняття алгоритмічної культури через певний набір умінь (рис.1.2) [7].

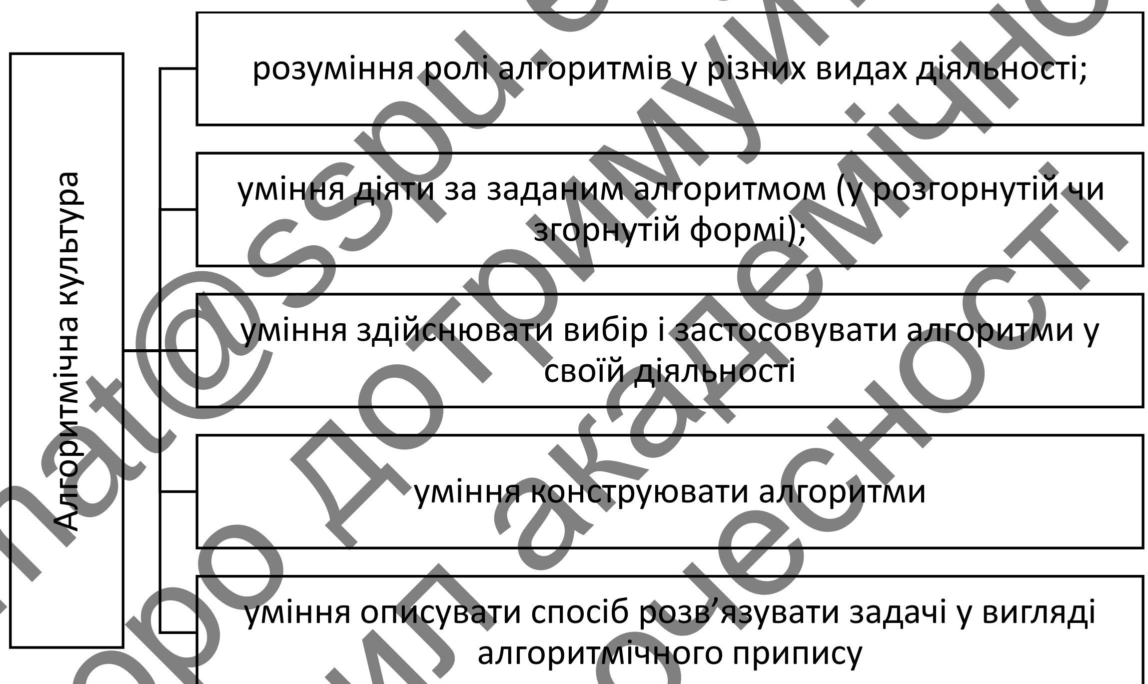


Рис. 1.2. Уміння, що розкривають сутність поняття «алгоритмічна культура» (за В. Корольський та А. Капіносов)

Л. В. Осіпа пояснює зміст поняття «алгоритмічна культура» через низку компонентів, які взаємопов'язані і є базовими у процесі її формування.

Мотиваційно-ціннісний компонент алгоритмічної культури

- формується через розвиток інтересу до алгоритмічної діяльності й використання засобів інформаційних технологій, розуміння значимості процесу алгоритмізації під час розв’язування задач та характеризується сукупністю їхніх стійких поглядів, мотивів і спонукань, що визначають спрямованість динамічного, неперервного і гуманістичного процесу зростання внутрішньої потреби в особистісному перетворенні, постійному самовдосконаленні й інтелектуальному розвитку

Знаннєво-пізнавальний компонент алгоритмічної культури

- формується у процесі здобуття нових знань (знання алгоритмів, їх властивостей, базових алгоритмічних структур тощо) та проявляється в розумінні ними загальних способів алгоритмізації, цілеспрямованості, плануванні та покроковій деталізації алгоритмічний дій, що забезпечує оптимальне розв’язування задачі алгоритмічним способом

Діяльнісний компонент алгоритмічної культури

- включає активне продуктивне застосування здобутих знань у процесі розв’язування задач та характеризується розвитком алгоритмічних умінь і навичок, що загалом сприяє фундаменталізації освіти, підвищенню якості шкільної інформатичної освіти та початковому формуванню в них алгоритмічної компетентності

Рефлексивний компонент алгоритмічної культури

- виявляється в оцінюванні власної алгоритмічної діяльності, що передбачає оволодіння уміннями самоконтролю, свідомому регулюванні своєї поведінки, збагаченні досвіду саморегуляції пізнавальної діяльності алгоритмічного змісту

Рис. 1.3. Компоненти алгоритмічної культури за Л. В. Осіпа [22]

Таким чином, «формування алгоритмічної культури характеризується високим рівнем розвитку логічного і алгоритмічного мислення особистості, передбачає розуміння учнями загальних способів алгоритмізації, алгоритмічної сутності і можливості автоматизації практичної сфери діяльності людини, здатністю організувати алгоритмічну діяльність у процесі розв’язування різноманітних задач» [22].

1.2. Психологічні особливості сучасних старших підлітків у контексті дослідження

Специфіка математичного мислення в тому, що для нього характерні особливі форми: конкретне, абстрактне (аналітичне, логічне, просторове). На рис.1.4 подано основні характеристики зазначених форм мислення.

Когнітивний розвиток у підлітковому віці проявляється через удосконалення абстрактного та логічного мислення, пам'яті, а також через розвиток метакогнітивних навичок, які стосуються формування інтелектуального стилю діяльності. Підлітковий вік є сензитивним періодом для розвитку абстрактного (словесно-логічного) мислення.

Багато підлітків стикаються з труднощами в процесі мислення через недостатній розвиток таких когнітивних операцій, як аналіз, синтез, порівняння та узагальнення. Засвоєння понять часто має поверхневий характер. Зосередження на деталях та дрібних фактах утруднює виокремлення головного та здійснення необхідних узагальнень.

Л. С. Виготський зазначав, що мислення у підлітків не є однією функцією з інших. Розвиток мислення має цілеспрямоване, ключове, вирішальне значення для всіх інших функцій та процесів. Мислення в підлітковому віці змінюється якісно і кількісно, набуває нових, складних форм [35].

Б. А. Якимчук відмічає, що згідно з оцінкою змісту мислення, на початку підліткового віку домінує конкретне мислення, а перехід до абстрактного мислення відбувається через конкретні ситуації. Абстрактне мислення стає основною формою, але воно більш характерне для старшого підліткового віку. Завдяки оволодінню логічним мисленням відбуваються значні зміни в змісті мислення, які забезпечують більш глибокий рівень розуміння та аналізу [35].

Рис. 1.4. Форми математичного мислення

В. А. Крутецький [8] також вважає, що головною тенденцією розвитку мислення підлітків є формування абстрактного мислення. Підлітки починають цікавитися не лише конкретними фактами, а й їх аналізом, пошуком причин та прагненням виокремлювати основне, істотне в матеріалі. Вони оволодівають умінням обґрунтовувати свої судження та робити узагальнення. Проте у більшості підлітків зберігається невисокий рівень розвитку аналітико-синтетичної діяльності, і деякі з них відчувають труднощі при встановленні причинно-наслідкових зв'язків, легше визначаючи причини подій, ніж їх наслідки.

Змінюється також взаємовідношення між мисленням і мовленням, а також між мисленням і наочно-образним сприйманням. Особливо вираженими є зміни у мовленнєвій формі мислення, зокрема в умінні оперувати формулами з буквеними позначеннями. Розвиток мовленнєвої діяльності позитивно впливає на вдосконалення та активізацію всіх психічних процесів: уваги, сприймання, пам’яті. У підлітків збільшується обсяг пам'яті не лише завдяки кращому запам'ятовуванню матеріалу, а й через його логічне осмислення. Пам'ять стає організованим, регульованим і керованим процесом. Спостерігаються прогресивні зміни у розвитку довготривалої та короткочасної пам'яті, де провідну роль починає відігравати вербальна пам'ять.

Увага та сприймання також піддаються змінам: вони стають цілеспрямованими та здатними до глибокого аналізу. Зростає обсяг уваги, тобто збільшується кількість об’єктів, на яких вони можуть зосереджуватися одночасно. Розвивається вміння розподіляти та переключати увагу.

Окремою формою абстрактного мислення є *алгоритмічне мислення*, що має ознаки як аналітичного, так і логічного. Характерні ознаки алгоритмічного мислення подано на рис.1.5.

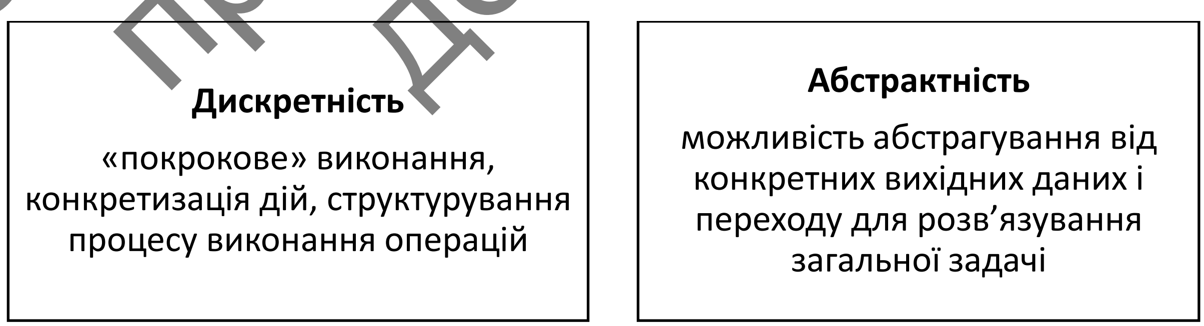


Рис. 1.5. Характерні ознаки алгоритмічного мислення

Відмінною рисою алгоритмічного мислення вважається можливість визначити послідовність дій, необхідні для розв'язування підставленої задачі. Деякі дослідники вважають, що потреба у дослідженні алгоритмічного мислення як окремого типу мислення донедавна не виникала. А виникла ця потреба виділяти алгоритмічне мислення як окремий тип мислення порівняно недавно, і поштовхом до цього став розвиток цифрових технологій. Ми не погоджуємося з цією думкою, оскільки алгоритмічне мислення пов'язане не тільки із комп'ютерними алгоритмами. Необхідність наявності високого рівня розвитку алгоритмічного мислення необхідна також при розв'язуванні багатьох математичних задач.

Алгоритмічне мислення має свої загальні та специфічні ознаки порівняно з іншими формами мислення (рис.1.6).

Рис. 1.6. Загальні та специфічні ознаки алгоритмічного мислення

Компонентами алгоритмічного мислення є вміння формалізувати завдання та розбивати його на окремі складові логічні блоки. Вчені визначають алгоритмічне мислення як пізнавальний процес, що характеризується наявністю чіткої, доцільної послідовності здійснюваних розумових процесів з властивою деталізацією та оптимізацією укрупнених блоків, усвідомленим закріпленням процесу отримання кінцевого результату, представленого у формалізованому вигляді на мові виконавця і прийнятого.

Перелік структурних компонентів алгоритмічного мислення візуалізовано на рис. 1.7.

- здатність до оперування образами
- здатність до оперування поняттями та категоріями
- здатність до формування предметних суджень
- здатність до формування індуктивних висновків
- здатність до формування дедуктивних висновків
- здатність до формування репродуктивних навичок
- здатність до формування продуктивних навичок
- здатність до аналізу завдання, її декомпозиції на рівні процесів
- здатність до формалізації завдання (абстрагування)
- розуміння та здатність до реалізації елементарних алгоритмічних операцій

Рис. 1.7. Перелік структурних компонентів алгоритмічного мислення

Вчені А. К. Артемов, А. П. Єршов, Н. Б. Істоміна, Ю. С. Мельник, В. М. Монахов та ін.) дотримуються думки, що алгоритмічне мислення є необхідним компонентом розвиненої сучасної особистості. Психологи довели, що віковий період від 5 до 11 років є сензитивним для формування таких психічних процесів, як аналіз, внутрішній план дій, рефлексія, що є основою для формування алгоритмічного мислення.

Насправді ж більшість підлітків мають низький рівень розвитку логічного і алгоритмічного мислення. Це, звичайно, може пояснюватися індивідуальними особливостями, але, на жаль, це сучасна тенденція. В такому випадку проблема розвитку алгоритмічного мислення як складової частини алгоритмічної культури старшокласників особливо актуалізується.

1.3. Алгоритмізація навчання математики як шлях формування алгоритмічної культури старшокласників

Діяльність учителя на уроках математики підпорядкована виконанню точної послідовності більшості навчальних дій, операцій і прийомів. Учитель дає учням строго послідовні вказівки щодо виконання тієї чи іншої операції. Ми називаємо ці вказівки терміном «алгоритм», про який йшлося у підрозділі 1.1. У зв'язку з такою діяльністю введемо поняття «алгоритмізація» - етапи розв'язування задачі включають виявлення алгоритму, що забезпечує її розв'язання.

Поняття «алгоритмізація навчання» можна трактувати також як алгоритмізацію самого навчального процесу, що охоплює діяльність як учня, так і вчителя. Етапи процесу алгоритмізації навчання подано на рис. 1.8.

Рис.1.8. Етапи процесу алгоритмізації навчання

Розглянемо, як відбувається процес алгоритмізації навчання на уроках.

1. Підготовчий етап (аналіз). Виділяються основні означення та властивості математичних об'єктів, теореми тощо. Здійснюється аналіз важливість даної інформації для її практичного застосування (розв'язування задач). Учитель складає орієнтовні алгоритми для розв'язування задач.

2. Основний етап (введення алгоритму). Вчитель пояснює правило. Потім за схемою розв'язуються декілька прикладів. Вчитель пропонує алгоритм (жорстка фіксація розумових дій) або алгоритми складаються разом з учнями. Відбувається осмислення суті алгоритму, детальне обговорення кожного його кроку на прикладі розв'язання типової задачі.

3. Заключний етап (закріплення алгоритму). Пропонується достатня кількість задач на застосування алгоритму. Після усвідомлення алгоритму учні

переходять до самостійного розв'язування задач. Наприкінці, розв'язуються більш складні задачі на застосування алгоритму, зокрема прикладного характеру.

Алгоритмізація навчання має також і психологічне значення. Вона сприяє розрізненню учнями змістовної та операційної сторін отриманих знань і оволодінню загальним засобом для розв'язування широкого класу задач. При використанні алгоритмічного підходу в навчанні відбувається удосконалення форм і методів навчання. Навчальний процес орієнтовано на особистісний розвиток учнів, саме, на формування в них алгоритмічних навичок, причому акцент робиться не на засвоєнні знань, а на способах їх отримання.

Використання алгоритмів та алгоритмізація навчального процесу є важливими шляхами підвищення ефективності навчання, розвитку логічного мислення та формування алгоритмічної культури серед старшокласників.

Формування алгоритмічної культури в контексті математичної освіти тісно пов'язане з розвитком загальних умінь розв'язувати задачі. Створення універсального методу розв'язування певного класу задач у вигляді алгоритму полягає в розробці загального підходу до розв'язування задач, що представляє собою чітко визначену послідовність конструктивних кроків, кожен з яких веде до розв'язку, і є основою алгоритму.

Формування алгоритмічної культури учнів старшої школи здійснюється шляхом засвоєння на інтуїтивно-практичному рівні понятійного апарату та набуття відповідних способів поетапної діяльності. Формування алгоритмічної культури старшокласників органічно імплементується в навчання математики.

Алгоритмічна лінія шкільного курсу математики починає розвиватися ще в початкових класах; учні молодшого віку вивчають найпростіші алгоритми виконання арифметичних операцій; вони оволодівають навичками виконання послідовних дій при розв'язуванні різних задач і вправ з натуральними числами, дотримуючись чіткого виконання порядку дій.

Аналіз змісту шкільного курсу математики 5-6 класів показав, що достатньо велика кількість правил можуть бути алгоритмізовані. Під алгоритмізацією правил будемо розуміти виділення чітких логічних кроків, виконання яких приводить до правильного результату. Результати аналізу навчального матеріалу 5 та 6 класів на предмет вивчення правил, які є алгоритмізованими (рис. 1.9, 1.10).

5 клас
Порівняння натуральних чисел.
Порівняння дробів.
Додавання й віднімання дробів з однаковими знаменниками.
Додавання і віднімання мішаних чисел.
Перетворення правильного дробу в мішане число.
Перетворення мішаного числа в неправильний дріб.
Порівняння десяткових дробів.
Округлення десяткових дробів.
Округлення натуральних чисел.
Додавання десяткових дробів.
Віднімання десяткових дробів.
Множення десяткових дробів.
Ділення десяткових дробів.
Знаходження середнього арифметичного.
Знаходження відсотків.

6 клас
Знаходження найбільшого спільного дільника.
Знаходження найменшого спільного кратного.
Зведення дробів до найменшого спільного знаменника.
Порівняння дробів.
Додавання і віднімання дробів.
Множення дробів.
Знаходження дробу від числа.
Знаходження відсотків від числа.
Знаходження числа за його відсотками.
Перетворення звичайного дробу в десятковий.
Знаходження десяткового наближення звичайного дробу.
Правило знаходження відсоткового відношення двох чисел.
Порівняння чисел.
Додавання раціональних чисел.
Віднімання раціональних чисел.
Множення раціональних чисел.
Розкриття дужок.
Зведення подібних доданків.
Ділення раціональних чисел

Рис. 1.9. Алгоритмізовані правила в програмі 5-6 класів [27]

Щоб знайти різницю двох десяткових дробів, треба:

Кроки алгоритмізованого правила	Приклад: 0,8 - 0, 593
1) зрівняти в зменшуваному і від'ємнику суму цифр після ком	0,800; 0, 593
2) записати від'ємник під зменшуваним так, щоб кожний розряд від'ємника опинився під відповідним розрядом зменшуваного	0, 800 0, 593
3) виконати віднімання так, як віднімають натуральні числа	-0,800 <u>0,593</u> 0,207
4) поставити в отриманій різниці кому під комами в зменшуваному і від'ємнику	-0, 800 <u>0, 593</u> 0, 207

Рис. 1.10. Алгоритм правила знаходження різниці двох десяткових дробів [27]

Логічно процес формування алгоритмічної культури продовжити і в старшій школі. Саме на особливостях формування алгоритмічної культури в старшій школі ми і зосередимося у наступному розділі.

А. В. Писарєва спростовує побоювання, що навчання алгоритмам може призвести до стандартизації мислення, оскільки вироблення різних автоматизованих навичок (умінь розв'язувати типові задачі) займає важливе місце в навчанні математики. Авторка вважає, що ці навички є необхідним елементом творчого процесу (розв'язування складних і нестандартних задач), без яких цей процес неможливий. Однак навчання алгоритмам не зводиться лише до їх заучування. Воно включає в себе самостійне відкриття, побудову та формування алгоритмів, що є творчим процесом. Отже, алгоритмізація може стати ефективним засобом для розвитку творчого мислення. Крім того, алгоритмізація охоплює лише ті частини навчального процесу, де її застосування є доцільним [25].

Зауважимо, що психологічне значення алгоритмізації навчання полягає в тому, що вона допомагає учням розрізняти змістову та операційну сторони знань, а також оволодівати універсальним методом для вирішення широкого класу завдань [25].

РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Використання алгоритмічного підходу в шкільному курсі математики з метою формування алгоритмічної культури старшокласників

На думку М. Б. Ковальчук найпоширенішими є два підходи до алгоритмізації навчального процесу:

- розв'язування задач за алгоритмічними приписами і складання алгоритмів з метою формування певних прийомів пізнавальної діяльності (алгоритм функціонування);

- організація процесу навчання під керівництвом викладача з метою управління пізнавальною діяльністю (алгоритм управління) [5].

Також можна розглядати наступні види алгоритмів у навчальному процесі:

- алгоритми вивчення понять і доведення теорем (теоретичні алгоритми). Зокрема, формування понять базується на використанні двох типів алгоритмів – функціонування і управління;

- алгоритми розв’язування завдань (практичні алгоритми) [5].

Проаналізуємо зміст шкільного курсу математики (старша школа) на предмет використання алгоритмічного підходу (наявності зазначених типів алгоритмів) з метою формування алгоритмічної культури старшокласників. До того ж у шкільних підручниках математики більшість правил сформульована в лаконічній і «стислій» формі і для навчання учнів виконанню відповідного правила дії вчителеві часто необхідно записувати його у вигляді алгоритму [9].

1. Алгоритми методів доведення.

В старшій школі перші уроки стереометрії присвячені аксіомам стереометрії та теоремам, які, як показує досвід, учням доволі складно навчитися доводити.

Наприклад, теорема «Якщо площини мають одну спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку». Дана теорема має категоричну форму, для покращення сприймання її змісту вчитель повинен виділити структуру теореми, акцентувати, що є умовою, а що є висновком. Таку стурктуру важливо нагадати учням на прикладі формулювання даної теореми, бо це одна з перших теорем в курсі стереометріїв.

Дана теорема доводиться методом від супротивного. Цей метод вже використовувався в основній школі, але на перших уроках стереометрії з учнями необхідно згадати ідею метода. Варто надати учням навчальний алгоритм і орієнтир доцільності використання метода від супротивного. Учні помічають суттєві однакові кроки доведення. За допомогою вчителя в они формулюють алгоритм застосування цього методу (рис. 2.1). Формулюють орієнтир можливості застосування методу від супротивного: неможливість існування «чого-небудь» і єдність існування «чого-небудь» в математиці завжди доводиться методом від супротивного.

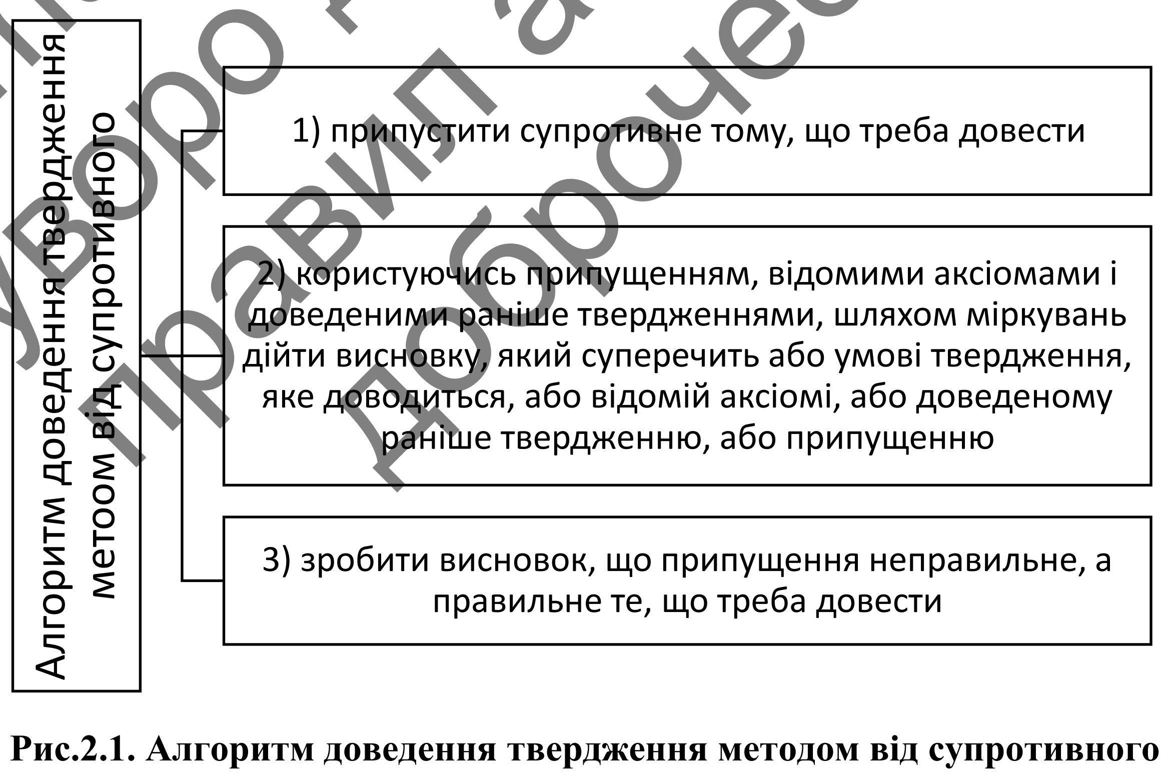


Рис.2.1. Алгоритм доведення твердження методом від супротивного

2. Алгоритми розв'язування задач на побудову.

Розв'язування задач на побудову є ефективним засобом підвищення рівня сформованості алгоритмічної культури учнів, адже їх особливістю є знаходження і наступне однозначне виконання скінченного ланцюга операцій – елементарних або основних побудов, тобто знаходження деякого алгоритму.

В основні школі при вивченні основних побудов потрібно скористатися алгоритмічним підходом. Учні повинні засвоїти алгоритм побудови, наприклад, бісектриси кута (рис. 2.2).

Алгоритм побудови бісектриси кута

1) описати з вершини кута як із центра коло довільного радіуса;

2) з точок перетину побудованого кола зі сторонами кута описати два кола тим самим радіусом і позначити точку їх перетину, відмінну від вершини кута;

3) через вершину кута і точку перетину кіл провести промінь, який і є бісектрисою кута.

Рис. 2.2. Алгоритм побудови бісектриси кута

В старшій школі розуміння того, що для розв'язування задач на побудову потрібно скласти певний алгоритм, допоможе старшокласникам при розв'язуванні задач на побудову плоских перерізів многогранників, при побудові зображень геометричних тіл, при побудові лінійного кута двогранного кута тощо. Вони вже будуть розуміти, що потрібно скласти певну скінченну послідовність кроків-побудов, тобто алгоритм.

Виконання графічних зображень за алгоритмом, де постійно варіюються неістотні ознаки, поглиблює уявлення учнів про ці об'єкти, сприяє міцному засвоєнню ознак, понять, вчить оперувати ними в найрізноманітніших ситуаціях, розвиває алгоритмічне мислення.

Наприклад, що зобразити піраміду, потрібно (рис. 2.3):

1) побудувати многокутник, що лежить в основі піраміди;

2) за умовою задачі визначити положення основи висоти піраміди;

3) з основи висоти піраміди вертикально вгору провести промінь на якому вибрати точку (вершину піраміди);

4) сполучити вершину піраміди з вершинами основи [2].

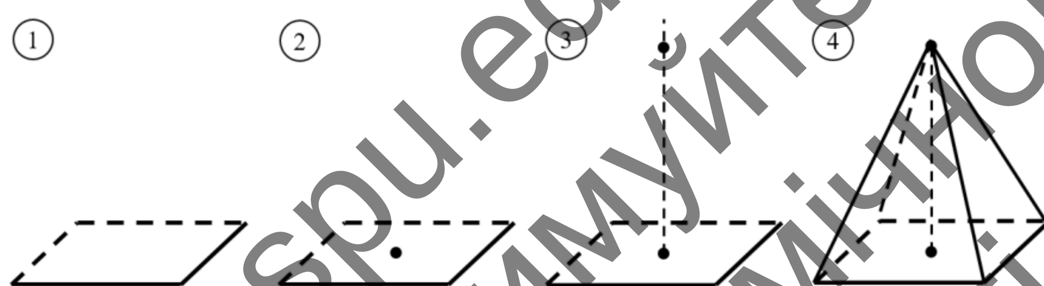


Рис.2.3. Алгоритм побудови піраміди

Або наведемо алгоритм побудови многогранника вписаного в циліндр (рис. 2.4).

Учні повинні знати алгоритми побудови вписаних і описаних правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника. Ці знання алгоритмів їх побудови знадобляться сторшокласникам при виконанні зображень правильних пірамід, призм, їх комбінацій з тілами обертання в курсі стереометрії.

При розв'язуванні задач на многогранники, тіла обртання, комбінації геометричних тіл важливими є вміння «розв'язувати трикутники», під чим ми розуміємо знаходження невідомих елементів трикутника через відомі, причому «елементми трикутника» можуть бути його медіани, бісектриси, висоти, периметр, площу. В змісті сучасного шкільного курсу математики розв'язування трикутників полягає у визначенні невідомих сторін і кутів через відомі його кути і сторони. В такому контексті достатньо навчити учнів розв'язувати чотири види задач, які схематично (за даними елементами трикутника) зображено на рис.2.5.

Зауважимо, що потріно у вихідних даних мати обов'язково три параметри, причому хоча б один з яких обов'язково лінійний.

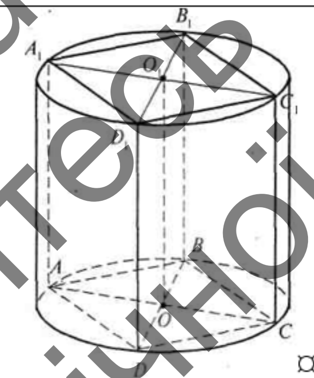
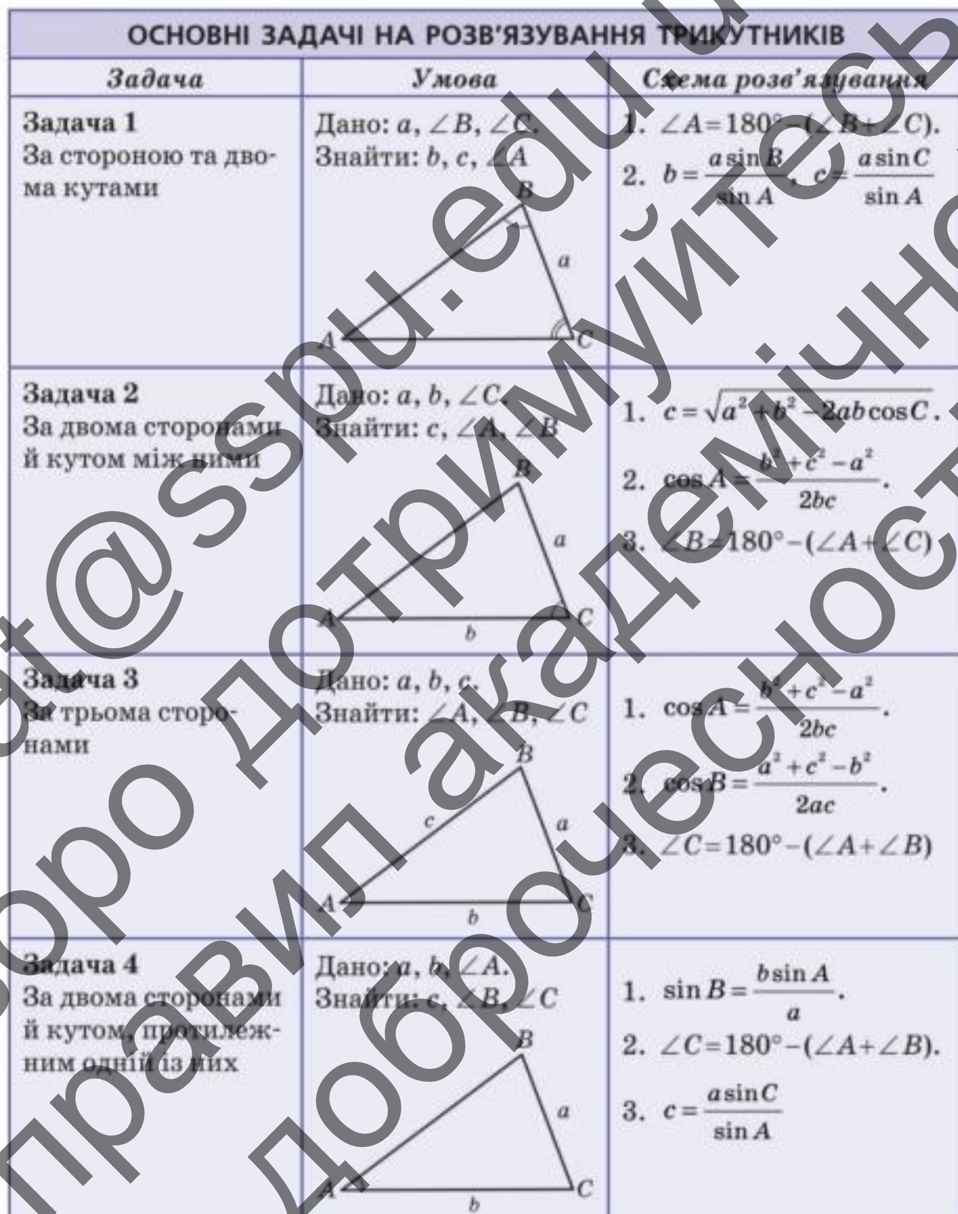
Правило побудови многогранника вписаного в циліндр	
Щоб побудувати зображення циліндра, потрібно в еліпс, що є зображенням основи циліндра, вписати відповідний многокутник – зображення основи призми. Через вершини цього многокутника провести прямолінійні відрізки, які зображають твірні циліндра і є бічними ребрами вписаної призми. Кінці цих відрізків, які належать еліпсу, що є зображенням другої основи циліндра, є зображенням решти вершин вписаної призми.	

Рис. 2.4. Алгоритм побудови многогранника вписаного в циліндр

1) a, B, C	2) a, b, C
3) a, b, A	4) a, b, c

Рис.2.5. Чотири типи задач на розв'язування трикутнків

У підручнику «Геометрія 9» (автори Єршової А. П. та ін.) дається систематизація всіх типів задач у вигляді таблиці (рис. 2.6). В таблиці подано вихідні дані (Умова) і навчальний алгоритм (Схема розв’язування).



ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ		
Задача	*Умова*	*Схема розв’язування*
Задача 1 За стороною та двома кутами	Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Знайти: b, c, $\angle A$	1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. 2. $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
Задача 2 За двома сторонами й кутом між ними	Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$	1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. 2. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$
Задача 3 За трьома сторонами	Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$	1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 2. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$
Задача 4 За двома сторонами й кутом, протилежним одній із них	Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$	1. $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. 2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. 3. $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

Рис.2.6. Чотири типи задач на розв’язування трикутнків

«Необхідною умовою для засвоєння просторових уявлень є вміння розв'язувати геометричні задачі, усвідомлюючи послідовність виконання розумових і графічних дій. Це передбачає формування здатності учнів правильно визначати мету навчальної діяльності, а також розділяти процес розв’язування на окремі етапи, дії та операції. Для цього під час пояснення способу розв’язування важливо разом з учнями визначити навчальну мету, вказати етапи процесу розв'язування, роз'яснити, які дії необхідно виконати для вирішення конкретної графічної задачі, а також пояснити, якими прийомами розв'язування вони повинні оволодіти і які елементи з раніше засвоєних прийомів можна використати» [30].

«Найзрозумілішим для учня є послідовність дій, що веде до кінцевого зображення. Поступово учні вчаться самостійно складати алгоритм. Роблячи крок за кроком, самостійно осмислюючи послідовність зображення кожного елементу, учень наочно бачить наближення до кінцевого результату» [14].

3. Алгоритми методів розв’язування задач на побудову.

В шкільному курсі математики основними методами розв’язування задач на побудову є: метод геометричних місць, методи геометричних перетворень (симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії), алгебраїчний метод.

Метод геометричного місця точок є достатньо складним для розуміння учнями. Потрібно ознайомити учнів з поняттям «геометричне місце точок», основними теоремами про ГМТ: теорема про серединний перпендикуляр, теорема про бісектрису кута і відповідним методом розв’язування задач на побудову, застосування якого демонструється на прикладах, зокрема ключової задачі – побудови трикутника за трьома даними його сторонами. При ознайомленні учнів з методом геометричних місць доцільно використовувати алгоритмічний підхід, а саме на прикладах розв`язування задач виділити навчальний алгоритм методу (рис.2.7).

Алгоритм розв'язування задачі методом геометричних місць

1) з'ясувати, до знаходження якої точки (точок) зводиться розв'язування задачі і які дві вимоги ця точка має задовольняти;

2) відкинути одну з вимог задачі і побудувати геометричне місце точок, що задовольняють другу вимогу;

3) відкинути другу вимогу і побудувати геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу;

4) позначити шукану точку як перетин побудованих геометричних місць.

Рис. 2.7. Алгоритм розв'язування задачі методом геометричних місць

Потрібно дати учнім перелік ГМТ, які вивчаються в шкільному курсу математики:

1) коло – ГМТ, рівновіддалених від даної точки на дану відстань;
2) серединний перпендикуляр до відрізка – ГМТ, рівновіддалених від його кінців;
3) дві прямі, паралельні даній прямій – ГМТ, які знаходяться від неї на даній відстані;
4) бісектриса кута – ГМТ, рівновіддалених від його сторін;
5) дуга кола, з якої даний відрізок видно під даним кутом.

А потім в старшій школі продовжити цей список (рис. 2.8).

4. Алгоритм підведення об`єкта під дане поняття.

Також вартує ознайомити учнів із алгоритмом підведення об`єкта під дане поняття. Цей алгоритм використовується, щоб встановити, чи належить обєкт з обсягу поняття Х до обсягу поняття У (рис.2.9).

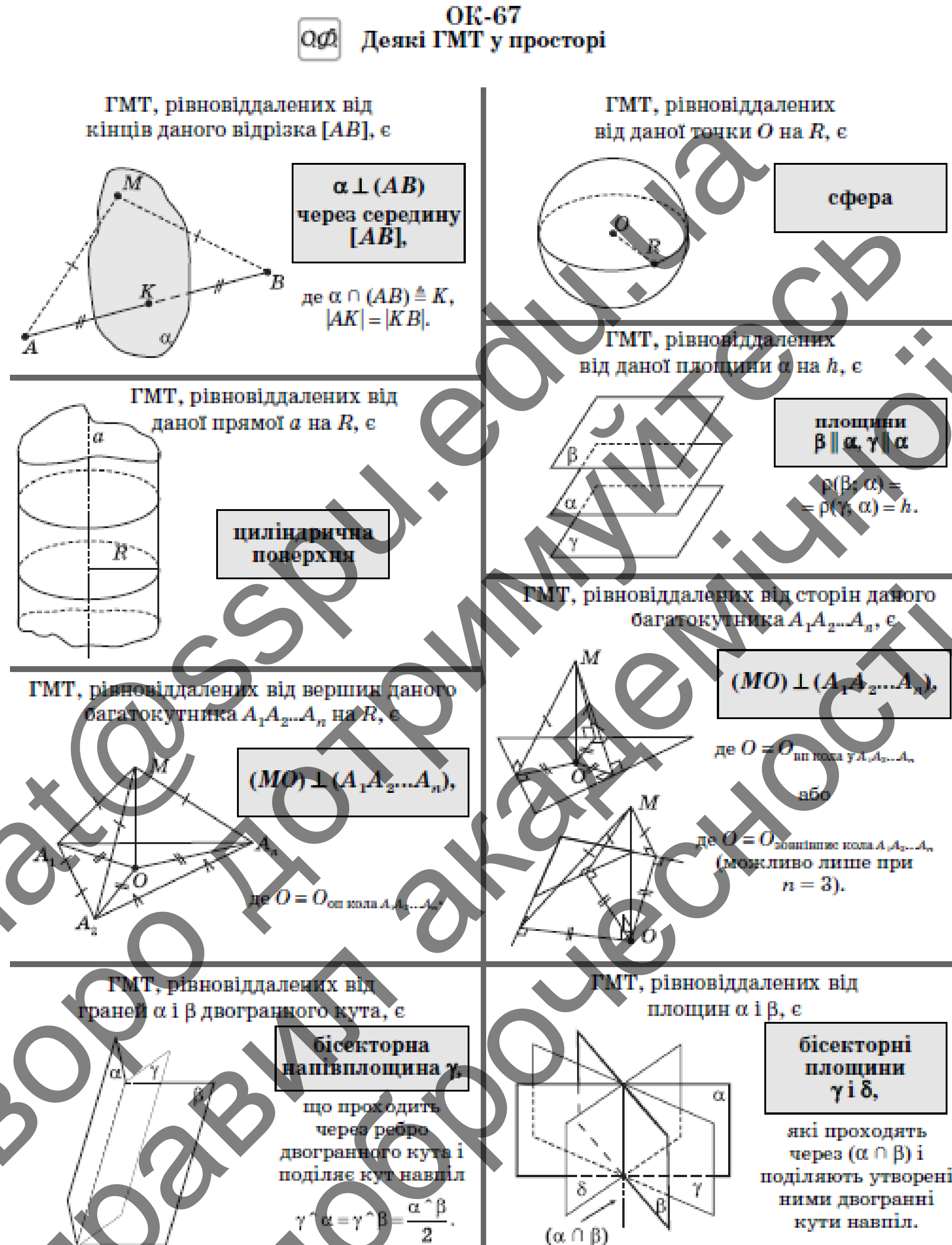


Рис. 2.8. Основні ГМТ у просторі за Г. Апостоловою [1]

Наприклад, при підведенні даної фігури під означення прямокутника чи ромба треба домагатися, щоб учні усвідомили необхідність перевірити виконання двох фактів: дана фігура має бути паралелограмом і для неї повинна виконуватися специфічна (видова) ознака (всі кути прямі або сторони рівні).

Алгоритм підведення об'єкта під дане поняття

1) виділити суттєві властивості поняття У, що включені в означення, і перевірити, яким сполучником вони з'єднані;

2) якщо сполучником «і», то перевірити, чи є у об'єкта з обсягу поняття Х всі виділені властивості поняття У. Якщо так, то об'єкт Х належить обсягу поняття У, якщо ні, то – не належить;

3) якщо сполучником «або», то перевірити, чи є в об'єкта Х хоча б одна властивість поняття У.

Рис. 2.9. Алгоритм підведення об`єкта під дане поняття

5. Алгоритми методу координат.

З алгоритмчним підходом пов'язаний також метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів, які називаються координатами. Перевага методу координат перед синтетичним методом розв'язування геометричних задач, при якому безпосередньо розглядаються фігури і кожна задача потребує індивідуального підходу, полягає в його алгоритмічності. Завдяки методу координат будь-яка геометрична задача перетворюється на алгебраїчну, а алгебраїчні задачі, в свою чергу, легше піддаються алгоритмізації.

Задачі, які розв`язуються методом координат, існують двох типів. Щоб ровязувати задачі як і першого, так і другого типу методом координат, необхідно виконати кроки певних алгоритмів (рис. 2.10-2.11).

Алгоритм розв`язування задач типу 1

(задач на складання рівняння даної фігури)

1. Виявлення характеристичної властивості даної фігури, тобто такого її геометричного властивості, яким володіють ті і тільки ті точки площині, які фігурі належать.

2. Вибір на площині прямокутної системи координат.

3. Запис характеристичного властивості фігури на мові координат.

Рис. 2.10. Алгоритм розв`язування задач типу 1
(задач на складання рівняння даної фігури)

Алгоритм розв`язування задач типу 2

(геометричні задачі, які розв’язуються аналітичним методом)

1. Переклад задачі на аналітичний мову.

2. Перетворення аналітичного виразу. Визначення по виду рівняння вид фігури.

Рис. 2.11. Алгоритм розв`язування задач типу 2
(геометричні задачі, які розв’язуються аналітичним методом)

Задача типу 1. Дано дві точки А і В. Знайдіть ГМТ точок, для кожної з фких відстань від точки А в два рази більше відстані від точки В.

Задача типу 2. Дві сторони трикутника дорівнюють 17см і 28см, а висота, яка проведена до більшої сторони, дорівнює 15см. Знайти медіани трикутника. Доведіть, що якщо у паралелограма діагоналі рівні, то він прямокутник.

При навчанні побудови симетричних точок відносно точки і відносно прямої доцільно використовувати алгоритмічний підхід.

6. Алгоритми векторного методу.

Алгоритмічний підхід доцільно використовувати і при вивченні векторів, зокрема, для векторного методу розв’язування задач важливо, щоб учні навчились вільно, шляхом відповідних побудов знаходити суму і різницю векторів – алгоритми знаходження суми двох векторів за правилом трикутника або паралелограма. При розв’язуванні метричних задач, зокрема на визначення довжини відрізка і міри кута векторним методом, доцільно запропонувати учням відповідні алгоритми (рис. 2.12-2.13) [31].

Алгоритм доведення тверджень векторним методом

1. Відокремити у формулюванні теореми (задачі) умови і вимоги, виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і з їх урахуванням позначити вектори на рисунку.

2. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Для цього у разі потреби виразити вектори у вигляді суми або різниці векторів чи у вигляді добутку вектора на число. Перетворити отримані рівності та дійти потрібної.

3. Подати отриману рівність мовою геометрії.

Рис. 2.12. Алгоритм доведення тверджень векторним методом

Алгоритмічний підхід і алгоритмізація дій відіграє важливу роль і у розвитку просторових уявлень старшокласників. Виконання графічних зображень за алгоритмом є ефективним засобом формування зорових образів геометричних понять, розвитку просторової уяви та мислення.

Алгоритм векторного методу розв'язування метричних задач

Обчислення довжини відрізка	Обчислення значення міри кута
1. Вибрати два неколінеарні (на площині) або три некомпланарні (у просторі) основні вектори, довжини і кути між якими відомі. 2. Розкласти по них вектор, довжину якого потрібно обчислити. 3. Знайти скалярний квадрат цього вектора $\bar{a} = a^2$ і довжину $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a^2}$.	1. Вибрати два неколінеарні (на площині) або три некомпланарні (у просторі) основні вектори, довжини або відношення довжин і кути між якими відомі. 2. Вибрати вектори, що задають заданий кут, і розкласти їх по основним векторам. 3. Обчислити $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert}$.

Рис. 2.13. Алгоритм векторного методу розв'язування метричних задач

7. Алгоритм розв'язування комбінаторних задач (рис.2.14).

Вибір правила

Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A **або** B можна вибрати $(m + n)$ способами	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то A **і** B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами

Вибір формули

Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?

Так → Чи всі елементи входять до сполуки? (Так → Перестановки; Ні → Розміщення)

Ні → Комбінації (сполучення)

Перестановки		Розміщення		Комбінації (сполучення)	
без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями
$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Рис.2.14. Алгоритм розв'язування комбінаторних задач [19]

8. Алгоритм розв'язування алгебраїчних рівнянь та нерівностей. Розглянемо на прикладі розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь (рис.2.15) та нерівностей (рис.2.16).

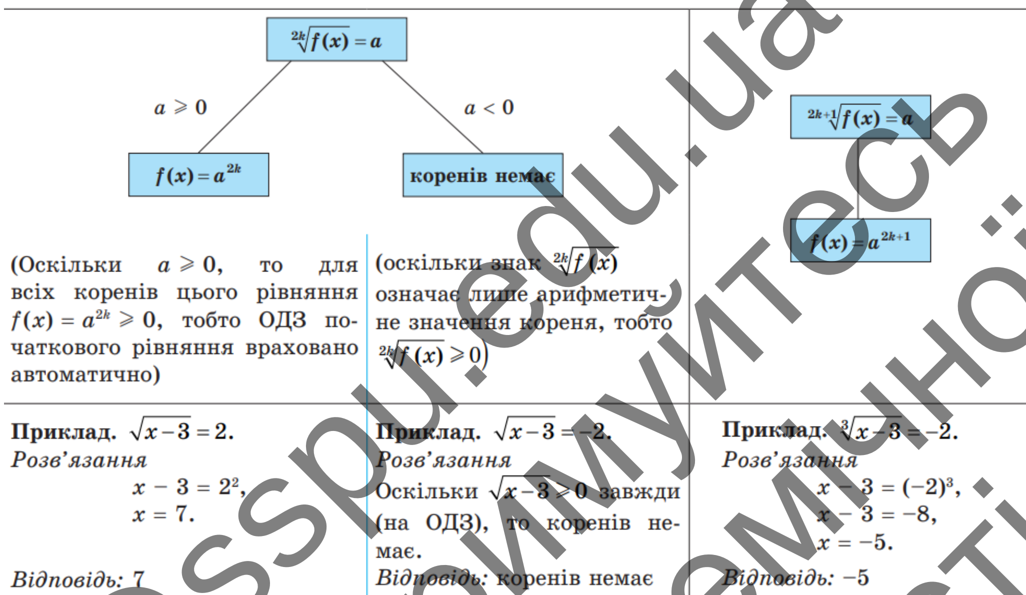


Рис.2.15. Алгоритм розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь [19]

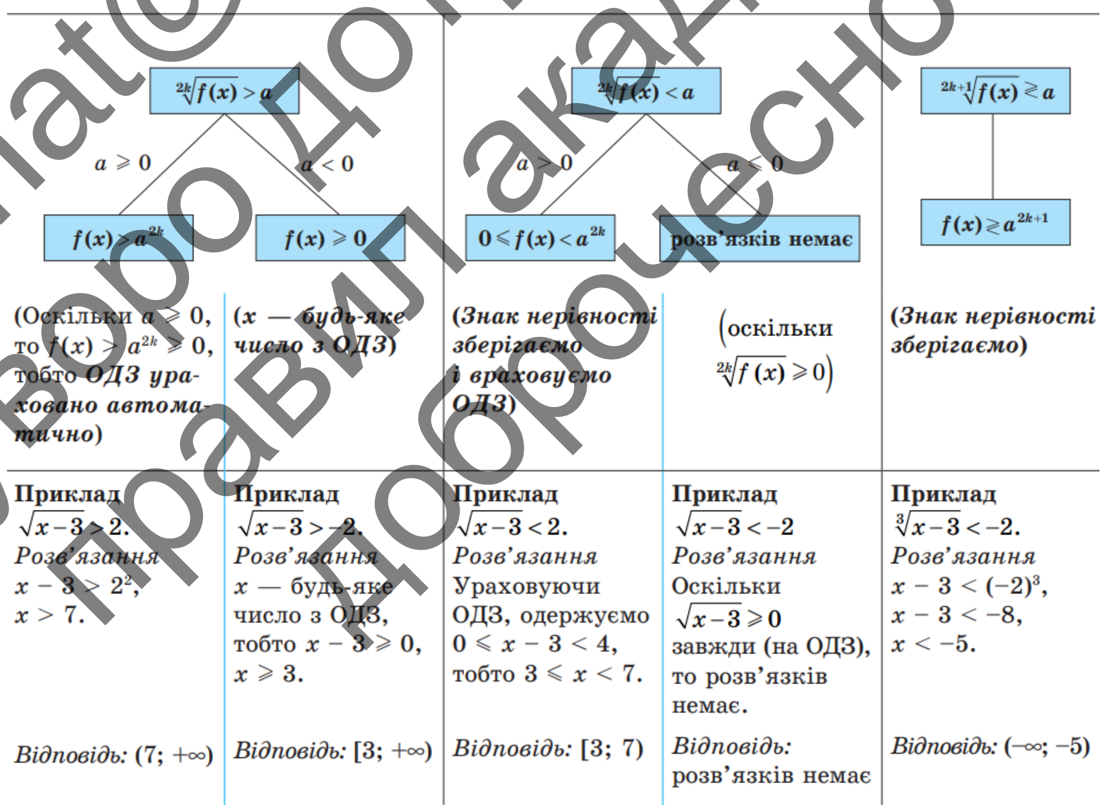


Рис. 2.16. Алгоритм розв'язування найпростіших ірраціональних нерівностей [19]

В рамках алгоритмічного підходу розглянемо також проблему розв’язування так званих типових завдань. Наприклад, М. М. Нак вважає, що «при розв′язуванні задач прийомами алгоритмічного типу в учнів формується установка на дію за готовим зразком, і це стає гальмом при розв′язуванні нових задач, виникає «бар′єр минулого досвіду» [18]. Натомість М. Б. Ковальчук спростовує таку точку зору, зазначаучи, що оволодівши методами (алгоритмами) розв’язування таких типових завдань, учень зможе розв’язати будь-яке завдання з теми.Якщо відомий алгоритм розв’язування, то це завдання не завжди стандартне, а відпрацьовувати алгоритми типових завдань корисно, оскільки загальні методи в межах теми повинні спиратися на алгоритми розв'язування типових задач, а складання алгоритмів є творчою діяльністю [5]. Авторка зазначає, що «для розв’язування нестандартних математичних задач важливе значення має особистий досвід учня, який набутий ним в процесі навчання. Використання в подальшому цього досвіду в процесі пошуку методів розв’язування завдань особливо ефективно здійснюється шляхом впізнавання в нових завданнях послідовності ключових завдань» [5].

Роль алгоритмічного підходу в навчанні математики значна, оскільки, наприклад, розв'язування задач за алгоритмом приводить до бажаного результату, тоді як незнання алгоритму приводить до помилок. Учні, які добре засвоїли алгоритми розв’язування завдань, можуть оперувати згорнутими знаннями при розв’язуванні більш складних. Засвоєні алгоритми допомагають звільнити свідомість від зайвої роботи і допомагають успішно розв’язувати завдання різного ступеня складності.

2.2. Потенціал обчислювальних задач для формування алгоритмічної культури старшокласників на уроках математики

У формуванні алгоритмічної культури старшокласників значну роль відіграє процес розв’язування задач. Згідно з З. І. Слєпкань у психолого-педагогічній літературі немає єдиного тлумачення поняття «задача». Під «задачею» розуміється «ситуація зовнішньої діяльності, що запропонована окремо від суб'єкта діяльності» та «будь-яка вимога обчислити, перетворити, побудувати або довести що-небудь» [31]. Варто зазначити, що в шкільному курсі математики задача – це не лише текстова чи сюжетна, але і вправи та приклади.

Кожна задача обов'язково містить умову та вимогу. Залежно від вимоги задачі поділяють на задачі на обчислення, задачі на доведення, задачі на побудову, задачі на дослідження.

«Розв'язати задачу» означає знайти *розв'язок*, тобто кінцевий результат процесу *розв'язування* задачі. Поряд з термінами *розв'язок* та *розв'язування* використовується термін *розв'язання* – опис процесу розв'язування у вигляді послідовності всіх міркувань.

Процес розв'язування задачі має складатися з наступних етапів (рис. 2.17).

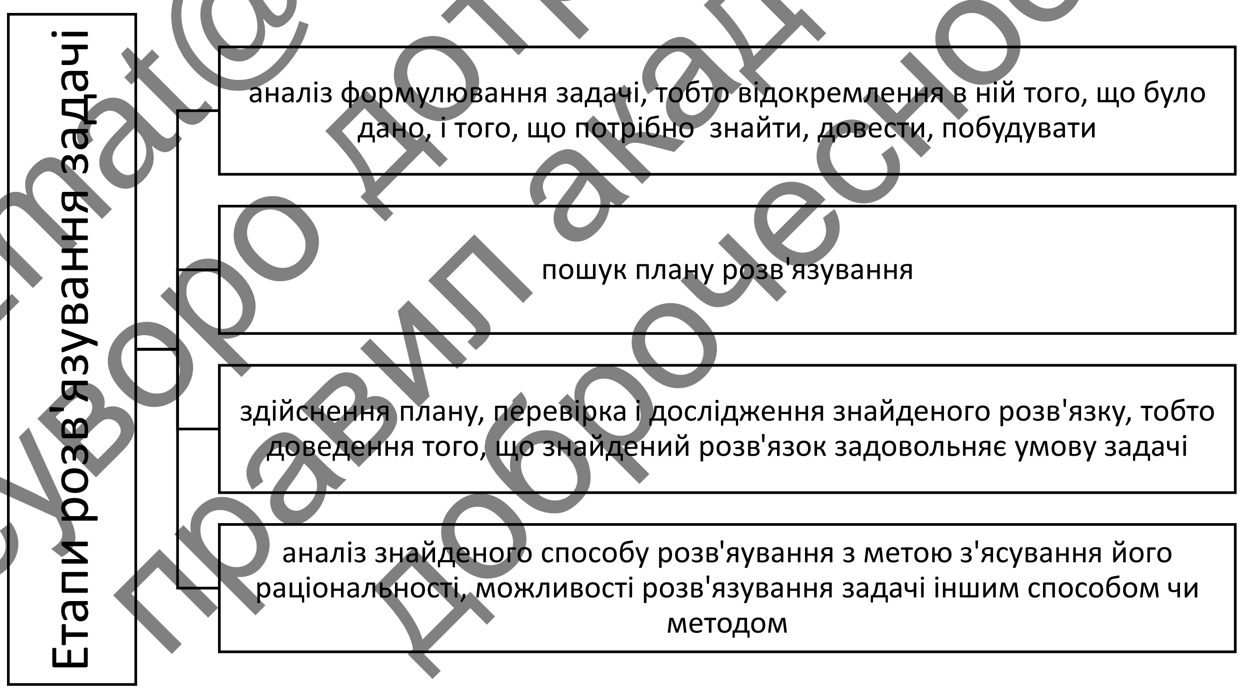


Рис.2.17. Етапи розв'язування задачі

Л. В. Осіпа зазначає, що Поняття «задача» розглядається переважно з позицій діяльнісного або структурно-функціонального підходу [21]. Так, визначаючи задачу через її структуру і цитуючи Л. М. Фрідмана, дослідниця зазначає, що під задачею розуміється «об’єкт розумової діяльності, в якому у єдності представлені його складові – умова (умови) і вимога (вимоги), а отримання результату можливе через розкриття відношень між відомими і невідомими елементами задачі та виконання певних обчислень (оператор)» [21]. Це визначення здебільшого стосується задач на обчислення.

Термін же «обчислювальна задача» з’явився паралельно з появою обчислювальних машин, при тлумаченні його сутності використовуються математичні та кібернетичні категорії. Л. В. Осіпа уточнила зміст поняття відповідно до категорій педагогіки: обчислювальна задача – це «задача, алгоритм розв’язування якої містить обчислювальні та логічні операції, результатом виконання яких є одержання числового значення (числових значень)» [24]. Авторка також виокремлює основні типи простих обчислювальних задач (рис. 2.18).

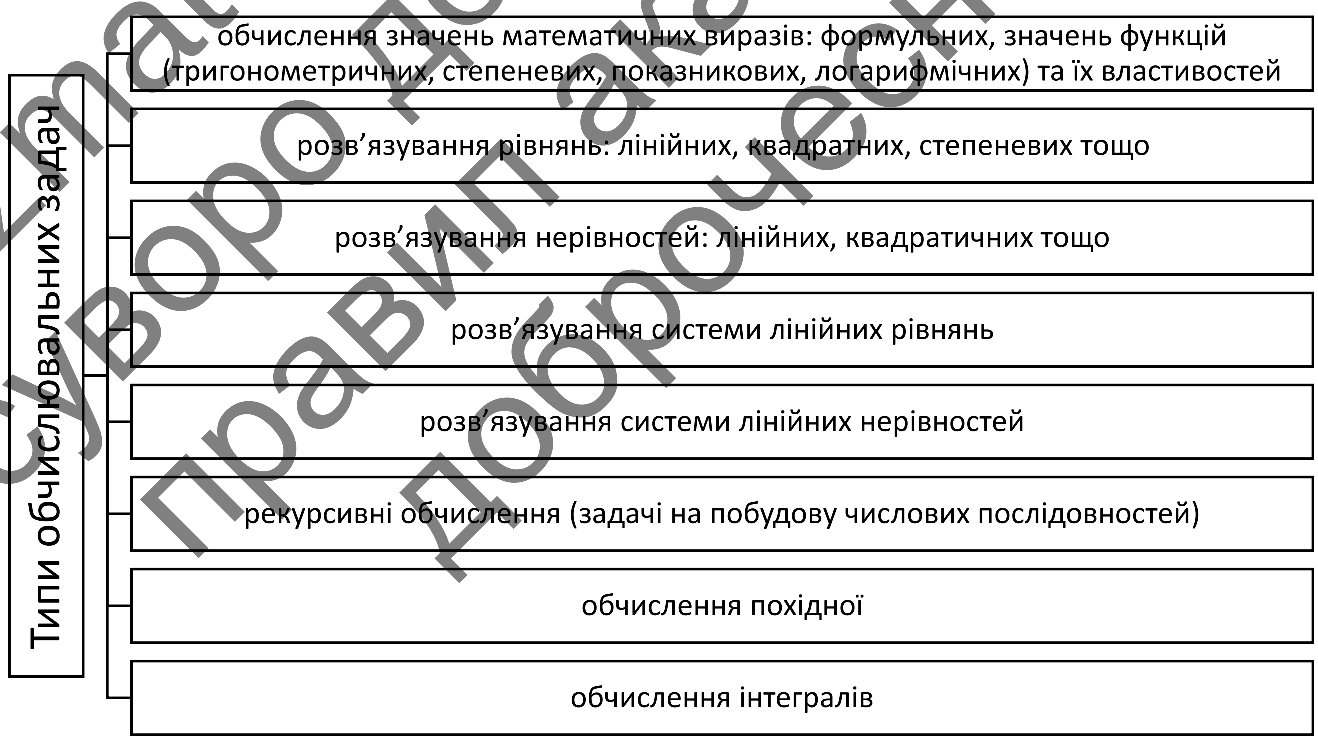


Рис. 2.18. Основні типи простих обчислювальних задач за Л. В. Осіпа [24]

Обчислювальні задачі мають великий потенціал для формування алгоритмічної культури старшокласників. На підтвердження цієї думки представимо загальний алгоритм (логічний ланцюжок послідовності) розв’язування задачі предметного змісту (рис. 2.19). Уміння складати алгоритми є важливим елементом процесу розв’язування задач.

1. Визначення послідовності розв'язування задачі

- 1.1. Визначення графічних дій, сукупність яких необхідна для розв'язування задачі.
- 1.2. Встановлення раціональної послідовності здійснення графічних дій.
- 1.3. Відновлення в пам'яті теоретичних знань і нормативних положень, необхідних для розв'язування задачі.
- 1.4. Встановлення аналогій з раніше розв'язаними задачами.
- 1.5. Передбачення (створення образу) кінцевого результату розв'язування задачі та співвіднесення його з умовою задачі.

2. Реалізація плану розв'язування задачі.

- 2.1. Уявна видозміна і перетворення початкових образів, створених на основі оперування даними умови задачі.
- 2.2. Залучення теоретичних знань, правил і нормативних положень для здійснення графічних дій відповідно до умови задачі.
- 2.3. Практичне здійснення графічних дій у вигляді конкретних геометричних побудов контурів зображень та їх елементів.
- 2.4. Поповнення зображень знаково-символічними умовними позначеннями, узгодженими з умовою задачі.

3. Контроль і корекція отриманого результату.

- 3.1. Співвіднесення і узгодження знайденого результату з вихідними даними умови задачі.
- 3.2. Аналіз причин невідповідностей кінцевого результату умові задачі (за їх наявності).
- 3.3. Доповнення та уточнення кінцевого результату розв'язування задачі.

Рис. 2.19. Загальний алгоритм розв’язування задачі предметного змісту

Зауважимо, що кожен з етапів розв'язування задачі також можна алгоритмізувати. Зокрема, фронтальна робота з класом може проводитись у формі бесіди, яка передбачає чітке виділення окремих етапів процесу розв'язування (кроків алгоритму) та включає систему запитань.

Л. В. Осіпа наголошує на важливості обчислювальних задач для формування алгоритмічної культури старшокласників, зазначаючи, що в процесі розв'язування обчислювальних задач у учнів формується позитивна мотивація до навчальної діяльності, спрямованої на розвиток алгоритмічного мислення. Вибір дидактично обґрунтованої системи обчислювальних задач, спрямованої на розвиток алгоритмічних вмінь і навичок, сприяє реалізації міжпредметних зв'язків інформатики з природничо-математичними дисциплінами. Практична спрямованість змісту навчання також підвищує рівень самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів [23].

На користі обчислювальних задач для формування алгоритмічної культури старшокласників наголошує Л. В. Осіпа, зазначаючи, що у процесі розв'язування обчислювальних задач створюється позитивна мотивація старшокласників до навчальної діяльності, спрямованої на формування алгоритмічного мислення; добір дидактично обґрунтованої системи обчислювальних задач, спрямованої на формування алгоритмічних вмінь і навичок, сприяє реалізації міжпредметних зв'язків інформатики з предметами природничо-математичного циклу; практична спрямованість змісту навчання збільшує частку самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів [23].

Наведемо *приклад обчислювальної задачі* (розв'язання рівняння та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром).

Нехай *f(a), g(a)* і *h(a)* – аналітично задані функції параметра а, х – змінна. Тоді рівнянням другого степеня із параметром будемо називати рівняння виду $h(a) \cdot x^2 + f(a) \cdot x + g(a) = 0$, а нерівністю другого степеня із параметром –

нерівність виду $h(a) \cdot x^2 + f(a) \cdot x + g(a) * 0$, де $*$ – один із чотирьох знаків порівняння: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ [3].

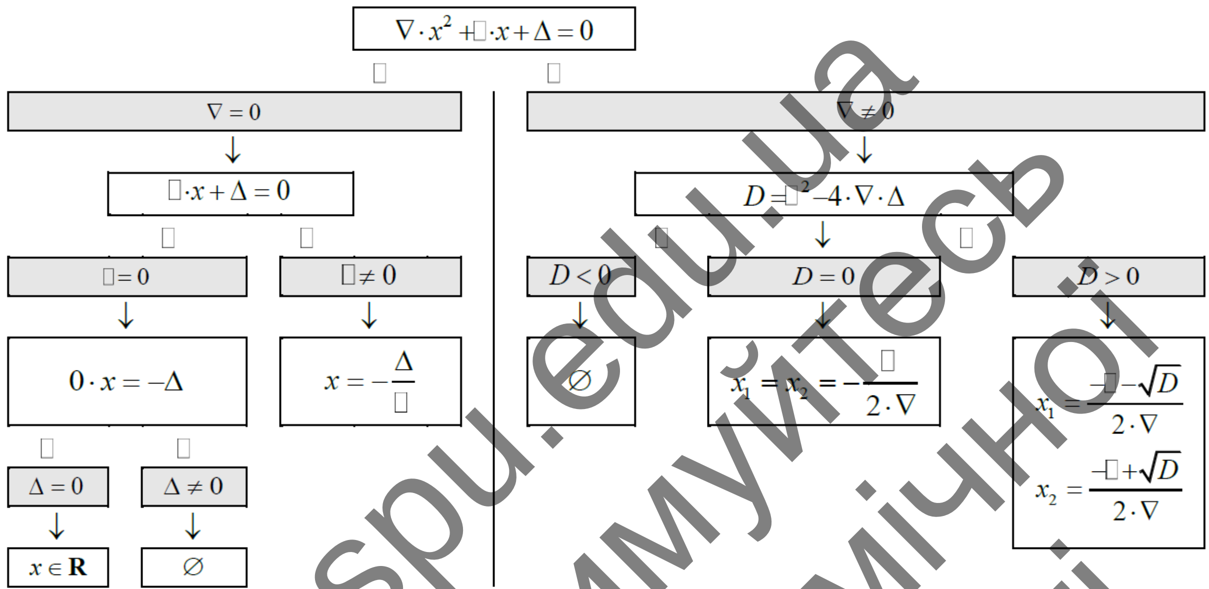


Рис. 2.20. Граф-схема алгоритму розв'язування рівняння другого степеня з параметром [3]

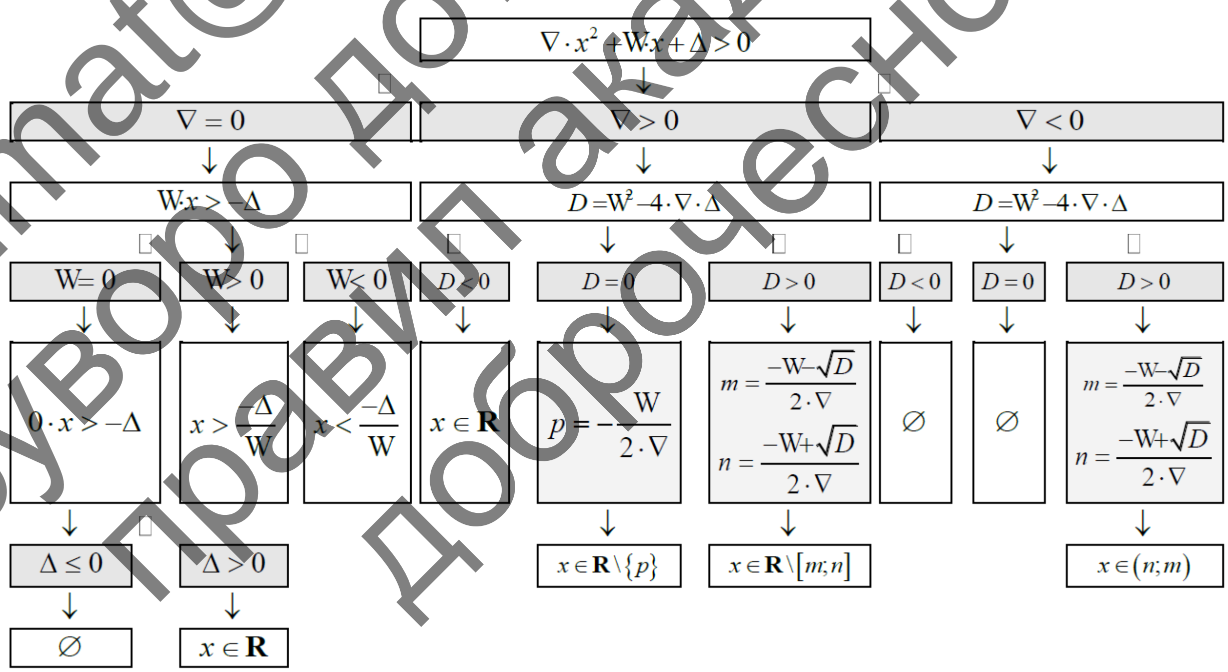


Рис. 2.21. Граф-схема алгоритму розв'язування (строгої) нерівності другого степеня з параметром [3]

Але деякі більш складні обчислювальні задачі (наприклад, системи нелінійних рівнянь) не розв'язуються за простими алгоритмами, оскільки кожна задача потребує «власного» розв’язання. Такі задачі часто називають нестандартними, творчими або неалгоритмічними. В. Кушнір, Г. Кушнір та Р. Ріжняк вважають, що «поле можливостей при розв’язуванні таких задач слабко структуроване, перетворення, які необхідно здійснити над моделлю вихідної задачі, невизначені, а також невизначене число та послідовність таких перетворень» [10]. У цьому випадку розробляється послідовність приписів, яка має певні властивості алгоритмів, але не є алгоритмом у математичному розумінні. Основним завданням таких «алгоритмічних приписів» (Л. Ланда) чи «евристичних алгоритмів» (Д. Пойя) є зменшення невизначеності поля можливостей розв’язування математичної задачі шляхом його часткового структурування й упорядкування.

Автори дослідження [10] вважають, що при розв’язуванні творчих математичних задач можуть бути використані такі евристичні приписи: «формування вихідної задачі; створення її математичної моделі; вибір «апарату» дослідження математичної моделі; застосування вибраного «апарату» до дослідження й перетворення моделі; трансляція отриманих результатів на вихідну задачу» [10].

Підсумовуючи результати дослідження, можна стверджувати, що використання обчислювальних задач сприяє розвитку всіх аспектів алгоритмічної культури старшокласників. Це включає не лише розуміння значення алгоритмів і здатність діяти за ними, а й уміння вибирати та застосовувати алгоритми для розв’язування обчислювальних задач. Також учні набувають навичок створення алгоритмів та опису процесу розв’язування задач у вигляді алгоритмічних приписів.

Отже, алгоритмічна культура є важливою якісною характеристикою старшокласників, яка формується під час навчання математики в цілому, а особливо під час розв'язування обчислювальних задач. Рівень розвитку алгоритмічної культури учнів впливає на їхні вміння міркувати, бачити просторовий образ будь-якого поняття та ефективно використовувати його в різних задачних ситуаціях.

2.3. Цифрові засоби, орієнтовані на формування алгоритмічної культури старшокласників

Досвід підтверджує [21-24], що розв'язування обчислювальних задач в контексті формування алгоритмічної культури суб'єктів навчання більш ефективне, якщо воно відбувається із застосуванням цифрових засобів, зокрема, програмних засобів обчислювального призначення. Серед таких засобів дослідники зазначають табличний процесор MS Excel, системи комп'ютерної математики Derive, MathCAD, Maple, Mathematika, програми динамічної математики GRAN, GeoGebra.

Розв'язування обчислювальних задач із використанням зазначених засобів, на думку Л. В. Осіпа, «вимагає від учня наявності знань з фактичного матеріалу теми, в межах якої розв'язується задача; володіння методами алгоритмізації та математичного моделювання; знання певних технологій роботи з відповідними засобами, а також уміння працювати з їх інструментами та інтерфейсами. Окрім цього, учень має мати сталі навички користувача комп'ютерних засобів, а також вміння проводити цілеспрямований пошук інформації та ефективно користуватися довідковою літературою» [24].

Логічний ланцюжок розв'язування обчислювальної задачі із використанням засобів програмного призначення має наступний вигляд (рис. 2.22).

Рис. 2.22. Логічний ланцюжок розв’язування обчислювальної задачі предметного змісту з використанням засобів програмного призначення за Л. В. Осіпа [21]

Ми погоджуємо з такою послідовністю дій з точністю до термінів: ми б не вживали термін «калькулятор», а замість нього використовували б терміни «процедура» чи «програма», від чого не змінилася б суть, а дана послідовність отримала б більш універсальний характер.

Л. В. Осіпа вважає, що «ефективність розв’язування обчислювальних задач з використанням цифрових засобів значною мірою залежить від функціональності та правильного їх добору, який повною мірою відповідатиме змісту і цілям навчання, сприятиме гармонійному розвитку учнів з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей» [20]. При раціональному виборі цифрового засобу варто враховувати:

– чи підходить розглядуваний цифровий засіб до навчання у закладах загальної середньої освіти,

– чи доцільно його використовувати з певною методичною метою,

– чи наявний у ньому інструментарій для розв’язування певного типу обчислювальних задач,

– чи має він простий, інтуїтивно-зрозумілий та україномовний інтерфейс,

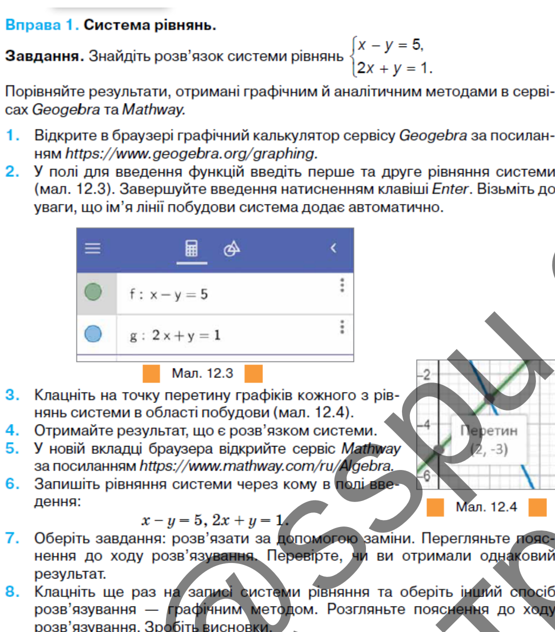
– чи є він зручним у встановленні та сумісним з вже встановленими програмними засобами,

– чи він вільнопоширюваний, чи наявна ліцензія на використання.

Проаналізуємо зміст шкільних підручників з інформатики на предмет цифрових засобів, які використовуються для розв’язування обчислювальних задач математичного змісту.

<u>Підручник 1</u>. Інформатика (рівень стандарту) для 10(11) кл. (автори Морзе Н. В., Барна О. В.) [17].

Автори пропонують для здійснення дослідницької діяльності при розв’язуванні різноманітних завдань використовувати Wolfram|Alpha, додаток Photomath для розв’язування різних типів математичних задач. Але дані сервіси генерують відповідь відразу на власній, внутрішній базі знань й алгоритмів, тому даний засіб, на нашу думку, не є ефективним для формування алгоритмічної культури учнів. Автори підручника також рекомендують використовувати програму динамічної математики GeoGebra (рис. 2.23) та сервіс Mathway для розв’язування систем рівнянь, табличний процесор MS Exel для розв’язування задач статистичного змісту та для наближеного знаходження коренів рівняння з використанням інструменту Підбір параметра (рис.2.24). Але, зазначимо, не виділено чітко кроки алгоритму розв’язування задачі, хоча він неявно прослідковується.



Вправа 1. Система рівнянь.

Завдання. Знайдіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

Порівняйте результати, отримані графічним й аналітичним методами в сервісах *Geogebra* та *Mathway.*

1. Відкрите в браузері графічний калькулятор сервісу *Geogebra* за посиланням *https://www.geogebra.org/graphing.*
2. У полі для введення функцій введіть перше та друге рівняння системи (мал. 12.3). Завершуйте введення натисненням клавіші *Enter*. Візьміть до уваги, що ім'я лінії побудови система додає автоматично.

Мал. 12.3

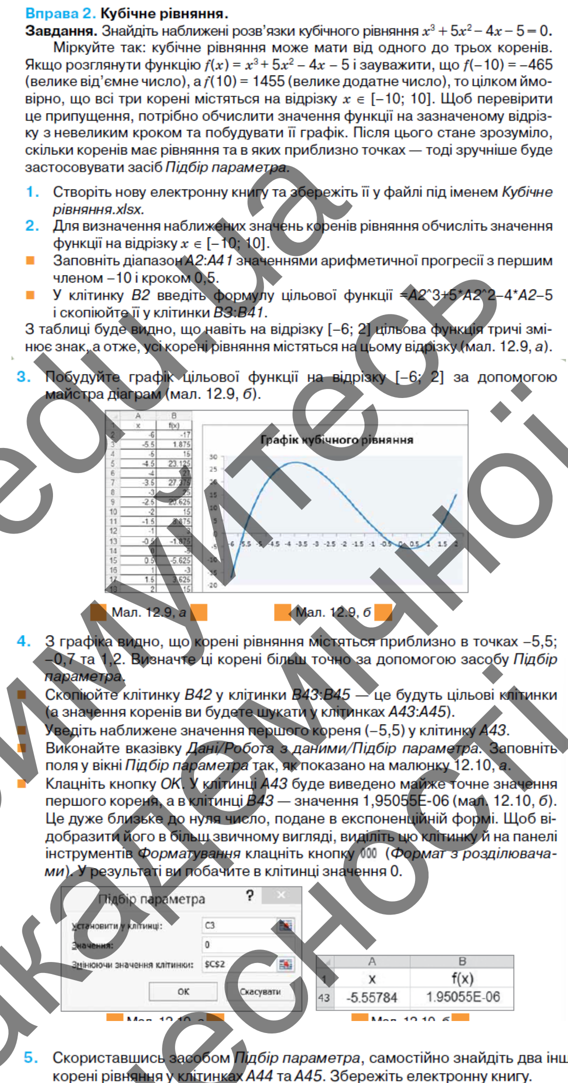
3. Клацніть на точку перетину графіків кожного з рівнянь системи в області побудови (мал. 12.4).
4. Отримайте результат, що є розв'язком системи.
5. У новій вкладці браузера відкрийте сервіс *Mathway* за посиланням *https://www.mathway.com/ru/Algebra.*
6. Запишіть рівняння системи через кому в полі введення:

$$x - y = 5,\ 2x + y = 1.$$

Мал. 12.4

7. Оберіть завдання: розв'язати за допомогою заміни. Перегляньте пояснення до ходу розв'язування. Перевірте, чи ви отримали однаковий результат.
8. Клацніть ще раз на записі системи рівняння та оберіть інший спосіб розв'язування — графічним методом. Розгляньте пояснення до ходу розв'язування. Зробіть висновки.

Рис. 2.23. Розв'язування систем рівнянь (GeoGebra)



Вправа 2. Кубічне рівняння.

Завдання. Знайдіть наближені розв'язки кубічного рівняння $x^3 + 5x^2 - 4x - 5 = 0$.

Міркуйте так: кубічне рівняння може мати від одного до трьох коренів. Якщо розглянути функцію $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 5$ і зауважити, що $f(-10) = -465$ (велике від'ємне число), а $f(10) = 1455$ (велике додатне число), то цілком ймовірно, що всі три корені містяться на відрізку $x \in [-10; 10]$. Щоб перевірити це припущення, потрібно обчислити значення функції на зазначеному відрізку з невеликим кроком та побудувати її графік. Після цього стане зрозуміло, скільки коренів має рівняння та в яких приблизно точках — тоді зручніше буде застосовувати засіб *Підбір параметра.*

1. Створіть нову електронну книгу та збережіть її у файлі під іменем *Кубічне рівняння.xlsx.*
2. Для визначення наближених значень коренів рівняння обчисліть значення функції на відрізку $x \in [-10; 10]$.
   - Заповніть діапазон *A2:A41* значеннями арифметичної прогресії з першим членом –10 і кроком 0,5.
   - У клітинку *B2* введіть формулу цільової функції *=A2^3+5*A2^2–4*A2–5* і скопіюйте її у клітинки *B3:B41.*

З таблиці буде видно, що навіть на відрізку [–6; 2] цільова функція тричі змінює знак, а отже, усі корені рівняння містяться на цьому відрізку (мал. 12.9, *а*).

3. Побудуйте графік цільової функції на відрізку [–6; 2] за допомогою майстра діаграм (мал. 12.9, *б*).

	A	B
1	x	f(x)
2	-6	-17
3	-5.5	1.875
4	-5	15
5	-4.5	23.125
6	-4	27
7	-3.5	27.375
8	-3	25
9	-2.5	20.625
10	-2	15
11	-1.5	8.875
12	-1	3
13	-0.5	-1.875
14	0	-5
15	0.5	-5.625
16	1	-3
17	1.5	3.625
18	2	15

Мал. 12.9, *а* Мал. 12.9, *б*

4. З графіка видно, що корені рівняння містяться приблизно в точках –5,5; –0,7 та 1,2. Визначте ці корені більш точно за допомогою засобу *Підбір параметра.*
   - Скопіюйте клітинку *B42* у клітинки *B43:B45* — це будуть цільові клітинки (а значення коренів ви будете шукати у клітинках *A43:A45*).
   - Уведіть наближене значення першого кореня (–5,5) у клітинку *A43.*
   - Виконайте вказівку *Дані/Робота з даними/Підбір параметра.* Заповніть поля у вікні *Підбір параметра* так, як показано на малюнку 12.10, *а.*
   - Клацніть кнопку *OK*. У клітинці *A43* буде виведено майже точне значення першого кореня, а в клітинці *B43* — значення 1,95055E-06 (мал. 12.10, *б*). Це дуже близьке до нуля число, подане в експоненційній формі. Щоб відобразити його в більш звичному вигляді, виділіть цю клітинку й на панелі інструментів *Форматування* клацніть кнопку 000 (*Формат з розділювачами*). У результаті ви побачите в клітинці значення 0.

	A	B
1	x	f(x)
43	-5.55784	1.95055E-06

Мал. 12.10, *а* Мал. 12.10, *б*

5. Скориставшись засобом *Підбір параметра*, самостійно знайдіть два інші корені рівняння у клітинках *A44* та *A45*. Збережіть електронну книгу.

Рис. 2.24. Наближене знаходження коренів рівняння (MS Exel)

<u>Підручник 2.</u> Інформатика (рівень стандарту) для 10-го (11-го) кл. (автор Ривкінд Й. Я.) [26].

Й. Я. Ривкінд відразу пропонує загальний алгоритм у вигляді блок-схеми для розв'язування обчислювальних задач математичного змісту із використанням цифрових технологій (рис.2.25).

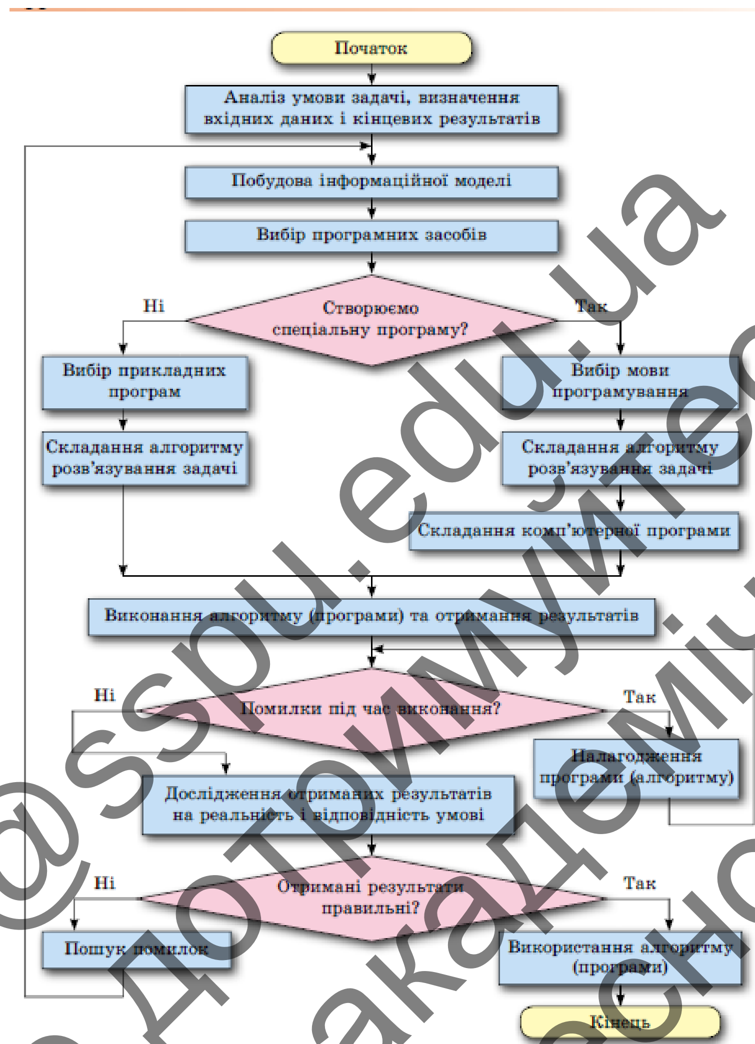
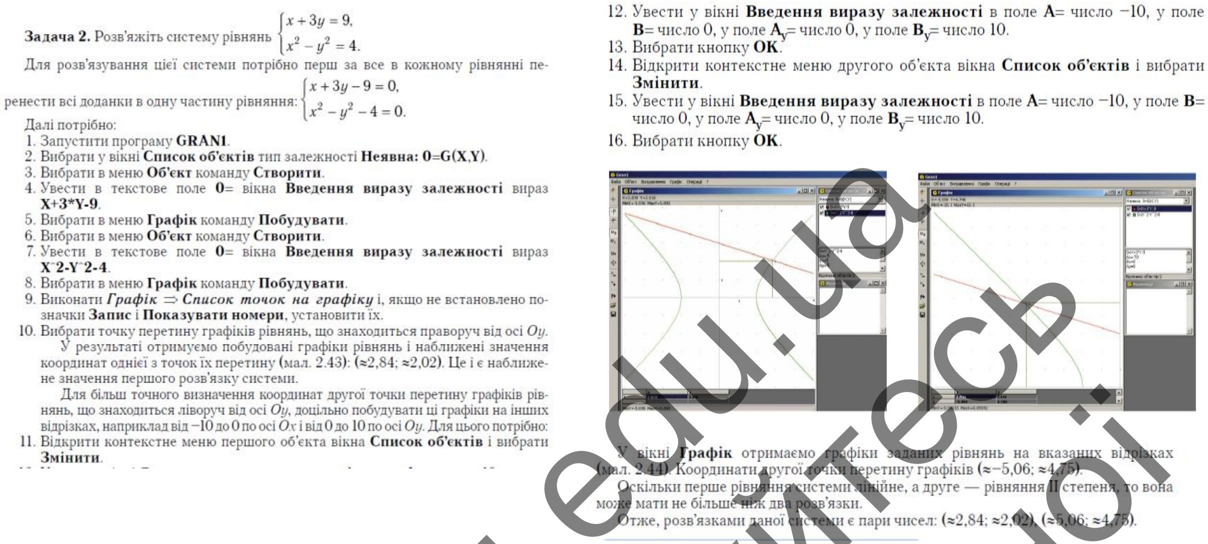


Рис. 2.25. Блок-схема алгоритму розв'язування обчислювальних задач математичного змісту

Поміж цифрових засобів його вибір зупиняється на табличному процесорі MS Exel, мові програмування Object Pascal та середовищі Lazarus. Для розв'язування рівнянь та їх систем запропоновано такі прикладні математичні пакети, як Maxima, Scilab, SMath Studio, Mathcad, Mathematica, MathLab, а також пакет GRAN (рис. 2.26). У запрпонованому розв'язанні чітко прослідковуються кроки алгоритму, послідовне виконання яких приводить до бажаного результату.



Задача 2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 9, \\ x^2 - y^2 = 4. \end{cases}$

Для розв'язування цієї системи потрібно перш за все в кожному рівнянні перенести всі доданки в одну частину рівняння: $\begin{cases} x + 3y - 9 = 0, \\ x^2 - y^2 - 4 = 0. \end{cases}$

Далі потрібно:

1. Запустити програму **GRAN1**.
2. Вибрати у вікні **Список об'єктів** тип залежності **Неявна: 0=G(X,Y)**.
3. Вибрати в меню **Об'єкт** команду **Створити**.
4. Увести в текстове поле **0=** вікна **Введення виразу залежності** вираз **X+3*Y-9**.
5. Вибрати в меню **Графік** команду **Побудувати**.
6. Вибрати в меню **Об'єкт** команду **Створити**.
7. Увести в текстове поле **0=** вікна **Введення виразу залежності** вираз **X^2-Y^2-4**.
8. Вибрати в меню **Графік** команду **Побудувати**.
9. Виконати ***Графік ⇒ Список точок на графіку*** і, якщо не встановлено позначки **Запис** і **Показувати номери**, установити їх.
10. Вибрати точку перетину графіків рівнянь, що знаходиться праворуч від осі Oy.

У результаті отримуємо побудовані графіки рівнянь і наближені значення координат однієї з точок їх перетину (мал. 2.43): (≈2,84; ≈2,02). Це і є наближене значення першого розв'язку системи.

Для більш точного визначення координат другої точки перетину графіків рівнянь, що знаходиться ліворуч від осі Oy, доцільно побудувати ці графіки на інших відрізках, наприклад від −10 до 0 по осі Ox і від 0 до 10 по осі Oy. Для цього потрібно:

11. Відкрити контекстне меню першого об'єкта вікна **Список об'єктів** і вибрати **Змінити**.
12. Увести у вікні **Введення виразу залежності** в поле **A**= число −10, у поле **B**= число 0, у поле $\mathbf{A_y}$= число 0, у поле $\mathbf{B_y}$= число 10.
13. Вибрати кнопку **OK**.
14. Відкрити контекстне меню другого об'єкта вікна **Список об'єктів** і вибрати **Змінити**.
15. Увести у вікні **Введення виразу залежності** в поле **A**= число −10, у поле **B**= число 0, у поле $\mathbf{A_y}$= число 0, у поле $\mathbf{B_y}$= число 10.
16. Вибрати кнопку **OK**.

У вікні **Графік** отримаємо графіки заданих рівнянь на вказаних відрізках (мал. 2.44). Координати другої точки перетину графіків (≈−5,06; ≈4,75).

Оскільки перше рівняння системи лінійне, а друге — рівняння II степеня, то вона може мати не більше ніж два розв'язки.

Отже, розв'язками даної системи є пари чисел: (≈2,84; ≈2,02), (≈−5,06; ≈4,75).

Рис. 2.26. Розв'язування систем рівнянь (GRAN)

<u>Підручник 3.</u> Інформатика (профільний рівень) для 10 кл. (автори Руденко В. Д., Речич Н. В., Потієнко В. О.) [28].

Автори підручника для профільного рівня з метою формування алгоритмічної культури старшокласників пропонують для розв'язування обчислювальних задач використовувати мову програмування Python (наводиться приклад із фрагментом алгоритму та кодом реалізації цього алгоритму, рис. 2.27), розв'язувати рівняння пропонують за допомогою табличного процесора MS Exel із застосування методу Підбору параметра, а системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці. Відмітимо, що саме в розглядуваному підручнику автори чітко усвідомлюють сутність поняття «обчислювальна задача», пропонуючи загальні алгоритми розв'язування задач різного типу (рис.2.28, 2.29).

Розглянемо на прикладі алгоритм обчислення виразу

$$y = \begin{cases} ax, \text{ якщо } x > 0 \text{ і } a \ge 0; \\ 2ax, \text{ якщо } x > 0 \text{ і } a < 0; \\ 2, \text{ якщо } x \le 0. \end{cases}$$

На рис. 2 зображено фрагмент схеми алгоритму, що реалізує вираз ax, якщо $x > 0$ і $a \ge 0$.

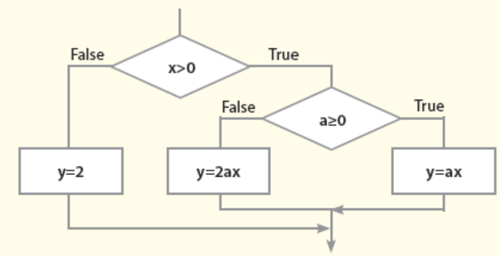


Рис. 2. Графічна схема алгоритму обчислення значення виразу

Мовою Python цей алгоритм можна реалізувати так:

```
If x > 0:                  #перший оператор if
    If a >= 0:             #другий оператор if
      y = a * x
    else:                  #для другого оператора if
      y = 2 * a * x
else:                      #для першого оператора if
    y = 2
```

```
a = int(input("Увести a: "))
x = int(input("Увести x: "))
if x > 0:                        # якщо x>0
    if a >= 0:
        y = a * x                # гілка Так другого оператора if
    else:
        y = 2 * a * x            # гілка Ні другого оператора if
else:
    y = 2                        # гілка Ні першого оператора if
print("y = ", y)
input()
```

Рис. 2.27. Фрагмент алгоритму тобчислення значення виразу та код його реалізації на мові Python

Крок 1	Створіть таблицю з даними, які відповідають певній системі рівнянь. Таблиця містить стільки стовпців, скільки є невідомих, і стовпець для констант із правої частини. Кількість рядків відповідає кількості рівнянь. Зазвичай таблиця з коефіцієнтами при невідомих є матрицею. Якщо в якомусь рівнянні немає невідомого, це означає, що його коефіцієнт дорівнює 0; у таблицю заносять 0.
Крок 2	Для знаходження оберненої матриці виділіть діапазон за розміром матриці коефіцієнтів, викличте функцію =MINVERSE(діапазон матриці) або (=МОБР(діапазон матриці)) і підтвердьте сполученням клавіш Ctrl + Shift + Enter (працюють з матрицею, а не з окремим значенням).
Крок 3	Знайдіть розв'язок: 1) виділіть вертикальний діапазон із такою кількістю клітинок, скільки є невідомих; 2) вставте формулу множення матриць =MMULT(діапазон матриці; діапазон стовпця з коефіцієнтами) або =МУМНОЖ(діапазон матриці; діапазон стовпця з коефіцієнтами); 3) підтвердьте сполученням клавіш Ctrl + Shift + Enter.

Рис. 2.28. Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці

Крок 1	Заповніть діапазон клітинок значеннями інтервалів
Крок 2	Виділіть порожній діапазон клітинок за розміром на одну клітинку більший, ніж діапазон інтервалів
Крок 3	Викличте функцію **FREQUENCY(ЧАСТОТА)**
Крок 4	У поле **Масив даних** уведіть імена діапазону клітинок із числами — початковими даними
Крок 5	У полі **Масив інтервалів** зазначте діапазон клітинок з інтервалами
Крок 6	Підтвердьте дії сполученням клавіш **Ctrl + Shift + + Enter**

Рис. 2.29. Алгоритм обчислення частоти

Підручник 4. Інформатика (рівень стандарту) для 10(11) кл. (автори Руденко В. Д., Речич Н. В., Потієнко В. О.) [29].

Ці ж автори для рівня стандарту також пропонують загальні алгоритми розв'язування обчислювальних задач (рис. 2.30, 2.31). Серед цифрових засобів стандартно пропонують MS Exel для розв'язування рівнянь, систем рівнянь та оптимізаційних задач. Автори зазначають, що у табличному процесорі можна реалізувати не всі математичні моделі, тому пропонують використовувати Mathcad та статистичні пакети для комп'ютерного аналізу даних. До того ж наводять результати аналізу різних статистичних пакетів (рис.2.32).

Рис. 2.30. Алгоритм обчислення середнього квадратичного відхилення

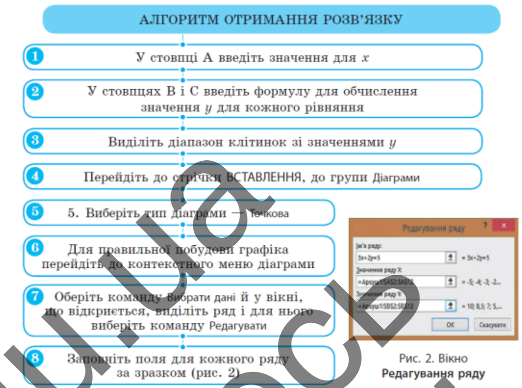


Рис. 2.31. Алгоритм розв'язування систем рівнянь

Тип пакета	Призначення	Приклад
Спеціалізований	Опрацювання даних конкретної предметної області. Містить методи статистичного аналізу кількох розділів статистики	На підприємствах користуються комплексними автоматизованими системами управління фінансово-господарською діяльністю: SCALA (Швеція), R3 фірми SAP (Німеччина), PLATINUM, MAN/MANX, Champion та BAAN (США) тощо
Загального призначення, або універсальний	Здійснення будь-якого статистичного аналізу. Не прив'язаний до конкретних областей. Розрахований на користувача-початківця	У наукових колах, у медицині популярним є пакет Statistica (створений спеціально для роботи в середовищі Windows), який містить більшість статистичних методів опрацювання даних, має гарні графічні можливості
Фаховий	Опрацювання великих обсягів даних. Містить методи аналізу для вузьких областей застосування	MS Excel має функції для розв'язування фінансових задач. Такі функції є в усіх пакетах для фінансових розрахунків, хоча в різних пакетах вони можуть мати різні назви

Рис. 2.32. Статистичні пакети

За результатами аналізу пропонуємо у закладах загальної середньої освіти використовувати табличний процесор MS Excel, програму GeoGebra та різні мови програмування при розв'язуванні обчислювальних задач з метою формування алгоритмічної культури старшокласників. Наш вибір на користь табличного процесора MS Excel обумовлено тим, що він вивчається, і досить грунтовно, в шкільному курсі інформатики, отже, його використання в навчанні математики не потребуватиме допоміжного вивчення, опанування його інструментами та інтерфейсом, і в той же час це дозволить додатково реалізувати міжпредметні зв'язки між інформатикою та математикою. До того ж ці цифрові засоби задовольняють усі із вищезазначених критеріїв відбору.

Навчання старшокласників розв'язувати обчислювальні задачі математичного змісту має на меті формування умінь вирішувати задачі шляхом виділення загальних прийомів і способів побудови алгоритмів, що складаються з послідовності обчислень та логічних операцій, із використанням програмних засобів.

Основною метою навчання учнів розв'язувати обчислювальні задачі є формування алгоритмічної культури старшокласників. В результаті розв'язування обчислювальних задач за допомогою цифрових засобів учні набудуть знань про алгоритмічні структури та загальні методи алгоритмізації розв'язування задач, а також способи формалізації і основні етапи вирішення задач із використанням цифрових інструментів. Вони розвиватимуть уміння створювати математичну модель обчислювальної задачі, освоять методи алгоритмізації в процесі розв'язування, набудуть навичок роботи в цифровому середовищі та вміння використовувати сучасні цифрові засоби для розв'язання обчислювальних задач, а також навички аналізу результатів обчислень.

2.4. Конспект уроку «Побудова перерізів многогранників», спрямованого на формування алгоритмічної культури старшокласників

Тема: «Побудова перерізів многогранників».

Мета: сформувати вміння учнів застосовувати вивчені аксіоми та теореми при побудові перерізів многогранників, вміння будувати прості перерізи многогранників;

розвивати просторову уяву, графічну культуру, логічне та алгоритмічне мислення;

виховувати відповідальне ставлення до роботи, дисциплінованість, самостійність, взаємодопомогу та взаємопідтримку.

Обладнання: програма динамічної математики GeoGebra.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Підручник: Нелін Є.П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Привітання учнів, перевірка готовності учнів до уроку, перевірка домашнього завдання.

II. Мотивація.

Вчитель: Спершу я хочу вам нагадати два аргументи на користь вивчення теми уроку. По-перше, з перерізами ви зустрічаєтеся кожного дня у повсякденному житті. В навколишньому світі багато предметів «перерізані» або «склеєні». Якщо ми роз'єднаємо їх, то отримаємо так званий переріз.

По-друге, при розв'язуванні багатьох стереометричних задач необхідно вміти побудувати перерізи многогранників площинами за заданими вхідними даними.

III. Актуалізація опорних знань.

Вчитель: Перевіримо ваші знання щодо многоранників та їх елементів, виконавши інтерактивні вправи https://learningapps.org/display?v=phw5icckj22 та https://learningapps.org/display?v=pnfh9efga22 (на рис. 2.30 показано лише по одному завданню з усієї вправи).

Рис. 2.33. Інтерактивні вправи «Многогранник»

*Вчитель:*Дайте відповіді на запитання.

1. Якою фігурою завжди буде переріз многогранника? (Многокутник)
2. Чи може кількість сторін утвореного многокутника перевищувати кількість граней даного многогранника? (неможливо)
3. Що ми називаємо слідом січної площини в іншій площині? (Пряма)
4. Що буде слідом січної площини на прямій? (Точка)

При побудові перерізів ми будемо використовувати певні геометричні факти, які ми вже з вами вивчали раніше. Давайте повторимо їх.

I. **Якщо дві площини мають дві спільні точки, то пряма, проведена через ці точки, є лінією перетину цих площин.**

II. **Лінії перетину двох паралельних площин третьою паралельні між собою.**

III. **Спільна точка трьох площин (вершина тригранного кута) є спільною точкою ліній їх попарного перетину (ребер тригранного кута).**

IV. **Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то лінія перетину паралельна даній прямій.**

V. **Якщо пряма лежить у площині перерізу, то точка її перетину з певною площиною грані фігури є вершина тригранного кута, утвореного площинами: перерізу, гранню фігури і допоміжною площиною, що містить дану пряму.**

Завдання. Подивіться уважно на рисунки і дайте відповідь: які з обмежених червоними лініями фігури не можуть бути плоскими перерізами куба? Чому ви так вважаєте?

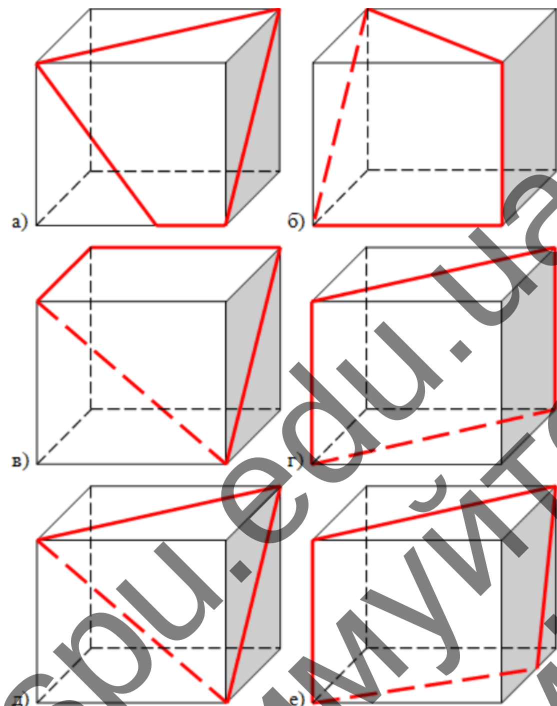


Рис. 2.34. Задачі за готовими рисунками

IV. Систематизація теоретичного матеріалу.

Вчитель: На минулому уроці ми познайомилися з вами із методами, якими можна користуватися при побудові перерізу многогранника. Пригадаємо їх.

Методи побудови перерізів многогранників

- Метод слідів
- Метод використання властивостей паралельних прямих і площин
- Метод внутрішнього проєктування

Рис. 2.35. Методи побудови перерізів многогранників

При використанні властивостей паралельних прямих і площин для побудови перерізу многогранника застосовують наступний факт: якщо даний многогранник містить паралельні грані, які перетинає площина перерізу, то прямі перетину січної площини з цими гранями будуть паралельними. Іноді використання властивостей паралельних прямих і площин поєднують з іншими методами побудови перерізів многогранників.

Кожен метод передбачає виконання чіткої послідовності кроків, тобто алгоритму. Давайте разом з вами складемо алгоритм кожного методу (рис.2.34, 2.35).

Методичний коментар. Вчитель пропонує порожні структури і разом з учнями заповнює їх. Цей вид діяльності формує наступні складові алгоритмічної культури учнів: розуміння ролі алгоритмів у різних видах діяльності та уміння конструювати алгоритми.

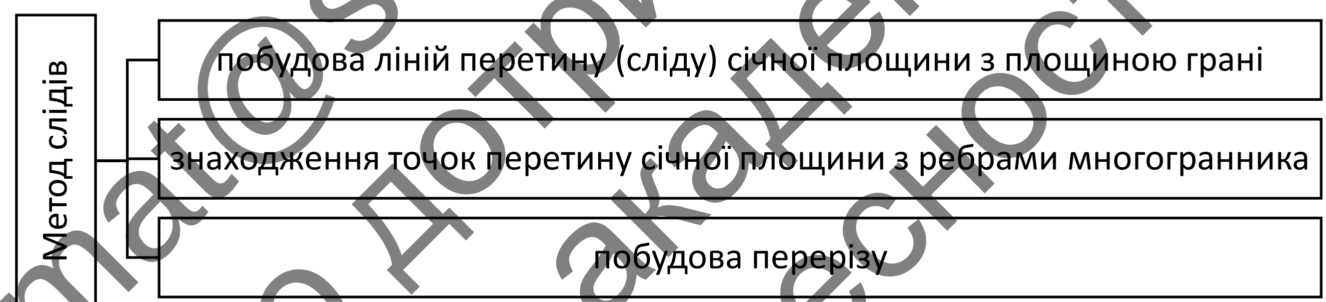


Рис. 2.36. Алгоритм методу слідів

Зауважимо, що у загальному випадку площина перерізу має спільну пряму з площиною кожної грані многогранника. Отже, січна площина має стільки слідів, скільки площин граней вона перетинає.

Але бувають ситуації, коли метод слідів достатньо складно реалізувати. Наприклад, у випадку, коли точка перетину прямої, що лежить у січній площині, та її проекції розташовані поза межами аркуша, на якому виконують побудову перерізу. У такому випадку доцільніше використовувати метод, який дозволяє виконувати всі необхідні побудови в межах зображення даного многогранника, - метод внутрішнього проєктування.

Метод внутрішнього проєктування

- маючи три точки, які визначають площину перерізу, знаходять їх проекції на деяку площину (найчастіше на площину основи многогранника)
- знаходять проекцію якоїсь, ще не побудованої, точки перерізу. Цю невідому точку перерізу вибирають (як правило, на бічному ребрі многогранника) таким чином, щоб будь-які два відрізки, які сполучають чотири точки-проекції, перетиналися у внутрішній точці цих відрізків
- за трьома даними точками і чотирма проекціями знаходять четверту точку, що належить площині перерізу
- якщо потрібно, так само одержують п’яту, шосту і т. д. точки, які належать площині перерізу і ребрам многогранника, тобто одержують переріз

Рис. 2.37. Алгоритм методу внутрішнього проєктування

Зауважимо, що цей метод застосовується при побудові перерізів у тих випадках, коли не зручно знаходити слід січної площини.

V. Розв’язування задач.

Вчитель: Перейдемо до розв’язування задач. Зверніть увагу, що для кожної задачі ми будемо прописувати чіткий алгоритм побудови перерізу многоранника. Розпочнемо з простих задач та поступово перейдемо до більш складних, при цьому будемо аналізувати, як змінюється складність алгоритму побудови перерізів.

Методичний коментар. Задача на побудову перерізу многогранника є так званою обчислювальною задачею. Ми маємо вхідні дані для алгоритма (многогранник та точки на ньому, через які проходить шуканий переріз), алгоритм побудови перерізу (чітку послідовність кроків, обов'язкових для виконання) та результат виконання алгоритму (шуканий переріз). До того ж нам потрібно критично оцінити отриманий внаслідок побудови результат на предмет його існування.

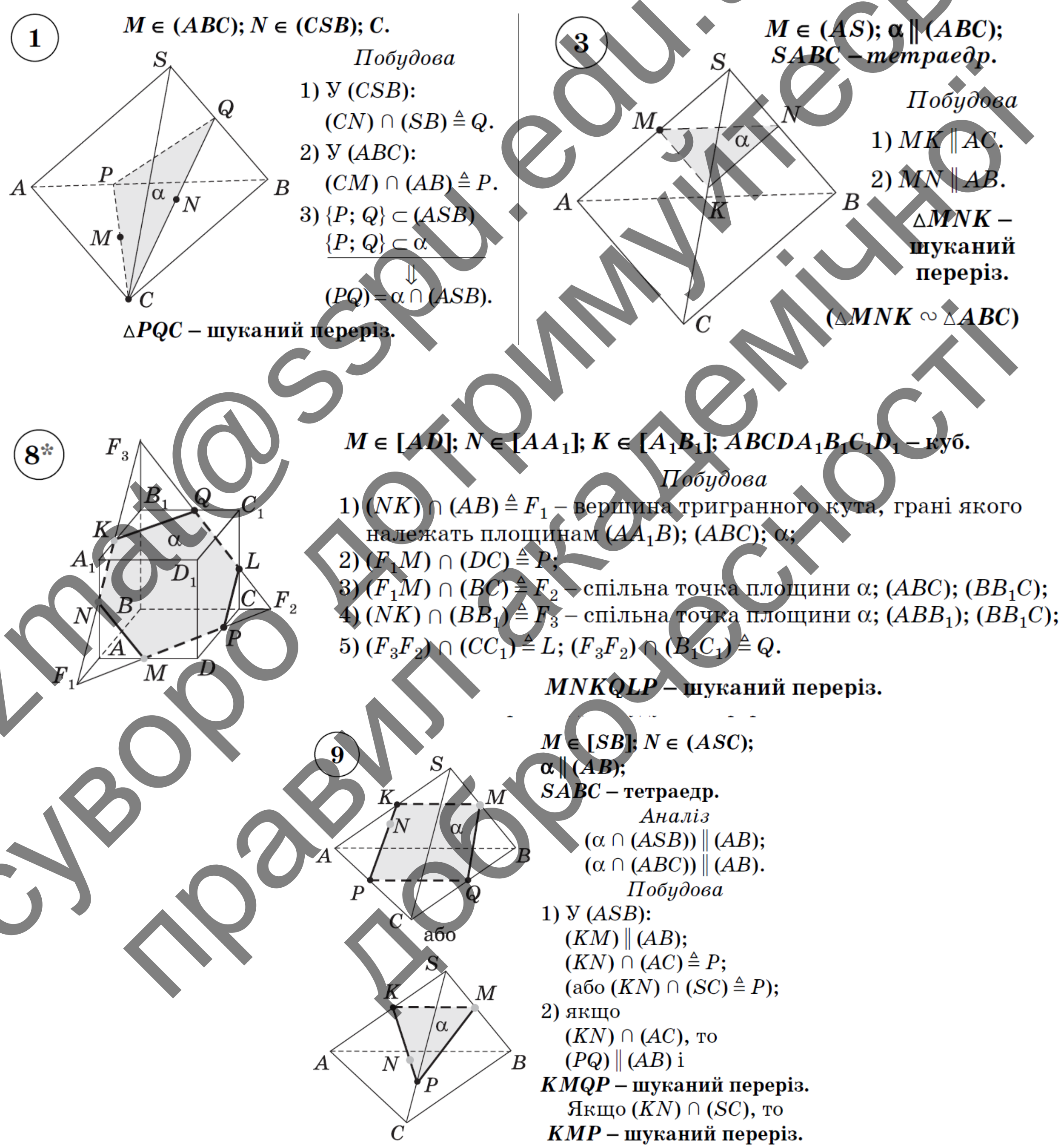


Рис. 2.38. Задачі на побудову перерізів многогранників [1]

Методичний коментар. Оскільки розв'язування подібних обчислювальних задач алгоритмізується, то для їх розв'язування зручно використовувати певні програмні середовища. Пропонуємо використовувати програму динамічної математики GeoGebra для побудови перерізів за алгоритмами, які учні будуть складати або під керівництвом вчителя, або самостійно (залежить від рівня навчальних досягнень учнів). Зауважимо, що програма GeoGebra дозволяє у режимі *Протокол* відобразити всі кроки побудови, а також відтворити покрокову побудову.

Задача 1. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки К, М, Н, якщо вони лежить на ребрах DD_1, C_1D_1, A_1D_1 відповідно.

Вхідні дані: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки К, М, Н, що лежить на ребрах DD_1, C_1D_1, A_1D_1 відповідно.

Алгоритм розв'язання

1) $H \in (A_1B_1C_1); M \in (A_1B_1C_1) \Rightarrow HM \in (A_1B_1C_1), HM$ – сторона перерізу;
2) $M \in (DD_1C); K \in (DD_1C) \Rightarrow MK \in (DD_1C), MK$ – сторона перерізу;
3) $K \in (AA_1D); H \in (AA_1D) \Rightarrow HK \in (AA_1D), HK$ – сторона перерізу;

Результат виконання алгоритму: НМК – шуканий переріз (рис.2.37).

Критична оцінка результату: варто змінити ракурс, обертаючи конструкцію, і переконатися, що переріз дійсно плоский, тобто є частиною площини.

Додатково можна змінити вихідні дані (положення вихідних точок) і дослідити можливі форми перерізу, умови його існування взагалі.

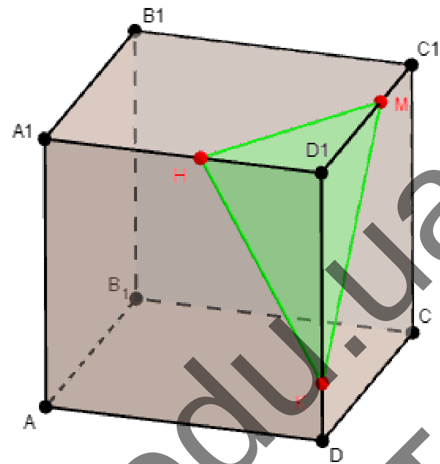


Рис. 2.39. Рисунок до задачі 1

Задача 2. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через точки A_1, H та M.

Вхідні дані: прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки A_1, H на ребрі B_1C_1 та M на ребрі DD_1.

Алгоритм розв'язання

1. $A_1H \cap D_1C_1 = Z$.
2. $MZ \cap CC_1 = X$.

Результат виконання алгоритму: A_1HPM – шуканий переріз (рис.2.37).

Критична оцінка результату: варто змінити ракурс, обертаючи конструкцію, і переконатися, що переріз дійсно плоский, тобто є частиною площини.

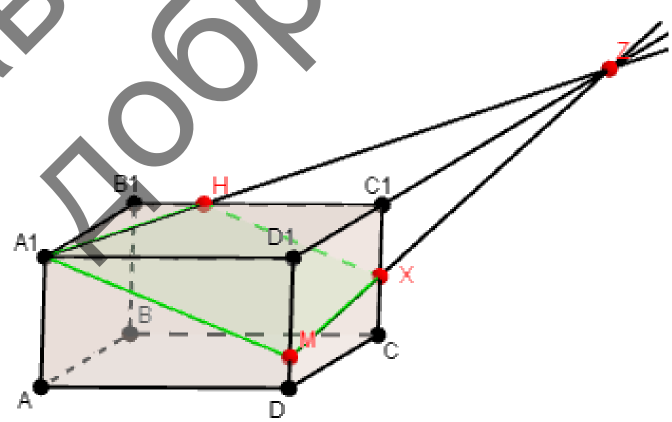


Рис. 2.40. Рисунок до задачі 2

<u>Задача 3.</u> Побудуйте переріз тетраедра DABC площиною, що проходить через точки К, М, Н, якщо точка К лежить на ребрі DC, а точки М і Н лежать на гранях (DAC) і (DBC) відповідно.

Вхідні дані: тетраедр DABC, точки К на ребрі DC, точки М і Н на гранях (DAC) і (DBC) відповідно.

Алгоритм розв'язання

1. $M \in (ADC); K \in (ADC) \Rightarrow MK \in (ADC);$
2. $KM \cap (ADC) = P; P \in AC;$
3. $K \in (BDC); H \in (BDC); KH \in (BDC);$
4. $KH \cap (ABC) = Z; Z \in AB;$
5. $P \in (ABC); Z \in (ABC); DB \cap KH = Z;$
6. $KP \cap DA = N;$
7. $N\epsilon\ (ADB); Z\epsilon\ (ADB); NZ\epsilon\ (ADB);$
8. $NZ \cap AB = P; KZ \cap BC = Q;$

Результат виконання алгоритму: PNKQ – шуканий переріз (рис.2.38).

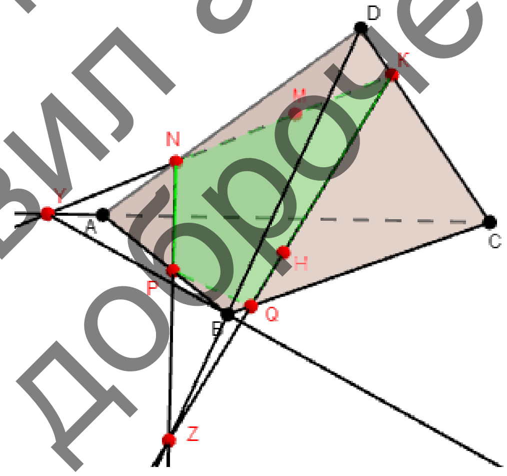


Рис. 2.41. Рисунок до задачі 3

Методичний коментар. Внаслідок розв'язування обчислювальних задач на побудову перерізів многогранників (як із використанням програмного середовища, так і без) формуються наступні складові алгоритмічної культури учнів: уміння діяти за заданим алгоритмом (у розгорнутій чи згорнутій формі); уміння здійснювати вибір і застосовувати алгоритми у своїй діяльності; уміння конструювати алгоритми; уміння описувати спосіб розв'язувати задачі у вигляді алгоритмічного припису.

VI. Самостійна робота.

Завдання. Побудувати переріз тетраедра та записати алгоритм розв'язання.

Варіант 1. Побудуйте переріз тетраедра DABC площиною, яка проходить через точки A, B і M, де M – точка перетину медіан грані (BCD).

Варіант 2. Побудуйте переріз тетраедра DABC площиною, яка проходить через точки M, H і K, де K – середина ребра DC, M належить ребру AB, AB=3MB, точка H належить ребру BC, BC=3HC.

Варіант 3. Побудуйте переріз тетраедра DABC площиною, що проходить через точки K, E та O, де K – середина ребра AD, E належить ребру BD, BE : ED = 1 : 4, точка O належить ребру BC, BO : OC = 2 : 1.

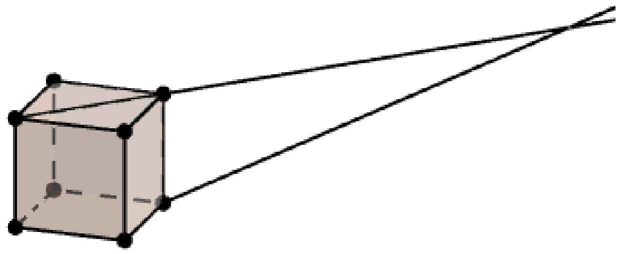
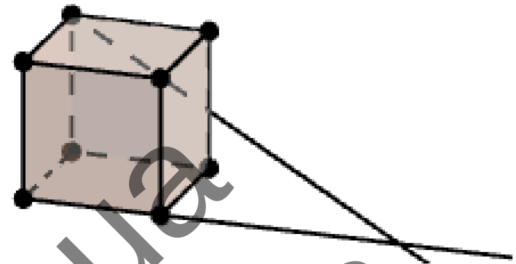
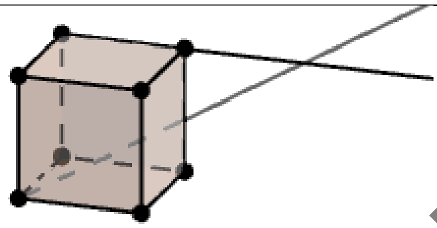
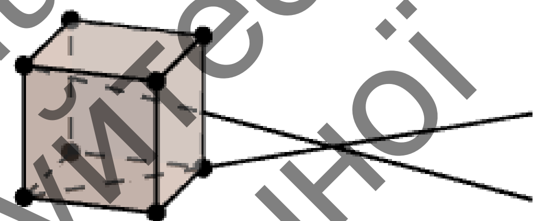
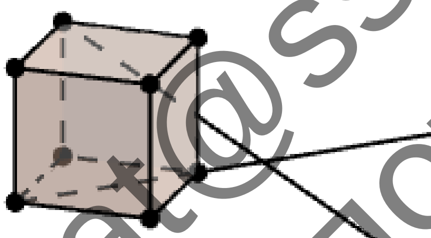
Варіант 4. Побудуйте переріз тетраедра DABC площиною, що проходить через точки H, K і M, де M – належить ребру AB, AB : MB = 1 : 3, точка H належить ребру BD, BH : HD = 1 : 4, точка K – середина DC.

VII. Домашнє завдання.

1. Передивитися відеоурок Всеукраїнської школи онлайн «Перерізи многогранників» (Частина 1 - https://www.youtube.com/watch?v=2rmqt6s86gA та Частина 2 - https://www.youtube.com/watch?v=UxIbJSsEVpY).

2. Дати відповіді на запитання.

1. У якому з наведених випадків (А-Д) правильно зображені куб і дві прямі, що перетинаються? Обґрунтуйте свою відповідь.

	
А.	Б.
	
В.	Г.
	
Д.	

2. Який многокутник не може бути перерізом куба площиною?

А. Трикутник

Б. Чотирикутник

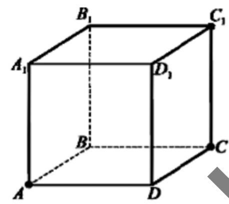
В. П’ятикутник

Г. Шестикутник

Д. Семикутник

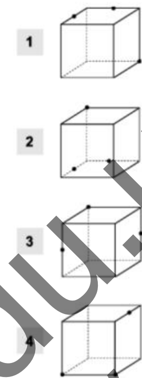
3. Розв’язати задачі ЗНО минулих років (рис. 2.42).

На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перерізом куба площиною, що проходить через точки A, C, C_1, є



А	Б	В	Г	Д
прямокутний трикутник	рівносторонній трикутник	прямокутник	ромб	трапеція

На рисунках (1 – 4) зображено куб і три точки, що розміщені у вершинах куба або є серединами його ребер. Установіть відповідність між кожним рисунком (1 – 4) та назвою фігури (А – Д), яка є перерізом куба площиною, що проходить через три задані точки.



А трикутник

Б прямокутник

В трапеція

Г п'ятикутник

Д ромб

Рис. 2.42. Задачі ЗНО з теми «Перерізи многогранників»

VIII. Підведення підсумків та рефлексія.

Вчитель:

– Що, на вашу думку, сьогодні на уроці було головним?

– Який момент на уроці, на ваш погляд, був найцікавіший?

– В чому у вас виникали труднощі?

– Що залишилося незрозумілим після уроку?

– Де ми можемо застосовувати набуті знання на практиці?

2.5. Конспект уроку «Розв'язування рівнянь з параметрами», спрямованого на формування алгоритмічної культури старшокласників

Тема: «Розв'язування рівнянь з параметрами (підготовка до ЗНО з математики».

Мета:

- сформувати вміння учнів розв'язувати рівняння з параметрами;
- розвивати логічне та алгоритмічне мислення;
- виховувати відповідальне ставлення до роботи, дисциплінованість, самостійність, взаємодопомогу та взаємопідтримку.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Сервіс: сайт УЦОЯО із завданнями ЗНО з математики минулих років (https://testportal.gov.ua/testy-mynulyh-rokiv/).

Хід уроку

І. Організаційний момент.

Привітання учнів, перевірка готовності учнів до уроку, перевірка домашнього завдання.

ІІ. Мотивація.

Для того, щоб скласти ЗНО з математики успішно, потрібно готуватися. В чому полягає наша з вами підготовка: в тому, що ми повторюємо теоретичний матеріал, який вивчали раніше, розв'язуємо завдання ЗНО з математики минулих років (від найпростіших з вибором однієї правильної відповіді до найскладніших – завдань з повним поясненням). Кожного року завдання, які оцінюються найбільшою кількістю балів, є завданнями з параметрами (розв'язати рівняння чи нерівність з параметром або їх систему). Наша задача – підготуватися до їх розв'язування, щоб у вас не виникало «страху» перед «параметрами».

ІІІ. Актуалізація опорних знань.

Повторимо основні поняття теорії рівнянь.

Рівняння – це рівність із змінною.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені (розв'язки) або показати, що їх немає.

Коренем (або розв'язком) рівняння називається значення змінної, що перетворює рівняння на правильну числову рівність.

При *розв'язуванні рівнянь з параметрами* потрібно з'ясувати, при яких значеннях параметра задане рівняння має розв'язок, і знайти всі ці розв'язки. У випадку, коли хоча б одне з допустимих значень параметра не досліджено, задача не вважається повністю розв'язаною.

Що ж потрібно занти і вміти при розв'язуванні задач з параметрами?

1. Знання властивостей елементарних функцій (область визначення, множина значень, проміжки зростання і спадання функції).

2. Знання властивостей рівнянь (рівносильність та нерівносильність перетворень).

3. Вміння проводити дослідження, не випускаючи ніяких випадків.

4. Для застосування графічних методів потрібні вміння виконувати побудову графіків функції та проводити графічні дослідження, що відповідають різним значенням параметра.

Що ж додатково нам потрібно знати про задачі з параметрами та про параметр зокрема?

1. Розв'язування рівнянь з параметрами визначається залежно від допустимих значень параметрів.

2. Параметр – величина, числові значення якої дають можливість виділити певний елемент з множини елементів того ж виду.

3. Існує дві постановки задач з параметрами.

3.1. Перша постановка: для кожного можливого значення параметра знайти усі розв'язки заданого рівняння.

3.2. Друга постановка: знайти усі значення параметра, при кожному з яких розв'язки рівняння існують або задовольняють заданим умовам.

4. Розв'язати рівняння з параметром означає знайти для довільного припустимого значення а множину усіх коренів заданого рівняння.

Тепер перевіримо, як ви зрозуміли даний теоретичний матеріал.

Перевірка відбувається у формі запитань типу «Незакінчене речення», організована за допомогою сервіса *Mentimeter* (рис.2.43).

Якщо рівняння, крім змінної містить невідоме, то його називають …
Параметр - це …
Методи розв’язування задач з параметрами…
Розв’язати задачу з параметром означає знайти…
Основними типами задач з параметрами є….

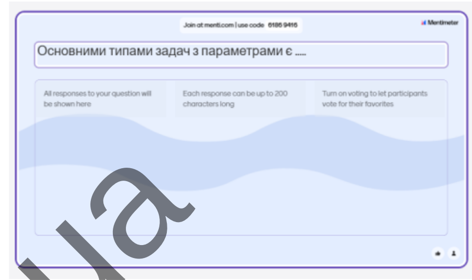


Рис. 2.43. Задання типу «Незакінчене речення» (сервіс *Mentimeter)*

IV. Систематизація теоретичного матеріалу.

Наголошую на тому, що рівняння з параметрами розв’язуються аналогічно, як і рівняння без параметрів, поки кожне перетворення можна виконати однозначно. Якщо ж певне перетворення не виконується однозначно, то розв’язання потрібно «розбити» на різні випадки залежно від значень параметра. Тому при розв’язуванні подібних завдань доцільно використовувати алгоритми та візуалізувати їх за допомогою блок-схеми.

Наведемо загальний алгоритм розв’язування рівнянь з параметрами (рис. 2.44).

Алгоритм розв’язування рівнянь з параметрами

1. Встановити область допустимих значень (ОДЗ) змінної та ОДЗ параметрів.
2. Виразити змінну через параметри.
3. Для кожного допустимого значення параметра знайти множину значень рівняння.
4. Дослідити особливі значення параметра, при яких корені рівняння існують, але не виражаються формулами, які отримали.

Рис. 2.44. Алгоритм розв’язування рівнянь з параметрами

Пригадаємо найпростіші типи рівнянь з параметрами і як вони розв’язуються. Оскільки будь-яке лінійне рівняння з параметром можна звести до рівняння виду *ax=b*, a і b – деякі числа, то перш за все розглянемо алгоритм розв'язування такого типу рівняння (рис. 2.45).

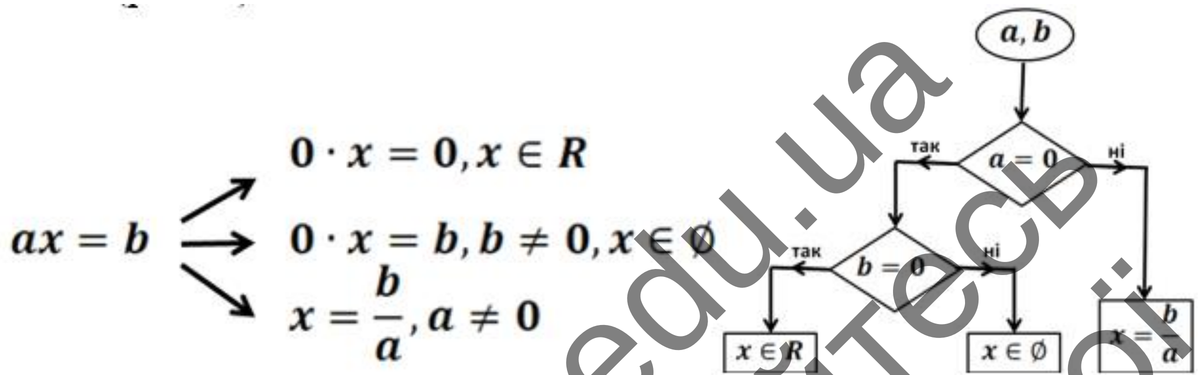


Рис. 2.45. Алгоритм та блок-схема розв'язування рівняння виду *ax=b*

<u>Задача 1.</u> Знайти всі корені рівняння $(p^2 - 9)x = 7p^2 - 7p - 42$ залежно від значень параметра p.

Розв'язання

Перетворимо праву частину рівняння

$7p^2 - 7p - 42 = 7(p^2 - p - 6) = 7(p - 3)(p + 2), (p^2 - 9)x = 7(p - 3)(p + 2).$

Нехай $(p^2 - 9) = a, 7(p - 3)(p + 2) = b$.

Якщо $(p^2 - 9) = 0$, то *p=3, p=-3*. Якщо *p*=3, то $x \in R$. Якщо *p*=-3, то $x \in \emptyset$.

Якщо $(p^2 - 9) \neq 0$, то $x = \frac{7p^2 - 7p - 42}{p^2 - 9} = \frac{7(p-3)(p+2)}{p^2-9} = \frac{7(p+2)}{p+3}$.

Відповідь. 1. Якщо *p*=3, то $x \in R$.

2. Якщо *p*=-3, то $x \in \emptyset$.

3. Якщо $p \neq 3, p \neq -3$, то $x = \frac{7(p+2)}{p+3}$.

Достатньо велике коло рівнянь зводяться до квадратних, тому варто зупинитися на алгоритмі розв'язування квадратного рівняння з параметрами та його візуалізації за допомогою блое-схеми (рис. 2.46).

Для того, щою рівняння було квадратним, необхідно, щоб а $\neq 0$. Якщо ж *а=0*, то рівняння вироджується у лінійне. Об’єднаємо у блок-схемі (рис. 2.47) два випадки: *а=0* та а $\neq 0$.

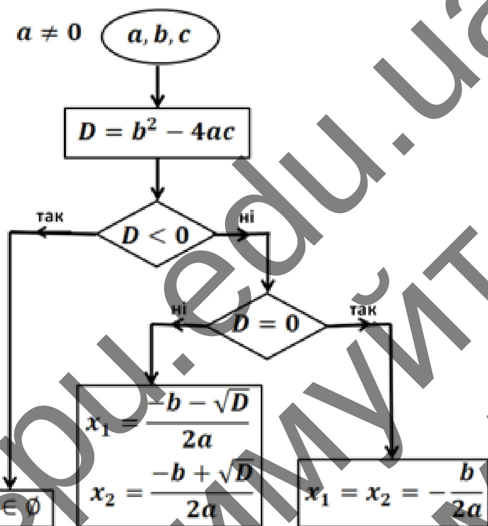


Рис. 2.46. Блок-схема розв’язування квадратного рівняння

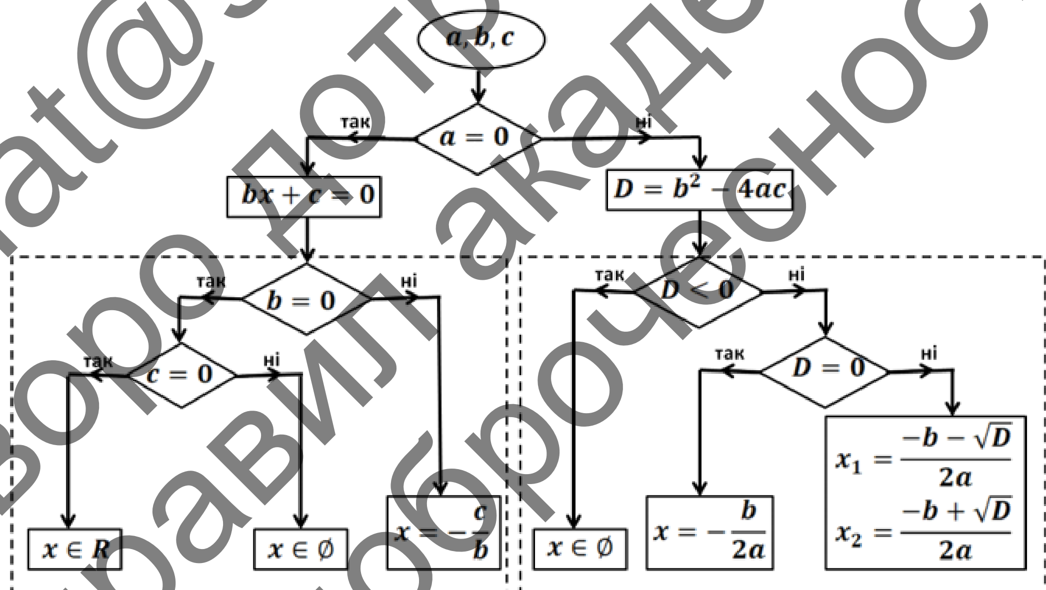


Рис. 2.46. Блок-схема розв’язування рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

<u>Задача 2.</u> Знайти всі корені рівняння $x^2 + (4p+1)x + 4p^2 + 4p - 1 = 0$ залежно від значень параметра *p*.

Розв’язання

Знайдемо $D = (4p+1)^2 - 4(4p^2 + 4p - 1) = -8p + 5$.

Якщо $D < 0, -8p + 5 < 0, p > \frac{5}{8}$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $D = 0, -8p + 5 = 0, p = \frac{5}{8}$, то $x = -\frac{4p+1}{2}$.

Якщо $D > 0, -8p + 5 > 0, p < \frac{5}{8}$, то $x_1 = -\frac{4p+1+\sqrt{5-8p}}{2}$, $x_2 = -\frac{4p+1-\sqrt{5-8p}}{2}$.

Відповідь. 1. Якщо $p \in (-\infty; \frac{5}{8})$, то $x_1 = -\frac{4p+1+\sqrt{5-8p}}{2}$, $x_2 = -\frac{4p+1-\sqrt{5-8p}}{2}$.

2. Якщо $p = \frac{5}{8}$, то $x = -\frac{4p+1}{2}$.

3. Якщо $p \in (\frac{5}{8}; +\infty)$, то $x \in \emptyset$.

V. Розв'язування задач.

Звернемося тепер до розв'язування рівнянь з параметрами, які пропонувалися на ЗНО минулих років.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра a (ЗНО, 2016 р.)

$$\frac{\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$$

Окрім того, що ми будемо розв'язувати дане рівняння, ми повинні розуміти, що завдання такого типу на ЗНО оцінюються не машинним способом, їх оцінює перевіряючий. Тому до кожного завдання з повним поясненням існує схема оцінювання. Пропоную враховувати її, щоб мати змогу оцінити себе і з'ясувати, скільки балів за кожен крок розв'язання ми тримаємо.

Схема оцінювання

1. Якщо учасник правильно знайшов нулі чисельника: $x_1 = -2a$ та $x_2 = 4 - 2a$ (можливо, без зазначення обмеження $a \geq 0$), то він отримує **1 бал**.
2. Якщо учасник розклав вираз $5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x$ на множники: $5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x = (5^x - 5^{a-1})(5^{x+1} + 1)$ або розв'язав рівняння $5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x = 0$, отримавши $5^x = 5^{a-1}$ та $5^x = -\frac{1}{5}$, то він отримує ще **1 бал**.
3. Якщо учасник обґрунтував, що вираз $5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x$ не дорівнює нулю, якщо $x \neq a-1$, то він отримує ще **1 бал**.
4. Якщо учасник розглянув випадок, коли $x_1 = -2a \neq a-1$, тобто $a \neq \frac{1}{3}$, і вказав, що при $a = \frac{1}{3}$ задане рівняння має єдиний корінь $x = 3\frac{1}{3}$, то він отримує ще **1 бал**.
5. Якщо учасник розглянув випадок, коли $x_2 = 4 - 2a \neq a-1$, тобто $a \neq 1\frac{2}{3}$, і вказав, що при $a = 1\frac{2}{3}$ задане рівняння має єдиний корінь $x = -3\frac{1}{3}$, то він отримує ще **1 бал**.
6. Якщо учасник правильно записав відповідь, то він отримує ще **1 бал**.

Зауваження

1. Якщо учасник **лише** вказав, що рівняння має розв'язки за умов $a \geq 0$ та $5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x \neq 0$, то він отримує за все завдання **1 бал**.
2. Якщо учасник не знаходив нулі знаменника, а виконував перевірку правильно отриманих в пункті 1 коренів і правильно знайшов значення $a = \frac{1}{3}$ і $a = 1\frac{2}{3}$, то за кожне з цих значень він отримує по **1 балу**. За кожен правильно знайдений корінь, що відповідає цим значенням *a*, він отримує ще по **1 балу**.
3. Якщо учасник припустився арифметичної помилки при виконанні пунктів 1-5, але подальші міркування зробив правильно з урахуванням цієї помилки, з нього знімається лише **2 бали**: по **1 балу** за пункт, у якому припущено помилку, і за пункт 6.
4. Якщо учасник не записав, що при $a < 0$ рівняння не має змісту або коренів, то бал за відповідь **не знімається**.

Розв'язання

1. Очевидно, що $a \geq 0$, тобто при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

2. Рівняння має розвязки лише за умови, коли знаменник $5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x$ не дорівнює нулю.

$5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x = 0,$

$5^x 5^{x+1} - 5^a 5^x - 5^a 5^{-1} + 5^x = 0,$

$(5^x - 5^{a-1})(5^{x+1} + 1) = 0,$

$5^x = 5^{a-1}$ та $5^{x+1} = -1$ (неможливо),

$x = a - 1.$

Тобто при $x = a - 1$ знаменник дорівнює нулю, що неможливо.

3. $\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} = 2\sqrt{2a},$

$x^2 + (4a-4)x + 4a^2 = 8a,$

$x^2 + (4a-4)x + (4a^2 - 8a) = 0,$

$D = (4a-4)^2 - 4(4a^2 - 8a) = 16,$

$x_1 = \frac{-4a+4+4}{2} = -2a + 4,\ x_2 = \frac{-4a+4-4}{2} = -2a.$

4. При цьому потрібно врахували результати пункту 2, тобто що $x \neq a - 1$.

Якщо $a - 1 = -2a + 4$, то $a = \frac{5}{3}$, $x = -2 \cdot \frac{5}{3} = -3\frac{1}{3}$.

Якщо $a - 1 = -2a$, то $a = \frac{1}{3}$, $x = -2 \cdot \frac{1}{3} + 4 = 3\frac{1}{3}$.

Відповідь. 1. Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in \emptyset$.

2. Якщо $a \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup (\frac{1}{3}; \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; +\infty)$, то $x_1 = -2a + 4$, $x_2 = -2a$.

3. Якщо $a = \frac{1}{3}$, то $x = 3\frac{1}{3}$.

4. Якщо $a = \frac{5}{3}$, то $x = -3\frac{1}{3}$.

Візуалізуємо алгоритм розв'язування за допомогою блок-схеми (рис. 2.47).

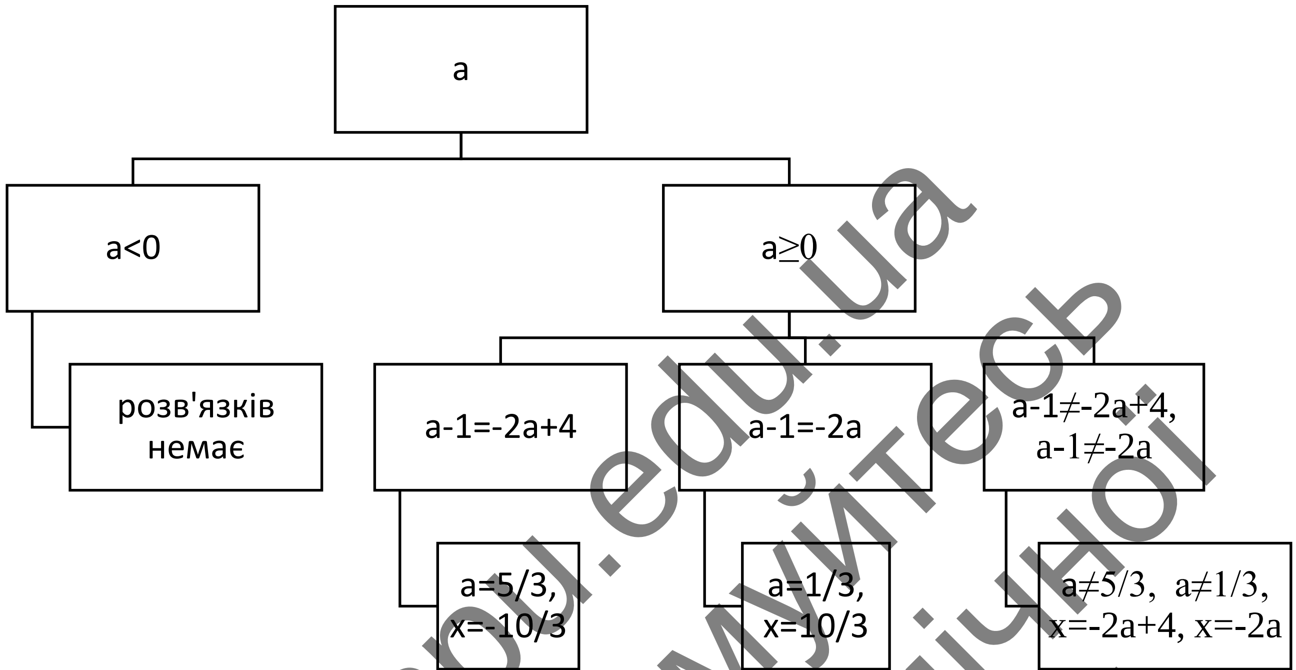


Рис. 2.47. Блок-схема розв'язування рівняння з параметром

VII. Домашнє завдання.

Розв'яжіть *завдання ЗНО* (2020 р.).

Задано рівняння $(5^{2x-1} - 25^{x} - 20)\left(\sqrt{ax-6} - \sqrt{a-2x}\right) = 0$, де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть рівняння $5^{2x-1} - 25^{x} - 20 = 0$.

2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a.

Врахуйте схему оцінювання даного завдання.

Схема оцінювання

1. Якщо учасник правильно розв'язав рівняння $5^{2x+1}-25^x-20=0$, то він отримує **1** бал.

2. Якщо учасник обґрунтовано встановив, що значення $x=0{,}5$ є коренем заданого рівняння за $a\in[12;+\infty)$, то він отримує ще **1** бал.

3. Якщо учасник звів рівняння $\sqrt{ax-6}-\sqrt{a-2x}=0$ до вигляду $(a+2)x=a+6$ й отримав значення $x=\dfrac{a+6}{a+2}$, то він отримує ще **1** бал.

4. Якщо учасник обґрунтовано встановив, що значення $x=\dfrac{a+6}{a+2}$ є коренем заданого рівняння за $a\in[-2\sqrt{3};-2)\cup[2\sqrt{3};+\infty)$, то він отримує ще **2** бали. Якщо учасник лише записав нерівність $a-2\dfrac{a+6}{a+2}\geq 0$ або $a\cdot\dfrac{a+6}{a+2}-6\geq 0$ (чи рівносильну їм), то за п. 4 схеми оцінювання він отримує **1** бал.

5. Якщо учасник правильно записав відповідь, то він отримує ще **1** бал.

Зауваження

1. Якщо учасник неправильно визначив корінь рівняння $\sqrt{ax-6}-\sqrt{a-2x}=0$, і підставив його в нерівність $ax-6\geq 0$ або $a-2x\geq 0$, то за п. 3–5 схеми оцінювання він сумарно отримує лише **1** бал.

2. Якщо учасник лише записав, що рівняння

$$\left(5^{2x+1}-25^x-20\right)\left(\sqrt{ax-6}-\sqrt{a-2x}\right)=0$$

рівносильне системі $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5^{2x+1}-25^x-20=0,\\ \sqrt{ax-6}-\sqrt{a-2x}=0\end{array}\right.\\ ax-6\geq 0,\\ a-2x\geq 0\end{cases}$, або лише правильно записав усі складники цієї системи, то він отримує за п. 1–5 схеми оцінювання, лише **1** бал.

VIII. Підведення підсумків та рефлексія.

Вчитель:

– Що, на вашу думку, сьогодні на уроці було головним?

- Який момент на уроці, на ваш погляд, був найцікавіший?
- В чому у вас виникали труднощі?
- Що залишилося незрозумілим після уроку?
- Де ми можемо застосовувати набуті знання на практиці?

Застосування запропонованих алгоритмів та їх блок-схем значно спрощує процес розв’язування рівнянь з параметрами. Процес розв’язування перетворюється на послідовне виконання окремих кроків, що дає можливість дослідити кількість коренів залежно від значень параметрів і отримати повний розв’язок рівняння з параметрами.

ВИСНОВКИ

Відповідно до поставлених завдань та за результатами проведеного дослідження, можна сформулювати наступні висновки.

Проаналізовано та узагальнено науково-теоретичні дослідження про методичні особливості формування алгоритмічної культури старшокласників в навчанні математики. З'ясовано сутність таких суміжних понять як «алгоритм», «алгоритмічні уміння», «алгоритмічні здібності», «алгоритмічне мислення» та «алгоритмічна культура», при цьому акцентовано увагу на кореляції евристичного та алгоритмічного мислення.

Досліджено психологічні особливості сучасних старших підлітків з позицій формування алгоритмічної культури. Звернено увагу на розвиток у підлітковому віці такого когнітивного процесу як мислення. Розглянуто форми математичного мислення, акцентовано, що головною тенденцією розвитку мислення підлітків є становлення абстрактного мислення та його окремої форми алгоритмічного мислення. Виокремлено відмінні риси алгоритмічного мислення, його загальні та специфічні ознаки порівняно з іншими формами мислення, та компонентами алгоритмічного мислення.

Розглянуто теоретичні засади алгоритмізації самого процесу навчання математики з метою формування алгоритмічної культури старшокласників. Описано етапи процесу алгоритмізації навчання на уроках.

Проаналізувано актуальний стан програмового матеріалу, а саме зміст шкільного курсу математики (старша школа) на предмет використання алгоритмічного підходу (наявності зазначених типів алгоритмів) з метою формування алгоритмічної культури старшокласників. Зосереджено увагу на тому, які саме види діяльності чи процеси можуть бути алгормізовані, за результатами виділено та описано наступні типи алгоритмів в шкільному курсі математики: алгоритми методів доведення, алгоритми розв'язування задач на побудову, алгоритми методів розв’язування задач на побудову, алгоритм підведення об`єкта під дане поняття, алгоритми методу координат, алгоритми векторного методу.

Обгрунтовано ефективність використання обчислювальних задач для формування алгоритмічної культури старшокласників на уроках математики. Розкрито сутність поняття «обчислювальна задача», виділено основні типи простих обчислювальних задач та наведено їх приклади.

Здійснено аналіз цифрових засобів, орієнтованих на формування алгоритмічної культури старшокласників та допоміжно проаналізовано зміст шкільних підручників з інформатики на предмет цифрових засобів, які використовуються для розв’язування обчислювальних задач математичного змісту. За результатами аналізу пропонуємо у закладах загальної середньої освіти використовувати табличний процесор MS Excel, програму GeoGebra та різні мови програмування при розв’язуванні обчислювальних задач з метою формування алгоритмічної культури старшокласників.

Розроблено конспект уроку «Побудова перерізів многогранників», спрямованого на формування алгоритмічної культури старшокласників. Для організації уроку задіяний такий засіб навчання як програма динамічної математики GeoGebra. Розроблено також конспект уроку «Розв’язування рівнянь з параметрами», алгоритми розв’язування завдань візуалізовано за допомогою блок-схем. Розроблені конспекти уроків супроводжується методичними коментарями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. Шкільна геометрія в опорних таблицях. К.: Генеза, 2009. 104 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів заг. серед. освіти. К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
3. Беседін Б.Б., Кадубовський О.А. Про алгоритмічний підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 2(16). С. 18-22.
4. Донай Л. Использование эвристических методов решения проблем. Ренессанс интуитивного восприятия мира. Человеческий капитал. 2013. № 7 (55). С. 80–86.
5. Ковальчук М.Б. Алгоритмізація як метод формування понять вищої математики. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 2(24). С. 66-73.
6. Концепція Нової української школи. Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf
7. Корольський В. В., Капіносов А. М. (2013). Математична алгоритмічна компетентність: теоретико-методичні основи формування, структура та рівні. Educational Dimension, 37, 78-84.
8. Крутецький В.А. Психологія. К.: Вища школа, 1978. 283 с.
9. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2013. 224 с.
10. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Використання алгоритмів евристичного типу у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей. Наукові записки. Серія. Педагогічні науки. Вип.77. С. 205-212.

11. Ленчик І. Ю. Використання алгоритмічного підходу в шкільному курсі математики. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. Суми, 2024. Вип. 18. С. 25.

12. Ленчик І. Ю. Психологічні особливості сучасних старших підлітків у контексті розвитку алгоритмічного мислення. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників»: матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (17 листопада 2023 р., м. Суми). Суми: СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2023. С. 47-48.

13. Ленчик І. Ю. Сутність поняття «алгоритмічна культура». Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. Суми, 2024. Вип. 18. С. 59-62.

14. Мацько Н.Д. Формування геометричних понять в учнів 4-5 класів. К.: Рад. шк., 1988. 160 с.

15. Мельник Ю. С. Сучасні підходи до формування алгоритмічної культури особистості.

16. Мельник Ю.С. Дидактичні умови формування алгоритмічної культури молодших школярів: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.09; Ін-т педагогіки АПН України. Київ, 2007. 238 с.

17. Морзе Н. В., Барна О. В. Інформатика (рівень стандарту): підруч. для 10(11) кл. закладів загальної середньої освіти. К.: УОВЦ «Оріон», 2019. 240 с.

18. Нак М.М. Співвідношення алгоритмічного та евристичного підходів при розв’язуванні алгебраїчних задач. Didactics of mathematics: Problems and Investigations. 2005. 24. 212-217.

19. Нелін Є.П. Алгебра у таблицях: навч. посіб для учнів 7-11 кл. Х.: Гімназія, 2020. 128с.

20. Осіпа Л. В. Концептуальні засади створення навчальної програми курсу за вибором «Розв’язування обчислювальних задач з використанням інструментальних програмних засобів». Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, 2012, 21. С. 115-119.

21. Осіпа Л. В. Роль обчислювальних задач у формуванні алгоритмічної культури старшокласників. Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. 2013, Vol. 5. P.119-123

22. Осіпа Л. В. Формування алгоритмічної культури старшокласників у процесі розв’язування обчислювальних задач з використанням інструментальних програмних засобів: результати дослідження. Інформаційні технології і засоби навчання. 2013, 35 (3). С. 113-119.

23. Осіпа Л.В. Дидактичні умови формування алгоритмічної культури старшокласників у процесі розв’язування обчислювальних задач з використанням інструментальних програмних засобів. Проблеми сучасного підручника. 2011. Вип. 11. С. 594–600.

24. Осіпа Л.В. Навчання старшокласників розв’язувати обчислювальні задачі за допомогою інструментальних програмних засобів. Проблеми сучасного підручника. 2010. Вип. 10. С. 346-353.

25. Писарєва А. В. Алгоритмізація процесу навчання на уроках математики. Житомирщина Педагогічна. Режим доступу: https://imso.zippo.net.ua/

26. Ривкінд Й. Я. Інформатика (рівнь стандарту): підруч. дл 10-го (11-го) кл. закл. заг. серед. освіти. К.: Генеза, 2018. 144с.

27. Розуменко А. О. Використання засобів знаково-символьної наочності у процесі формування алгоритмічної культури учнів 5-6 класів. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2015. № 10 (54). С. 298-306.

28. Руденко В. Д., Речич Н. В., Потієнко В. О. Інформатика (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Х.: Ранок, 2019. 256 с.

29. Руденко В. Д., Речич Н. В., Потієнко В. О. Інформатика (рівень стандарту): підруч. для 10(11) кл. закл. загал. серед. освіти. Х.: Ранок, 2019. 160 с.

30. Скворцова С.О. Формування у молодших школярів умінь розв'язувати складені задачі. Початкова освіта. 2003. №4. С. 1-6.

31. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

32. Типова освітня програма, розроблена під керівництвом Савченко О.Я. 3-4 класи. Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-1-4-klas/2020/11/20/Savchenko.pdf

33. Шаран О.В. Використання алгоритмічного підходу у процесі вивчення курсу «Теорія та методика формування елементарних математичних уявлень». Педагогіка вищої та середньої школи: збірник наукових праць Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет». Кривий Ріг, 2016. Вип. 47. С. 220–224.

34. Шаран О.В., Голинська М.Й. Особливості формування алгоритмічної культури молодших школярів на уроках математики та інформатики. Perspektywiczne opracowania są nauką i technikami – 2018: Materialy XIV Miedzynarodowej naukowi – praktycznej konferencji. Przemyśl: Nauka i studia, 2018. 116 c. C. 94–98.

35. Якимчук Б. А. Психологічні особливості розвитку творчого мислення підлітків. Актуальні проблеми психології. 2015. Вип.15. С. 431-438.