Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Яценко Аліна Миколаївна

НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:
_________________ О.О.Одінцова,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент
«____» __________________ 2022 року
Виконавець:
________________ А.М.Яценко
«____» __________________ 2022 року

Суми 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Шкільний курс математики має забезпечувати свідоме оволодіння учнями системи математичних знань, умінь і навичок. Вони є необхідними для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в сучасному світі, для вивчення інших шкільних предметів, що пов’язані з математикою (фізики, хімії, інформатики та інших) і для подальшого навчання. А в наш час все більше спеціальностей потребують високого рівня знань з математики. Тому в сучасному житті людина повинна оволодіти певними математичними прийомами та навчитись їх застосовувати на практиці. [44]

Однією з ключових змістових ліній шкільного курсу математики є «Рівняння та системи рівнянь». З рівняннями та їх системами, а також основними методами їх розв’язання учні зустрічаються впродовж усього курсу математики основної та старшої школи. Вивчення даної теми розвиває в учнів вміння аналізувати, узагальнювати, робити висновки, а також логічне, критичне мислення та пам'ять. [43]

Тривалий час алгебра розвивалась саме як наука про рівняння. Навіть сама назва «алгебра» утворилась від слова «аль-джебр», яке використовував відомий узбецький математик IX ст. Мухаммед Аль–Хорезмі. Лінійні та квадратні рівняння люди вміли розв’язувати за кілька століть до нашої ери. Зокрема, ще у другому тисячолітті до н.е. єгиптяни невідоме називали «хау» (у перекладі – «купа») .

Далі алгебра розвивалась з розв’язанням практичних задач які зводилися до рівнянь та систем рівнянь. Вчення про рівняння та системи рівнянь є однією з головних ліній шкільного курсу алгебри і у наш час. [43]

Розв’язування багатьох задач практичного змісту зводиться до розв’язування системи двох рівнянь з двома змінними. Також завдання щодо систем рівнянь з двома невідомими щороку представлені серед завдань ЗНО з математики. Тому тема кваліфікаційної дипломної роботи є актуальною.

Об’єкт дослідження – процес навчання алгебри в основній школі.

Предмет дослідження – науково-методичні особливості навчання учнів темі «Рівняння з двома змінними та їх системи» (поглиблений рівень навчання).

Мета дослідження: розкрити науково-методичні особливості вивчення систем рівнянь з двома змінними на поглибленому рівні навчання.

Завдання:

1) опрацювавши методичну літературу, з'ясувати як принцип неперервності навчання реалізується при вивченні систем алгебраїчних рівнянь в шкільному курсі математики;

2) розглянути способи розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, що розглядаються на поглибленому рівні навчання, та розглянути особливості розв'язування задач практичного змісту, що зводяться до розв'язування систем алгебраїчних рівнянь;

3) проаналізувати результати сертифікаційних робіт ЗНО з математики за останні 5 років в контексті дослідження, продемонструвавши важливість розглядуваної теми;

4) на основі порівняльного аналізу навчальних програм з алгебри 8-9 класів рівня стандарт і поглибленого рівня, аналізу підручника з алгебри зазначених класів для поглибленого рівня навчання в контексті дослідження, розробити конспекти уроків різних типів, а також заняття факультативу з теми «Рівняння з двома змінними та їх системи».

Методи дослідження: аналіз науково-методичної літератури з теми дослідження, порівняння, систематизація, зіставлення та узагальнення здобутої інформації з метою виокремлення особливостей методики навчання розв'язування систем рівнянь у основній школі на поглибленому рівні та використання отриманої інформації для створення уроків і занять факультативу.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет і мету дослідження, сформульовано завдання дослідження. У першому розділі кваліфікаційної роботи «Теоретичні основи дослідження» продемонстровано як принцип неперервності навчання реалізується при вивченні систем алгебраїчних рівнянь в шкільному курсі математики, розглянуто способи розв’язання систем алгебраїчних рівнянь, що розглядаються на поглибленому рівні навчання, та особливості розв'язування задач практичного змісту, що зводяться до розв’язування систем алгебраїчних рівнянь. Другий розділ «Практичні аспекти навчання учнів основної школи темі «Рівняння з двома змінними та їх системи» (поглиблений рівень)» присвячено аналізу програм і підручників з алгебри для поглибленого рівня та запропоновано розробку низки уроків та занять факультативу в контексті дослідження.

Апробація результатів та публікації. Результати дослідження відповідно до теми магістерської роботи були представлені на щорічній студентській звітній науковій конференції, яка відбулася на базі фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка 12 травня 2022 року, на ІІІ Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022 Форум молодих дослідників», яка відбулася на базі фізико-математичного факультету та на науково-дослідницької лабораторії змісту і методів навчання математики, фізики, інформатики при СумДПУ імені А.С. Макаренка 18 листопада 2022 року та на Всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання», яка відбулась дистанційно 1 грудня 2022 року на базі природничо-математичного факультету НУЧК імені Т. Г. Шевченка.

Практичне значення одержаних результатів. Робота може бути використана вчителями загальноосвітніх шкіл як допоміжний матеріал при плануванні та вивченні теми «Рівняння та їх системи» на поглибленому рівні.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи дослідження

1.1. Вивчення систем алгебраїчних рівнянь в шкільному курсі математики як приклад неперервності навчання

Лінія рівнянь та їх систем – одна з основних змістовних ліній у шкільному курсі математики. Це пояснюється тим, що вони широко використовуються в різних розділах математики, зокрема при розв'язуванні важливих прикладних задач.

У програмі з математики передбачається систематичне вивчення рівнянь, систем рівнянь. Ознайомлення з рівняннями відбувається ще у початковій школі. У молодшій та основній школі поняття рівняння трактують як рівність, що містить невідоме. Відразу вводиться означення кореня рівняння як числа, за якого рівняння перетворюється на правильну рівність. [43]

Терміни **«рівняння»** та «**корінь рівняння**» вводиться в 3 класі.

Означення 1.1. [12] *Рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою, називають рівнянням.*

Означення 1.2. [12] *Якщо* $x = 21$, *то* $x - 6 = 15$ - *правильна рівність. Число 21 є розв'язком рівняння* $x - 6 = 15$. *Розв'язок рівняння ще називають його коренем.*

У початкових класах розглядаються лінійні рівняння вигляду $4 + x = 9$; $x - 2 = 5 + 3$ і т.д. Невідоме число спочатку знаходять підбором, а потім на підставі правил знаходження невідомих компонентів. [43]

Розглядається, наприклад, така задача.

Задача 1.2. Від невідомого числа відняли 5 і отримали 4. Знайдіть невідоме число. [43]

Наводиться короткий запис задачі: $\square - 5 = 4$. Число, яке треба підставити замість □, знаходять підбором. Потім говорять, що рівність $\square - 5 = 4$ можна записати за допомогою букви x, якою позначають невідоме: $x - 5 = 4$.

У початковій школі учні розв'язують найпростіші рівняння. Наприклад, такі: а) $2 + x = 8$; б) $x - 5 = 8 + 3$. Невідоме число спочатку знаходять підбором, а пізніше на основі залежностей між компонентами арифметичних дій.

Наприклад, розв’язуючи рівняння $2+x=8$ учні мають міркувати так: «Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок. Отримаємо: $x=8-2$; $x=6$». [12]

У курсі математики 5-6 класів зберігається наступність і в тлумаченні рівняння, і в способі розв’язування рівнянь. При цьому здобуті у початковій школі знання поглиблюються і розширюються. Терміни **«рівняння»**, **«корінь рівняння»** та їх визначення вводяться в 5 класі в темі «Рівняння». У підручнику з математики для 5-го класу авторів Г.П. Бевз та ін. [1] про рівняння сказано так: «Рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою, називається рівнянням». [34]

У 6-му класі означення рівняння не уточнюється і не поглиблюється. Рівняння вивчаються при розгляді теми «Раціональні числа і дії над ними», вводяться основні властивості рівнянь, обґрунтовується загальний метод розв’язання рівнянь – перенесення доданків з однієї частини рівняння в іншу. Учні далі розв’язують рівняння на основі залежності результатів арифметичних дій від компонентів, причому невідоме у рівнянні невідоме число може позначатися різними буквами, а не лише буквою x і міститься не тільки в лівій частині рівняння. Тут більше уваги приділяється формулюванню правил знаходження невідомих компонентів. [26]

Отже, в курсі математики початкової школи та 5-6 класів навчальний матеріал, що стосується рівнянь, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує учнів до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсі алгебри. [34]

У 7 класі у розділі «Рівняння» систематизовано відомості про рівняння, посилюється роль теоретичних відомостей при розгляді рівнянь, вивчаються лінійні рівняння. Вивчаються такі теми: «Лінійне рівняння з однією змінною», «Лінійне рівняння з двома змінними та його графік». [34]

Під час вивчення теми «Перетворення цілих виразів», зокрема, формул скороченого множення, як серед ілюстративних прикладів, так і вправ, розглядаються рівняння, що містять в записі x^2: $(x-17)(x+17)=x^2+6x-49$,

$(2x-7)^2-81=0$. При цьому такі рівняння або зводяться до лінійних, або їх ліва частина розкладається на лінійні множники, а права є нулем. Після розгляду лінійного рівняння з двома невідомими і його графіка в 7 класі учнів підводять до поняття системи лінійних рівнянь з двома невідомими. [3]

Означення 1.3. [27] *Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax+by=c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.*

З'ясуємо, яка фігура є графіком лінійного рівняння. Для цього розглянемо три випадки.

Випадок 1. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, у якому $b\neq 0$. Це рівняння можна перетворити так:

$$by=-ax+c.$$

Оскільки $b\neq 0$, то, поділивши обидві частини останнього рівняння на b, отримаємо:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}.$$

Введемо позначення: $-\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{b}=p$. Тепер можна записати:

$$y=kx+p.$$

Ми отримали формулу, яка задає лінійну функцію. Графіком лінійної функції є невертикальна пряма. Отже, графіком рівняння $ax+by=c$, де $b\neq 0$, є невертикальна пряма.

Випадок 2. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, де $a\neq 0$, $b=0$. Отримуємо $ax+0y=c$. Графіком даного рівняння є вертикальна пряма.

Випадок 3. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, де $a=b=0$. Маємо $0x+0y=c$.

Якщо $c\neq 0$, то це рівняння не має розв'язків, а отже, на координатній площині не існує точок, які могли б слугувати графіком рівняння.

Якщо $c=0$, то рівняння набуває вигляду $ax+0y=0$.

Будь-яка пара чисел є його розв'язком. Отже, у цьому випадку графіком рівняння є вся координатна площина. [27]

Ознайомлення учнів з поняттям системи лінійних рівнянь з двома невідомими відбувається на прикладі задачі практичного змісту, що зводиться до розв’язування системи двох рівнянь з двома невідомими. Розглянемо приклади задач представлених в різних підручниках з алгебри для 7 класу:

1) Г.П. Бевз, В.Г. Бевз Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2015 рік. [3]

Задача 1.1. 4 кг моркви і 3 кг буряків коштують 26 грн, а 6 кг моркви і 2 кг буряків – 34 грн. Скільки коштує 1 кг моркви і 1 кг буряків.

Задача зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 6x + 2y = 34. \end{cases}$$

2) А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2020 рік. [27]

Задача 1.2. Знайти сторони прямокутника, площа якого дорівнює 12 см^2, а периметр – 14 см.

Задача зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14. \end{cases}$$

В даному випадку учні також пригадують формули для обчислення площі та периметра прямокутника.

3) Н. А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2015 рік. [46]

Задача 1.3. Сума двох чисел дорівнює 3, а різниця подвоєного першого числа і потроєного другого числа дорівнює 11. Знайдіть ці числа.

Задача зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - 3y = 11. \end{cases}$$

Потім вводиться форма запису системи (фігурні дужки) і формулюється означення розв'язання системи двох рівнянь з двома невідомими.

Порівняємо означення, що подані в підручниках:

1) Г.П. Бевз, В.Г. Бевз Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2015рік. [3]

*«**Розв'язком системи рівнянь** називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.*

***Розв'язати систему рівнянь** – означає знайти множину всіх її розв'язків».*

2) А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2020 рік. [27]

*«**Розв'язком системи рівнянь із двома змінними** називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння в правильну рівність.*

***Розв'язати систему рівнянь** – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає».*

3) Н. А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2015 рік. [46]

*«**Розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними** називають таку пару чисел (х;у), яка одночасно є розв'язком кожного рівняння системи.*

***Розв'язати систему рівнянь** – означає знайти всі її розв'язки, або встановити, що розв'язків немає».*

Далі, насамперед, уводиться графічний спосіб розв'язування системи, як геометричне тлумачення розв'язків кожного з рівнянь і системи рівнянь як координат точки перетину обох графіків, з'ясовується можлива кількість розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими залежно від розташування графіків.

Приклад 1.1. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$$

Розв'язання . Перетворимо дану систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 2 - \frac{2}{3}x, \\ y = 3x - 9. \end{cases} \quad (1.1)$$

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

Графіком цього рівняння є пряма, щоб побудувати її потрібно дві точки

x	0	3
y	2	0

$$y = 3x - 9$$

Графіком цього рівняння є пряма, щоб побудувати її потрібно дві точки

x	1	3
y	-6	0

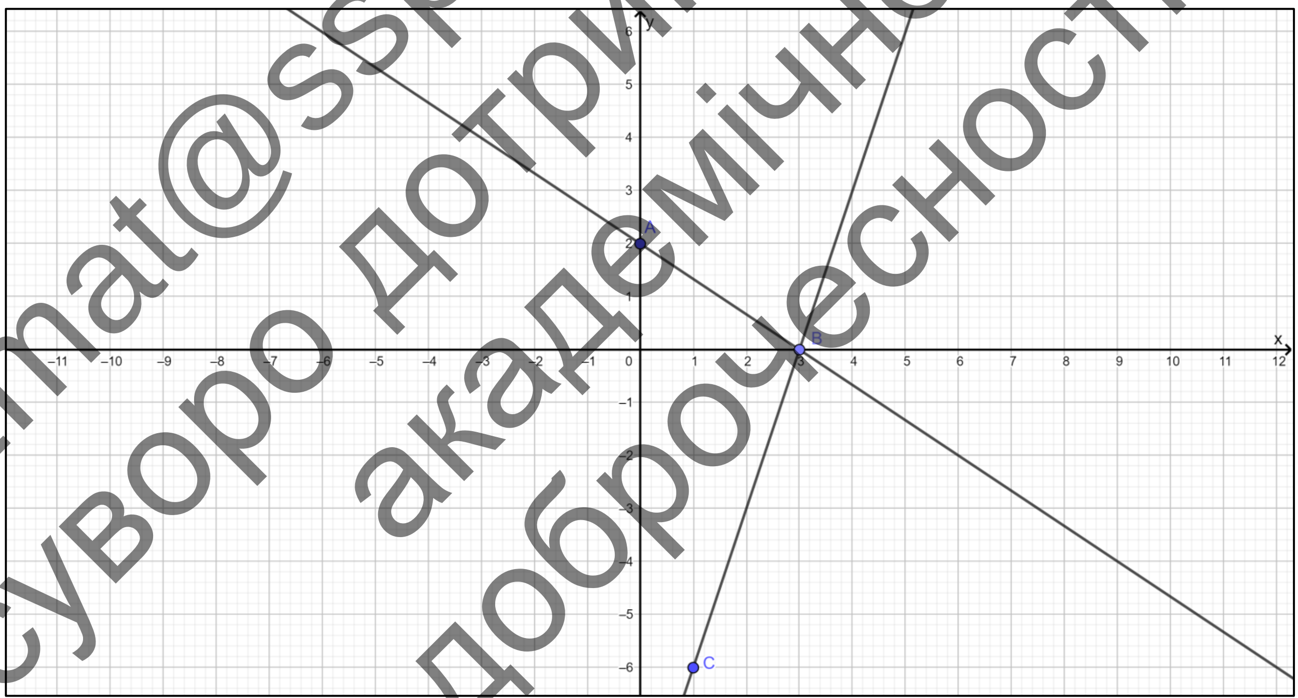


Рис.1.1. Графічний метод розв’язання системи рівнянь (1.1)

Графіки рівнянь системи перетинаються в точці $B(0;3)$. Отже розв’язком системи рівнянь є пара чисел $(0;3)$.

Відповідь: $(0;3)$.

Надалі в 7 класі розглядають два алгебраїчні способи розв’язування таких систем: спосіб підстановки і спосіб додавання.

Приклад 1.2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему методом підстановки: виразимо з першого рівняння y:

$$y = 2x - 8.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість y цей вираз. Отримаємо систему

$$\begin{cases} y = 2x - 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ця система та вихідна мають одні й ті самі розв'язки, тобто вони є рівносильними. Друге рівняння останньої системи є рівнянням з однією змінною. Розв'яжемо його:

$$3x + 2(2x - 8) = 5$$

$$3x + 4x - 16 = 5;$$

$$7x = 21;$$

$$x = 3.$$

Підставимо знайдене значення x у рівняння $y = 2x - 8$. Отримаємо: $y = -2$.

Пара чисел $(3;-2)$ — шуканий розв'язок.

Відповідь: $(3;-2)$.

Приклад 1.3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки в поданій системі коефіцієнти при змінній у є протилежними числами, то додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи, отримаємо рівняння з однією змінною (метод алгебраїчного додавання). Маємо:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$

$$6x = 12;$$

$$x = 2.$$

Підставити знайдене значення змінної x можна в будь-яке з рівнянь системи. Підставимо, наприклад, у перше. Отримаємо:

$$-5y = 3;$$

$$y = -\frac{3}{5} = -0{,}6.$$

Отже, пара чисел $(2;-0{,}6)$ є розв'язком системи.

Відповідь: $(2;-0{,}6)$.

В курсі алгебри 8 класу вивчаються квадратні рівняння дається визначення квадратного рівняння і неповного квадратного рівняння та способи розв'язання кожного виду квадратних рівнянь.

Означення 1.4 [30] К*вадратним рівнянням називають рівняння виду* $ax^2 + bx + c = 0$*, де* x *— змінна,* a*,* b *і* c *— деякі числа, причому* $a \neq 0$.

Числа a*,* b *і* c *називають коефіцієнтами квадратного рівняння. Число* a *називають першим або старшим коефіцієнтом, число* b *— другим коефіцієнтом, число* c *— вільним членом.*

Означення 1.5 [30] *Якщо у квадратному рівнянні* $ax^2 + bx + c = 0$ *хоча б один із коефіцієнтів* b *або* c *дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.*

Також учні знайомляться з методом заміни змінної, що є важливим для подальшого вивчення систем рівнянь. Оскільки даний метод може звести розв'язування заданого рівняння до розв'язування більш простого рівняння.[30]

Приклад 1.4. Розв'яжіть рівняння**:**

$$(3x-1)^4 - 20(3x-1)^2 + 64 = 0.$$

Розв'язання. Зробивши заміну

$$(3x-1)^2 = t.$$

розв'язування даного рівняння зводиться до розв'язування квадратного рівняння

$$t^2 - 20t + 64 = 0.$$

Звідси $t_1 = 4,\ t_2 = 16.$

Маємо два квадратних рівняння: $(3x-1)^2 = 4;\ (3x-1)^2 = 16.$

1) $(3x-1)^2=4;$

$3x-1=2;$ $\quad$ $3x-1=-2;$

$3x=3;$ $\quad$ $3x=-1;$

$x=1.$ $\quad$ $x=-\frac{1}{3}.$

2) $(3x-1)^2=16;$

$3x-1=4;$ $\quad$ $3x-1=-4;$

$3x=5;$ $\quad$ $3x=-3;$

$x=\frac{5}{3}.$ $\quad$ $x=-1.$

Відповідь: $-1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{5}{3};\ 1.$

У 9 класі учні повертаються до вивчення систем рівнянь. На цьому етапі розглядаються системи, в яких одне або обидва рівняння є рівнянням другого степеня або дробово-раціональним. Спочатку такі системи починають розв'язувати графічним способом, а потім розглядають способи підстановки та заміни змінної. [31]

Приклад 1.5. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Розв'язання. Запишемо дану систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2^2, \\ y=2-x. \end{cases}$$

$x^2+y^2=2^2$ - коло з центром в точці $(0;0)$ і радіусом $R=2.$

$y=2-x$ - пряма.

x	0	2
y	2	0

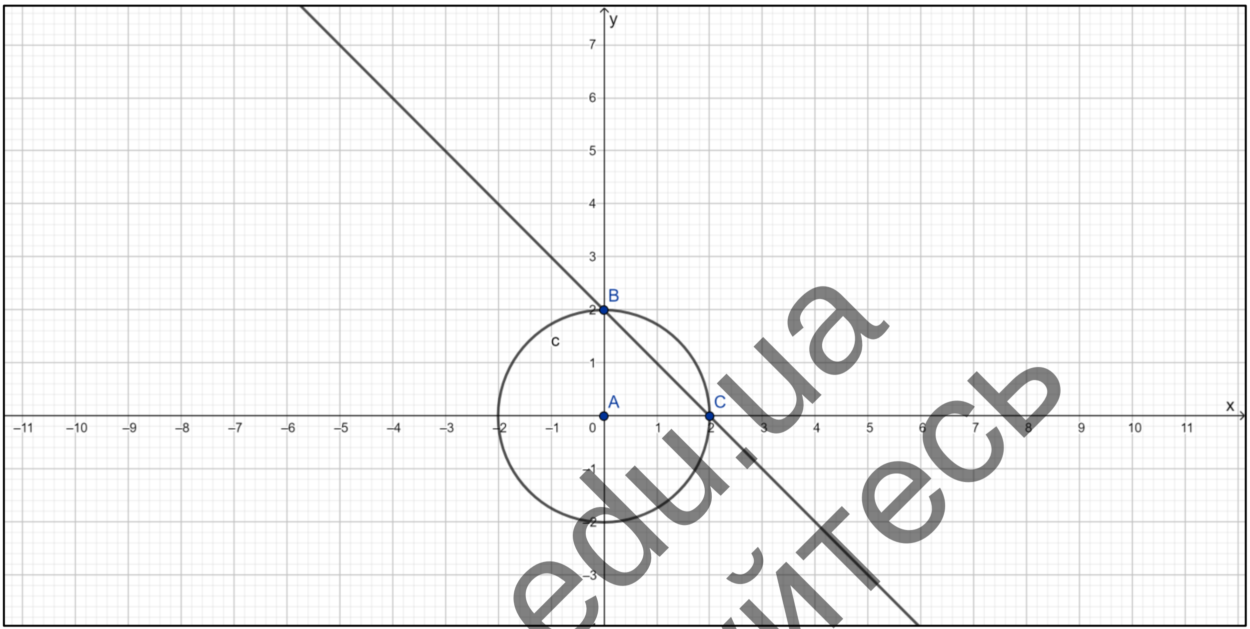


Рис. 1.2 Графічний метод розв’язання системи рівнянь (1.2)

Відповідь: $(0;2)$, $(2;0)$.

Приклад 1. 6. Розв’яжіть методом підстановки систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Розв’язання. Виразимо з другого рівняння x і підставимо в перше

$$\begin{cases} x = 6 - y, \\ (y-6)^2 - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y, \\ y^2 - 12y + 36 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y, \\ -y^2 - 12y + 28 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y, \\ y^2 + 12y - 28 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння за теоремою Вієта маємо: $y_1 = -14$, $y_2 = 2$. Тоді $x_1 = 20$, $x_2 = 4$.

Відповідь: $(20;-14)$, $(4;2)$.

1.2. Способи розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, що розглядаються на поглибленому рівні навчання

У курсі алгебри на поглибленому рівні крім оглянутих раніше також розглядається метод заміни змінної, зокрема застосування основних симетричних многочленів, зведення системи до однорідного рівняння. [32]

1. *Метод заміни змінної*

Приклад 1.7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{16y^2}{x^2}+4\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}\right)+8=0, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=t$. Тоді $\frac{x^2}{y^2}+\frac{16y^2}{x^2}=t^2-8$. Отримуємо:

$$t^2-8+4t+8=0;$$

$$t^2+4t=0;$$

$$t=-4;\ \text{або}\ t=0.$$

Маємо: $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=-4$ або $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=0$.

Тоді задана система рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}-4=0, \\ x^2-y^2=3. \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}=0, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}-4=0, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

Нехай $\frac{x}{y}=u$. Тоді $u+\frac{4}{u}=-4$.

Звідси $u^2+4u+4=0$; $u=-2$.

Отримуємо $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-2, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

Ця система має два розв'язки: $(2;-1)$, $(-2;1)$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 0, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Розв'язавши систему аналогічним чином, отримаємо, що вона не має розв'язків.

Відповідь: $(2;-1)$, $(-2;1)$.

2. *Застосування основних симетричних многочленів, як один з варіантів методу заміни змінної (підстановки)*

Означення 1.6. [32] *Якщо рівність* $F(x;y) = F(y;x)$ *є тотожністю, то многочлен* $F(x;y)$ *називають* ***симетричним***.

Означення 1.7. [32] *Многочлени* $u = x + y$, $v = xy$ *називають елементарними симетричними многочленами від x і y.*

Для даних многочленів є справедливою наступна теорема.

Теорема 1.1. [32] *Будь-який симетричний многочлен від змінних* x *і* y *можна подати у вигляді многочлена від* u *і* v, *де* u *і* v *— елементарні симетричні многочлени від* x *і* y. (Без доведення).

Нехай маємо систему виду $\begin{cases} F(x;y) = a, \\ G(x;y) = b, \end{cases}$ де $F(x;y)$ і $G(x;y)$ — симетричні многочлени. Уводячи заміну $u = x + y$, $v = xy$, отримуємо систему виду

$$\begin{cases} F_1(u;v) = a, \\ G_1(u;v) = b. \end{cases}$$

Така заміна є ефективною під час розв'язування багатьох систем рівнянь. [32]

Приклад 1.8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є симетричною, оскільки при виконанні перестановки невідомих рівняння не змінюються при тому доцільно зробити наступну заміну: $x + y = u;\ xy = v.$ Маємо:

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ vu = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ v(1+v) - 20 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ v^2 + v - 20 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння за теоремою Вієта маємо: $v_1 = -5, v_2 = 4.$ Тоді $u_1 = -4,$ $u_2 = 5.$

1) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ y = -5. \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -5, \\ y = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь: $(1;-5), (-5;1), (1;4), (4;1).$

Приклад 1.9. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 72, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки ліві частини рівнянь є симетричними многочленами, то можна скористатись заміною $x + y = u$, $xy = v$. Проте більш ефективним буде перетворити систему до вигляду

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^2 + y^2 - 2x^2y^2\right) = 72, \\ \left(x^2 + y^2\right) + xy = 13, \end{cases}$$

та зробити таку заміну $x^2 + y^2 = u$, $xy = v$. Маємо:

$$\begin{cases} u^2 - u - 2v^2 = 72, \\ u + v = 13. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримуємо:

$$\begin{cases} u = 10, \\ v = 3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} u = 41, \\ v = -28. \end{cases}$$

Далі розв'язуємо системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = -28. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases}$

Зведемо перше рівняння системи до повного квадрату. Маємо:

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy=10,\\ xy=3\end{cases}$$

Зробимо заміну: $x+y=u$, $xy=v$. Отримуємо:

$$\begin{cases}u^2-2v=10,\\ v=3\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримуємо:

$$\begin{cases}u=4,\\ v=3\end{cases} \text{або} \begin{cases}u=-4,\\ v=3.\end{cases}$$

Далі переходимо до розв'язування наступних систем:

$$\begin{cases}x+y=4,\\ xy=3\end{cases} \text{ і } \begin{cases}x+y=-4,\\ xy=3.\end{cases}$$

Розв'язавши ці системи отримуємо $(3;1)$, $(1;3)$, $(-3;-1)$, $(-1;-3)$.

2) $\begin{cases}x^2+y^2=41,\\ xy=-28.\end{cases}$

Розв'язавши дану систему аналогічним чином отримуємо, що вона не має розв'язків.

Відповідь: $(3;1)$, $(1;3)$, $(-3;-1)$, $(-1;-3)$.

3. Зведення системи рівнянь до однорідного рівняння та застосування заміни змінної.

Означення 1.8. [32] *Многочлен, усі члени якого мають один і той самий степінь, називають однорідним многочленом.*

Наприклад, $x-2y$ — однорідний многочлен першого степеня,

$x^2+4xy-y^2$ — однорідний многочлен другого степеня,

$3x^3-5x^2y+2xy^2-y^3$ — однорідний многочлен третього степеня.

Для розв'язування систем виду $\begin{cases}F(x;y)=a,\\ G(x;y)=b,\end{cases}$ де $F(x;y)$ і $G(x;y)$ — однорідні многочлени, ефективною є заміна $\frac{x}{y}=t.$ [32]

Приклад 1.10. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Не складно переконатись, що пара чисел виду $(x_0;0)$ не є розв’язком даної системи. Тому поділивши обидві частини першого рівняння на y^2, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{5x}{y} + 6 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Нехай $\dfrac{x}{y} = t$. Тоді з першого рівняння отримуємо, що $t^2 - 5t + 6 = 0$. Звідси за теоремою Вієта $t = 2$ або $t = 3$.

Початкова система рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Перетворимо перше рівняння системи. Маємо:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Розв’язавши дану систему методом підстановки, отримуємо: $(2;1)$, $(-2;-1)$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Розв’язавши дану систему аналогічним чином, отримуємо: $\left(3\sqrt{\dfrac{7}{17}}; \sqrt{\dfrac{7}{17}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\dfrac{7}{17}}; -\sqrt{\dfrac{7}{17}}\right)$.

Відповідь: $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(3\sqrt{\frac{7}{17}};\sqrt{\frac{7}{17}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\frac{7}{17}};-\sqrt{\frac{7}{17}}\right)$.

Приклад 1.11. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+4xy-3y^2=2, \\ x^2-xy+5y^2=5. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо систему до однорідного рівняння. Помножимо перше рівняння системи на -5, друге на 2 і додамо їх. Отримаємо однорідне рівняння: $-3x^2-22xy+25y^2=0$. Розв'яжемо його відносно x:

$$-3x^2-22xy+25y^2=0$$

$$D=(-22y)^2-4(-3)25y^2=784y^2$$

$$x_1=\frac{22y-28y}{-3*2}=y;\ x_2=\frac{22y+28y}{-3*2}=-\frac{25}{3}y.$$

Підставимо отримані значення в перше або друге рівняння вихідної системи:

а) $x=y$;

$$y^2+4y^2-3y^2=2;$$

$$2y^2=2;$$

$$y=\pm1;$$

$$x=\pm1.$$

б) $x=-\frac{25}{3}y$;

$$\frac{625}{9}y^2+\frac{25}{3}y^2+5y^2=5;$$

$$625y^2+75y^2+45y^2=45;$$

$$745y^2=45;$$

$$149y^2=9;$$

$$y=\pm\frac{3}{\sqrt{149}};$$

$$x=\pm\frac{25}{\sqrt{149}}.$$

Відповідь: $(1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(-\frac{25}{\sqrt{149}};\frac{3}{\sqrt{149}}\right)$, $\left(\frac{25}{\sqrt{149}};-\frac{3}{\sqrt{149}}\right)$.

Окремо на поглибленому рівні навчання математики розглядаються методи розв'язування циклічних систем.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0, \\ F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n-3}, x_{n-2}) = 0, \\ F(x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \end{cases} \qquad (1.3)$$

в якій вираз F залежить від n змінних $x_1, \ x_2, \ldots, x_n \in X \subset R$. Важливою особливістю даної системи є те, що після циклічної заміни змінних

$$x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to x_1$$

отримуємо систему

$$\begin{cases} F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = 0, \\ F(x_3, x_4, \ldots, x_1, x_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \\ F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0, \end{cases} \qquad (1.4)$$

яка відрізняється від неї лише порядком розміщення рівнянь, тобто збігається із системою (1.3). Системи рівнянь вигляду (1.3) називають ***циклічними***.

Розв'язати систему циклічних рівнянь можна такими методом як методом підстановки чи алгебраїчного додавання, але це вдається далеко не завжди. Тому існує ще один метод, який допомагає звести розв'язування системи до розв'язування одного рівняння. [9]

Метод зведення до виродженого рівняння .

Циклічність системи дозволяє порівняно легко знайти її окремі розв'язки. Перш за все це стосується розв'язків $(x_1, x_2, .., x_n)$ з однаковими компонентами $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$. Якщо $(a, a, .., a)$ є розв'язком системи (1.3), то $x = a$ є розв'язком рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = F(x, x, \ldots, x)$. Тому розв'язування системи (2.1) з однаковими компонентами зводиться до розв'язування рівняння

$$F(x, x, \ldots, x) = 0 \quad (1.5)$$

з однією змінною. Рівняння (1.5) називають ***виродженим рівнянням*** циклічної системи (1.3).

По-друге, знаючи розв'язок $(x_1, x_2, .., x_n)$, в якому не всі компоненти однакові, легко одержати ще $n-1$ розв'язок цієї системи, а саме:

$$(x_2, x_3, .., x_n, x_1), (x_3, \ldots, x_n, x_1, x_2), \ldots, (x_n, x_1, .., x_{n-2}, x_{n-1}). \ [9]$$

Приклад 1.12. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 3, \\ 2y^2 - x = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Квадратне рівняння $2t^2 - t = 3$ є виродженим рівнянням системи. Воно має два корені: $t_1 = -1$ і $t_2 = 1{,}5$. Тому $(-1;-1)$ і $(1{,}5;1{,}5)$ — розв'язки даної системи. Для відшукання інших розв'язків скористаємось рівносильною системою

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3, \\ 8x^4 - 24x^2 - x + 15 = 0. \end{cases}$$

Оскільки числа -1 і 1,5 є коренями многочлена

$$P(x) = 8x^4 - 24x^2 - x + 15,$$

то поділивши друге рівняння останньої системи на $2(x + 1)(x - 1{,}5) = 2x^2 + x - 3$, отримаємо такий розклад:

$$(8x^2 + 4x - 10)(x + 1)(x - 1{,}5) = 0.$$

$$2(x + 1)(x - 1{,}5)(4x^2 + 2x - 5) = 0.$$

Це дає можливість знайти два інших корені $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}$ многочлена $P(x)$, а разом з тим і два інші розв'язки $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}; \frac{-1 \mp \sqrt{21}}{4}\right)$ системи.

Відповідь: $(-1;-1)$, $(1{,}5;1{,}5)$, $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}; \frac{-1 \mp \sqrt{21}}{4}\right)$.

1.3. Задачі, що зводяться до розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Розв'язування задач на складання рівнянь чи систем рівнянь, відбувається в три етапи:

1) вибір невідомого (x), або декількох невідомих $(x.y.z,...)$ та складання рівняння чи системи рівнянь;
2) розв'язування отриманого рівняння чи системи рівнянь;
3) відбір розв'язків за змістом задачі. [24]

1. Задачі на числові залежності.

При розв'язуванні задач на числові залежності мають місце наступні відомості:

1) Якщо натуральне число A має n знаків, то $A = a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$, де a_0, a_1, a_2,…, a_{n-1} відповідна кількість одиниць, десятків, сотень, … в числі A.

2) Якщо при діленні натурального числа A на натуральне число B отримуємо частку q та остачу $r(r < B)$, то $A = Bq + r$. [24]

Приклад 1.13. Знайдіть два двохзначних числа, про які відомо наступне: якщо до першого числа приписати справа друге число, а потім ще цифру 0, то отримаємо п'ятизначне число, яке при діленні на квадрат другого числа дає частку 39, а в остачі 575; якщо ж до першого числа приписати справа друге і потім від складеного таким чином числа відняти друге число, отримане приписуванням справа першого число до другого, то різниця буде дорівнювати 1287.

Розв'язання. Нехай x — перше число, а y — друге. Приписавши y справа до числа x отримаємо чотиризначне число $100x + y$, а приписавши до цього числа справа 0 отримаємо $10(100x + y)$. Оскільки при діленні цього числа на y^2 отримаємо частку 39 і остачу 575, то маємо:

$$10(100x + y) = 39y^2 + 575.$$

Це — перше рівняння системи рівнянь.

Приписавши справа до числа y число x отримаємо чотиризначне число $100y + x$. Тоді друге рівняння системи буде мати вигляд:

$$(100x + y) - (100y + x) = 1287.$$

Отже, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1000x + 10y = 39y^2 + 575, \\ 99x - 99y = 1287. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння системи на 99. Отримаємо:

$$\begin{cases} 1000x + 10y = 39y^2 + 575, \\ x - y = 13. \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему методом підстановки, маємо: $(48;35)$, $\left(\frac{152}{39};-\frac{355}{39}\right)$.

За умовою задачі x і y — натуральні числа, причому $10 \le x \le 99$ і $10 \le y \le 99$. Даним умовам задовольняє перший розв'язок.

Відповідь: 48 – перше число, 35 – друге число.

2. Задачі на прогресії

Означення 1.9. [10] *Числова послідовність (a_n) називається арифметичною прогресією, якщо існує число d, таке, що для будь-якого $n \in N$ виконується рівність $a_{n+1} = a_n + d$; число d називають різницею прогресії.*

Означення 1.10. [10] *Послідовність (b_n), де $b_1 \neq 1$, називають геометричною прогресією, якщо існує число $q \neq 0$, таке, що для будь-якого $n \in N$ виконується рівність $b_{n+1} = b_n * q$; число q називають знаменником прогресії.*

Основні властивості арифметичної прогресії:

1) n - тий член арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

2) сума перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

3) Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Основні властивості геометричної прогресії:

1) n - тий член геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

2) сума перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

3) Будь-який член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}} \Rightarrow b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

4) Сума нескінченної геометричної прогресії:

$$|q| < 1,\ S_n = \frac{b_1}{1-q}.\ [10]$$

Приклад 1.14. Знайдіть п'ятий член нескінченно спадної геометричної прогресії , якщо відомо, що її сума дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5.

Розв'язання. Нехай послідовність $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_n, \ldots$ — нескінченно спадна геометрична прогресія. Тоді

$$\frac{b_1}{1-q} = 9.$$

Розглянемо послідовність $b_1^2,\ b_2^2,\ b_3^2, \ldots,\ b_n^2, \ldots$. Члени цієї послідовності також утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію. Перший член цієї прогресії b_1^2, а її знаменник q^2. Тоді

$$\frac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5.$$

Таким чином отримуємо наступну систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$

Перетворимо дану систему. Маємо: $\begin{cases} b_1 = 9(1-q), \\ b_1^2 = 40{,}5(1-q^2). \end{cases}$

Розв'язавши отриману систему методом підстановки, маємо: $q_1 = \frac{1}{3}$, $q_2 = 1$.

$|q| < 1$, тоді $q_2 = 1$ не задовольняє.

Отже, $q = \frac{1}{3}$, $b_1 = 6$. Тоді $b_5 = b_1 q^4 = \frac{2}{27}$.

Відповідь: $b_5 = \frac{2}{27}$.

3. *Задачі на спільну роботу*

Зміст задач такого типу полягає в наступному. Деяку роботу, об'єм якої не вказується і не є шуканим, виконують декілька людей чи механізмів, які працюють рівномірно. В таких задачах об'єм всієї робота, яка має бути виконана, приймається за одиницю. Час t, який вимагається на виконання всієї роботи, та V — продуктивність роботи, тобто величина роботи, виконана за одиницю часу, пов'язані відношенням:

$$V = \frac{1}{t}. \text{ [17]}$$

Приклад 1.15. Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи одного з них перевели на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через два дні самостійної роботи з'ясувалось, що зроблено $\frac{2}{3}$ всієї роботи. За скільки днів кожен робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання. Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{y}$ частину роботи.

Оскільки за 10 днів спільної праці вони виконують усю роботу, то $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1$.

Таблиця 1.1. Умова задачі 1.15

	Продуктивність	Час, днів	Обсяг роботи
Перший робітник	$\frac{1}{x}$	x	1
Другий робітник	$\frac{1}{y}$	y	1
Разом	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	10	1

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1,\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Перетворимо дану систему рівнянь. Маємо:

$$\begin{cases}10y+10x=xy,\\ 9y+12x=xy.\end{cases}$$

Оскільки, праві частини рівнянь рівні, то можемо прирівняти ліві частини:

$$10y-10x=9y-12x$$

$$y=2x$$

Підставивши замість y вираз $2x$ в будь-яке з рівнянь системи, отримаємо рівняння з однією змінною. Розв'язавши його маємо: $x=15$, $y=30$.

Відповідь: перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий — за 30 днів.

4. Задачі на сплави і суміші

Розв'язування таких задач пов'язано з поняттями «концентрація», «відсоткове відношення», «проба», «вологість» і так далі і засновано на наступних припущеннях:

1) всі суміші, які розглядаються (сплави, розчини) однорідні.

2) не робляться відмінності між літром як одиницею ємності і літром як одиниці маси.

Якщо суміш (сплав, розчин) масою m складається з речовин A, B, C, які мають маси відповідно m_1, m_2, m_3, то величини $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$, $\frac{m_3}{m}$ називаються концентрацією речовин A, B, C в суміші відповідно. Величини $\frac{m_1}{m}*100\%$, $\frac{m_2}{m}*100\%$, $\frac{m_3}{m}*100\%$ називаються відсотковим вмістом речовин A, B, C в суміші відповідно. Очевидно, що $\frac{m_1}{m}+\frac{m_2}{m}+\frac{m_3}{m}=1$, тобто від концентрації двох речовин залежить концентрація третьої.

При складанні рівняння зазвичай простежується вміст якої-небудь одної речовини з тих, що сплавляються чи змішуються. [24]

Приклад 1.16. Є сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% та 40%. Скільки сталі одного та другого сорту треба взяти, щоб після переплаву отримати 140 т. сталі з вмістом нікелю 30%?

Розв'язання. Прослідкуємо за вмістом нікелю в сплавах. Взявши для переплаву x т сталі, яка містить 5% нікелю, при цьому нікелю взяли $\frac{5}{100}x$ т, а взявши для переплаву y т сталі, яка містить 40% нікелю, при цьому нікелю взяли $\frac{40}{100}y$ т.

Таблиця 1.2. Умова задачі 1.16.

	Сплав 1	Сплав 2	Сплав 3
Маса, т	x	y	140
Вміст нікелю, %	5%	40%	30%
Вміст нікелю, т	$\frac{5}{100}x$	$\frac{40}{100}y$	$140\frac{30}{100}$

Так як в отриманих 140 т нового сплаву, міститься 30% нікелю, тобто $140\frac{30}{100}$ т, то отримуємо наступне рівняння:

$$\frac{5}{100}x+\frac{40}{100}y=\frac{30\cdot 140}{100}.$$

Крім того,

$$x+y=140.$$

Таким чином, приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases}5x+40y=4200,\\ x+y=140.\end{cases}$$

Поділимо перше рівняння на 5:

$$\begin{cases}x+8y=840,\\ x+y=140.\end{cases}$$

З цієї системи знаходимо $x=40$, $y=100$. За умовою задачі $0<x<140$, $0<y<140$. Знайдені значення задовольняють цим умовам.

Відповідь: сталі з 5%-вим вмістом нікелю треба взяти 40 т, а сталі з 40%-вим вмістом нікелю – 100т.

Зауваження. Розв'язуючи задачі на сплави чи спільну роботу, умову задачі доцільніше записувати за допомогою таблиці.

5. *Задачі на рух*

При розв'язуванні таких задач приймають наступні припущення:

1) Якщо немає спеціальних застережень, то рух вважають рівномірним.

2) Швидкість вважають додатною величиною.

3) Всякі переходи на нові режими руху, на нові напрямки руху вважають такими, що відбуваються миттєво.

4) Якщо тіло із власною швидкість x рухається по річці, швидкість течії якої дорівнює y, то швидкість руху тіла за течією вважається рівною $x+y$, а проти течії – рівною $x-y$. [24]

Приклад 1.17. По колу, довжиною 100 м, рухаються рівномірно дві точки. Вони зустрічаються через кожні 4 с, рухаючись в протилежних напрямках, і через кожні 20 с, рухаючись в одному напрямку. Знайдіть швидкості цих точок.

Розв'язання. Нехай швидкість першої точки $x\,\frac{м}{с}$, а другої $y\,\frac{м}{с}$, причому нехай $x>y$. За 4 с перша точка проходить шлях $4x$ м, а друга – $4y$ м. Оскільки під час руху в протилежних напрямках кожні 4 с відбувається зустріч цих точок, тобто сумарно вони проходять 100 м, то перше рівняння буде таким: $4x+4y=100$. Під час руху в одному напрямку перша точка наздоганяє другу кожні 20 с. Це означає, що за 20 с перша точка проходить шлях на один оберт більше другої. Таким чином отримуємо друге рівняння: $20x-20y=100$. Отже отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x+4y=100, \\ 20x-20y=100. \end{cases}$$

Розв'язавши систему знаходимо $x=15$, $y=10$.

За умовою задачі $x>y>0$. Також очевидно, що $4x<100$, $4y<100$ і $20x>100$. Таким чином $5<x<25$, $0<y<25$. Знайдені значення відповідають цим умовам.

Відповідь: швидкість першої точки $15\,\frac{м}{с}$, а другої – $10\,\frac{м}{с}$.

РОЗДІЛ 2. Практичні аспекти навчання учнів основної школі темі «Рівняння з двома змінними та їх системи» (поглиблений рівень)

2.1. Аналіз сертифікаційних робіт ЗНО з математики за останні 5 років в контексті дослідження

Матеріал, відведений в курсі математики на вивчення теми «Рівняння з двома змінними та їх системи», досить об'ємний і в обов'язковому порядку входить у програму Зовнішнього незалежного оцінювання в 11 класі.

Зокрема у ЗНО з математики в період з 2018 - 2021 роки були запропоновані наступні завдання щодо систем рівнянь з двома невідомими.

Сертифікаційна робота 2018 року містила два завдання щодо систем рівнянь: одне з вибором однієї правильної відповіді та одне відкритої форми з короткою відповіддю.

Приклад 2.1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy = -12, \\ x(2y-1) = -18, \end{cases}$. Якщо $(x_0; y_0)$– розв'язок системи, то $x_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-6	-16	-9	2	6

Відповідь: А.

За результатами оцінювання відповідей учасників ЗНО дане завдання є легким за складністю. Його правильно виконали 62,2 %.

Приклад 2.2. У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів, причому щодня планували виробляти однакову кількість стільців. Однак, на прохання замовника, завдання виконали на 2 дні раніше запланованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на 4 стільці. Визначте n.

Відповідь:12.

Це завдання має практичний зміст, і його можна звести до розв'язування системи двох рівнянь з двома невідомими.

Завдання відноситься до складних. Лише 23,8% учасників тестування правильно розв'язали це завдання, 76, 2% - не справились з ним. [41]

В ЗНО 2019 року було представлено два завдання щодо систем рівнянь, а саме одне з вибором однієї правильної відповіді та одне відкритої форми з короткою відповіддю.

Приклад 2.3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2y = 5x, \\ x + y = 14. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ укажіть добуток $x_0 y_0$.

А	Б	В	Г	Д
5	10	20	40	48

Відповідь: Г.

Це завдання правильно виконали 57,6 %. Воно має оптимальну складність.

Приклад 2.4. За якого від'ємного значення x значення виразів $x^2 - 4$, $3 - 5x$, та $2 - 3x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?

Відповідь: -8.

В цьому завдані представлена задача практичного змісту, яку можна звести до розв'язування системи двох рівнянь з двома невідомими.

Завдання має підвищений рівень складності. Лише 16,4% учасників тестування правильно розв'язали це завдання, 83, 6% - не справились з ним. [40]

В ЗНО 2020 року було представлено одне завдання щодо систем рівнянь, а саме відкритої форми з короткою відповіддю.

Приклад 2.5. Човен проплив 18 км проти течії річки, витративши вдвічі менше часу, ніж на подолання 48 км за течією. Власна швидкість човна є сталою. Визначте власну швидкість човна (у $\frac{км}{год}$), якщо швидкість течії дорівнює 2,5 $\frac{км}{год}$.

Відповідь: 17,5

Завдання має підвищений рівень складності. Лише 11,1% учасників тестування правильно розв'язали це завдання, 88, 9% - не справились з ним. [39]

У ЗНО 2021 року було представлено одне завдання щодо систем рівнянь, а саме відкритої форми з відкритою відповіддю.

Приклад 2.6. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2+3ax+4^{1+\sqrt{y}}=8, \\ x+2\cdot 4^{\sqrt{y}}=1, \end{cases}$, де x, y – змінні, a – довільна стала.

1. Розв'яжіть систему, якщо $a=0$.

2. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a.

Це завдання належить до завдань найвищого когнітивного рівня. Його розв'язання потребує не лише знаходження множини розв'язків системи рівнянь залежно від значень сталої а, а й ґрунтовного аналізу та на його основ синтезу результатів. Про це свідчить той факт, що повністю розв'язати завдання змогли лише 0,2 % учасників тестування. [38]

Серед завдань НМТ 2022 року, оприлюднених на сайті УЦОЯО, було представлено одне завдання щодо систем рівнянь, а саме з вибором однієї правильної відповіді.

Приклад 2.7. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3\sqrt{x}=12, \\ x-2y=26, \end{cases}$. Якщо $(x_0;y_0)$ – розв'язок системи, то $x_0+y_0=$

А	Б	В	Г	Д
11	21	-7	-10	-14

Відповідь: А.

За результатами оцінювання відповідей учасників НМТ дане завдання виявилось складним. Його правильно виконали лише 38,6 %. [37].

Отже, вміння розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь, оперування отриманими розв'язками, є важливими для успішного складання ЗНО з математики.

2.2. Аналіз програми з алгебри (поглибленого рівня навчання та рівня стандарт) основної школи з теми «Рівняння з двома змінними та їх системи»

Поглиблене вивчення математики в 8 – 9 класах передбачає розширення і поглиблення змісту відповідного курсу математики загальноосвітньої школи, посилення його прикладної спрямованості, формування в учнів стійкого інтересу до предмета, виявлення і розвиток математичних здібностей, підготовку до поглибленого навчання математики в старшій школі.

В основу побудови змісту й організації поглибленого навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії. Поглиблене навчання математики в основній школі передбачає передусім формування предметної математичної компетентності.

Вимоги до результатів поглибленого вивчення математики не мають бути надмірними. Завищені вимоги породжують перевантаження і, як наслідок, призводять до втрати інтересу до предмета. Тому вимоги цієї програми лише незначною мірою перевищують вимоги загальноосвітньої програми. Поглиблене вивчення математики у 8 – 9 класах має відбуватися не стільки за рахунок розширення теоретичного матеріалу, а насамперед шляхом наповнення курсу різноманітними цікавими і змістовними складнішими задачами з достатнім евристичним навантаженням. [34]

Складові частини змісту поглибленого курсу математики включають відповідні частини загальноосвітнього курсу. Цей курс передбачає поглиблення і розширення знань, що набуваються в загальноосвітньому курсі, та їх застосування до розв’язування більш складних, змістовних задач, а також з метою ґрунтовнішого вивчення властивостей математичних об’єктів загальноосвітнього курсу. Утім, до поглибленого курсу включено кілька тем, які в загальноосвітньому курсі вивчаються лише на найпростішому, оглядовому рівні і містять мінімум означень і основних фактів. [43]

У ряді тем програми передбачено обґрунтування тих відомостей, які в загальноосвітньому курсі математики подаються як готові факти.

Програмою передбачена можливість різного рівня поглибленого навчання. У ній виокремлено три рівні складності навчального матеріалу: такий, що вивчається в рамках загальноосвітнього курсу; матеріал для поглибленого вивчення; додаткові питання і теми. Це дозволяє вчителеві гнучко враховувати навчальні можливості учнів та наявність часу для вивчення окремих тем у поточний момент. На початку кожного навчального року перша тема курсів алгебри і геометрії присвячена повторенню і систематизації опорних знань і вмінь учнів за минулий рік.

Тема «Системи рівнянь і нерівностей» традиційно спрямована на нарощування арсеналу прийомів, які використовуються учнями для розв’язування задач. Природно, що в класах з поглибленим вивченням математики зростає як кількість методів і прийомів, так і їх складність. Проте важливо не тільки сформувати конкретні навички розв’язування, але й продовжити формування математичної культури учнів щодо таких понять, як рівносильність систем рівнянь і нерівностей, система, що є наслідком даної. Невід’ємною частиною засвоєного учнями математичного апарату має стати обґрунтування правомірності перетворень під час розв’язування систем, відстеження рівносильності або навпаки, звуження чи розширення множини розв’язків. [36]

Розглянемо детальніше зміст теми «Рівняння з двома змінними та їх системи» у програмі для поглибленого рівня та порівняємо із рівнем стандарту.

Слід зазначити, розв'язування систем на рівні стандарт, розглядається в темі «Квадратична функція».

Таблиця. 2.2.1 Порівняння фрагментів програми з алгебри в 9 класах для поглибленого рівня та рівня стандарту

Поглиблений рівень	Рівень стандарту
Тема 3. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇХ СИСТЕМИ *(25 год)* Рівняння з двома змінними. Графік рівняння з двома змінними. Графічні методи розв'язування систем рівнянь з двома змінними. Розв'язання систем рівнянь з двома змінними методом підстановки та методами додавання і множення. Метод заміни змінної	**Тема 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ** *(20 год)* Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції. Перетворення графіків функцій. Квадратична функція, її графік і властивості. Квадратна нерівність. <u>Система двох рівнянь з двома змінними.</u> <u>Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі</u>

У програмі для поглибленого рівня зазначені конкретні методи розв'язування систем рівнянь, що розглядаються в темі, але, на відміну від рівня стандарту, відсутні задачі практичного змісту, що зводяться до розв'язування систем рівнянь.

2.3. Аналіз підручників поглибленого рівня

Проаналізуємо підручник з алгебри для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням 2021 року авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір [30] та підручник з алгебри для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням 2017 року авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір [32], які рекомендовано Міністерством освіти і науки України.

Підручники поділено на сім параграфів, кожен з яких складається з пунктів. У пунктах викладено великий і різноманітний дидактичний матеріал, відповідно до програми. Означення, правила та найважливіші математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

Після прикладів містяться ключові запитання до теоретичного матеріалу.

До кожного пункту підібрана велика кількість задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи так і складні задачі. Зеленим кольором позначені номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором – номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

В підручниках також наявні рубрики «Вправи для повторення», «Коли зроблено уроки».

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять. В даній рубриці викладений історичний матеріал з конкретних тем, відомості про видатних математиків та їх досягнення тощо. Це дає змогу розширити знання учнів та підвищити їх інтерес до вивчення математики.

В кінці кожного параграфа наявна рубрика «Головне в параграфі…».

В кінці підручника є розділ «Дружимо з комп'ютером», в якому наведено завдання, які можна виконати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем.

Розглянемо подання теми «Квадратні рівняння» в підручнику для 8 класу. Ця тема подана в наступній послідовності: «Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь», «Формула коренів квадратного рівняння», «Теорема Вієта», «Квадратний тричлен», «Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь», «Розв'язування рівнянь методом заміни змінної». Зміст теми в підручнику повністю відповідає навчальній програмі. До кожного параграфа наведена достатня кількість завдань різних типів, які розташовані від більш легких до більш складних.

Розглянемо подання теми «Рівняння з двома змінними та їхні системи» в підручнику для 9 класу. Вона подана в наступній послідовності: «Рівняння з двома змінними та його графік», «Графічний метод розв'язування систем рівнянь із двома змінними», «Розв'язування систем рівнянь із двома змінними методом підстановки та методом додавання та множення», «Метод заміни змінних та інші способи розв'язання систем рівнянь з двома змінними». Зміст теми в підручнику повністю відповідає навчальній програмі. До кожного параграфа наведена достатня кількість завдань різних типів, які розташовані від більш легких до більш складних.

2.4. Розробка уроків та факультативів в контексті дослідження

2.4.1. Розробка уроку вивчення нового матеріалу з теми «Розв'язування систем рівнянь із двома змінними різними методами» для 9 класу

Мета: *освітня:* сформувати вміння розв'язувати системи рівнянь з двома змінними методами підстановки, додавання та множення;

розвивальна: розвивати в учнів уміння аналізувати, узагальнювати й робити висновки;

виховна: виховувати культуру математичного мовлення, математичних записів.

Тип уроку: вивчення нового матеріалу.

Обладнання: підручник Мерзляк А. Г. алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики 9 клас [31].

Хід уроку

І. Організаційний момент.

Перевірити наявність учнів та готовність учнів до уроку. Налаштувати їх на роботу.

ІІ. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити наявність завдання в зошитах. Відповісти на питання, які виникли під час виконання завдань.

III. Актуалізація опорних знань і вмінь учнів.

1. Фронтальне опитування

1) У чому полягає графічний метод розв’язування систем рівнянь?

2) Скільки розв’язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?

2. Усні вправи

1) Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4 \end{cases}$ пара чисел:

1) $x = -1$, $y = 4$; *(Ні)* 2) (1; 4) *(Так)*

2) Яку з наведених систем рівнянь можна розв'язувати за допомогою даного рисунка? Скільки розв'язків має ця система?

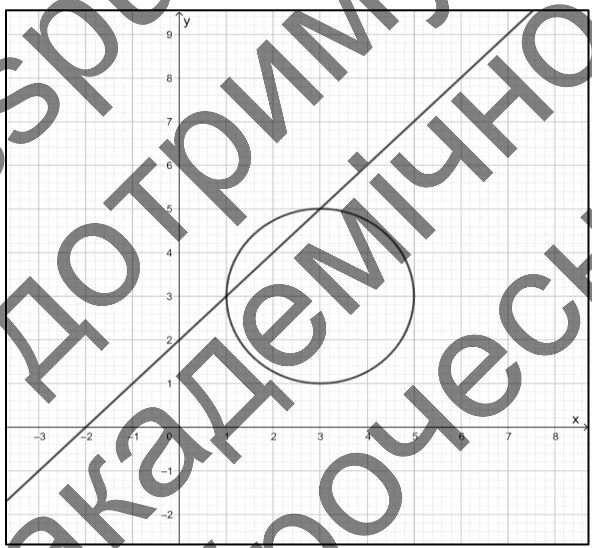


Рис. 2.1

1) $\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = x + 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+3)^2 = 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x = 2, \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4. \end{cases}$

Відповідь: 2(2 розв’язки), 4(2 розв’язки).

IV. Оголошення теми і мети уроку.

У 7 класі ви навчилися розв’язувати системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. При цьому ви застосовували метод підстановки або метод почленного додавання лівих і правих частин рівнянь системи. У ряді випадків ці прийоми є також ефективними для розв'язування нелінійних систем рівнянь. І на сьогоднішньому уроці ми в цьому переконаємося. Оголошується тема уроку «Розв'язування систем рівнянь із двома змінними методом підстановки і методами додавання та множення».

IV. Вивчення нового матеріалу

Перш ніж перейти до теми уроку розглянемо наступні поняття.

Означення. Дві системи рівнянь із двома змінними називають рівносильними, якщо множини їхніх розв'язків рівні.

Наприклад, системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{1-y} = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} |x| + |y| = 0, \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = 2 \end{cases}$

є рівносильними, оскільки множина розв'язків кожної з них складається з одного елемента — пари (0; 0)

Означення. Якщо множина розв'язків першої системи рівнянь є підмножиною множини розв'язків другої системи рівнянь, то другу систему рівнянь називають наслідком першої системи рівнянь.

Наприклад, система $\begin{cases} x = y, \\ (x+y-2)(x+y-4) = 0 \end{cases}$ є наслідком $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 2 \end{cases}$ системи рівнянь.

Розглянемо теорему, яка дає змогу розв'язувати системи рівнянь із двома змінними методом підстановки.

Теорема 1. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; y) = 0 \end{cases}$

замінити в другому рівнянні змінну *y* виразом $f(x)$, то отримаємо систему

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; f(x)) = 0 \end{cases}$$

яка рівносильна даній.

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x+5. \end{cases}$$

Підставивши в перше рівняння замість y^2 двочлен $x+5$, отримаємо систему рівносильну даній:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x+5. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 2x = x+4, \\ y^2 = x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 9; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$

Відповідь: $(4;3)$, $(4;-3)$.

Наступна теорема дає змогу розв'язувати системи рівнянь із двома змінними методом почленного додавання лівих і правих частин рівнянь системи.

Теорема 2. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x;y) = 0, \\ G(x;y) = 0 \end{cases}$

замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x;y)+G(x;y)=0$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2-2x = 0, \\ x^2-2xy+1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Отримаємо:

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1 = 0,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2 = 0.$$

Початкова система рівносильна такій:

$$\begin{cases} (x-y)^2+(x-1)^2 = 0, \\ x^2+y^2-2x = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Перше рівняння системи, у свою чергу, рівносильне системі $\begin{cases} x = 1, \\ y = x. \end{cases}$,

розв'язок якої — пара (1; 1). За допомогою перевірки переконуємося, що пара (1; 1) є розв'язком другого рівняння системи (*).

Відповідь: $(1;1)$.

У ряді випадків для розв'язування систем нелінійних рівнянь ефективними є методи почленного множення і ділення лівих і правих частин рівнянь системи.

Теорема 3. Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x;y) = c_1, \\ G(x;y) = c_2, \end{cases}$ де $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$, замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x;y)G(x;y) = c_1 c_2$ або рівнянням $\dfrac{F(x;y)}{G(x;y)} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 y^3 = 81, \\ x^3 y^2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Перемноживши відповідні частини рівнянь, отримаємо систему рівносильну вихідній: $\begin{cases} x^5 y^5 = 243, \\ x^3 y^2 = 3. \end{cases}$.

Звідси $\begin{cases} xy = 3, \\ x(xy)^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3, \\ x = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = 9. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{3};9\right)$.

V. Закріплення вивченого матеріалу

Розв'язування завдань з підручника біля дошки

№14.1 Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$

Відповідь: (-1;1), (-3;-1).

4) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

Відповідь: (2;-2).

№14.11 Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4; \end{cases}$ (метод почленного додавання)

Відповідь: (1;0), (1;-1).

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$ (метод почленного ділення)

Відповідь: (3;2), (-3;-2).

VI. Підведення підсумків

Учні аналізують свою роботу на уроці, задають запитання.

VII. Оголошення домашнього завдання

1) Опрацювати в підручнику пункт 14;
2) Виконати №14.2 (1, 4), №14.12 (1, 2).

2.4.2. Розробка уроку формування вмінь та навичок з теми «Розв'язування систем рівнянь із двома змінними різними способами» для 9 класу

Мета: *освітня:* формувати вміння і навички розв'язувати системи рівнянь з двома змінними методом заміни змінних та іншими способами;

розвивальна: розвивати увагу, логічне мислення, пам'ять;

виховна: виховувати інтерес до предмету.

Тип уроку: формування вмінь та навичок.

Обладнання: роздатковий матеріал, картки, підручник Мерзляк А. Г. алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики 9 клас [31].

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Перевірити наявність учнів та готовність учнів до уроку. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити наявність завдання в зошитах. Відповісти на питання, які виникли під час виконання завдань.

III. Актуалізація опорних знань і вмінь учнів.

Фронтальне опитування

1. Який многочлен називають однорідним?

Многочлен, усі члени якого мають один і той самий степінь, називають однорідним многочленом.

2. Який многочлен називають симетричним?

Якщо рівність $F(x;y)=F(y;x)$ *є тотожністю, то многочлен* $F(x;y)$

3. Які многочлени називають елементарними симетричними многочленами від x і y?

Многочлени $u=x+y$, $v=xy$ *називають елементарними симетричними многочленами від x і y.*

4. Як можна подати будь-який симетричний многочлен від змінних x і y

Будь-який симетричний многочлен від змінних x *і* y *можна подати у вигляді многочлена від* u *і* v, *де* u *і* v *— елементарні симетричні многочлени від* x *і* y.

IV. Розв'язування вправ

Робота з картками біля дошки

4 учні виходять до дошки і розв'язують завдання з індивідуальних карток, а інші учні розв'язують ці ж завдання самостійно в зошитах.

Картка 1. Розв'яжіть систему рівнянь застосовуючи метод заміни змінних.

$$\begin{cases}(x+y)^4+4(x+y)^2=117,\\ x-y=25.\end{cases} \quad \text{(підстановка } t=(x+y)^2\text{)}$$

Відповідь: (14;-11); (11;-14).

Картка 2. Розв'яжіть систему рівнянь застосовуючи властивості однорідних многочленів.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6},\\ x^2-y^2=5.\end{cases} \quad \text{(зробити заміну } t=\dfrac{x}{y} \text{ в першому рівнянні)}$$

Відповідь: (3;2), (-3;-2).

Картка 3. Розв'яжіть систему рівнянь звівши її до розв'язування однорідного рівняння.

$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1. \end{cases}$ (додати рівняння системи та розв'язати отримане однорідне рівняння відносно *x*)

Відповідь: $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), (-2;1), (2;-1).$

Картка 4. Розв'яжіть систему рівнянь застосовуючи властивості симетричних многочленів.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$ (виділити в першому рівнянні повний квадрат і зробити заміну $u = x + y$, $v = xy$.

Відповідь: (4;1), (1;4).

Після того як учні розв'язали завдання, відбувається колективне обговорення розв'язків кожного з завдань на картках.

Робота з підручником

№15.3 Розв'яжіть систему рівнянь

1) $\begin{cases} 2xy - \frac{3x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15; \end{cases}$ (помножити друге рівняння на 3 і додати до першого)

Відповідь: (6;2), (-6;-2).

2) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{36}, \\ xy^2 - x^2y = 324. \end{cases}$ (зробити заміну $u = x^2 + y^2 - 1$, $v = \frac{y}{x}$)

Відповідь: (3;1), (-3;-1).

№15.7 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{x}{y}(x^2-2y^2)=4,\\ \frac{y}{x}\left(x^2+2y^2\right)=3.\end{cases}$$ (перетворити систему до вигляду $$\begin{cases}xy(\frac{x^2}{y^2}-2)=4,\\ \frac{y^3}{x}\left(\frac{x^2}{y^2}+2\right)=3.\end{cases}$$,

виконати почленне ділення та виконати заміну $\frac{x^2}{y^2}=t$)

Відповідь: (2;1), (-2;-1).

V. Підведення підсумків.

Учні аналізують свою роботу на уроці, задають запитання.

VI. Оголошення домашнього завдання.

1) Опрацювати пункт 15

2) Виконати вправи: №15.2(1,3), №15.12(1), №15.16(1).

2.4.3. Розробка уроку контролю та оцінювання знань, вмінь та навичок учнів з теми «Рівняння з двома змінними та їх системи» для 9 класу

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння базових знань та вмінь, вироблених у ході вивчення теми, передбачених вимогами програми з математики.

Тип уроку: контроль та оцінювання знань, навичок та вмінь учнів.

Обладнання: картки з завданнями контрольної роботи.

Хід уроку

I. Організаційний момент

Перевірити наявність учнів та готовність учнів до уроку. Налаштувати їх на роботу.

II. Умова тематичної контрольної роботи

Варіант 1

Початковий рівень

Завдання 1-4 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки одна відповідь правильна. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь. (За кожну правильну відповідь 0,5 бала)

1. Укажіть пару чисел, яка є розв’язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

А) (-3;4) ***Б) (3;4)*** В) (-3;-4) Г) (3;-4).

2. Укажіть систему рівнянь, яку задовольняє пара чисел (-1; 2).

А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ -x + y = 1. \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$ ***В)*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 6x + 2y = -2. \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

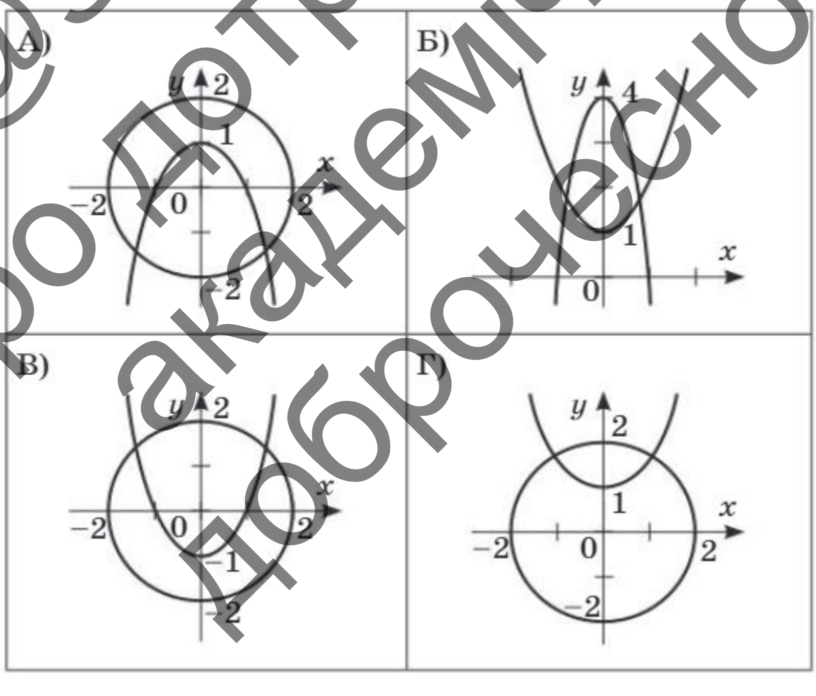
3. Укажіть кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = -1. \end{cases}$$

А) 1 Б) 2 В) 4 ***Г) немає розв'язків***

4. Укажіть на якому рисунку зображено розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = -x^2 + 1. \end{cases}$$



<u>Середній рівень</u>

5. Установити відповідність між системами рівнянь (1-4) і методами їх розв'язку (А-Д). (За кожну відповідність 0,5 бала)

1) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = -7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 y^3 = 81, \\ x^3 y^2 = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = -7, \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases}$

А) Метод почленного ділення рівнянь системи

Б) Метод додавання

В) Метод підстановки

Г) Заміна: $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$

Д) Система містить однорідне рівняння тому: 1)переконаємось що пара $(x_0;0)$ не є розв'язком системи; 2) поділимо обидві частини першого рівняння на y^2 і виконаємо заміну $t = \frac{x}{y}$

Відповідь: 1-Г, 2-Д, 3-А, 4-Б.

<u>Достатній рівень</u>

6. (2 бали) Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$$

Відповідь:

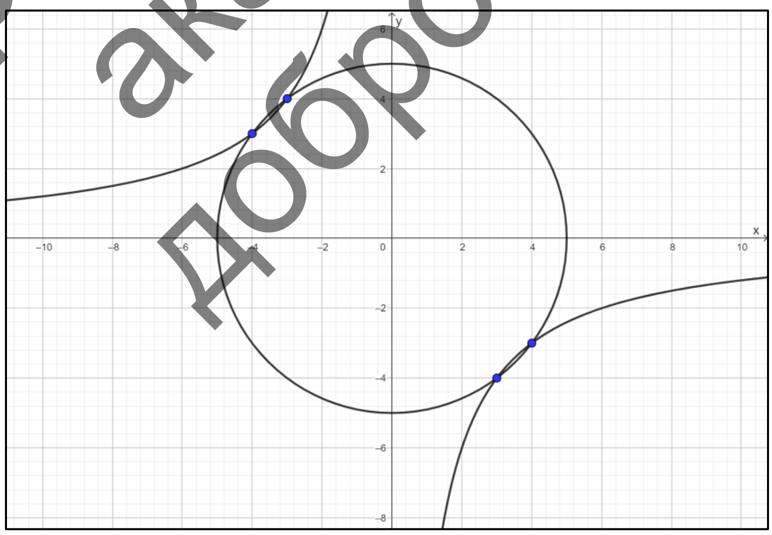


Рис. 2.2.

7. (2 бали) Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

Відповідь: (1;2), (2;1).

Високий рівень

8. (3 бали) Задача. Два мотоциклісти виїхали одночасно з міст А і В назустріч один одному. Через годину вони зустрілися та, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один із них прибув у місто А на 35 хв раніше, ніж другий — у місто В. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста, якщо відстань між містами становить 140 км.

Система: $\begin{cases} x + y = 140, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

Відповідь: швидкість мотоциклістів 80км/год і 60 км/год.

Варіант 2

Початковий рівень

Завдання 1-4 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки одна відповідь правильна. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь. (За кожну правильну відповідь 0,5 бала)

1. Укажіть пару чисел, яка є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = -7. \end{cases}$$

А) (4; -3) Б) (-4; 3) ***В) (-4; -3)*** Г) (4; 3)

2. Укажіть систему рівнянь, яку задовольняє пара чисел (2; -1).

А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ -x + y = 1. \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$ В) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 6x + 2y = -2. \end{cases}$ ***Г)*** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

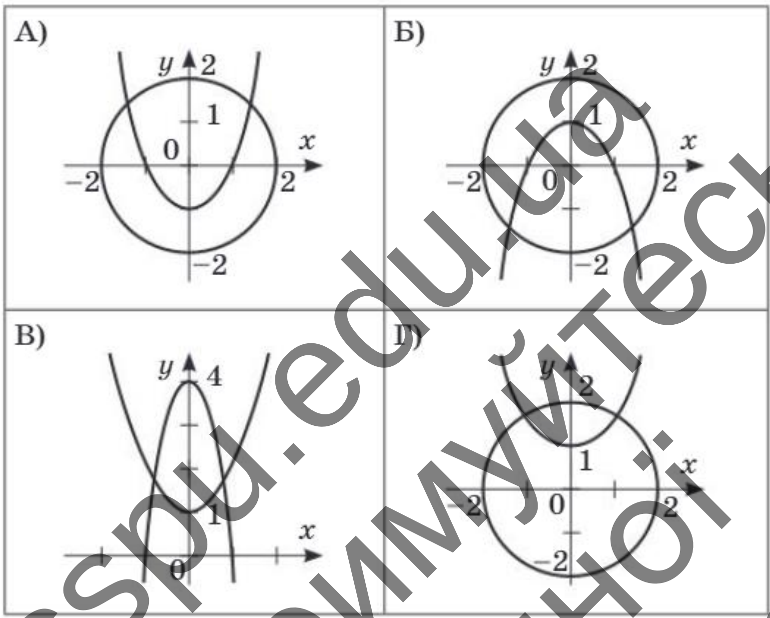
3. Укажіть кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$$

А) 1 Б) 2 В) 4 ***Г) немає розв'язків***

4. Укажіть на якому рисунку зображено розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$$



<u>Середній рівень</u>

5. Установити відповідність між системами рівнянь (1-4) і методами їх розв'язку (А-Д). (За кожну відповідність 0,5 бала)

1) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2xy = 3, \\ y - x = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + xy = 9, \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 y^5 = 1, \\ x^5 y^2 = -1 \end{cases}$

А) Метод почленного ділення рівнянь системи

В) Метод підстановки

Б) Метод додавання

Г) Заміна: $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$

Д) Система містить однорідне рівняння тому: 1) переконаємось що пара $(x_0;0)$ не є розв'язком системи; 2) поділимо обидві частини першого рівняння на y^2 і виконаємо заміну $t = \dfrac{x}{y}$

Відповідь: 1-Д, 2-В, 3-Г, 4-А.

Достатній рівень

6. (2 бали) Розв’яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Відповідь:

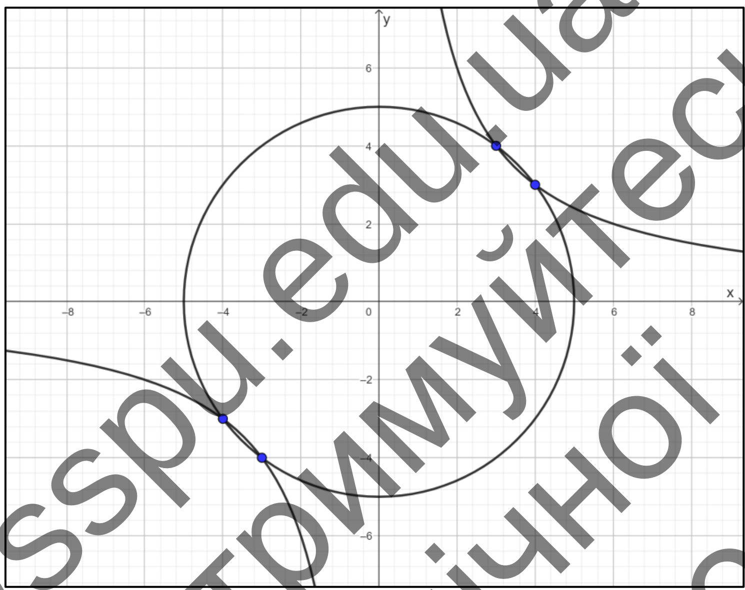


Рис. 2.3.

7. (2 бали) Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + xy + y = 9, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

Відповідь: (4;1), (1;4).

Високий рівень

8. (3 бали) Задача. Два мотоциклісти виїхали одночасно з міст А і В назустріч один одному. Через годину вони зустрілися та, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один із них прибув у місто А на 35 хв раніше, ніж другий — у місто В. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста, якщо відстань між містами становить 140 км.

Система: $\begin{cases} x + y = 140, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

Відповідь: швидкість мотоциклістів 80км/год і 60 км/год.

ІІІ. Підсумок уроку

2.4.4. Розробка факультативу з теми «Циклічні системи» для 9 класу

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0, \\ F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n-3}, x_{n-2}) = 0, \\ F(x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

в якій вираз F залежить від n змінних x_1, $x_2, \ldots, x_n \in X \subset R$. Важливою особливістю даної системи є те, що після циклічної заміни змінних

$$x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to x_1$$

отримуємо систему

$$\begin{cases} F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = 0, \\ F(x_3, x_4, \ldots, x_1, x_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \\ F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

яка відрізняється від неї лише порядком розміщення рівнянь, тобто збігається із системою (1.3). Системи рівнянь вигляду (1.3) називають ***циклічними***. [9]

Завдання 2.1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0, \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Одним з етапів розв'язування циклічних систем є розв'язування виродженого рівняння (випадок, коли $x = y = z$). Отже, виродженим рівнянням цієї системи є кубічне рівняння

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0,$$

яке має єдиний корінь $t = 3$. Тому $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$. – розв'язок даної системи. Доведемо, що він єдиний методом від супротивного.

Нехай (a,b,c) - деякий інший розв'язок. Додаючи ліві і праві частини рівностей, в які перетворяться рівняння системи при $x = a$, $y = b$, $z = c$, дістанемо, що

$$(a-3)+^3(b-3)^3+(c-3)^3=0,$$

при цьому самі рівності запишемо так:

$$a=\sqrt[3]{9b^2-27b+27}\,,\ b=\sqrt[3]{9c^2-27c+27}\,,\ c=\sqrt[3]{a^2-27a+27}\,.$$

Зазначимо, що

$$g(t)=9t^2-27t+27\geq\frac{27}{4}=g\left(\frac{3}{2}\right),$$

а тому

$$a=\sqrt[3]{g(b)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\,,\ b=\sqrt[3]{g(c)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}},\ c=\sqrt[3]{g(a)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\,.$$

За припущенням розв'язок (a,b,c) відмінний від розв'язку $(3,3,3)$, а тому хоч одне з чисел a, b, c не дорівнює 3. Нехай $a<3$. Тоді, якщо $a\in\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}};3\right)$, то, враховуючи монотонність функції $g(t)$ на цьому проміжку, дістаємо, що

$$c=\sqrt[3]{g(a)}<\sqrt[3]{g(3)}=3,\ b=\sqrt[3]{g(c)}<\sqrt[3]{g(3)}=3.$$

Але при таких значеннях a, b, c рівність (2.1) виконуватися не може. Тому a не може бути менше від 3. Якщо ж $a>3$, то

$$c=\sqrt[3]{g(a)}>\sqrt[3]{g(3)}=3,\ b=\sqrt[3]{g(c)}>\sqrt[3]{g(3)}=3.$$

І знову рівність (2.1) виконуватися не може. Отже, $(3,3,3)$ — єдиний розв'язок системи.

Відповідь: $(3,3,3)$.

Завдання 2.2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3,\\ x_2x_3x_4=x_2+x_3+x_4,\\ x_3x_4x_1=x_3+x_4+x_1,\\ x_4x_1x_2=x_4+x_1+x_2.\end{cases}$$

Розв'язання. Виродженим рівнянням цієї системи є рівняння $t^3=3t$, яке має корені 0 і $\pm\sqrt[3]{3}$. За якими будуємо відповідні розв'язки $(0,0,0,0)$, $\left(\pm\sqrt[3]{3},\pm\sqrt[3]{3},\pm\sqrt[3]{3},\pm\sqrt[3]{3}\right)$ заданої системи. Дослідимо існування розв'язків системи, в яких не всі компоненти однакові. Нехай (x_1,x_2,x_3,x_4) — розв'язок системи і, наприклад, $x_1 \neq x_4$. Віднімемо від обох частин першого рівняння системи відповідні частини другого рівняння

$$x_2x_3(x_1 - x_4) = x_1 - x_4 \Leftrightarrow x_2x_3 = 1.$$

Тепер з першого рівняння системи маємо: $x_2 + x_3 = 0$, а тому $x_2{}^2 = -1$. Суперечність, яку дістали, свідчить про те, що система не має розв'язків, відмінних від здобутих.

Відповідь: $(0,0,0,0)$, $(\pm\sqrt[3]{3}, \pm\sqrt[3]{3}, \pm\sqrt[3]{3}, \pm\sqrt[3]{3})$.

Завдання 2.3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5, \\ (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Виродженим рівнянням цієї системи є рівняння $(3t)^5 = 3t$, яке має корені 0 і $\pm\frac{1}{3}$. За ними будуємо відповідні розв'язки $(0,0,0,0,0)$, $\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$ заданої системи.

Доведемо, що інших розв'язків система не має. Припустимо супротивне: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — розв'язок системи, де всі компоненти різні: $x_n \neq x_k$, для всіх $n \neq k$, де $k, n = 1,2,3,4,5$. (Легко довести, що з рівності двох компонент розв'язку випливає рівність усіх його компонент. Якщо наприклад, $x_1 = x_2$, то з третього і четвертого рівнянь системи маємо рівність $x_1 = x_3$ і т. д.). Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $x_2 < x_1$. Тоді з третього і четвертого рівнянь маємо: $x_3 > x_1$, з четвертого і п'ятого - $x_2 > x_4$, з п'ятого і першого $x_5 > x_3$, з першого і другого рівнянь маємо нерівність $x_4 > x_1$. Отже, приходимо до суперечності $x_1 > x_2 > x_4 > x_1$.

Отже, наша система рівнянь не має розв'язків з різними компонентами.

Відповідь: $(0,0,0,0,0)$, $\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі розглянуто окремі питання навчання однієї з ключових змістових ліній шкільного курсу математики «Рівняння та системи рівнянь», вивчення якої передбачено навчальними програмами основної школи.

У роботі продемонстровано як принцип неперервності навчання реалізується при вивченні систем алгебраїчних рівнянь в шкільному курсі математики, розглянуті способи розв’язання систем алгебраїчних рівнянь, що вивчаються на поглибленому рівні навчання та задачі, що зводяться до розв’язування систем алгебраїчних рівнянь. Проведено аналіз сертифікаційних робіт ЗНО з математики за останні 5 років, порівняльний аналіз із рівнем стандарту навчальної програми та підручників з алгебри поглибленого рівня навчання в контексті дослідження. Також розроблені конспекти уроків різних типів для 9 класу та заняття факультативу з теми «Рівняння з двома змінними та їх системи».

Робота може бути використана вчителями загальноосвітніх шкіл як допоміжний матеріал при плануванні та вивченні даної теми на поглибленому рівні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Математика. 5 клас / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.

2. Бевз Г.П. Математика. 6 клас / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.

3. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2007. – 224 с.

4. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. – 254 с.

5. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2009. – 288 с.

6. Бевз Г.П. Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів. / Г.П. Бевз. — К.: Вища школа, 1989. - 367 с.

7. Бевз Г. П. Методика викладання математики: посібник / Г. П. Бевз. – К. : Вища шк., 1977. – 376 с.

8. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики, 9 клас / М. І. Бурда, О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко. – Х. : Гімназія, 2010. – 256 с.

9. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. Книга 2. – Х., 2008. – 141 с.

10. Глущенко Л. Розв′язування текстових задач / Любов Глущенко // Математика. – К. : Пед. преса, 2008, №31-32 (475- 476).

11. Гоменюк Г.В. Методичні засади реалізації компетентністного підходу в навчанні алгебри учнів основної школи : дис. канд. пед. наук : 13.00.02. / Національний пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. Київ, 2016. 277 с.

12. Заїка А. Математика : підруч. для 3-го класу закл. загал. серед. освіти. У 2 ч. Ч. 1 / А. Заїка, С. Тарнавська. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2020. — 144 с.

13. Іванюк Т. Г. Методичні аспекти викладання алгебри та геометрії на початковому етапі у контексті вимог Нової української школи— Тернопіль, 2018. — 47 с.

14. Конфорович А.Г. Математика служить людині / Конфорович А.Г. — К.: Рад. Шк., 1984. – 192 с.

15. Концепція розвитку загальної середньої освіти / Освіта України. — 2000. — № 3.

16. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О.І.Глобін, М.І. Бурда, Д.В. Васильєва, В.В. Волошена, О.П. Вашуленко, Н.Д. Мацько, Т.М. Хмара. — К.: Педагогічна думка, 2015. – 245с.

17. Костевська Л. Задачі на спільну роботу. Алгебра, 8 клас / Л. Костевська // Математика. – К. : Пед. преса, 2005, №10 (310).

18. Кравчук В. Математика. 5 клас / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 264 с.

19. Кравчук В. Математика. 6 клас / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 272 с.

20. Кравчук В. Алгебра. 7 клас / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 224 с.

21. Кравчук В. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. – 256 с.

22. Кравчук В. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.

23. Лодатко Є. О. Математична культура як феномен сучасного інформаційного суспільства / Є.О.Лодатко // Рідна школа. – 2004. – №9.

24. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов.- 3-е изд. перераб. и доп. – М.: «ABF», 1995 – 352 с.

25. Мерзляк А.Г. Математика. 5 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2008. – 288 с.

26. Мерзляк А.Г. Математика. 6 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2006. – 304 с.

27. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2020. — 288 с.

28. Мерзляк А. Г. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2015. — 240 с.

29. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти/ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — 2-ге видання, перероб. — Х. : Гімназія, 2021. — 240 с.

30. Мерзляк А.Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — 2-ге видання, перероб. — Х. : Гімназія, 2021. — 383 с.

31. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 272 с.

32. Мерзляк А.Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с.

33. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., М.С. Якир Алгебраический тренажор: Пособие для школьников и абитуриентов / Под. ред. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. – М.: Илекса, 2007, – 320 с.

34. Навчальна програма з математики для 5-9-х класів для загальноосвітніх навчальних закладів затверджена наказом МОН від 07.06.2017 № 804.

35. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804.

36. Нова українська школа: порадник для вчителя / за заг. ред. Н. М. Бібік. Київ : Літера ЛТД, 2018. 160 с.

37. Офіційний звіт про результати національного мультипредметного тесту у 2022 році. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2022/10/Zvit_NMT_2022.pdf

38. Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf

39. Офіційний звіт про проведення в 2020 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2020/09/ZVIT-ZNO_2020-Tom_2.pdf

40. Офіційний звіт про проведення в 2019 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/08/ZVIT-ZNO_2019-Tom_2.pdf

41. Офіційний звіт про проведення в 2018 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2018/08/ZVIT-ZNO_2018-Tom_2.pdf

42. Родигіна І.В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання / Родигіна І.В. – Х.: Вид. група «Основа», 2005. – 114 с.

43. Слепкань З.І. Методика навчання математики. Підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів. / З.І. Слепкань. — К.: Зодіак — ЕКО, 2000. — 512 с.

44. Слєпкань З.І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи / З.І. Слєпкань // Математика в школі. – №9. – 2003.

45. Тарасенкова Н.А. «Математика. На допомогу вчителю»/ Н. Тарасенкова, І. Богатирьова, О. Коломієць, З. Сердюк - Київ. Видавничий дім «Освіта». 2013. — 56 с.

46. Тарасенкова Н.А. Математика.: підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. зак. / Н. Тарасенкова, І. Богатирьова, О. Коломієць, З. Сердюк - К.: Видавничий дім «Освіта». 2015. — 288 с.

47. Тарасенкова Н.А. Математика.: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. зак. / Н. Тарасенкова, І. Богатирьова, О. Коломієць, З. Сердюк - К.: УОВЦ «Оріон». 2016. — 336 с.

48. Тихомиров В. Математична освіта (мета, концепції, структура, перспективи) / Тихомиров В. // Математика в школі. – 2003. – № 7.

49. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 272 с.