Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Рева Тетяна Миколаївна

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ STEM-НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У СТАРШІЙ ШКОЛІ (НА ПРИКЛАДІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»)

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник
________________О.В. Мартиненко,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики та методик їх навчання
«____» __________________ 20__ року
Виконавець:
_______________ Т.М. Рева
«____» __________________ 20__ року

Суми 2022

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

ЗМІСТ

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

ВСТУП

Актуальність теми. Нині у закладах загальної середньої освіти під час здійснення освітнього процесу реалізується предметно-центричний підхід. Сутність його полягає у тому, що навчальні предмети викладаються до певної міри в «ізоляції». Однак такий підхід не повною мірою відповідає вимогам сучасної освіти. Найчастіше знання учнів відірвані від реального життя, немає єдності у формуванні та розвитку знань та умінь, способах діяльності, тобто компетенцій, необхідних для життя в умовах, які динамічно змінюються.

Педагоги всього світу шукають нові ефективні методи та технології для формування компетенцій, необхідних сучасному поколінню молоді – компетенцій XXI ст. Однією з таких технологій наприкінці XX ст. виступила STEM-освіта. Сьогодні концепція STEM-освіти широко використовується в освітніх програмах багатьох країн, зокрема, проводяться міжнародні наукові конференції, створюються STEM-центри та мережеві спільноти педагогів, які працюють у цьому напрямі тощо.

Сьогодні STEM-технологія активно інтегрується у методику викладання математики у загальноосвітніх школах, а STEAM-технології допомагають підтримувати інтерес учнів до математики. Основу використання таких технологій складають завдання, які встановлюють безпосередній зв'язок математики з фізикою, історією, літературою, біологією, інформатикою тощо.

Під час проведення уроків математики важливо сформувати в учнів цілісне сприйняття математичної задачі, вміння проводити відбір методів розв'язання, перенесення та використання знань, умінь, навичок з однієї навчальної дисципліни на іншу, впізнавання та застосування фактів з різних дисциплін (фізика, хімія, інформатика і т. д.). Виконання творчих проектів підвищує рівень мотивації до вивчення математики, допомагає учням у формуванні основних математичних понять, дозволяє учням розвивати математичні вміння та навички, реалізовувати творчі здібності.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Тема «Похідна та її застосування» займає центральне місце в курсі алгебри та початків аналізу. Її вивчення є актуальним, оскільки має велике освітнє значення: з неї починається вивчення елементів математичного аналізу, що дає нові способи розв'язання математичних, фізичних і геометричних завдань. Усе це підтверджує актуальність даної проблематики для наукових, методичних і практичних досліджень.

Мета дослідження полягає у з'ясуванні методичних особливостей використання STEM-технологій у процесі навчання алгебри і початків аналізу в старшій школі, зокрема, під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Відповідно до мети дослідження були поставлені такі **завдання**:

1) розглянути сучасний стан теорії та практики в галузі освітніх процесів, які використовують концепцію STEM-освіти як педагогічну стратегію навчання;

2) з'ясувати психолого-педагогічні особливості сучасних учнів, які зумовлюють використання STEM-технологій навчання;

3) визначити переваги і недоліки STEM-навчання математики в порівнянні з традиційним підходом;

4) виявити специфіку використання прикладних задач у контексті прикладної спрямованості навчання математики;

5) розглянути методичні особливості реалізації STEM-навчання учнів теми «Похідна та її застосування», зокрема:

- проаналізувати навчальні програми та підручники з теми,
- визначити основний зміст навчального матеріалу;
- описати специфіку введення основних понять з теми та навчання прикладних задач у контексті дослідження;

5) підготувати практичні розробки з теми дослідження.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої школи.

Предмет дослідження – особливості реалізації STEM-навчання теми «Похідна та її застосування» учнів старшої школи.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Методи дослідження. Для виконання поставлених у дослідженні завдань використано наступні методи:

–теоретичні – аналіз, систематизація, узагальнення, які дозволяють опрацювати нормативні, наукові та навчально-методичні джерела, проаналізувати методику і практику STEM-навчання математики учнів старшої школи;

–емпіричні – спостереження, бесіди з учителями, які працюють у старших класах; вивчення матеріалів навчальної та педагогічної діяльності, що забезпечують дослідження стану і визначення перспективних напрямків використання різних технологій STEM-навчання математики учнів старшої школи.

Елементи наукової новизни одержаних результатів показані в узагальненні й систематизації науково-методичних відомостей про концепцію STEM-освіти як педагогічної стратегії навчання; визначенні переваг й недоліків STEM-технологій навчання математики в порівнянні з традиційним підходом; виявленні специфіку використання прикладних задач у контексті прикладної спрямованості навчання математики учнів старшої школи.

Практичне значення одержаних результатів пов'язане з їх використанням у практично-педагогічній діяльності вчителів математики закладів загальної середньої освіти при упровадженні STEM-технологій навчання математики у старшій школі.

Апробація результатів.

- Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. - Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2022. - Випуск 16. - С. 15-16.
- Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математиного циклу "ІТМ*плюс - 2022 Форум молодих дослідників": матеріали III Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів,

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

аспірантів та молодих вчених. - Суми: Вид-во СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2022. - С. 62.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (43 позиції), додатків.

У першому розділі роботи розглянуто теоретичні основи STEM-навчання математики учнів старшої школи, зокрема: розглянуто сучасний стан теорії та практики в галузі освітніх процесів, які використовують концепцію STEM-освіти як педагогічну стратегію навчання; описано психолого-педагогічні особливості сучасних учнів, які зумовлюють використання STEM-технологій навчання; виокремлено переваги та недоліки STEM-навчання математики в порівнянні з традиційним підходом; описано специфіку використання прикладних задач у контексті прикладної спрямованості навчання математики.

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості реалізації STEM навчання теми «Похідна та її застосування», а саме: проаналізовано навчальні програми та підручники з теми та основний зміст навчального матеріалу; описано специфіку введення основних понять з теми та навчання прикладних задач у контексті дослідження.

У додатках подано теоретичний матеріал з теми «Похідна та її застосування» та самостійно розроблений конспект уроку.

У висновках узагальнено й систематизовано основні результати роботи, зроблено рекомендації по використанню отриманих результатів, визначено перспективи подальших досліджень.

Загальний обсяг роботи 88 сторінок

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

РОЗДІЛ 1.
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ STEM-НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

1.1. Концепція розвитку STEM-освіти в Україні

Термін «STEM-освіта» з'явився у педагогічній науці порівняно недавно, а саме – у США в 1990-х рр. STEM-освіта базується на ідеї навчання учнів на основі інтеграції чотирьох предметних областей (S – Science – наука, T – Technology – технології, E – Engineering – інженерія, M – Math – математика) та поєднання їх у цілісну парадигму навчання, що базується на реальних проблемах навколишнього світу.

Вивчаючи особливості упровадження концепції STEM-освіти в освітню систему України, слід передусім провести *історичний ретроспективний аналіз* становлення цього процесу та відповідної термінології у Європейському освітньому просторі.

Ідеї інтегративного навчання, що лежать в основі концепції STEM-освіти, не є новими, вони виникли ще в кінці XX ст. На різних етапах розвитку суспільства мислителі та педагоги, теоретики та практики освіти зверталися до елементів інтегративних педагогічних технологій.

Відповідно до «Філософського енциклопедичного словника», інтеграція (від лат. *integer* – повний, цілісний, непорушений) – це «процес або дія, що має своїм результатом цілісність; об'єднання, з'єднання, відновлення єдності. У філософії Спенсера інтеграція означає перетворення розпорошеного непомітного стану в концентроване, видиме» [39, с. 181]. У роботі Б. М. Кєдрова дається наступне пояснення: «інтеграція полягає в об'єднанні різних наук і наукових дисциплін між собою, в їх зв'язуванні у єдине ціле» [14, с. 186].

Таким чином, можна зробити висновок, що термін «інтеграція» рівною мірою може описувати і взаємозв'язок, і процес становлення цілісності.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Цілісність, у свою чергу, може розглядатися як завершальний етап інтеграції, але не як рівнозначне поняття.

Як зазначає у своїх публікаціях Дж. Якман (G. Yakman) [47], одним з перших великих філософів освіти, який дав поштовх зародженню і розвитку ідей STEM-освіти, був Р. Декарт, який у праці з методології науки «Правила для керівництва розуму» писав, що «всі науки пов’язані між собою настільки, що набагато легше вивчати їх усі одразу, ніж відокремлюючи одну від інших. Отже, якщо хтось серйозно хоче досліджувати істину речей, він не повинен вибирати якусь окрему науку: адже всі вони пов’язані між собою і одна від одної залежні» [11].

Засновник пансофізму, автор фундаментальних праць з педагогіки Я. А. Коменський неодноразово у своїх роботах наголошував, що діалог між різними дисциплінами, окремими областями знань і методами пізнання світу – це ключ до цілісності світорозуміння. Активна диференціація наук, пошук ними свого предмета, специфічних методів дослідження почалися XVII ст., й ідеї пансофізму, на кілька століть випередивши свою епоху, стали прообразом міждисциплінарного знання.

У цілому для педагогіки епохи Відродження були характерні тенденції у стиранні граней між «вільними» (граматика, риторика, логіка, арифметика, геометрія, астрономія, музика) і «механічними» (архітектура, живопис, медицина, торгівля, кораблебудування, ремесла та ін.) мистецтвами [23, с. 170]. Педагоги епохи Просвітництва І. Г. Песталоцці та Ж. Ж. Руссо у своїх працях наголошували на єдності наук, визнавали важливість і дієвість міждисциплінарних зв’язків.

У педагогічній літературі кінця XVII–XIX ст. широко обговорювався новий метод викладання, в основу якого було покладено принцип «все є у всьому». На основі зазначеного принципу було здійснено низку великих природничо-наукових відкриттів. М. В. Ломоносов, І. Ньютон, І. Кеплер, Б. Паскаль, Е. Торрічеллі та інші вчені, осягаючи природу, діяли на «стиках» наук [37, с. 142].

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Американський філософ, психолог і педагог Д. Дьюї – один із найвидатніших і найвпливовіших мислителів XX ст. – пропагував природничо-наукову та технічну грамотність як наріжний камінь загальної грамотності: «головний практичний додаток науки – удосконалена діяльність, про що свідчить лавина винаходів, які пішли за інтелектуальним оволодінням секретами природи» [12].

Період диференціації наук в історії наукового природознавства, який почався у XVII ст., тривав кілька століть. При цьому предмети наукових досліджень були суворо розмежовані. Але з кінця 70-х рр. XX ст. в природознавстві стали проявлятися зачатки нової протилежної диференціації тенденції – інтеграція наук. З часом прояв цієї тенденції наростав швидкими темпами. У своїй книзі «Future Shock» Е. Тоффлер (A. Toffler) писав: «Неграмотними XXI ст. будуть не ті, хто не вміє читати і писати, а ті, хто не може вчитися, розучуватися та переучуватися. Такі атрибути як креативність, цікавість та дизайн-мислення матимуть велике значення для майбутньої робочої сили» [43].

Тож, результатом процесу інтеграції є нове утворення (система, інтегративне ціле) – інтегрований курс, урок та ін. Інтегрований урок – це урок, у якому навколо єдиної теми поєднується матеріали кількох предметів. Дуже важливо визначити його головну мету. Якщо вона сформульована, то зі змісту предметів беруться тільки ті відомості, які необхідні для її реалізації. Інтегровані курси будуються на основі злиття двох-трьох предметів або об’єднання окремих тем в інтегровані блоки [38, с. 115].

Інтерес до інтеграції дисциплін пов’язують з успіхами в біотехнології, а також появою та розвитком низки синтетичних наук, що розглядають світ і суспільство у всьому різноманітті їх проявів та взаємовпливів. Такі наукові напрями та пов’язані з ними технології формують інноваційні виробничі галузі та професії, пов’язані зі STEM.

Термін «STEM-освіта» з’явився в педагогічній науці порівняно недавно, а абревіатура «STEM» була вперше запропонована американським

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

бактеріологом Р. Колвелом (R. Colwell) у 1990-х рр. XX ст., а активно почала використовуватися Національним науковим фондом (National Science Foundation, NSF) США як конгломератний термін, що поєднує природничі науки, техніку, інженерію та математику.

Спочатку абревіатура STEM не мала інтегративного характеру і самі літери були розставлені наступним чином: SMET або METS. Можна припустити, що були й інші варіанти цієї абревіатури. Однак у 2001 р. американський біолог Д. Рамалі (J. Ramaley), на той час помічник директора з освіти та людських ресурсів у NSF, переструктурувала елементи, щоб сформувати абревіатуру STEM. З того часу навчальна програма, орієнтована на STEM-освіту, поширена у багатьох країнах поза США [44, с. 23].

У рамках STEM-освіти виділилася низка напрямків, які отримали загальне позначення STEM+ та приватні назви, що відображають пріоритетні види діяльності. Так, найбільш поширеними є STEAM (природничі науки, технології, інженерія, мистецтво та математика) та STREM (наука, технології, робототехніка, інженерія та математика). Це пов'язано з тим, що підходи STEM+ надають більше можливостей для досягнення більш високих результатів у навчанні за допомогою звернення до кількох напрямків, включаючи творчість.

Сьогодні в Україні ми спостерігаємо процеси активного реформування системи освіти, зокрема упровадження ідей НУШ. Українські педагоги знаходять та апробують технології та підходи в освіті, які є актуальними в контексті економічних, соціальних, екологічних змін, реагуючи на виклики, поставлені пандемією вірусу Covid19 та російським військовим вторгненням на територію України.

Однією з таких педагогічних технологій, яка сьогодні активно обговорюється в українській педагогічній науці, зокрема в рамках упровадження НУШ, є саме STEM-освіта. Остання спрямована на формування ключових компетенцій XXI ст. за допомогою інтегративної педагогічної технології та стрімко розвивається, відповідаючи на ряд викликів сучасного суспільства:

– пошук нових імпульсів для конкурентоспроможності економіки та лідерства в інноваціях на рівні держав;

– нові вимоги ринку праці до освіти (з боку бізнесу та високотехнологічного виробництва);

– вирішення соціальних проблем [45].

Отже, в основі розвитку концепції STEM-освіти в українській освітній системі лежить явище інтеграції різних освітніх галузей.

Головна мета STEM-освіти полягає у формуванні і розвитку розумово-пізнавальних і творчих якостей молоді, рівень яких визначає конкурентну спроможність на ринку праці; удосконаленні науково-дослідної та інженерної освіти в навчальних закладах. А також, підготовка учнів до післяшкільного навчання і працевлаштування відповідно до вимог XXI ст. [22, с. 5].

STEM є інтегрованим підходом навчання, у рамках якого академічні науково-технічні концепції вивчаються в контексті реального життя. Мета такого підходу – створення стійких зв’язків між школою, суспільством, роботою та цілим світом, які сприятимуть розвитку STEM-грамотності та конкурентоспроможності у світовій економіці [41].

Нині у вітчизняних наукових дослідженнях, присвячених упровадженню STEM-технологій, активно використовується термін «навички XXI ст.», який зазвичай використовується для позначення певних основних компетенцій, таких як співпраця, цифрова грамотність, критичне мислення та вирішення проблем, які виступають за те, що школи повинні навчати, щоб допомогти учням процвітати у глобалізованому світі. Отже, учнів середньої школи необхідно навчити розвивати навички мислення вищого ладу, особливо у вирішенні проблем, пов’язаних із реальним світом. Однак уявлення про те, як має виглядати навчання у XXI ст., відкрите для інтерпретацій та суперечок [5].

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

На основі STEM-підходу при комплексному викладанні змісту дисциплін, загальних тем формуються такі базові навички та компетентності:

1. Задавати запитання (наука) та приймати завдання (інженерія).
2. Розробка та використання моделей.
3. Планування та проведення досліджень.
4. Аналіз та інтерпретація даних.
5. Розвиток та використання навичок мислення, необхідних для виконання математичних операцій та розрахунків.
6. Вміння давати пояснення (на основі науки) та знаходити конструктивні рішення (інженерні).
7. Вміти доводити, виходячи з наявних фактів.
8. Отримання, оцінка та точна передача інформації [46].

Структура STEM-освіти визначається спеціалізованими стандартами STEM-освіти на основі Державного стандарту загальної початкової та базової освіти. Основними ланками впровадження STEM-освіти в Україні є:

– початкова – здійснюється у дошкільних навчальних закладах, початковій школі та закладах позашкільної освіти, які займаються початковою науково-технічною творчістю;

– базова – включає в себе освіту учнів 5–9 класів у закладах різних типів;

– профільна – здійснюється на базі профільних класів та у профільних закладах освіти; закладах позашкільної освіти, закладах, що на експериментальному рівні впроваджують STEM-освітні програми через зміст інваріативної складової навчального плану, її варіативного компоненту, позакласну, виховну роботу, організовані проєкти, конкурси, змагання та інші заходи, що не суперечать цілям і завданням STEM-освіти;

– вища / професійна – підготовка фахівців різних STEM-професій на базі ЗВО;

– педагогічна – підготовка вчителів та інших членів педагогічних колективів до викладання STEM-освітніх курсів [22, с. 7–8].

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

В системі загальної середньої освіти виокремлюється 3 етапи (початкова школа, середня школа, старша школа) реалізації напряму STEM через певну інтеграцію традиційних навчальних предметів і курсів математики, фізики, хімії, біології, географії, астрономії, технології на кожному з етапів навчання.

STEM-підходи до навчання в ЗЗСО України передбачають поступове нарощення самостійної діяльності учнів:

− у 1–4 класах стимулювання учнів до проведення пошукової роботи під керівництвом вчителя;

− у 5–6 класах спроби проведення дослідницьких робіт на основі навчального матеріалу з програми (виконати всі етапи наукового дослідження і самостійно отримати новий для них факт);

– у 7–9 класах самостійне дослідження теми, що виходить за межі програмного матеріалу; учні працюють самостійно, консультуючись зі вчителем, часто на цьому етапі до упровадження STEM-підходів відносять написання і захист роботи в МАН, участь у творчих конкурсах і фестивалях;

– у 10-11 класах наукове дослідження за обраною темою, досягнення практичного результату, розробка Startup.

Єдиного шляху упровадження концепції STEM-освіти в українській освітній системі немає. Викладання STEM-дисциплін ведеться по-різному залежно від можливостей, спрямованості школи тощо. При використанні STEM-технологій розвиваються можливості знаходити вирішення проблеми і вчитися працювати з інформацією. Використання STEM-технологій передбачає, що учень не отримує конкретну підказку до відповіді, їх необхідно знаходити самостійно. Це дозволяє учням, спираючись на власний досвід, формулювати висновки, застосовувати практично отримані знання, пропонувати власний чи груповий погляд проблему [5].

Новий міждисциплінарний та проєктний підхід до навчання дозволить учням посилити дослідницький та науково-технологічний потенціал, розвинути навички критичного, інноваційного та творчого мислення, вирішення проблем, комунікації та командної роботи. Збільшиться кількість

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

«наскрізних тем» між предметами природничо-математичного циклу [46]. В учнів з’являються великі можливості, коли вони мають право вибору профільних предметів, здобуття освіти за індивідуальними освітніми траєкторіями, мають можливість взяти участь у розробці проєктів та спробувати свої сили у науковій діяльності.

STEM підхід до навчання докорінно відрізняється від традиційних методів викладання точних і природничих предметів. Принципова відмінність підходів STEM – це інтегроване освітнє середовище та міждисциплінарна організація освітнього процесу. Ця методика дозволяє учням отримати повне уявлення про світ і демонструє умовність поділу науки на окремі предмети. Учні навчаються використовувати досягнення та інформацію з однієї наукової дисципліни для вирішення завдань щодо інших наукових дисциплін. Ця сучасна освітня методика розвиває творче мислення та широту бачення проблеми, які необхідні для вирішення наукових завдань із безліччю змінних [42, с. 954].

Наприклад, природничі науки і математика мають схожість з погляду їхньої діяльності, тому що обидві області прагнуть зрозуміти світ природи та явища навколо людини із залученням знань, тоді як технології та інженерія використовують знання, отримані за допомогою науки та математики, для практичних цілей [41]. Історія розвитку науки говорить про те, що найцікавіші події відбуваються саме на стику різних наук. Наприклад, математика для хіміків – це насамперед корисний інструмент розв’язування хімічних завдань. Важко знайти розділ математики, який би зовсім не використовувася у хімії [30, с. 45–46].

На основі аналізу досвіду низки країн із розвитку STEM-освіти сьогодні можна виділити такі основні підходи до його розвитку в українській освітній системі, зокрема, до розробки навчальних планів та програм за напрямами STEM [42, с. 956].

1. Перший підхід ґрунтується на значному досвіді вивчення окремих предметів STEM з використанням методів проблемно-орієнтованого

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

навчання, в яких аналітичні концепції застосовуються до проблем реального світу, щоб краще розуміти складні теорії.

2. Другий підхід включає інтеграцію елементів STEM, щоб створити більш глибоке розуміння їх змісту, що буде стимулювати розвиток дослідницьких, дизайнерських і творчих можливостей учнів.

3. Третій підхід передбачає, що у STEM-освіті має переважати мультидисциплінарний підхід, який використовує інтегративність у вивченні дисциплін STEM, як це робиться у реальних умовах професійної діяльності. Він включає впровадження інновацій у методику викладання кожного предмета STEM, де на основі інтеграції понять науки, технології, інженерії та математики вони переводяться в одну навчальну програму під назвою STEM [42, с. 960].

В основі STEM-освіти лежать чотири основних принципи:

1) проєктна форма організації освітнього процесу, у ході якого діти об'єднуються у групи для спільного розв'язування навчальних завдань;

2) практичний характер навчальних завдань, результат розв'язування яких може бути використаний для потреб сім'ї, класу, школи, закладів вищої освіти, підприємства, міста тощо;

3) міжпредметний характер навчання: навчальні завдання конструюються в такий спосіб, що для їх розв'язування необхідне використання знань відразу кількох навчальних дисциплін;

4) охоплення дисциплін, які є ключовими для підготовки інженера або спеціаліста з прикладних наукових досліджень: предмети природничого циклу (фізика, хімія, біологія), сучасні технології та інженерні дисципліни.

STEM-підхід може бути реалізований за допомогою різних методів навчання, таких як навчання на основі проєктів, проблемний метод, дослідницький метод, методи розвитку критичного мислення та ін.

Метод проєктів спрямовано на самостійну діяльність учнів, що вони виконують протягом певного відрізка часу (проводяться заняття з тем, включених у програму).

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Використання проблемного навчання – це метод STEM, який зарекомендував себе у викладанні математики, реалізації вирішень проблемних ситуацій, пошуку вірних відповідей, подоланні перешкод на шляху до запланованого розв’язку. Тут важливим моментом є формування в учнів особливого стилю розумової діяльності, дослідницької активності та самостійності [5].

Розвиток критичного мислення – ще одна можливість для упровадження STEM-навчання. Критичне мислення передбачає самостійний неупереджений погляд на існуючу ситуацію, вміння поставити під сумнів відомі факти, самостійний аналіз наявних даних з метою створення власних рішень [5].

Серед дієвих форм організації діяльності учнів в рамках використанням STEM-технологій найбільша увага приділяється груповій роботі учнів.

Потрібно відмітити такі переваги STEM-освіти:

– за STEM-технологіями в центрі уваги знаходиться практичне завдання чи проблема, яку учні вчаться розв’язувати не в теорії, а прямо зараз шляхом спроб і помилок;

– STEM-освіта – це творчий простір світогляду учня, де він не тільки реалізовує свої потреби, а й готується до дорослого життя у соціумі, роблячи усвідомлений вибір майбутньої професійної діяльності;

– за STEM- технологіями учень отримує набагато більше автономності, на процес навчання набагато менше впливають стосунки, що склалися між учнем та вчителем, що дає можливість більш об’єктивно оцінювати прогрес, за рахунок такої автономності учень вчиться бути самостійною, приймати власні рішення та брати за них відповідальність;

– уроки за STEM-технологією дозволяють не тільки вивчати теоретичний матеріал, але і закріплювати знання за допомогою можливостей практичного застосування різноманітних завдань.

STEM-освіта – це послідовність курсів або програм навчання, яка готує учнів до успішного працевлаштування, до освіти після школи або для того й іншого, вимагає різних і більш технічно складних навичок, зокрема із

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

застосуванням математичних знань і наукових понять. Навчання в області STEM надає широкі можливості для спілкування «один на один» і «один-до-багатьох».

Загалом же, сучасний тренд «STEM-освіта» – концепція інтегрованого навчання учнів за чотирма профільними дисциплінами в міждисциплінарному та прикладному контексті є надзвичайно актуальним феноменом в аспекті стратегічного розвитку провідних країн світу щодо отримання ними конкурентних переваг у різних сферах людської діяльності. Саме STEM-освіта сприяє підготовці компетентних фахівців для високотехнологічних виробництв і забезпечує високий науковий потенціал будь-якої держави.

STEM-освіта є мостом, що об'єднує навчання та кар'єру. Його концепція готує дітей до технологічно розвинутого світу. Спеціалістам майбутнього потрібні всебічна підготовка та знання з самих різних навчальних областей природничих наук, інженерії, технології, математики тощо. STEM-освіта сьогодні демонструє потужний науковий потенціал, для реалізації якого потрібно розробити стандарти STEM-орієнтованого освітнього контенту. Це можливо лише спільними зусиллями всіх учасників освітнього процесу, використовуючи інновації, передові комп'ютерні технології. Об'єднавши зусилля освітніх закладів, наукових установ та державних органів у поширенні здобутків у галузі STEM-освіти, необхідно впроваджувати елементи STEM у всі заклади освіти.

Отже, STEM-освіта – це не просто передача знань від учителя до учнів, це спосіб розширення свідомості та зміни реальності у всіх ланках освітнього простору, тому сьогодні розвиток концепції STEM-освіти в українській освітній системі є одним з провідних напрямів інноваційних реформ системи освіти в Україні.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

1.2. Психолого-педагогічні особливості сучасних учнів як умова для використання STEM-технологій навчання

Варто також звернутися до питання психолого-педагогічних характеристик сучасного покоління учнів як основи для використання STEM-технологій навчання.

Існує традиційний розподіл підліткового віку на дві стадії: стадію молодшого підліткового віку (11–15 років), що називається негативною або критичною, і стадію старшого підліткового віку (16–18 років) – позитивну [25, с. 45]. Загалом навчальний і виховний процеси у старшій ланці мають суттєві відмінні риси від навчання учнів загальної і молодшої школи (наявність великої кількості нових навчальних дисциплін і викладачів, варіативність, профільні напрямки).

Основна особливість старшого підліткового віку (10-11 клас) полягає у переході до дорослості, шляхом формування певних елементів, що відбивається на особистісній та пізнавальній сферах, на навчальній діяльності і на сфері спілкування між ровесниками і дорослими людьми. Старший підлітковий вік характеризується кардинальними змінами особистості: формування рефлексивних умінь, зміна змісту самооцінки, поява почуття дорослості.

У старшокласників більше, ніж у молодших підлітків розвинутий самоаналіз, вони більш схильні до самокритичності. Така тенденція є сприятливою для усунення в учнів тих прогалин, які вони мають у оволодінні навчальним матеріалом за допомогою індивідуальних завдань. Загалом, індивідуальна, парна та групова робота та поєднання цих видів діяльності на вищому щаблі стають ще більш актуальними. Вчитель при цьому виконує роль партнера, організатора, фасилітатора тощо. Перед групою має ставитися загальна пізнавальна задача, а вчитель виконує має організувати та стимулювати спільний пошук її вирішення. При цьому кожен виконує свою частину роботи, при цьому будучи активним учасником роботи в цілому. Необхідно з розумінням і певним розрахунком ставитися до такого явища,

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

властивого даному віку, як прагнення привернути до себе підвищену увагу оточуючих. Це може бути використано вчителем при організації дискусії, при складанні індивідуальних завдань та організації взаємодопомоги, при розподілі індивідуальних доручень для організацій позакласних заходів [19, с. 24].

На цьому етапі дорослішання якість викладання має велике значення для розвитку інтересу до навчальної дисципліни. Педагог, привабливо і зрозуміло представляючи матеріал, стимулює інтерес і підсилює мотивацію до навчання. Пізнавальна потреба сприяє формуванню стійких пізнавальних інтересів і позитивному сприйняттю навчального процесу в цілому. Старший підлітковий вік більшою мірою характеризується потребою підлітків у професійному самовизначенні. Таким чином, мотивом зацікавленості може бути як справжнє захоплення предметом, так і усвідомлення необхідності вивчення конкретних дисциплін для вступу до певного навчального закладу [13, с. 122].

У старшій школі учні усвідомлюють значущість знань, осмислюють їх життєву необхідність для подальшого становлення особистості. Найчастіше старший підліток відчуває інтерес до предмету через те, що він відповідає його бажанням не тільки опанувати певні знання, але і стати всебічно розвиненою і культурною людиною. Підліток часто проводить порівняння між собою і дорослим і не знаходить відмінностей. Звідси випливають його претензії на рівноправне спілкування з дорослими, вступ у конфліктні ситуації і відстоювання своїх прав на «доросле життя» [21, с. 50].

Підліток старшого підліткового віку розглядає дорослу людину як помічника або наставника. У педагогах учні старших класів, крім особистісних якостей, цінують професійну майстерність та розумні вимоги, адже, відповідно до свого віку, учень вже стає більш відповідальним. Групові взаємини з ровесниками поступово зникають, зважаючи на поглиблення і диференціацію дружнього спілкування, яке базується на емоційних та інтелектуальних відносинах підлітків [8, с. 83].

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Слідуючи за думкою В. В. Давидова [10, с. 12], вважаємо, що в старшому підлітковому віці всі види діяльності (навчальна, трудова та суспільно-організаційна) утворюють суспільно значиму діяльність, яка і стає провідною. Підлітки усвідомлюють їх власну участь в здійсненні такого соціально значимого виду діяльності, що спонукає їх вступати в нові відносини один з одним, тим самим розвиваючи засоби спілкування. Активізація здійснення соціально-корисної праці позитивно впливає на спілкування із однолітками та дорослими, на визнання їх дорослими, самостійними і відповідними обраному ідеалу [8, с. 123].

Цілеспрямована та вмотивована активність старшокласника спрямована на осягнення навчальної діяльності, що набуває характеру суб'єктності. Мотивація виходить на новий етап розвитку, відрізняючись своєю спрямованістю на самостійне добування і пошук інформації, визначенням навчальних завдань, освоєнням навчальних умінь і навичок, оволодінням контролюючими та оціночними функціями, ініціативною організацією навчальної взаємодії, та виражається через особливу внутрішню позицію учня. Звідси можна зробити висновок, що навчальна діяльність старшого підлітка – це діяльність, спрямована на саморозвиток і самоосвіту [7, с. 13].

Юнацький вік це насамперед стадія духовного розвитку, хоча і тісно пов'язана з комплексом психофізіологічних процесів. Цей період характеризується появою у підлітка почуття своєї неповторності, індивідуальності, несхожості з іншими. На почуття та настрій завжди впливає властива в цьому віці підвищена емоційність. Одна з головних тенденцій – переорієнтація у спілкуванні на однолітків. В цей період самовизначення нерозривно пов'язане з формуванням світогляду. Юність – це вирішальний етап становлення світогляду. Саме це дає підґрунтя для ефективного формування навичок STEM-освіти.

Учні старшого віку неохоче наслідують і виконують механічні завдання, мета виконання яких їм незрозуміла. Однак вони з цікавістю читають змістовні тексти та працюють над проблемними завданнями практичного спрямування.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Ще більшу роль у процесі навчання, ніж на середній стадії, починає відігравати самостійна робота. Це особливо характерно для учнів, які з різних причин бажають серйозно вивчати технічні, математичні дисципліни [34, с. 45].

Старшокласники мають у повному обсязі оволодіти структурою навчальної діяльності, всіма необхідними для реалізації цієї структури навчальними діями та вміннями. В учнів уже повинна сформуватися здатність до рефлексії, причому не лише своєї навчальної діяльності та усіх її складових компонентів, але і до рефлексії своїх здібностей та можливостей використовувати здобуті знання, навички у практичній діяльності. Особливого значення набуває формування особистості учня як активного суб'єкта власної навчальної діяльності. За визначенням психологів, вищий рівень сформованості суб'єкта діяльності полягає в його умінні не тільки використовувати суспільно обраний досвід, а й поступово здійснювати спроби свідомого перетворення цього досвіду: суб'єкт завжди конструктивний [19, с. 23].

Психологи також відзначають, що учням старших класів властиво здебільшого довільне запам'ятовування, ефективність якого підвищується врази, якщо учень усвідомлює, навіщо йому необхідно запам'ятати певний матеріал та що у результаті цього запам'ятовування буде досягнуто. Запам'ятовуванню сприяє також усвідомлення характерних особливостей матеріалу, того, яким чином об'єкти запам'ятовування співвідносяться між собою та утворюють смислові угрупування. Головною є опора на інтенсивну розумову роботу [16, с. 24].

У цей період відбувається становлення формування інтересів, захоплень і нахилів, тому велика кількість підлітків прагне активно застосовувати свої здібності в різних сферах трудової діяльності, перш за все орієнтуючись на можливість особистого самоствердження і самовдосконалення. Прагнення домогтися певного статусу у суспільстві спонукає підлітків до виходу зі

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

шкільного середовища і застосування себе в міжособистісному спілкуванні з цікавої їм теми. Це можуть бути спортивні захоплення, спільна праця, вирішення інтелектуальних завдань, суспільно-політична діяльність і т. д. [4, с. 20].

З метою забезпечення інноваційності педагогічного процесу абсолютно необхідно спрямувати зусилля на найважливіший період становлення особистості, коли закладаються передумови громадянських якостей, формується відповідальність і спосіб елементів наочно-образного мислення, пізнавальні інтереси, які ведуть до підвищення творчих здібностей дітей. Дитина не готується до входження в соціальне середовище, а вже живе в ньому, з його проблемами та завданнями.

Також в умовах інформатизації освіти відкриваються нові перспективи для учнів стосовно їх навчання та розвитку. При цьому важливим завданням є не заміна інформаційно-комунікаційними технологіями основного виду освітньої діяльності, а включення їх в загальну систему освітнього процесу. Розвиток цих якостей особливо важливий для учнів середньої та старшої школи, оскільки саме вони багато в чому і забезпечують психологічну готовність дитини до навчання на подальших етапах.

Також у процесі побудови системи STEM-освіти слід враховувати, що сучасні учні належать до так званого цифрового покоління Z. Вони швидко опановують комп'ютерні програми, мають тип мережевого мислення. Зокрема, можна виділити таку систему ознак мислення цифрового покоління Z (рис. 1.1).

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

1) система гіперпосилань, де думка може переорієнтуватися або навіть мимоволі змінитися під впливом нових даних, кожне гіперпосилання – це додатковий ступінь свободи осягнення суті повідомлення та інтерпретації даних;

2) превалювання візуального сприйняття, тоді як текст примітивізується до елементарного переліку фактів, думок, цитат і деталей; мають швидке читання і миттєве розуміння сенсу [26]. Через такий спосіб роботи з інформацією змінюється і мислення людини, яке перетворюється в систему, організовану тегами і ключовими словами. Варто мати на увазі, що мислення молодих людей орієнтоване на цілу систему факторів, щоб переробляти інформацію короткими порціями в форматі так званого «кліпового мислення»;

3) специфічний темпо-ритм і лаконізм, а тому тенденція переривати виклад думок, пропускати ті елементи висловлювання, які легко розуміються в даному контексті або ситуації;

4) стилістика інтерактивності і «право на авторитетне втручання в процес обговорення теми» [46], особа мислить, говорить і діє без уваги на регламент, субординацію і пристойності, слідуючи власним інтенціям, розуміючи світ у світлі особистих інтересів і відчуваючи свій прямий вплив на ситуацію;

5) прагнення особистості до самовираження і самоствердження за допомогою форумів, чатів, соціальних мереж та інших засобів масової комунікації, де кожен, зайшовши в Інтернет, має можливість відкрито висловити свій суб'єктивний погляд на важливі події, що відбулися в світі – це інший психічний стан, інша усвідомленість, де не останнє місце займає індивідуальна активність;

6) не виписує нову інформацію, а оперує нею, самостійно знаходить дані, що цікавлять його, в доступних джерелах, високо оцінює свої можливості, погляди і наполягає на тому, щоб їх сприймали серйозно.

Рис. 1.1. Ознаки мислення цифрового покоління Z

При організації навчання дітей покоління Z педагоги пропонують таке:

– приділяти більше часу на осмислення нового матеріалу поза уроками (можливість переглянути матеріал; творчі роботи, де потрібно висловити власну думку; завдання створити схему);
– структурувати способи досягнення мети (надати алгоритм; розробити рекомендації щодо уникнення помилок);

fizmat@cspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

- надавати більшу свободу вибору дій (додаткові джерела інформації; критерії оцінювання; візуальні лічильники балів);
- залучення учнів до довгострокових проєктів.

Таким чином, ці психолого-педагогічні особливості сучасного покоління учнів передбачають широкі можливості, які вчитель може використати у ході формування навичок STEM-освіти. Зокрема, це активний розвиток пізнавальної сфери, якісно нові показники пам'яті, уваги, мислення, самостійність, дорослість, прагнення до самоідентифікації, достатньо висока мотивація до навчальної діяльності, ознаки мислення цифрового покоління.

1.3. Форми та методи реалізації STEM-підходів у процесі навчання математики учнів

Головна мета STEM-підходу – подолати властиву традиційній освіті відірваність від вирішення практичних завдань та побудувати зрозумілі учням зв'язки між навчальними дисциплінами. Стрімко зростаючий інтерес вчителів до STEM-освіти пояснюється тим, що значна частина завдань, встановлених освітніми стандартами, може бути реалізована з урахуванням ідей, інструментів та методик, накопичених у рамках STEM-підходу.

Проблема роз'єднаності окремих шкільних предметів, викладання кожного з них у логіці розвитку самостійного наукового знання історично зрозумілі. Однак, якщо вибудовувати викладання в дослідному та/або проєктному ключі, то системне викладання окремих предметів без взаємозв'язку один з одним, без освоєння різних інструментів та методів (математичних, інженерних, ІКТ та ін.) стає непродуктивним. Виникає проблема інтеграції окремих дисциплін через вирішення конкретних, практичних та прикладних завдань. Тому важливо так вибудовувати систему організації діяльності, щоб у кінцевому підсумку знання ставали системними, цілісними. Це досить непросте завдання, бо все й одразу засвоїти неможливо, а окремо – незрозуміло чому і як це потім зв'яжеться між собою [2, с. 13].

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Математика належить до обов’язкових навчальних предметів, однак вона може мати різну питому вагу в загальноосвітній підготовці учня за часом, що відводиться на її вивчення, а також за глибиною і охопленням матеріалу, що розглядається. Працюючи над завданням чи теоремою, слід показувати учням необхідність розгляду всіх можливих комбінацій об’єктів, що задовольняють умові; давати самостійно проводити класифікацію понять, приводити контрприклади; розкривати взаємозв’язок між спорідненими поняттями, їх властивостями та ознаками; націлювати школярів на їх самостійне виділення, показуючи при цьому необхідність і користь такого опрацювання [35, с. 21].

З цієї точки зору математика як шкільна дисципліна є потужною основою для упровадження STEM-підходів, оскільки має надширокі можливості для упровадження інтегрованого підходу до навчання, розвитку навичок критичного мислення, активної комунікації і командної роботи, підготовки учнів до технологічних інновацій життя, застосування науково-технічних знань у реальному житті. Практика навчання через відкриття, де учень сам освоює алгоритм усвідомленої та цілеспрямованої діяльності у ситуації новизни та невизначеності, бачиться природною для оновлення змісту та форми побудови математичної освіти для майбутнього.

У цьому контексті STEM-освіта має два вектори розвитку:

1) посилення значимості академічного вивчення навчальних дисциплін, об’єднаних в окремий блок;

2) інтеграція знань та методів різних дисциплін у вирішенні проєктних та дослідницьких завдань (як повсякденних, так і завдань розвитку сучасної науки та технологій) [3, с. 28].

Зазначимо, що у процесі навчання математики в сучасних умовах організації освітнього процесу в ЗЗСО України доцільною є реалізація другого напряму. Тому виділимо основні методи та форми реалізації STEM-підходів, які доцільно упроваджувати у процесі навчання математики учнів.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

STEM-освіта передбачає засвоєння предметного змісту через проєкти, у яких природним чином інтегроване наукове знання та проєктування, інформаційні технології та математичні розрахунки. Вивчення природничих наук вибудовується відповідно до проєктного підходу в міжпредметній логіці.

Діапазон розуміння терміна «проєкт» у цьому контексті дуже широкий, і в рамках даної реалізації «навчальний проєкт» є скоріше варіантом практичного завдання проблемного характеру, вирішення якого група учнів шукає самостійно, спираючись при цьому не на покрокову інструкцію, а на питання відкритого типу. Проєкт передбачає проведення досліджень, що включають постановку дослідницького питання, формулювання гіпотези, розробку методики дослідження, збирання, подання та аналіз даних. Зміст предметів загалом відповідає зразковій програмі основної загальної освіти [40, с. 85].

Розподіл тем і розділів за роками навчання слідує за логікою міжпредметних зв’язків, на яких побудовано вивчення природничих наук в цілому. Предметні знання не повідомляються учням у готовому вигляді у традиційному форматі пояснення нового матеріалу чи читання підручника. Вони інтегровані у зміст практичних завдань, саму тематику яких визначено програмою навчання. Предметні знання даються у вигляді інформаційних вкраплень, що містять короткі пояснювальні тексти та посилання на спеціально відібрані інформаційні ресурси мережі Інтернет, які виступають у ролі засобу вирішення навчальної задачі: не познайомившись з новим поняттям чи формулою, учень не зможе виконати завдання. Тому інформація завжди дається учню тільки після постановки навчальної задачі, для вирішення якої вона потрібна. Такий формат навчальної роботи визначає обсяг змісту, що освоюється: інформації стає менше, зате змінюється якість її «засвоєння» учнями.

Проєктна форма організації навчання та практична спрямованість STEM створюють більш сприятливі в порівнянні з класно-урочним навчанням

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

мотиваційні та предметні передумови для реалізації наступних вимог державних програм:

– організація активної навчально-пізнавальної діяльності;

– участь у соціально значущій праці та набуття практичного досвіду;

– формування здатності застосовувати отримані знання на практиці, у тому числі в соціально-проєктних ситуаціях;

– формування комунікативної компетентності у спілкуванні та співпраці з однолітками;

– орієнтування у світі професій та формування стійких пізнавальних інтересів як основи вибору майбутньої професії.

Окрім проєктних методів, серед інших методів навчання математики, які реалізують STEM-спрямованість освітнього процесу, необхідно відзначити пояснювально-ілюстративний метод та ділові ігри. Як методи навчальної діяльності розроблені такі: бесіда вчителя для формування та розвитку діалогової культури учнів; різні види дискусій на уроках під час вирішення завдання чи пошуку доведення теореми; індивідуальні завдання; робота із науково-популярною літературою; підготовка доповідей та повідомлень [31, с. 70].

Різноманітними є і форми проведення уроків, під час яких реалізовується STEM-спрямованість освітнього процесу. Це можуть бути урок-лекція, урок-семінар, урок-діалог (між двома вчителями або між учителем та кимось із учнів), урок-диспут, урок-детектив, на якому вирішуються різні логічні завдання з цікавим сюжетом, урок-лабораторна робота, урок-залік, практикум з вирішення прикладних завдань, бінарні уроки з тем, що мають міжпредметні зв’язки з іншими предметами, лабораторні роботи, дослідницькі та творчі роботи, практикуми та ін. На уроках-діалогах корисними є діалоги між учителями математики та гуманітарних предметів, до яких залучаються й учні. На таких уроках діти опановують культуру діалогу як найважливішу форму спілкування. Подібні уроки висувають високі вимоги до рівня математичної та методичної підготовки вчителів [36, с. 140].

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Також на уроках математики доречними формами роботи є лабораторно-графічні роботи. Вони дають можливість повніше й більш свідомо засвоїти математичні залежності між величинами, ознайомитись із вимірювальними й обчислювальними приладами та їх застосуванням на практиці, навчитися проводити вимірювання та обчислення з певною точністю тощо [15, с. 134]. При виконанні лабораторних робіт з математики завдання мають бути орієнтовані на практичні побудови, обчислення, перетворення.

Оперативний зворотній зв'язок у рамках STEM-освіти дається безпосередньо під час виконання практичної роботи (кожній групі окремо та індивідуально) [9, с. 160]. Основна форма результату – звіт з лабораторної роботи, у якому повинні бути зафіксовані відповіді на запитання, результати виконання завдань, зроблені учнями експерименти, установки, прилади. Звіт є предметом якісної оцінки (зворотного зв'язку), оскільки дозволяє оцінити знання та розуміння теми, що вивчається, а також рівень формування предметних умінь та універсальних навчальних дій [3, с. 28].

Наприклад, п'ятикласникам на уроці-лабораторній роботі можна запропонувати такі завдання: «Обчисліть площу класної кімнати, виконавши необхідні вимірювання», «Обчисліть довжину плінтуса, необхідного для оздоблення класної кімнати. Скільки вимірів необхідно зробити, враховуючи, що кімната має форму прямокутника?», «Визначте довжину власного кроку та виміряйте кроками довжину і ширину спортивного майданчика біля школи. Якою буде його площа в кроках? У сантиметрах?».

Із задоволенням учні «відкривають» для себе геометрію, якщо застосувати на уроках орігамі. Орігамі – мистецтво складання паперу без використання клею та ножиць. Згинання аркуша паперу – найпростіша операція, яка не потребує жодних особливих навичок, крім уяви. Орігамі дає можливість застосовувати графічні вміння та навички учнів у побудові схем, рисунків геометричного характеру на площині та в просторі, причому не користуючись при цьому креслярськими інструментами. Учні працюють з

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

фігурами, перетворюючи їх на інші. Наприклад, у 5 класі можна запропонувати завдання «Побудувати пряму, маючи аркуш паперу». Спочатку завдання дивує учнів, але згодом дехто пропонує провести пряму по одній із сторін прямокутного аркуша паперу. А якщо аркуш має довільну форму? Тоді учні методом спроб і помилок приходять до висновку, що достатньо просто перегнути аркуш – і лінія перегину буде тією самою шуканою прямою.

Можна практикувати проведення так званих пленерних уроків, проведення яких передбачається не в класі, а просто неба або у довкіллі, щоб вчитися бачити, слухати і розуміти навколишній світ. На таких уроках можна вдало пов'язати теорію з практикою та реальним життям. Прикладом може бути урок-екскурсія на тему «Математика навколо нас», який можна провести на пришкільній території. Головною метою цього уроку є спостереження за предметами, явищами, процесами, що вивчаються, та використання теоретичних математичних знань на практиці.

Особливою формою наскрізного STEM-навчання є інтегровані уроки, спрямовані на встановлення міжпредметних зв'язків. Змістовні інтегровані уроки встановлюють міцні зв'язки між навчальними дисциплінами, вносять новизну в традиційну систему навчання, допомагають учням зрозуміти важливість вивчення основ наук як єдиної системи знань. Інтегровані уроки роблять навчальний процес цікавим, а їх проведення є необхідним для цілісного сприйняття світу та осмислення явищ навколишньої дійсності учнями. Звичайно, таких уроків проводиться небагато, оскільки дуже складно скоординувати діяльність педагогів, які викладають різні предмети. Зокрема, у 9 класі можна провести інтегрований урок геометрії та географії на застосування матеріалу про розв'язування трикутників, а у 8 класі – урок геометрії та мистецтва на тему «Чотирикутники-ліворуч, чотирикутники-праворуч»; геометрії та трудового навчання на тему «Чотирикутники».

Цікавими є інтегровані уроки математики, фізики та біології. Наприклад, багато рослин і тварин мають дивну властивість прогнозувати зміни погоди,

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

різні природні явища (землетруси, грози, виверження вулканів тощо). Отже, живі барометри, компаси, сейсмографи є цікавим матеріалом для інтеграції математики, фізики та біології.

Орієнтація на інтегровані уроки реалізує накопичений у рамках STEM-освіти досвід комплексного освоєння математики та природничих наук через:

– застосування математичних і природничих знань при розв'язуванні освітніх завдань;

– розвиток навичок формулювання гіпотез, планування та проведення експериментів, оцінки отриманих результатів;

– усвідомлення значення математики та інформатики у повсякденному житті людини;

– формування вміння моделювати реальні ситуації мовами алгебри та геометрії, а також досліджувати побудовані моделі математичними методами;

– розвиток навичок роботи зі статистичними даними;

– розуміння фізичних основ та принципів роботи машин та механізмів, засобів пересування та зв'язку, побутових приладів, промислових технологічних процесів тощо.

Математика може бути представлена в розумінні та тлумаченні законів краси в мистецтві та природі (пропорція, періодичність, симетрія та ін.), у красі математичних доведень, у красивому розв'язанні завдань.

При введенні нового математичного терміну чи символу рекомендується пояснювати історію їх виникнення, а при викладанні нової теми намагатися показати історичну необхідність її розгляду. Основний акцент доцільно зробити на використанні геометричних знань у архітектурі, живопису тощо. У ході доведення теорем наочність може виступати як його основа.

Слід відзначити, що сьогодні масова цифровізація освіти сприяє входженню навчання через відкриття у повсякденне життя [1, с. 15]. У останні роки почали розвиватися відкриті навчальні ситуації в цифровому середовищі, з використанням цифрових датчиків, алгоритмів обробки даних, які

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

допомагають учням освоювати алгоритм та інструментарій дослідження та проєктування. Такий інструментарій дозволяє учневі самостійно розкрити на локальному матеріалі (який завжди є унікальним і специфічним) загальні закономірності, відомі в науці. Тому цифровізацію освіти теж слід віднести до STEM-технологій навчання математики.

Зважаючи на предмет нашого дослідження, однією із STEM-технологій навчання математики ми вважаємо використання прикладних задач, що реалізує прикладну спрямованість курсу математики старшої школи. Дійсно, складання математичної моделі задачі – це переклад завдання на мову математики. Розв’язуючи на уроках математики задачі прикладного характеру (економічні, екологічні, фізичні) шляхом моделювання, учень отримує факти важливості математики для науки і повсякденного життя. Це можуть бути задачі про архітектурні споруди рідного селища або про відомі на весь світ пам’ятки архітектури; це задачі біологічного змісту про розмноження бактерій, ріст популяцій комах; хімічного змісту про утворення розчинів, швидкість ходу хімічної реакції; фізичного змісту про швидкість руху тіла, виконану роботу, силу струму тощо.

Як інструмент реалізації STEM-освіти через прикладну спрямованість курсу математики також виокремлюємо практико-орієнтовані завдання. Під ними розуміють завдання, умови яких є описом ситуацій із повсякденного життя учнів. Прикладом таких завдань можуть бути:

– завдання на складання текстових задач після проведення виробничих екскурсій;

– практичні роботи, пов’язані з безпосереднім вимірюванням, спостереженням, збором необхідної інформації; задачі на купівлю товарів, оптимізацію витрат тощо [20, с. 188].

Про це мова піде більш детально у другому розділі на прикладі вивчення теми «Похідна та її застосування».

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Підсумовуючи вище викладене, варто ще раз підкреслити, що в сучасній соціокультурній ситуації інтенсивно формується нове уявлення щодо перспектив подальшого розвитку системи української освіти, надання якісних освітніх послуг через упровадження в закладах освіти STEM-моделі.

Системний підхід до вивчення математики з упровадженням STEM-технологій сприяє розвитку інновацій та реалізації творчого потенціалу учнів у майбутньому.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

РОЗДІЛ 2.
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ STEM-НАВЧАННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

2.1. Аналіз навчальних програм і підручників з теми «Похідна та її застосування»

Відповідно до навчальної програми з математики для учнів 11-го класу, вивчення теми «Похідна та її застосування» завершує функціональну лінію курсу алгебри і початків аналізу. Під час їх вивчення основна увага повинна приділятися змісту понять, їх геометричному та фізичному тлумаченню [33, с. 9]. Саме через зміст поняття похідної розв'язуються задачі прикладного характеру, спрямовані на формування життєвих компетентностей учня, його професійне самовизначення.

Слід зауважити, що розв'язання прикладних задач неможливе без застосування наближених обчислень. Це обумовлює той факт, що чинну навчальну програму для учнів 11-го класу доцільно доповнити питаннями, пов'язаними із застосуванням методів наближених обчислень, зокрема під час вивчення теми «Похідна та її застосування». Розглянемо фрагмент навчальної програми, яка розкриває зміст вивчення теми «Похідна та її застосування» (табл. 2.1.):

Таблиця 2.1.

Зміст навчальної програми з теми «Похідна та її застосування»

ТЕМА 1. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (26 ГОД)
Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з поняттям похідної функції, розкрити її геометричний та фізичний зміст. Сформувати уявлення про дотичну до графіка функції в заданій точці і на основі введеного поняття похідної вивести її рівняння. Виявити зв'язок між похідною та основними властивостями функції (монотонність, точки екстремуму, найбільше та найменше значення функції) та навчити застосовувати апарат похідної до

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

<table>
<tr><td colspan="2">дослідження функції та побудови її графіка. Сформувати уявлення про застосування поняття похідної до наближених обчислень під час розв’язання прикладних задач.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Методичні вказівки</u>. Під час вивчення теми поняття похідної вводиться через розв’язання задачі про визначення миттєвої швидкості та задачі про дотичну до графіка функції в заданій точці як граничне положення січної. Таким чином обґрунтовується фізичний та геометричний зміст похідної, що дозволяє вивести рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці.
Також на основі введеного поняття обґрунтовується формула для знаходження наближеного значення функції в заданій точці.
Вивчені правила знаходження похідних дають змогу пов’язати похідну функції та її властивості: монотонність, точки екстремуму функції, її найбільше та найменше значення. Уміння визначити властивості функцій застосовують здебільшого до побудови графіків функцій, розв’язування прикладних задач на знаходження найбільшого та найменшого значення функції, а також до наближеного розв’язування рівнянь.
Завершується вивчення теми прикладами застосування похідної до розв’язування прикладних задач, із використанням методів наближених обчислень та оцінкою отриманих результатів.</td></tr>
<tr><th>Зміст навчального матеріалу</th><th>Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів</th></tr>
<tr><td>[Неперервність та границя функції у точці]
Задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної.
Застосування похідної до наближеного обчислення значень елементарних функцій.</td><td>Пояснює геометричний та фізичний зміст похідної.
Знаходить приріст функції та наближене значення функції в заданій точці.
Формулює правила диференціювання, достатні</td></tr>
</table>

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Таблиця похідних. Похідна суми, добутку і частки функцій. Похідна складеної функції. **Наближені обчислення значень функції.** Похідна в фізиці, техніці та економіці. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків: зростання, спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку. Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці. **[Розв’язання рівнянь графічним способом за допомогою комп’ютерних програм]** Розв’язування задач прикладного змісту.	умови зростання і спадання функції, умови екстремуму функції. **Називає** похідні основних елементарних функцій. **Знаходить** похідні функцій, користуючись таблицею похідних і правилами диференціювання. **Застосовує** похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції. **Обчислює** найбільше і найменше значення функції на відрізку. **Розв’язує** прикладні задачі, що передбачають виконання дій над наближеними значеннями чисел та величин. **Оцінює** точність отриманих розв’язків. **Розв’язує** нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Навчальною програмою з математики передбачено вивчення алгебри і початків аналізу протягом 420 годин, тобто надається 210 годин на навчальний рік, а це 6 годин на тиждень. Тема «Похідна та її застосування» вивчається у 10-му класі, на неї умовно відводиться 42 години. У пояснювальній записці зазначено, що ця тема була перенесена до 10 класу нещодавно, тому за відсутністю можливості забезпечити учнів матеріалами вчителю дозволено перенести її до 11 класу.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Окрім власне математичної компетентності вчителеві на уроках алгебри і початків аналізу у процесі навчання теми «Похідна та її застосування», треба формувати інші дев’ять компетентностей. У навчальній програмі також виокремлюються наскрізні чотири лінії ключових компетентностей, а саме: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров’я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність» [28]. Загалом, традиційна методика та сучасні підходи до навчання, які передбачають впровадження компетентнісного підходу у навчальний процес, дають змогу вчителю забезпечити якісну математичну підготовку учнів. Але треба наголосити, що це можливо за умови педагогічної майстерності вчителя. Впровадження компетентнісного підходу у навчання математики, створює умови для всебічного розвитку дитини, і при цьому від вчителя вимагається розвивати національну свідомість учнів, вміння алгоритмічно мислити, навчати розпізнавати проблеми, що виникають у навколишній дійсності і розв’язувати їх засобами математики, створювати умови для формування позитивних якостей особистості.

Також, зазначено, що основною метою вивчення теми «Похідна та її застосування» у класі з поглибленим вивченням математики є ознайомлення учнів з використанням поняття і властивостей похідної для розв’язування задач, зокрема визначення властивостей функції, доведення тотожностей, розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем.

Діючими навчальними програмами з математики для старшої школи всіх рівнів передбачено, що під час вивчення теми «Похідна та її застосування» учні усвідомлять значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху, навчаться розв’язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. У програмі з математики для учнів 10–11 класів профільного рівня зазначено, що при формуванні поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює не лише швидкість механічного руху, а й швидкість

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

зміни будь-якого процесу з часом (наприклад, швидкість нагрівання тіла, швидкість випаровування тощо).

Після вивчення даної теми учні повинні (рис. 2.1.):

–формулювати означення похідної та пояснювати її геометричний і фізичний зміст;

–знаходити кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції; знаходити похідні функцій;

–застосовувати похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції;

–знаходити найбільше і найменше значення функції на проміжку;

–розв’язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень;

–застосовувати результати дослідження функції за допомогою похідної до розв’язування рівнянь і нерівностей та доведення тотожностей і нерівностей;

–описувати поняття опуклості функції та точок перегину;

–застосовувати другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину;

–досліджувати функції за допомогою першої та другої похідних і використовувати одержані результати для побудови графіків функцій.

Рис. 2.1. Вимоги до результатів навчання учнів з теми «Похідна та її застосування»

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

На профільному рівні учням не пропонується вивчати похідну оберненої функції (похідну обернених тригонометричних функцій), основні теореми диференціального числення, нерівність Йенсена та її застосування, також не розглядається способи застосування похідної для розв'язування тотожностей та не передбачено роботу з похідними порядком вищим за другий. При вивченні теми вчитель повинен обрати правильну мотивацію для учнів, яка безперечно буде викликати інтерес і спонукати дітей до активної праці на уроці та вдома. Такою мотивацією також може стати інформація про те, що вміння «працювати» з похідною знадобиться на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) і може принести учню велику кількість балів. Тому вчителя на уроках повинні особливо приділяти увагу вправам, які можуть зустрітись в зовнішньому незалежному оцінюванні.

Міністерство освіти і науки (МОН) у переліку навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників [32] для вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглиблену рівні в 10 класі пропонує підручник А. Г. Мезляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [27] для 11-го класу, оскільки навчальна програма була оновлена, а старі підручники залишись дійсними. На нашу думку, у цьому підручнику теоретичний матеріал по введенню понять математичного аналізу запропоновано на доступному для учнів рівні при поглибленому вивченні математики. У навчальному тексті кожного параграфа запропоновані приклади розв'язування однієї або кількох типових задач. Для полегшення роботи з підручником, автори вводять умовні позначення, згідно яких можна з'ясувати, що в підручнику присутня рівнева диференціація завдань, вони містяться в досить великій кількості, і для їх розв'язання в повному обсязі не вистачить часу відведеного на тему, але з іншого боку завдяки цьому у вчителя завжди є широкий вибір задач, які можна запропонувати школярам на уроці і в домашньому завданні. Деякі параграфи містять рубрику «Коли зроблено уроки», у якій для ознайомлення пропонуються доведення теорем, завдяки цьому можна спонукати учнів до самостійної роботи або використовувати матеріал для навчання учнів у математичних гуртках. Також у підручнику знаходяться короткі відомості про вчених-математиків, що може послугувати

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

у якості мотивації учнів. Тема «Похідна та її застосування» представлена в другому розділі підручника в параграфах з 8 по 17.

Розглянувши зазначений підручник, можна зробити висновок, що він містить велику кількість задач різного рівня складності, що дозволяє реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні, формувати пізнавальний інтерес до математики (табл. 2.2.).

Таблиця 2.2.

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника

Види вправ	Номери з підручника			
	1 рівень	2 рівень	3 рівень	4рівень
Вправи для створення мотивації	11	22	45	
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	7, 8	16, 17, 20, 21, 28	32, 33, 34, 35, 36, 45	53
Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей			39, 40, 41, 42, 43, 44	
Вправи на базі яких відбувається ілюстрація понять, що вводяться	12, 13, 14, 15	24, 25, 26		
Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нових понять			37, 38, 46	49, 50, 51, 52
Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння нових понять	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10	18, 19, 23, 27, 29, 30	45, 47	48, 53

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Досить поширений і новий підручник таких авторів як А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [26]. При вивченні теми «Похідна та її застосування», також можна користуватись підручниками профільного рівня таких авторів як А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [27], Є. П. Нелін, О. Є. Долгова [29]. Задачний матеріал підручника теж має чотири рівні складності, але в порівнянні з поглибленим рівнем пропонується менша кількість творчих завдань, прикладів на доведення, вправ спрямованих на виділення суттєвих властивостей. Деякі теореми вводяться без доведення, але автори роблять зауваження, що з доведенням учні можуть ознайомитись у підручнику поглибленого рівня для 11 класу. У даному підручнику також доступно вводиться теоретичний матеріал та пропонуються приклади вправ для самостійного опрацювання, на ознайомлення з темою, надана велика кількість задач, але у деяких випадках недостатня для викладання на рівні поглибленого вивчення.

У всіх розглянутих підручниках теоретичний матеріал вводиться за наступною схемою:

1) вводиться визначення границі функції та дається його пояснення; визначається поняття неперервної функції;

2) вводиться поняття диференційовної функції у точці, назва операції знаходження похідної, визначається зв'язок неперервності та диференційовності;

3) вводяться правила диференціювання: похідна суми, різниці, добутку, частки, винесення множника за знак похідної; формулюється правило обчислення похідної складної функції;

4) визначаються похідні елементарних функцій: сталої, показникової, логарифмічної та тригонометричних;

5) вивчається геометричний зміст похідної, виводиться рівняння дотичної до графіку функції;

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

6) формулюється теорема Лагранжа для доведення теорем про достатні умови монотонності функцій і подальшого застосування похідної до знаходження проміжків зростання та спадання функції;

7) визначаються поняття критичних та стаціонарних точок, точок максимуму та мінімуму (екстремумів); формулюється теорема Ферма, що має наочний геометричний зміст, за допомогою якої доводиться теорема про необхідну і достатню умову для точок екстремуму;

8) розглядається застосування похідної для побудови графіків функцій; пропонується схема дослідження властивостей функції, а також алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень функції;

9) пояснюється схема застосування похідної до розв'язування задач на оптимізацію (додатковий підвищений складний матеріал);

10) вводиться додатковий складніший матеріал: похідна другого порядку, необхідна для визначення опуклості графіка функції та знаходження точок перегину.

Відтак, введення поняття похідної починається з вивчення середньої та миттєвої швидкостей руху, що призводить до поняття різницевого відношення. Визначення похідної формулюється як границя різницевого відношення. Поняття границі дається після визначення похідної без докладного вивчення, а визначення границі різницевих відношень формулюється на інтуїтивній основі і роз'яснюється на конкретних прикладах. Учні користуються наочними уявленнями під час пошуку похідних найпростіших функцій. Це відповідає ідеї, згідно з якою елементи математичного аналізу в середній школі викладаються на наочно-інтуїтивній основі, з акцентом на їхнє практичне застосування до розв'язування найпростіших завдань.

Аналізуючи діючі шкільні підручники з курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, доходимо висновку, що в більшості з них обмежуються розглядом класичних задач, що приводять до поняття похідної, розглядають прикладні задачі, пов'язані лише з механічним змістом похідної

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

та окремі прикладні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції. Лише підручнику з курсу математики для 11 класу [27; 29] представлені більш різноманітні задачі практичного змісту на застосування поняття похідної.

2.2. Основний зміст навчального матеріалу з теми

Розглянемо основний зміст навчання теми «Похідна та її застосування». Аналіз підручників показав, що вивчення теми «Похідна» починається з розгляду задач, які приводять до введення поняття похідної, та її позначення.

Задачі, що приводять до поняття похідної

Існує декілька методів введення поняття «похідна». Наприклад, спочатку вводяться поняття приросту функції і приросту аргументу, або вивчення похідної починається з введення границі послідовності і границі функції в точці, або підведення до визначення похідної починається з розгляду руху матеріальної точки і визначення її миттєвої швидкості.

Зазвичай, перед введенням поняття «похідна» розглядають задачі про миттєву швидкість нерівномірного прямолінійного руху матеріального об'єкта та про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці. Дані задачі спрямовані на формування не тільки математичної компетентності, а й основних компетентностей у природничих науках і технологіях, оскільки оперують поняттями, що використовуються у фізиці.

Розглянемо задачу про миттєву швидкість: нехай автомобіль рухається прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку зі змінною швидкістю протягом часу t (на проміжку часу [0;t]) за законом $s = s(t)$, який дозволяє визначити положення автомобіля в будь-який момент часу t_0. Потрібно визначити швидкість автомобіля в будь-який момент часу.

Розв'язання:

1) в заданий момент часу t_0 задають приріст часу Δt, тобто розглядають проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

2) обчислюють приріст відстані Δs, яку проїде автомобіль за час Δt: $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$

3) обчислюють середню швидкість v_c руху автомобіля протягом часу Δt:

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

4) обчислюють миттєву швидкість руху, яка відповідає часу $t = t_0$:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_c = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

За допомогою такого алгоритму учні вже зможуть приймати активну участь у розв'язанні задачі про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці, оскільки матимуть майже готову схему пошуку кутового коефіцієнту дотичної.

Умова задачі: розглянемо довільну неперервну функцію $y = f(x)$, графіком якої є крива лінія (рисунок 2.1.). Нехай точки M_0 та M належать цій функції, проведемо січну MM_0 та зафіксуємо точку M_0, а точка M, рухаючись по кривій, наближається до точки M_0, при цьому в граничному положенні при наближенні точки M до точки M_0 січна займе положення прямої M_0T. Пряму M_0T називають дотичною до даної кривої в точці M_0. Потрібно знайти рівняння дотичної M_0T.

Розв'язання

Для початку вчитель малює графік довільної функції разом з січною та дотичною (рис. 2.2).

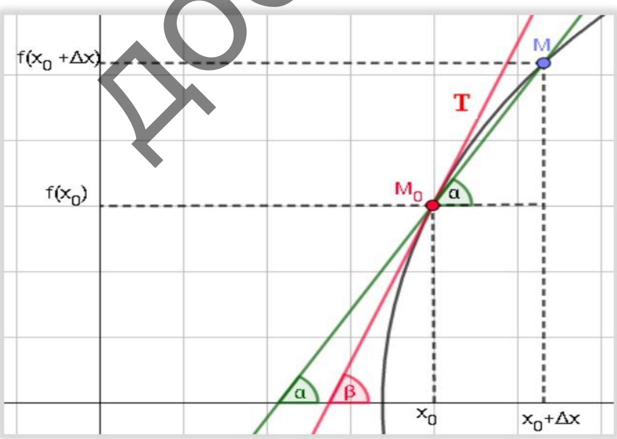


Рис. 1.2. Дотична до графіка функції

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Далі пояснюється, що дотична M_0T – це пряма, а положення прямої $y = kx + b$, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = tg\beta$, де β – кут між прямою і додатнім напрямом осі OX. Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число k, а для цього використовують розглянутий вище алгоритм:

1) надають аргументу x_0 приросту Δx та одержують нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$;

2) відносно приросту аргументу знаходять відповідний приріст самої функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3) знаходять кутовий коефіцієнт січної MM_0, який дорівнює $tg\alpha$:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

4) обчислюють кутовий коефіцієнт дотичної $M0T$, який дорівнює $tg\beta$:

$$tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

5) Записують рівняння дотичної $M0T$ у вигляді $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, де $k = tg\beta$ і тим самим знаходять розв’язок задачі.

Після розгляду даних задач, що є різними за змістом та призначенням, робиться висновок про те, що отримані відповіді до них свідчать про їх ідентичність з математичної точки зору, тобто базуються на певному загальному понятті, яким є поняття похідної функції.

Під час розв’язування задач, вчитель наголошує учням на важливість використання символів, що стосуються приросту функції та приросту аргументу, для цього розглядаються відповідні вправи [36].

У підручнику А. Г. Мерзляка та інших [27] спочатку вводиться поняття приросту функції та її аргументу, тож розглянемо цей спосіб.

Вводиться функція $y = f(x)$ та довільна фіксована точка x_0, яка належить області визначення даної функції. Також зазначають, що x – довільна точка, що лежить в деякому околі точки x_0, а різниця $(x - x_0)$ називається приростом незалежної змінної (аргументу) в точці x_0, і позначається Δx, тобто:

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

$$\Delta x = x - x_0$$

Звідки отримується рівність $x = \Delta x + x_0$. Кажуть також, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx. Внаслідок цього значення функції f зміниться на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ця різниця називається приростом функції f в точці x_0, і позначається Δf, отже маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Також зазначається, що для приросту функції $y = f(x)$ прийняте позначення Δy , тобто $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Для більшої наочності учням пропонується рис. 2.3.

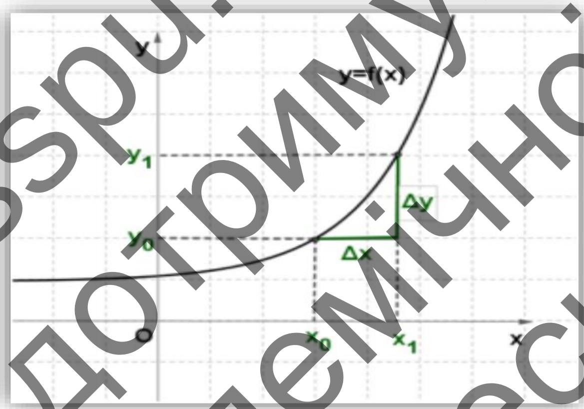


Рис. 2.3. Приріст функції

Для закріплення та кращого розуміння матеріалу розглядаються задачі на знаходження приросту деякої елементарної функції із даним приростом аргументу і фіксованою точкою. Найчастіше для прикладу використовують функції $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ або функції виду $f(x) = kx + b$.

Поняття похідної. Механічний, геометричний, економічний та біологічний зміст похідної

Означення. Похідною функції f в заданій точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f в точці x_0 до відповідного приросту аргумента, за умови, що приріст аргумента прямує до нуля.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Похідну функції f в заданій точці x_0 позначають за допомогою штриха $f'(x_0)$. Знаючи це учні можуть записати подане означення символічною мовою:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

У підручнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [29, с. 81] надається схема обчислення похідної, але кроки 1) – 4), які були розглянуті в задачах, що приводять до означення похідної, вже задають правила обчислення похідної і учні можуть працювати за цими кроками.

Отже, коли означення було введене, за його допомогою та використовуючи кроки 1) – 4) тренуються знаходити похідні найпростіших функцій в точці, при чому зазначають, що якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають диференційованою в цій точці, а з диференційованості слідує неперервність.

З метою формування предметної математичної компетентності для глибшого усвідомлення означення похідної разом з учнями роблять висновок про геометричний та механічний зміст похідної на основі розглянутих задач у вигляді таблиці (табл. 2.3):

Таблиця 2.3.

Зміст похідної

Механічний зміст похідної $s(t)$ – закон руху матеріальної точки $v(t)$ – миттєва швидкість $s'(t_0) = v(t_0)$	Миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює похідній функції, що визначає закон руху матеріальної точки по координатній прямій у точці t_0.
Геометричний зміст похідної $f'(x_0) = k(x_0) = tg\beta$, де f – дана функція	Похідна функції в заданій точці є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції в цій точці, тобто дорівнює

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

$\angle\beta$– кут нахилу дотичної до графіка f k – кутовий коефіцієнт дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$– рівняння дотичної до графіка функції f в точці x_0	тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці. (Кут відлічують від додатного напрямку осі OX проти годинникової стрілки.)

Після того, як був розглянутий спосіб знаходження похідної за допомогою означення, починають вивчати таблицю похідних (табл. 2.4). З метою формування дослідницької компетентності перед учнями ставлять задачу – вивести похідні зазначених функцій.

Таблиця 2.4

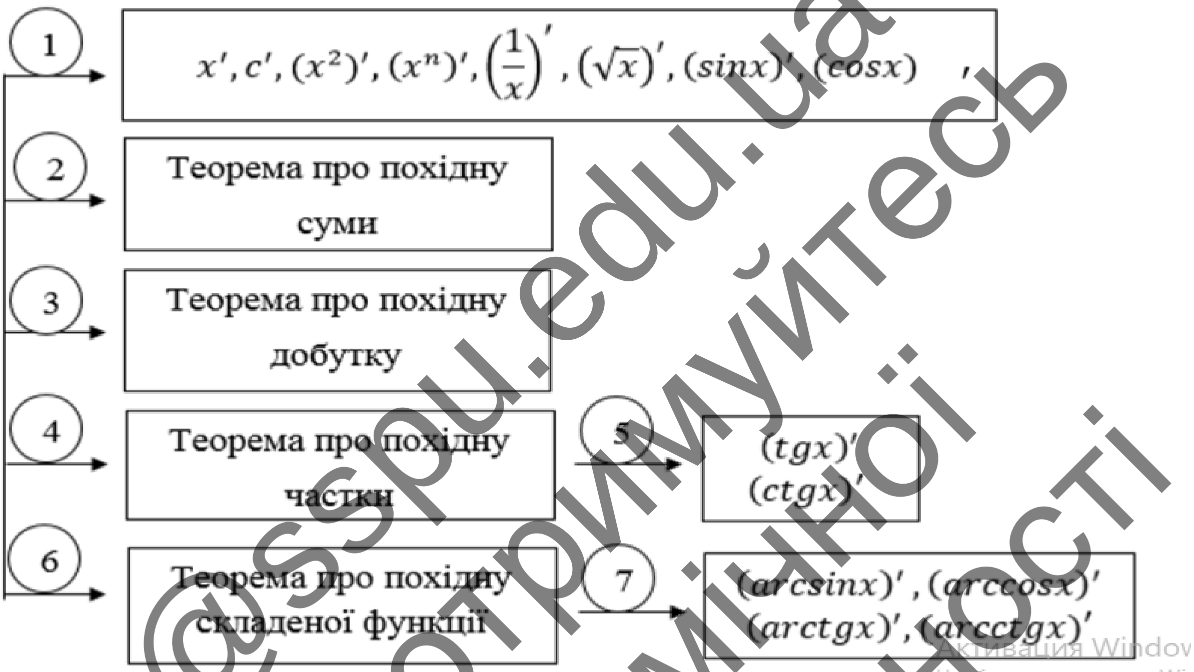
Таблиця похідних

Дана функція	**Похідна даної функції**
c, c– $const$	0
x	1
x^2	$2x$
x^n, $n \epsilon$ R	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$ctg\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$/ $\arccos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$/$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

$acrtg\ x/\ arcctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}/-\frac{1}{1+x^2}$

Треба сказати, що таблиця похідних вивчається не вся одразу, а по мірі вивчення правил обчислення похідних (рис. 2.4).



2.4. Схема вивчення правил обчислення похідних

Дана послідовність вивчення обумовлена тим, що істинність деяких похідних доводиться не тільки за допомогою означення, а й за допомогою розглянутих теорем, наприклад, похідну від тангенсу можна вивести з теореми про похідну частки, а похідну арксинусу за теоремою про похідну складеної функції.

Інші теоретичні відомості про правила обчислення похідних, основні теореми про похідну та застосування похідної представлено нами у додатку А.

Отже, ми розглянули основні теоретичні відомості та рекомендації до вивчення теми «Похідна та її застосування» в курсі алгебри і початків аналізу, тобто зміст цієї теми, який повинні опанувати учні.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

2.3 Практична реалізація STEM-технологій у процесі навчання теми «Похідна та її застосування»

Як показує аналіз змісту матеріалу теми «Похідна та її застосування» у п. 2.1. та 2.2., у процесі формування поняття похідної основна увага приділяється ознайомленню учнів із найпростішими методами диференціального числення та вироблення вміння застосовувати їх для дослідження функцій у найпростіших випадках. Проте, вивчаючи тему «Похідна та її застосування», учні повинні побачити все різноманіття застосування поняття похідної, для чого їм треба опанувати найпростіші навички диференціювання і знання деяких властивостей похідної.

Тому розглядаючи особливості реалізації STEM-підходу у рамках навчання математики, наголошуємо, що демонстрація застосування похідної можлива під час розв’язування завдань прикладного характеру. При цьому основний акцент робиться на зв’язку математичних понять з галузями діяльності. Так, багато математичних теорій при формалізованому викладі здаються штучними, відірваними від життя, просто незрозумілими. Якщо ж, наприклад, підійти до цих проблем з позиції історичного розвитку, то стане видно їхнє глибоке життєве значення, їхню природність, необхідність.

Ось кілька основних напрямів прикладного застосування поняття похідної, які дозволять учням побачити різноманіття її застосування:

1) розв’язування завдань на знаходження найбільшого та найменшого значень;
2) застосування у фізиці, хімії та інших науках, розглядаючи узагальнену інтерпретацію поняття «похідна», а також наближені обчислення;
3) застосування методу дослідження функції за допомогою похідної до розв’язання рівнянь та нерівностей, розкриваючи тим самим внутрішньопредметні зв’язки.

Під час вивчення змістової лінії «Похідна та її застосування» введення поняття похідної відбувається після узагальнення способу розв’язування класичних задач: задачі механіки про визначення миттєвої швидкості і

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

геометричної задачі про визначення положення дотичної до кривої в певній точці [26], [27], [29]. При розв’язуванні згаданих задач доводиться проводити ті ж самі міркування, що і при розв’язуванні численних задач природознавства та економіки. Розгляд цих задач буде корисним у першу чергу для учнів, які вивчають математику в класах природничого-математичного напряму профілізації (фізико-математичного, хіміко-біологічного, екологічного профілю) та суспільно-гуманітарного напряму профілізації (економічного профілю). Це можуть бути різноманітні задачі природознавства (про визначення сили струму, кутової швидкості, лінійної густини стержня, потужності, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції та швидкості зростання популяції тощо), які приводять до поняття похідної. До поняття похідної приводять і численні економічні задачі (про визначення продуктивності праці, граничних витрат виробництва, граничного виторгу, а також граничного прибутку, граничного продукту, граничної корисності, граничної ціни).

Взагалі кажучи, математична модель, заснована на деякому спрощенні, ніколи не буває тотожна об’єкту, що розглядається, не передає всіх його властивостей і особливостей, а є його наближеним відображенням. Однак, завдяки заміні реального об’єкта відповідною йому моделлю, з’являється можливість математично сформулювати задачу і скористатися для аналізу математичним апаратом, який залежить від конкретної природи досліджуваного об'єкта. Цей апарат дозволяє одноманітно описати широке коло факторів і спостережень, провести їх детальний кількісний аналіз, передбачити, як поводиться об’єкт у різних умовах. Такого роду математичні моделі успішно застосовуються у фізиці, хімії, біології, економіці, допомагають побачити силу міжпредметних зв’язків, важливу роль математики, що дає потужний апарат для вирішення багатьох завдань, які висуваються та успішно вирішуються у різних галузях науки та практики.

У цій роботі звертаємо увагу на особливості використання понять початків аналізу у завданнях з природознавства, завдань військової

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

спрямованості, що призводять до поняття похідної та використовують ці поняття (завдання про силу електричного струму, швидкість хімічної реакції, швидкість зростання популяції та ін.). Такі задачі можуть використовуватися й на інтегрованих уроках з математики та інших предметах, а також вони є зразком прикладних задач, виконання яких дозволяє підвищити ефективність засвоєння нових знань та навичок учнями.

До згаданої системи прикладних задач у процесі вивчення теми «Похідна та її застосування» відносяться такі типи задач:

1) задачі практичного змісту, що приводять до поняття похідної;
2) прикладні задачі, в розв'язуванні яких поняття похідної відіграє першорядну роль;
3) задачі на застосування похідної до дослідження функцій (на монотонність, на екстремум, найбільше та найменше значення, за загальною схемою на основі якого будується її графік), які є математичними моделями прикладних задач.

Розглянемо задачі кожного типу.

Розглянемо *прикладні завдання, що призводять до поняття похідної*.

Задача про силу електричного струму. Нехай $q=q(t)$ – кількість електрики (у кулонах), що протікає через поперечний переріз провідника за час t; тобто кількість електрики є функцією часу. Для визначення швидкості зміни кількості електрики з часом користуються поняттям сили струму. Позначимо Δq – кількість електрики, що протікає через зазначений переріз за проміжок часу Δt від моменту t до $t+\Delta t$.

Відношення $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ називається середньою силою струму за час від t до $t+\Delta t$ і позначається $I_{сер}$. У випадку постійного струму $I_{сер}$ буде постійною. Якщо в ланцюзі змінний струм, то $I_{сер}$ буде різною для різних проміжків часу. Тому для ланцюга змінного струму вводять поняття сили струму I у момент часу t, визначивши її як межа середньої сили струму за проміжок часу від t до $t+\Delta t$, якщо $\Delta t \to 0$.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

$$\mathrm{I} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}, \qquad \text{тобто} \qquad \mathrm{I}(t) = q'(t).$$

Задача про швидкість хімічної реакції. Нехай дана функція $m = m(t)$, де m – кількість деякої речовини, що вступила в хімічну реакцію на момент часу t. Збільшенню часу Δt буде відповідати збільшення Δm величини m. Відношення $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ – середня швидкість хімічної реакції за проміжок часу Δt. Границя цього відношення при прямуванні Δt до нуля, тобто $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$, визначає швидкість хімічної реакції у даний час t, тобто $V = m'(t)$.

З розглянутих вище задач, що приводять до поняття похідної, випливає кілька висновків:

1. Швидкість прямолінійного руху є похідна шляху $S = S(t)$ за часом t, тобто $V = S'$ (аналогічно прискорення є похідна швидкості $a = V'$). У цьому полягає механічний зміст похідної.

2. Швидкість хімічної реакції є похідна кількості речовини $m = m(t)$ за часом t, тобто $V = m'(t)$.

3. Швидкість зростання популяції є похідна розміру популяції $p = p(t)$ за часом t, тобто $V = p\,'(t)$.

4. Швидкість зростання чисельності населення є похідна від населення $A = A(t)$ за часом t, тобто $V = A\,'(t)$.

5. Сила змінного струму I є похідна кількості електрики $q = q(t)$ за часом t, тобто $\mathrm{I} = q\ (t)$.

6. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 є похідна $f'(x_0)$. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

7. Продуктивність праці $f(t)$ є похідна від вироблення продукції $F(t)$ за часом t, тобто $f(t) = F'(t)$.

Пропонуємо такі приклади задач, в розв’язуванні яких поняття похідної відіграє першочергову роль.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

I. Якщо популяція у час t налічує $p(t)$ = 3000 + 100t^2 особин (t вимірюється у годинах), то швидкість зростання популяції є $p'(t)$ = 200t. Швидкість зростання популяції збільшується з часом. Якщо t = 5, швидкість зростання становить $p'(5) = 200\cdot 5 = 1000$ особин на годину. Якщо t = 10, то $p'(10) = 200\cdot 10 = 2000$ особин на годину.

II. Ракета під час руху здійснює коливальний рух навколо своєї осі згідно із законом $\alpha(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$. Знайти кутову швидкість та прискорення руху в момент часу $t_0 = \frac{\pi}{2} c$. Дати характеристику руху.

Розв'язання: $\omega(t) = \alpha'(t) = 12\cos\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$

$$\omega(t_0) = 12\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 12\sin\frac{\pi}{6} = 6 \ \text{(рад/с)}$$

$$\varepsilon(t) = \omega'(t) = -36\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$$

$$\varepsilon(t_0) = -36\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 36\cos\frac{\pi}{6} = 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \ \text{(рад/с}^2\text{)}$$

$\omega(t) \neq const, \varepsilon(t) \neq const$ нерівномірний рух.

Відповідь: $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$=6 рад/с, $\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)$=18 $\sqrt{3}$ рад/с^2.

III. Куля, потрапляючи у тверде тіло, рухається у ньому згідно із законом $S(t) = \frac{1}{k} ln(1+kV_0t)$, *де* V_0 – швидкість, з якою куля входить у тіло, k – постійна додатна величина.

Розв'язання: $V(t) = S'(t)$

$$V(t) = \left(\frac{1}{k}\ln(1 + kV_0t)\right)' = \frac{kV_0}{k(1 + kV_0t)} = \frac{V_0}{1 + kV_0t}$$

$$a(t) = V'(t), a(t) = \left(\frac{V_0}{1 + kV_0t}\right)' = -\frac{kV_0 \cdot V_0}{(1 + kV_0t)^2} = -k \cdot \left(\frac{V_0}{1 + kV_0t}\right)^2 = -k \cdot V^2$$

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

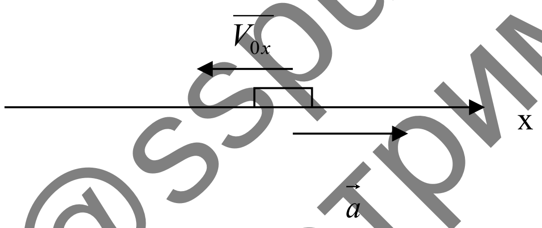
Відповідь: $V = \dfrac{V_0}{1 + kV_0 t}$; $a = -k \cdot V^2$.

IV. Матеріальна точка рухається вздовж осі OX згідно із законом $x(t)$. Знайти швидкість та прискорення руху у початковий момент часу. Описати характер руху та схематично зобразити рух матеріальної точки, якщо:

а) $x(t)= \frac{3}{4} - 8t + \frac{5}{6}t^2$

$$V(t) = x'(t) = -8 + \frac{5}{3}t; V(0) = -8 \text{ (м/с)}$$

$$a(t) = V'(t) = \frac{5}{3} \qquad a = \frac{5}{3} \text{ (м/с}^2\text{)}$$

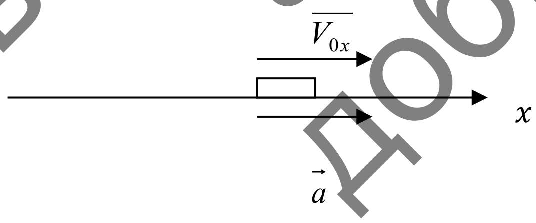


Рівноприскорений рух у напрямку, протилежному напрямку осі OX.

б) $x(t) = \sqrt{3} + 5t + \frac{1}{2}t^2$

$V(t)=x'(t)=5+t;$ $V(0)=5$ (м/с)

$a(t)=V'(t)=1;$ $a=1$ (м/с^2)



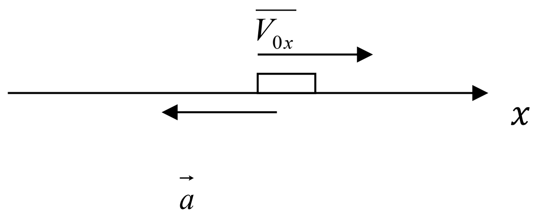
Рівноприскорений рух у напрямку, що співпадає з напрямком осі OX.

в) $x(t)=-\frac{3}{4}t^2 + \frac{7}{2}t - 2\sqrt{5}$;

$V(t) = x'(t)=-\frac{3}{2}t + \frac{7}{2}t$; $\quad V(0) = \frac{7}{2} = 3{,}5$ (м/с)

$a(t) = V'(t)=-1{,}5;$ $\quad a = -1{,}5$ (м/с^2)

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності



Рівноповільний рух у напрямку, протилежному напрямкуб осі *OX*.

V. Матеріальна точка рухається прямою. Рівняння руху:

S(t)= $t^3 - 3\frac{t^2}{2} + 2t - 1$ (м). Знайдіть її швидкість у час *t*=3 (с). Знайти, у який час прискорення дорівнюватиме 9 м/с2?

Розв’язання:

а) *V(t) = S'(t) =* $3t^2$*-3t+2;*

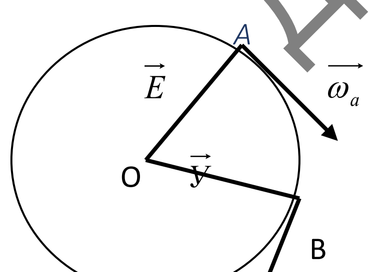
V(3) = 27-9+2 = 20 (м/с).

б) a(t) = V'(t) = 6t-3;

6t-3 = 9; 6t = 12; t = 2 (с).

Відповідь: *V* (3) = 20 м / с; а = 9 м/с^2 у момент часу *t* = 2 с.

VI. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі згідно із законом φ(t). Знайти кутову швидкість та кутове прискорення руху. Дати характеристику руху, якщо:



fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

а) $\varphi(t)=12t+4$

$\omega(t)=\varphi'(t)=12(рад/с)$

E(t)=$\omega'(t)=0$ $\quad\omega=const\quad$ E=0

Рівномірний рух по колу.

б) φ(t)=5t^3+6t

$\omega(t)=\varphi'(t)=15t^2+6$ $\quad$ E(t)=$\omega'(t)=30t$

$\omega\neq const \qquad \varepsilon=const$

Нерівномірний рух по колу.

в). $\varphi(t)=2t^2+8t$ $\qquad$ $\omega(t)=\varphi'(t)=4t+8$

E(t)=$\omega'(t)=4$

$\omega\neq const \qquad \varepsilon\neq const$

Рівноперемінний рух по колу.

VII. Тіло масою 5 кг рухається прямолінійно згідно із законом $S(t) = (5\text{-}t)\,(2t\text{-}6) + 50$. Знайти кінетичну енергію тіла через 2 секунди після початку руху.

Розв'язання:

$E_к=\frac{mv^2}{2}$

$V(t) = S'(t) = -(2t-6) + 2(5-t) = -2t+6+10-2t = -4t+16$

$V(t_0) = -4\cdot2+16 = -8+16 = 8$ (*м/с*)

$E_к = \frac{5\cdot64}{2}=5\cdot32=160$ (*Дж*)

Відповідь: *Ек* = 160 Дж.

Розглянемо *задачі прикладного змісту на застосування похідної.*

Уміння розв'язувати такі задачі допоможе учням у подальшому житті, оскільки вони описують реальні ситуації з різних сфер людської діяльності.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Задача 1. Молодий підприємець Юрій у період економічної кризи вирішив викупити нерентабельне підприємство і запросив економіста Германа допомогти йому з розрахунками по оптимізації витрат. Одна з задач, що були поставлені перед Германом, була такою: знайти , за яких умов витрати жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданої ємності будуть найменшими.

Розв’язання

Перший етап. Складання відповідної математичної моделі.

Складання математичної моделі цієї задачі полегшується тим, що відома форма банки і обумовлено, що вона повинна бути заданої ємності. Це важливо для складання математичної моделі. Важливою також є вимога, щоб витрати жерсті були мінімальними. З математичних міркувань це означає, що площа повної поверхні банки, яка має форму циліндра, повинна бути найменшою; істотні і розміри банки.

Несуттєвими для складання моделі є чисельні розміри банки та вид консервів, для яких вона призначена.

Позначимо об’єм банки через V (куб. од.) і сформулюємо відповідну математичну задачу: визначити розміри циліндра з об’ємом V (куб. од.) так, щоб площа його повної поверхні була найменшою.

Для розв’язання задачі позначимо радіус основи циліндра через x, а висоту через h (всі вимірювання у сантиметрах). Тоді об’єм циліндра визначається як

$$V = \pi x^2 h \quad \text{або} \quad h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Площа повної поверхні циліндра складається з бічної поверхні та площ двох основ:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + \frac{2\pi x V}{\pi x^2} = \frac{2\pi x^2 + 2V}{x}$$

Отже, $S(x) = \frac{2\pi x^2 + 2V}{x}$.

Оскільки змінна x може набувати тільки додатних значень, то розв'язання задачі зводиться до знаходження найменшого значення $S(x)$ на проміжку $(0, \infty)$.

Другий етап. Робота з складеною моделлю.

Знайдемо похідну $S'(x)$:

$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$.

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $S'(x) = 0$.

Корінь рівняння: $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

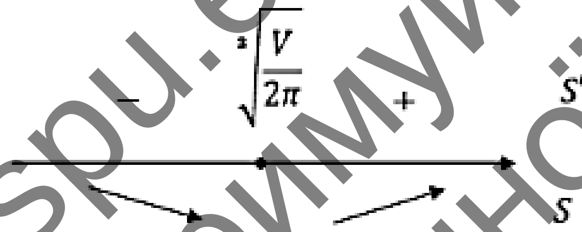


Рис. 2.17. Дослідження на точки екстремуму

Отже, в точці $x = S(x)$ маємо мінімум. Отже, функція в цій точці досягає найменшого значення. Таким чином, площа повної поверхні циліндра, що має об'єм V, буде найменшою при $h = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, тобто коли циліндр рівносторонній.

Задача 2. Сашко вирішив зробити своїй мамі подарунок до 8 березня і замовив у друга Дениса шкатулку з дорогоцінного металу. В майстерню він приніс шматок листа з цього металу розміром 32 см. на 20 см. Потрібно виготовити відкриту зверху коробку найбільшої місткості, вирізаючи по кутах квадрати і загинаючи кромки, що залишилися. (Відповідь: при $x = 4$ см об'єм шкатулки буде найбільший).

Задача 3. Легенда про заснування Карфагена свідчить, що коли фінікійський корабель пристав до берега, місцеві жителі погодилися продати прибулим стільки землі, скільки можна застелити шкурою бика.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Але хитра фінікійська цариця Дідона розрізала цю шкуру на ремінці, зв'язала їх і відгородила ременем велику ділянку землі, що примикала до моря. Вважаючи берег моря прямолінійним, а огороджену ділянку прямокутною, спробуйте приблизно визначити, яку площу мала змогу, зайняти Діодона, якщо розмір шкури 4 м^2, а ширина ремінців, на які Дідона її розрізала, 1 мм. (Відповідь: 1 км^2).

Задача 4. Паперовому змію, який має форму кругового сектора, бажають надати таку форму, щоб він вміщав в даному периметрі P = 80 см найбільшу площу. Якими мають бути розміри паперового змія?

Як зазначалося у п.1.3., реалізація STEM-освіти успішно здійснюється з використанням цифрових технологій. Тільки за умови, що учням цікаво навчатися, підвищується пізнавальна активність, активізується мислення та розумові процеси, школярі починають працювати більш продуктивно і творчо. Це стосується і теми «Похідна та її застосування».

Для цього пропонуємо набір завдань, які учні спочатку моделюють в $GeoGebra$, а потім проводять обчислення. Наведемо приклади таких завдань [49].

Задача 1. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

STEM задача. Підлога зали має форму еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. При проведенні реставрації було вирішено, що найбільшу частину підлоги прямокутної форми потрібно викласти мармуровою плиткою. Знайти сторони цього прямокутника.

Розв’язання.

Введемо систему координат, як показано на рисунку 2.5.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

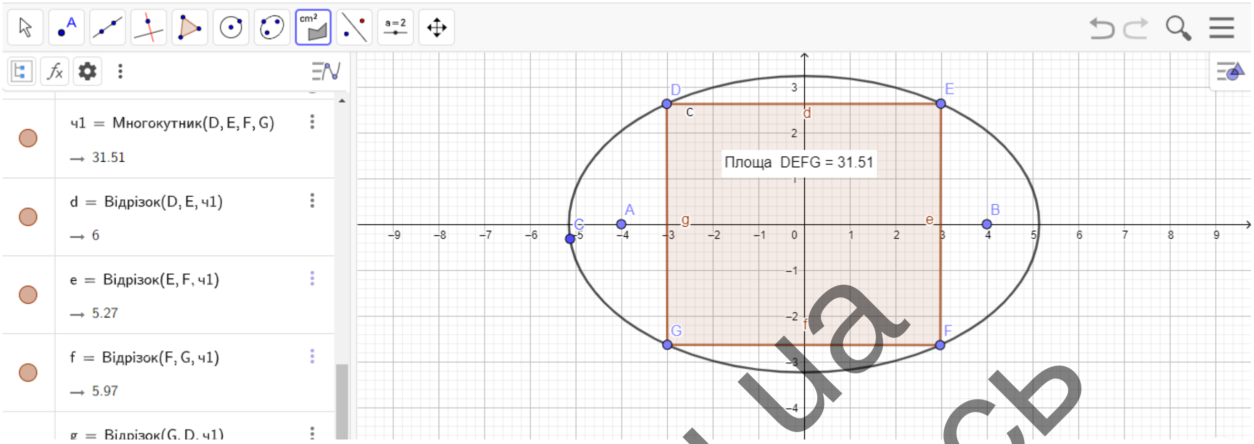


Рис. 2.5. Ілюстрація до завдання з використанням пакету GeoGebra

Нехай вершина прямокутника E має координати x_0, y_0. Враховуючи, що ця точка також належить і еліпсу, то вона задовольняє його рівняння: $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Маємо $y_0^2=b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$, $y_0=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$. Розглядаємо значення $x_0>0,\ y_0>0$, оскільки точка E знаходиться в першій координатній чверті. Тоді площа прямокутника $DEFG$ буде

$$S=|2x_0|\cdot|2y_0|=4x_0y_0=4x_0\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}=\frac{4b}{a}x_0\sqrt{a^2-x_0^2}.$$

Областю визначення функції $S(x_0)$ є $x_0\in(0;a)$, оскільки при $x_0=0$ і $x_0=a$ прямокутник вироджується в пряму. Дослідимо функцію $S=S(x_0)$ на екстремум.

$$S'(x_0)=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x_0^2}+x_0\cdot\frac{-2x_0}{2\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x_0^2}-\frac{x_0^2}{\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)=$$

$$=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-x_0^2-x_0^2}{\sqrt{a^2-x_0^2}}=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-2x_0^2}{\sqrt{a^2-x_0^2}}.$$

Похідна $S'(x_0)$ рівна нулю, якщо $2x_0^2=a^2$ або $x_0=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, похідна $S'(x_0)$ не існує в точках $x_0=\pm a$. Точка $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ належить області визначення і при переході аргументу x_0 через цю точку похідна $S'(x_0)$ змінює знак з плюса на

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

мінус, тому функція $S(x_0)$ досягає свого найбільшого значення. Знайдемо сторони прямокутника *DEFG*:

$$AB = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a\,,\;\; BC = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}b\,.$$

Задача 2. З кола вирізано сектор з центральним кутом α. З сектору скручена конічна поверхня (див. рис.2.6). При якому значенні кута α об'єм отриманого конуса буде найбільшим?

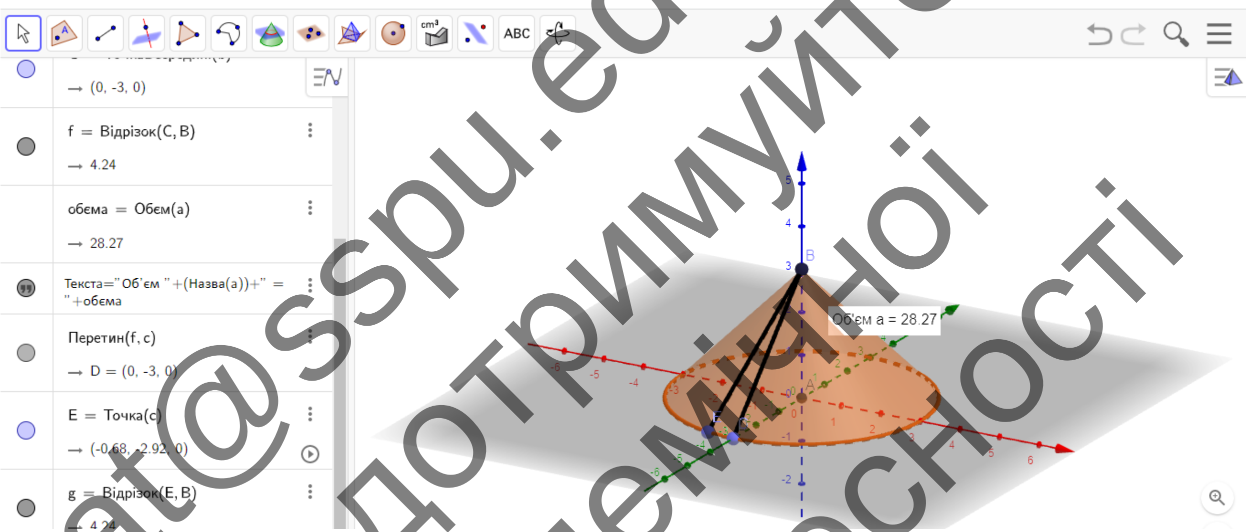


Рис. 2.6. Ілюстрація до завдання з використанням пакету GeoGebra

STEM задача. Для виконання певного технологічного процесу потрібно побудувати захисну споруду зі спеціального матеріалу у формі конуса. З круга такого матеріалу вирізано сектор з центральним кутом α. При якому значенні кута α об'єм отриманої споруди буде найбільшим?

Розв'язання. Нехай $SB = R$ - радіус кругового сектора (рис. 2.7), твірна конуса SB співпадає з радіусом кругового сектору; довжина дуги сектору співпадає з довжиною дуги кола, що лежить в основі конуса, тобто $SB \cdot \alpha = 2\pi \cdot KB$ або $R \cdot \alpha = 2\pi \cdot KB$, звідси $KB = \dfrac{R\alpha}{2\pi}$. Об'єм конуса

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

$$V = \frac{1}{3}\pi(KB)^2 \cdot SK = \frac{1}{3}\pi(KB)^2\sqrt{(SB)^2 - (KB)^2}$$

або зі врахуванням введених позначень та виконаних перетворень

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2 - \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}\ .$$

Дослідимо функцію V на екстремум як функцію аргументу α за умови, що область визначення цієї функції $\alpha \in (0; 2\pi)$.

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \left[2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \alpha^2 \cdot \frac{-2\alpha}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}\right] = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\alpha\left(8\pi^2 - 3\alpha^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}.$$

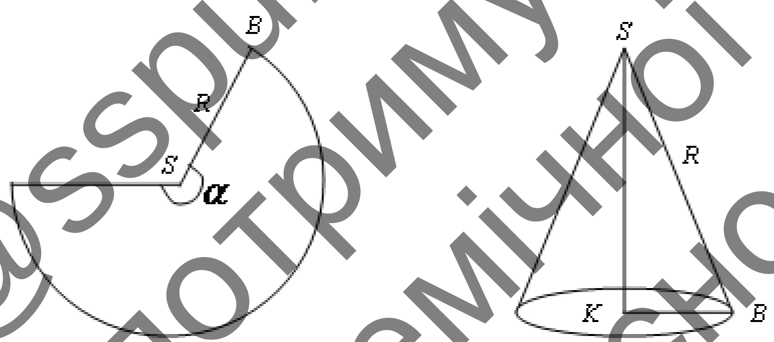


Рис. 2.7. Ілюстрація до обчислень у задачі

Єдиною критичною точкою, що задовольняє область визначення функції є точка $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$. При переході аргументу α через цю точку похідна $V'(\alpha)$ змінює знак з плюса на мінус, тому при $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$ маємо максимум, а також найбільше значення функції V. Таким чином, об'єм отриманого конуса буде найбільшим, якщо $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$.

Детальний опис дослідження проєкту з можна прослідкувати в онлайн-сервісі «GeoGebraBook» [9].

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Також у додатку Б пропонуємо розробку уроку, в якому реалізовано ці ідеї STEM-освіти.

Отже, вивчаючи тему «Похідна та її застосування» учні повинні побачити все різноманіття застосування поняття похідної, з'ясувати, навіщо їм треба опанувати найпростішими навичками диференціювання та знаннями деяких властивостей похідної. Впоратися з цим завданням учню може допомогти вчитель за допомогою методик, які містять у собі як математичну складову, так і творчу та прикладну. Такий STEM-урок з теми «Похідна та її застосування» має бути насичений в першу чергу прикладними задачами та цифровими технологіями як інструментом їх розв'язування.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

ВИСНОВКИ

У ході дослідження з’ясовано, що STEM-освіта базується на ідеї навчання учнів на основі інтеграції чотирьох предметних областей (S – Science – наука, T – Technology – технології, E – Engineering – інженерія, M – Math – математика) та поєднання їх у цілісну парадигму навчання, що базується на реальних проблемах навколишнього світу. STEM-освіта – це низка чи послідовність курсів або програм навчання, яка готує учнів до успішного працевлаштування, до освіти після школи або для того й іншого, вимагає різних і більш технічно складних навичок, зокрема із застосуванням математичних знань і наукових понять. Сьогодні STEM є одним з головних напрямів інноваційної освіти. STEM-освіта – це не просто передача знань від учителя до учнів, це спосіб розширення свідомості та зміни реальності у всіх ланках освітнього простору.

Визначено, що психологічні особливості учнів старшої школи передбачають позитивні аспекти, які вчитель може використати у ході формування навичок STEM-освіти (зокрема, це активний розвиток пізнавальної сфери, якісно нові показники пам’яті, уваги, мислення, у порівнянні із учнями середньої школи, самостійність, дорослість, прагнення до самоідентифікації, достатньо висока мотивація до навчальної діяльності).

Головна мета STEM-підходу – подолати властиву традиційній освіті відірваність від вирішення практичних завдань та побудувати зрозумілі учням зв’язки між навчальними дисциплінами. Однією із STEM-технологій навчання математики є використання прикладних задач. В сучасній соціокультурній ситуації інтенсивно формується нове уявлення щодо перспектив подальшого розвитку системи української освіти, надання якісних освітніх послуг, зокрема через упровадження в закладах освіти моделі STEM. Системний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін, на якому базується STEM-навчання, сприяє розвитку інновацій, реалізації творчого потенціалу особистості та її допрофесійної підготовки.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

Вивчаючи тему «Похідна та її застосування» учні повинні побачити все різноманіття застосування поняття похідної, з’ясувати, навіщо їм треба опанувати найпростішими навичками диференціювання та знаннями деяких властивостей похідної. Впоратися з цим завданням учню може допомогти вчитель за допомогою методик, які містять у собі як математичну складову, так і творчу та прикладну. Чим насиченіший урок історичними довідками, малюнками, формами, літературними цитатами, тим легше учень орієнтуватиметься під час уроку.

Загалом, у роботі розкрито методичні особливості та інструменти навчання учнів у рамках теми «Похідна та її застосування» у рамках застосування STEM-підходу. У роботі розроблено низку прикладних задач, за допомогою яких учні можуть опанувати не тільки тему «Похідна та її застосування», але й встановити потенціал застосування цих знань у різних інших науках та видах діяльності людини – у природознавстві, хімії, фізиці та ін.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрієвська В. М., Білоусова Л. І. Концепція BYOD як інструмент реалізації STEAM-освіти. *Фізико-математична освіта: науковий журнал*. 2017. Випуск 4 (14). С. 13–17.

2. Бабійчук С. STEM-освіта у США: проблеми та перспективи. *Педагогічний часопис Волині*. 2018, №1 (8). С. 12–17.

3. Балик Н. Р., Шмигер Г. П. Підходи та особливості сучасної STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*. 2017. Вип. 2. С. 26–30.

4. Бісіркін П. М. Особливості використання комп'ютерних та Інтернет-технологій у процесі практичних занять з трудового навчання учнів основної школи. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2013. Том 36. №4. С. 18–25.

5. Бобровницька С. А. Підвищення мотивації учнів до навчального предмета «Хімія» за допомогою використання STEM-технологій. *Професійні компетенції сучасного керівника чинник розвитку освітньої сфери*. 2020.

6. Ващенко Г. Г. Загальні методи навчання: підручник для педагогів. 1-е видання. Київ: Українська видавнича спілка, 1997. 441 с.

7. Генкал С. Е. Організація самостійної пізнавальної діяльності учнів профільних класів на основі індивідуальних освітніх проєктів: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.09. Київ, 2008. 24 с.

8. Глухов В. П., Ковшиков В. А. Психолінгвістика. Теорія мовної діяльності. Київ: АСТ, 2007. 223 с.

9. Гончарова Н. О. Використання ігрових технологій в STEM-освіті. *Нові технології навчання: наук.-метод. зб. / Інститут інноваційних технологій і змісту освіти МОН України*. Київ, 2016. Вип. 88. Частина 2. С. 160−163.

10. Давидов В. В. Теорія навчання. Київ: Педагогіка, 1996. 356 с.

11. Декарт Р. Правила керівництва розуму. Київ, 1989. Т. 1. С. 77–153.

12. Дьюї Дж. Демократія та освіта: пер. з англ. Київ: «Педагогіка», 2000. 384 с.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

13. Зимняя И. А. Психология обучения иностранному языку в школе. Москва: Просвещение, 1991. 219 с.

14. Кедров Б. М. Беседы о диалектике. Москва: Молодая гвардия, 1989. С. 186.

15. Колток Л., Іваник Н. Упровадження STEM-освіти в освітній процес нової української школи. Науковий збірник «Актуальні питання гуманітарних наук: міжвузівський збірник наукових праць молодих вчених Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. 2020. Том 3, №27. С. 133–136.

16. Корейба І. В. Методика навчання професійного читання майбутніх учителів німецької мови з використанням Інтернет-ресурсів: дис. …канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2010. 286 с.

17. Король С. В. Використання методу проєктів для посилення професійної спрямованості гуманітарних дисциплін у підготовці майбутніх інженерів. *Вісник Національної академії Державної прикордонної служби України*. 2010. Вип. 1. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vnadps_2010_1_11

18. Корольський В. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Кривий Ріг, 2013. Ч. 2-а. 393 с.

19. Кузовлєва Н. Є. Професійна орієнтація як один з факторів формування мотивації в навчанні. Іноземні мови в школі. 1986. № 4. С. 22–25.

20. Кузьменко О. Сутність та напрямки STEM- освіти. *Наукові записки, Вип. 9. Сер. «Проблеми методики фіз.-мат. і технол. освіти. Часопис КДПУ*, 2017. С. 188–190.

21. Литвинова С. Г. Технології навчання учнів у хмаро-орієнтованому навчальному середовищі загальноосвітнього навчального закладу. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2015. Том 47. №3. С. 49–66.

22. Лукашева А. О. Шляхи впровадження STEM-освіти в позашкілля. Збірник «Грані науково-технічної творчості Запорізької області», №2, 2018. 40 с.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

23. Марчукова С. М. Розвиток ідеї пансофійності в педагогічних працях Я. А. Коменського. *Людина та освіта*. 2013. № 4. С. 170–173.

24. Математика. 5–11 класи: навчальні програми, методичні рекомендації щодо організації навчально-виховного процесу в 2017/2018 навчальному році / уклад. Б. В. Кудренко. Харків: Вид-во «Ранок», 2017. 144 с.

25. Мацко Л. А., Прищак М. Д., Годлевська В. Г. Основи психології та педагогіки: навчальний посібник для студентів заочної форми навчання. Вінниця: ВНТУ, 2009. 163 с.

26. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.

27. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. Харків: Гімназія, 2011. Ч. 1. 256 с.

28. Навчальні програми МОН (математика). Інформаційний портал. URL: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html

29. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень. Харків: Гімназія, 2011. 448 с.

30. Носова Я. М. Математика – цариця наук, але служниця хімії. Математика у професії та інших науках: збірка статей заочних читань, проведених у рамках III обласного математичного фестивалю. Харків, 2017. 126 с.

31. Овчарук О. В. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. Стратегія реформування освіти в Україні. Київ: КІС, 2003. С. 68–75.

32. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання в основній і старшій школі загальноосвітніх навчальних

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

закладів з навчанням українською мовою. Інформаційний портал. URL: https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/

33. Прокопенко Н. С., Вашуленко О. П., Єргіна О. В. Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання. Харків: Вид-во «Ранок», 2011. 384 с.

34. Рогова Г. В., Рабінович Ф. М., Сахарова Т. Є. Методика навчання іноземних мов у середній школі. Київ: Просвітництво, 1991. 287 с.

35. Саломатнікова О. М. методичні рекомендації та поради щодо використання варіативної складової робочого навчального плану з математики. Херсон, 2012. 34 с.

36. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге видання, доповнене і перероблене. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

37. Татаринов Д. Л. Про використання міжпредметних зв’язків математика-фізика у додатковій освіті школярів. *Педагогіка і психологія*. 2012. № 2. С. 141–145.

38. Шевчук Т. В., Кравчук Г. Т. Стан і перспективи розвитку інформаційних технологій в Україні. *Науковий вісник НЛТУ України*. 2018. Т. 28, № 9. С. 114–118.

39. Філософський енциклопедичний словник / НАН України, Ін-т філософії ім. Г. С. Сковороди; голов. ред. В. І. Шинкарук. Київ: Абрис, 2002. 742 с.

40. Фролов А. В. Роль STEM-освіти у «новій» економіці США. *Запитання нової економіки*. 2010. № 4. С. 80–91.

41. Akaygun S., Aslan-Tutak F. STEM Images Revealing STEM Conceptions of Pre-Service Chemistry and Mathematics Teachers. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*. Volume 4. Number 1. 2016.

42. Aydin-Gunbatar S., Tarkin-Celikkiran A., Kutucu E. S. & Ekiz-Kiran B. “The influence of a design-based elective STEM course on pre-service chemistry teachers’content knowledge, STEM conceptions, and engineering views”. *Chem. Educ. Res. Pract*. Vol. 19, 2018. No. 3. P. 954–972.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності

43. Marr B. 8 Things Every School Must Do To Prepare For The 4th Industrial Revolution. *Forbes*. URL: https://www.forbes.com/sites/bernardmarr/2019/05/22/8-things-every-school-must-do-to-prepare-for-the-4th-industrial-revolution/–20bf96d1670c

44. Sanders M. STEM, STEM education, STEMmania. *The Technology Teacher*. 2009. № 68. P. 20–26.

45. STEM-підхід в освіті: ідеї, методи, перспективи. URL: http://elib.bspu.by/handle/doc/41934

46. Wilson Z. S., McGuire S. Y., Limbach P. A., Doyle M. P., Marzilli L. G. & Warner I. M. "Diversifying science, technology, engineering, and mathematics (STEM): Aninquiry into successful approaches in chemistry. Educ., Vol. 91, 2014. No. 11. P. 1860–1866.

47. Yakman G. STEAM Education: an overview of creating a model of integrative education. *STEAM Education*. URL: https://steamedu.com/research/

48. Shyshenko I., Martynenko O., Chkana Y., Spas T., Udovychenko O., Semenikhina O. A mathematics teacher's training to create a maker space in mathematics lessons by means of GeoGebra. *45nd jubilee international conventionon information, communication and electronic technology (MIPRO)*, (May 23–27, 2022), Opatija, Croatia. 2022. Pp. 909–914.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

ДОДАТКИ

Додаток А

Теоретичні відомості з теми «Похідна та її застосування»

Правила, за якими прийнято обчислювати похідні суми (різниці), добутку або частки функцій у підручнику [29] сформульовані у наступних теоремах.

Теорема 1 [про похідну суми (різниці) функцій].

У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ також є диференційовною функція $y = f(x) \pm g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$.

Тобто, можна сказати, що похідна суми дорівнює сумі похідних.

Теорема 2 [про похідну добутку функцій].

У тих точках, де є диференційованими функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) \cdot g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

Наслідок з теореми про похідну добутку функцій.

У тих точках, де є диференційованою функція $y = f(x)$, також є диференційованою функція $y = kf(x)$, де k – деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність $\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$

Для учнів буде простішим таке формулювання даного наслідку, як: постійний множник можна виносити за знак похідної.

Теорема 3 [про похідну частки функцій].

У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційованими і значення функції $y = g(x)$ не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційованою, причому для всіх таких точок виконується рівність:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Диференціюючи функції, учні обов'язково зіткнуться зі складеними функціями виду $h(x) = f(g(x))$, для таких випадків існує наступна теорема.

Теорема 4 [про похідну складеної функції].

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Якщо функція $t = g(x)$ диференційована в точці x_0, а функція $y = f(x)$ диференційована в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційованою в точці x_0, причому $h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$.

Після теореми 4, з метою формування дослідницької компетентності засобами розвитку дедуктивного методу, перед учнями ставлять питання про зв'язок між похідними взаємно обернених функцій та встановлюють його за допомогою наступної теореми.

Теорема 5 [про похідну оберненої функції].

Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0, де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція g диференційована в точці y_0 і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Зазвичай доведення теорем про похідні складеної та оберненої функцій, з метою розвитку дослідницької компетентності, проводять на математичних гуртках або факультативах, але за наявності часу, розглядають доведення і на уроці.

Вчителя намагаються приділяти достатню кількість часу правилам обчислення похідних і, відповідно, застосуванню даних правил на практиці, тому що, як зазначає О. І. Вишенський, під час виконання учнями практичних вправ працюють синтез та аналіз, механізм узагальнення і трансформації, пошук, оскільки вимагається оцінка фактів, активно діє увага [9, с. 126]. Тобто, іншими словами, при виконанні практичних вправ формуються всі компоненти математичної компетентності, зокрема і дослідницька.

Основні теореми диференціального числення

Перед початком введення теорем актуалізуються знання геометричного змісту похідної та рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0 [3, с. 264].

Теорема 6 [Ферма].

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Нехай функція f, визначена на проміжку $[a;b]$, у точці $x_0 \in (a;b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційованою в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Далі ілюструють графіки функцій неперервних на відрізку $[a;b]$ і диференційованих на інтервалі $(a;b)$ таких , що функція у точках a і b набуває однакових значень, і на яких видно, що існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a;b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$. Цей висновок підтверджує теорема.

Теорема 7 [Ролля].

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a;b)$, що $f'(x_0) = 0$.

Після розгляду теореми Ролля, за допомогою рисунка 1.5., роблять перехід до теореми Лагранжа. На рисунку зображають графік функції, неперервної на відрізку $[a;b]$ і диференційованої на інтервалі $(a;b)$. Розглядається трикутник *AMB*, з якого можна знайти кутовий коефіцієнт прямої *AB*:

$$tg\,\angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

З рисунка 1.5. видно, що на дузі *AB* існує така точка *C*, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій *AB*.

Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої *AB*, тобто існує така точка $x_0 \in (a;b)$, що:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Рис. 1.5. Перехід до теореми Лагранжа

Отримані висновки підтверджує така теорема:

Теорема 8 [Лагранжа].

Якщо функція f *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і диференційована на інтервалі* $(a; b)$ *то існує така точка* $x_0 \in (a; b)$, *що* $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Зазначені теореми потребують доведення, що як свідчить З. І. Слєпкань [50, с. 414] не викликає в учнів труднощів, тому зазвичай пропонують їм розглядати доведення самостійно. Дане завдання спрямоване на формування такої компетентності як «вміння вчитися впродовж життя» та дослідницької компетентності.

Застосування похідної до дослідження функції

У шкільному курсі АПА на поглибленому рівні за допомогою похідної, функції досліджують на:

1) Монотонність (зростання і спадання).
2) Точки екстремуму і екстремуми функції.
3) Досягнення найбільших і найменших значень на відрізку.
4) Опуклість.

Пояснення ознак зростання, спадання та сталості функцій розпочинають з ілюстрацій графіків відомих учням функцій, таких як

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

парабола, гіпербола, пряма, паралельна вісі Ox. Властивості монотонності цих функцій вже були доведені раніше, тому їх тільки пов'язують з використанням похідної.

Якщо розглядають графік функції $y = x^2$, то показують, що на проміжку $x \in (0;\infty)$, де, як відомо, функція зростає, дотична до графіка в будь якій точці утворює гострий кут з додатнім напрямом вісі Ox, тобто похідна у цих точках додатна, аналогічно показують, що на проміжку $x \in (-\infty;0)$ похідна від'ємна. У випадку розгляду прямої, паралельної вісі Ox, яка задається функцією виду $y = b$, отримують, що похідна в будь-якій точці буде дорівнювати нулю. Дані спостереження підтверджують наступними теоремами.

Теорема 9 [ознака зростання функції].

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема 10 [ознака спадання функції].

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Теорема 11 [ознака сталості функції].

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) = 0$, то функція f константна на цьому проміжку.

Існують інші методичні підходи введення достатніх умов монотонності функції. Наприклад, у підручнику М. І. Башмакова [2, с. 82-83] учнів підштовхують до терем 9-11 за допомогою механічного змісту похідної, даний метод використовується і в підручнику А. Г. Мерзляка та інших [29, с. 133], але тільки для виведення ознаки сталості функції.

Теорема 12 [властивість зростаючої (спадної) функції].

Якщо диференційована на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Дослідження функцій на монотонність є алгоритмічною вправою, тому зазвичай виокремлюють кроки дослідження на прикладі декількох функцій. Подібний алгоритм виклала у своєму посібнику З. І. Слепкань [50, с. 413].

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно:

1) Знайти область визначення функції та точки розриву.
2) Знайти похідну.
3) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції.
4) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції.

Також показують учням, що теорему про ознаку сталості функції можна використовувати і для доведення тотожностей. Так, якщо вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x_0 \in I$ виконується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) = A$ для всіх $x \in I$.

При роботі з точками екстремуму і екстремумами функції учням наголошують, що точки максимуму і мінімуму – це точки екстремуму, а значення функції в цих точках максимуму і мінімуму – це екстремум функції. Учні часто плутають ці поняття та допускають помилки.

Перед введенням означення точок максимуму і мінімуму, говорять про окіл точки.

Означення. Інтервал (a, b), який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Далі вводять означення точок максимуму і мінімуму та демонструють їх на графіках. Похідну і точки екстремуму поєднує наступна теорема.

Теорема 13 [про точки екстремуму].

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0 .

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує? Відповідь на це запитання заперечна. За допомогою прикладів показують, що рівність нулю похідної в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0 .

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

Беручи до уваги дане означення роблять висновок, що точки екстремуму слід шукати серед критичних точок.

Далі розглядають теореми, які є достатніми умовами, що показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 14 [ознака точки максимуму функції].

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Теорема 15 [ознака точки мінімуму функції].

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

При переході до знаходження максимуму і мінімуму функції звертають увагу на те, що екстремуми характеризують поведінку функції в деякому околі точки x_0, а не на всій області визначення чи на її частині.

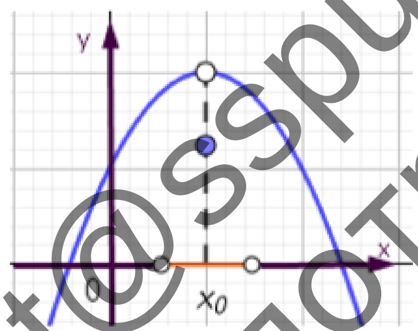
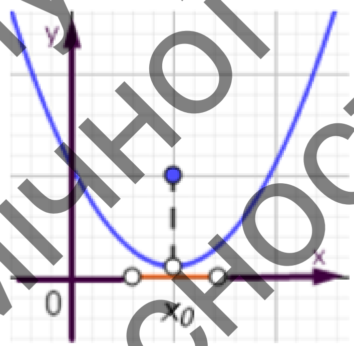
Перед тим, як розпочинати вивчати способи застосування похідної до дослідження функції, необхідно провести актуалізації знань та умінь, щоб в учнів не виникало труднощів при роботі з теоремами про зростання і спадання

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

функції, точки екстремуму, екстремуми функції, найбільше і найменше значення на відрізку, опуклість функції. Так, наприклад, пригадати означення точок максимуму і мінімуму можна за допомогою таблиці.

Таблиця 2.2.

Точки екстремуму

Точка мінімуму	**Точка максимуму**
Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \leq f(x)$.  $x_{min} = x_0$ – точка мінімуму $y_{min} = f(x_{min})$– мінімум	Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \geq f(x)$.  $x_{max} = x_0$ – точка максимуму $y_{max} = f(x_{max})$ – максимум

Після формулювання зазначених теорем, необхідно скласти алгоритми пошуку точок екстремуму, найбільшого і найменшого значення функції на відрізку, проміжків опуклості функції та обов'язково запропонувати кілька прикладів закріплення цих алгоритмів.

Доцільно після опрацювання теоретичного матеріалу про точки екстремуму функції подати учням узагальнений матеріал у вигляді таблиці.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму

Необхідна умова	**Достатня умова**
В точках екстремуму похідна або не існує, або дорівнює нулю. x_0 – точка екстремуму або: $f'(x_0) = 0$ або: $f'(x_0)$ не існує	Якщо при переході через точку x_0, у якій функція є неперервною: 1) похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – точка максимуму;  2) якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму. 

У підручнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра поглибленого рівня останній параграф теми «Похідна та її застосування» має назву «Побудова графіків функцій», де потрібними стануть всі набуті знання з даної теми. Головне – це сформулювати разом з учнями алгоритм дослідження функцій за допомогою похідної та на конкретному прикладі показати суть кожного з пунктів, а також досягти послідовності їх виконання. Далі доцільно зробити акцент на розв'язуванні практичних завдань, оскільки з цим матеріалом в учнів можуть виникнути певні труднощі.

Приклад. Побудувати графік функції

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

Розв'язання.

1) Область визначення функції f :

$X = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

2) Функція парна. Тому її графік симетричний відносно осі ординат.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

3) Функція не є періодичною. Це випливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

4) Графік функції перетинає вісь ординат у точці (0;1). Нулі функції відсутні. Отже, графік функції не перетинає вісь абсцис.

5) Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки. Для цього знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-4\right) - 2x\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-16x}{\left(x^2-4\right)^2};$$

$$\frac{-16x}{\left(x^2-4\right)^2} = 0;$$

x=0–критична точка.

Для $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;0)$ $f'(x) > 0$. Отже, на цих проміжках функція зростає. Оскільки функція парна, то на проміжках $(0;2) \cup (2;+\infty)$ вона спадає. Тоді точка x=0 є точкою локального максимуму. Знайдемо його значення

$f(0) = -1$.

6) Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину:

$$f''(x) = -16\left(\frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}\right)' = -16\frac{(x-4)^2 - x\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4} =$$

$$= -16\frac{-3x^2-4}{\left(x^2-4\right)^3} = 16\frac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

На проміжках $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вниз. На проміжку $(-2;2)$ $f''(x) < 0$, а тому графік функції опуклий вгору.

Точки перегину відсутні.

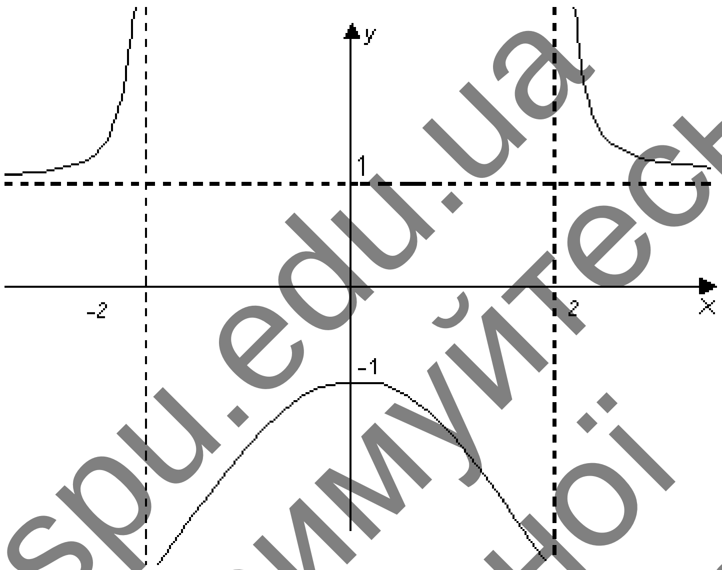
7) Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4} = 1$, то пряма y=1 є горизонтальною асимптотою для графіка функції.

Дослідимо поведінку функції біля точок x=2, x=-2:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty.$$

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Отже, в точці x=2 функція має розрив другого роду, а пряма x=2 є вертикальною асимптотою. Враховуючи парність функції, робимо висновки, що пряма x=-2 також є вертикальною асимптотою.



Приклад. Побудувати графік функції:

$f(x) = \sin x - \ln \sin x$

Розв'язання.

1. Область визначення функції f :

$x = (2\pi k; \pi + \pi k)$.

2. Функція не належить ні до парних, ні до непарних. Це безпосередньо випливає з того, що область її визначення несиметрична відносно нуля.

3. Період функції $T = 2\pi$. Тому дослідження функції достатньо спочатку провести на проміжку $(0;\pi)$. Крім того, враховуючи, що $\sin(\pi - x) = \sin x$, робимо висновок про симетричність графіка відносно прямої $x = \frac{\pi}{2}$ на проміжку $(0;\pi]$. Тому можна обмежитися дослідженням функції на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

4. Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Для цього знайдемо її похідну

$$f'(x)=\cos x-\frac{\cos x}{\sin x}=\cos x\left(1-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Для $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x)<0$. Тому функція на цьому проміжку спадає. Тоді на проміжку $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ вона зростає, а в точці $x=\frac{\pi}{2}$ має мінімум, який дорівнює 1.

Враховуючи періодичність функції, робимо висновок, що вона на проміжках $\left(2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ і зростає на проміжках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$. В точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ набуває мінімального значення, яке дорівнює 1.

5. Дослідимо функцію на опуклість на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f''(x)=-\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Звідси безпосередньо випливає, що для $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $f''(x)>0$. Отже, графік функції опуклий вниз. Тоді і на проміжку $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ він опуклий вниз. Таким чином, на проміжках $(2\pi k;\pi+2\pi k)$ графік функції опуклий вниз.

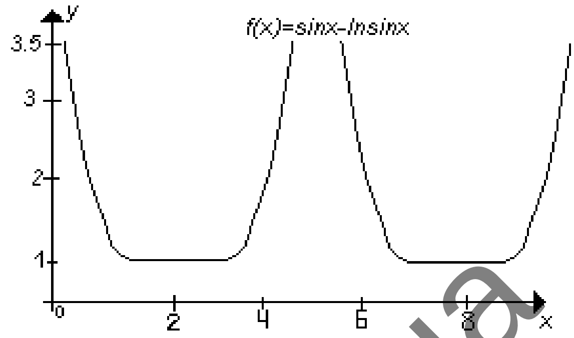
6. Визначимо поведінку функції в околі нуля справа і в околі точки π зліва:

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin x-\ln\sin x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to \pi-0}(\sin x-\ln\sin x)=+\infty.$$

Отже, прямі $x=0$, $x=\pi$ є вертикальними асимптотами. Тоді і прямі $x=\pi k$, $k\in Z$ – вертикальні асимптоти.

fizmat@sspu.edu.ua
суворо дотримуйтесь
академічної
доброчесності



Розглянемо застосування похідної до розв'язування рівнянь на конкретних прикладах.

Приклад 1. Яким умовам повинні задовольняти параметри p та q, щоб рівняння $x^3 + px + q = 0$ мало три різних дійсних корені?

Розв'язання. Розглянемо функцію

$f(x) = x^3 + px + q$.

Для того щоб дана функція мала три різні нулі, необхідно, щоб її похідна

$f'(x) = 3x^2 + p$

мала два різних нулі. А це буде тоді, коли $p < 0$. Звідси $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Отже, похідна має один додатний і один від'ємний корінь. Тоді функція f має обов'язково один від'ємний корінь. А це можливо за умови, що $q > 0$. Отже, $p < 0, q > o$.

Приклад 2. Скільки дійсних коренів має рівняння

$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$?

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1.$$

Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} + x = x(1 - e^{-x)}.$$

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Нехай

а) x<0, тоді очевидно, $f'(x)$>0;

б) x=0, тоді $f'(0)=0$;

в) x>0, тоді знову ж таки $f'(x)$>0.

Отже, похідна всюди додатна, за винятком однієї ізольованої точки x=0. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на всій числовій осі. Тому дане рівняння не може мати більше одного кореня. Оскільки $f'(0)=0$, то нуль і є тим єдиним коренем.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x+\sin x=0$.

Розв'язання.

Очевидно. що тривіальним коренем заданого рівняння є $x=0$. Доведемо, що інших коренів рівняння не має. Розглянемо функцію $f(x)=2x+\sin x$.

Знайдемо її похідну:

$f'(x)=2+\cos x>0$ для будь-якого $x\in R$.

Отже, функція f зростає на всій числовій осі, тому рівняння більше не має коренів.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^5+x^3+5x-7=0$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x)=x^5+x^3+5x-7$.

Вона диференційовна на всій області визначення. Знайдемо її похідну:

$$f'(x)=5x^4+3x^2+5.$$

Очевидно, що $f'(x)>0$ для $\forall x\in R$.

А це означає, що рівняння має лише один корінь (найвищий показник степеня непарний). Тривіальним коренем є . $x=1$.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Додаток Б

Конспект уроку

Тема: Вивчення таблиці похідних

Мета:

– ***начальна***: повторити і узагальнити застосування техніки диференціювання за допомогою означення похідної, організувати діяльність учнів на виведення похідних елементарних функцій;
– ***розвивальна***: розвивати аналітичне та критичне мислення, увагу, вміння працювати самостійно, інформаційну культуру учнів;
– ***виховна***: виховувати пізнавальний інтерес до математики, наполегливість, працелюбність.

Підручник: А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики.

Тип уроку: комбінований урок.

План:

1. Організаційний момент (2 хв.)
2. Актуалізація опорних знань (5 хв.)
3. Дослідницька робота (20 хв.)
4. Розв'язування задач (15 хв.)
5. Підведення підсумків (3 хв.)

Хід уроку

1. **Організаційний момент.**
2. **Актуальзація опорних знань.**

– Пригадати означення похідноїм (вправа на Learning Apps – https://learningapps.org/5559666)
– Як називається математична операція знаходження похідної функції?
– У чому полягає геометричний зміст похідної функції?
– У чому полягає фізичний зміст похідної функції?

3. **Дослідницька робота**

Похідна функції в точці - це число, а похідна функції в довільній точці області визначення функції - це функція. Знаючи це, похідну функції можна обчислювати простіше, треба тільки зробити узагальнення щодо деяких елементарних функцій.

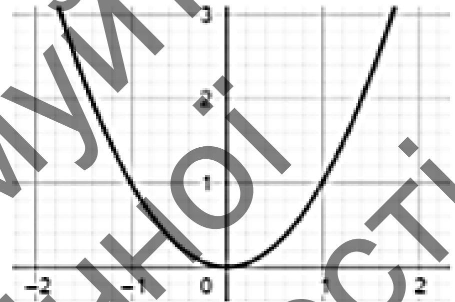
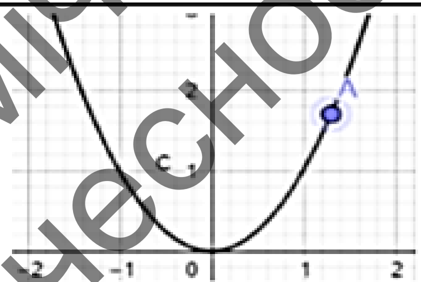
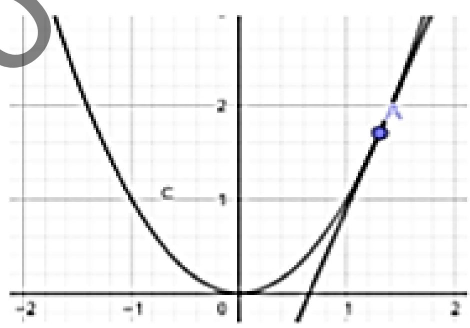
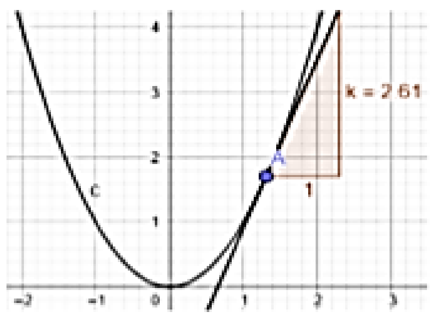
fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

Розглянемо функцію $y = kx + b$та знайдемо її похідну за означенням.

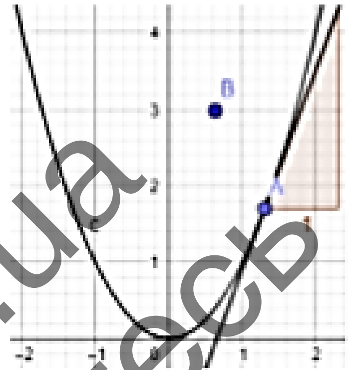
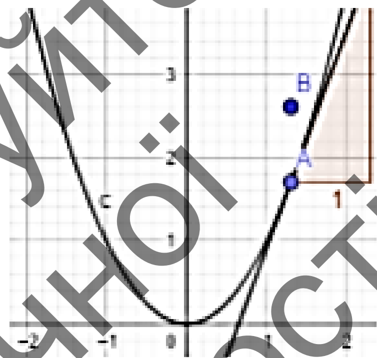
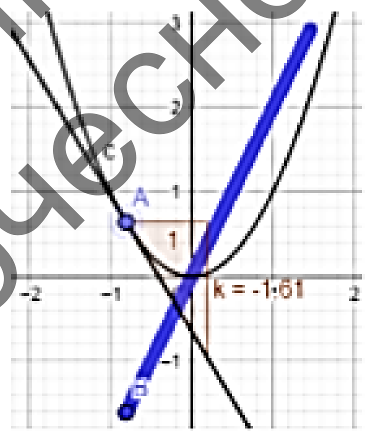
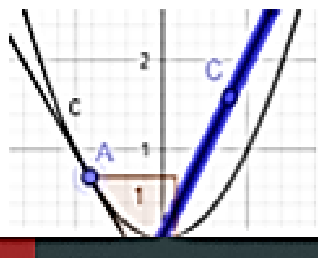
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(kx + k\Delta x + 2b) - kx - b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x + b}{\Delta x} = k$$

Тобто,$(kx + b)' = k$. Якщо припустити, що $k = 0$, $b = C$, де С — довільна постійна, то одержимо, що $C' = 0$, тобто похідна сталої дорівнює нуль. Якщо у формулі $(kx + b)' = k$ припустити, що $k = 1$, $b = 0$, то одержимо $x' = 1$.

Доведемо, що похідна функції $y = x^2$ дорівнює $y' = 2x$ (побудови виконуються вчителем у GeoGebra, учні записують у зошитах).

Відкриваємо GeoGebra та вгорі зліва, в рядку введення формул, записуємо функцію $y = x^2$. Вона автоматично будується.	
За допомогою інструменту  нанесемо на отриманий графік довільну точку.	
Використовуємо інструмент  та будуємо через отриману точку A дотичну. Для цього обираємо інструмент та натискаємо по-черзі на точку і функцію.	
Визначаємо кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис. Обираєм  та клікаєм по дотичній. Спеціально підібрано так, що горизонтальний катет дорівнює 1, а вертикальний катет може змінюватися в	

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

залежності від величини кута Для нас важливо позначення **k**.	
Обираєм довільну точку В за межами параболи.	
У рядку формул записуємо нові координати для цієї точки. Видаляємо попередні координати, пишем $B = (x(A), k)$ та натискаєм кнопку Enter.	
Вказуємо мишкою на точку B і натискаємо праву клавішу мишки, обираємо команду Залишати слід. Вказуємо на точку A і затискаючи ліву кнопку миші, рухаємо точку A вгору і вниз по параболі.	
Обираєєм інструмент Пряма та проводим пряму через слід, що залишила точка B.	

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

У рядку вводу бачимо рівняння прямої, що залишила точка B і робимо висновки.	g : Пряма (B, C) → y = 2x

За допомогою даного прикладу ми довели, що $(x^2)' = 2x$. А в домашньому завданні ви повинні були дізнатись, використовуючи означення похідної, що$(x^3)' = 3x^2$

Отже, можна помітити закономірність, а саме: показник степеня зноситься наперед як коефіцієнт, а у степені він зменшується на одиницю:

$$x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Тоді для степеневої функції$y = x^n$ з будь-яким натуральним показником справедлива формула $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ми можемо записати функції та їх похідні до таблиці і застосувати на наступних уроках за потреби.

4. Розв'язування задач

*Задача 1.*Знайти похідні функцій використовуючи таблицю похідних.

1) $y = x^4$
2) $y = x^{-15}$
3) $y = x^{-2.8}$
4) $y = x^{20}$
5) $y = 5x - 6$
6) $y = 9$
7) $y = \frac{1}{x^{17}}$
8) $y = \frac{1}{x^{-1}}$
9) $y = \frac{1-x}{3}$

Розв'язання:

1) $y' = 4x^3$
2) $y = -15x^{-16}$
3) $y = -2.8 \cdot x^{-3.8}$
4) $y = 20x^{19}$
5) $y =5$
6) $y = 0$
7) $y = -\frac{17}{x^{18}}$
8) $y = 1$

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності

9) $y = -\frac{1}{3}$

Задача 2. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$ 2) $y = 4 - x^2$

Розв'язання:

1) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ 2) $f'(x) = -2x$

5. Підведення підсумків

Рефлексія.

Домашня робота. Почати оформлювати таблицю похідних та вивчити її. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$ за допомогою означення та використовуючи GeoGebra.

Підручник № 9.3, 9.11.

fizmat@sspu.edu.ua суворо дотримуйтесь академічної доброчесності