Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Баймурадов Умитджан

ВИВЧЕННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ У КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка
Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістр

Науковий керівник:
_______________Т.Д. Лукашова,
доктор фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри МФМН
«____» ______________ 2021 року
Виконавець:
________________ У.Б. Баймурадов
«____» ______________ 2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Сьогодні все більше спеціальностей потребують високого рівня застосування математики, а відтак розширюється коло школярів, для яких математика стає професійно значущим предметом. Для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування практичних задач. Математичної підготовки і готовності її застосовувати на практиці вимагає вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи [27].

Математична освіта покликана зробити вагомий внесок у формування ключових компетентностей учнів як загальних цінностей, що базуються на здібностях, знаннях, досвіді, набутих у процесі навчання. Ця мета досягається, зокрема, за рахунок вивчення однієї з ключових змістових ліній шкільного курсу математики «Рівняння та нерівності».

З рівняннями учні зустрічаються упродовж всього курсу навчання основної та старшої школи. А саме, Державним стандартом та відповідними програмами в шкільному курсі математики передбачається вивчення раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь, а також опанування основними методами їх розв'язання.

Розв'язування рівнянь розвиває цілий ряд умінь та навичок, а саме вміння обчислювати, перетворювати, аналізувати, порівнювати, робити висновки, а також допомагає учням виробити навички самостійного мислення та творчої активності.

Важливу роль у навчанні математики відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури.

На простих прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття і відношення, теорії та методи. Тривалий час алгебра розвивалась саме як наука про рівняння. Навіть сама назва «алгебра» утворилась від слова «аль-джебр», яке використовував відомий узбецький математик IX ст. Мухаммед Аль–Хорезмі. Лінійні та квадратні рівняння люди вміли розв'язувати за кілька століть до нашої ери. Зокрема, ще у другому тисячолітті до н.е. єгиптяни невідоме називали «хау» (у перекладі – «купа») [26].

Ще складніші завдання вміли розв'язувати з початку другого тисячоліття до н.е. в Стародавньому Вавилоні. В математичних текстах, виконаних клинописом на глиняних пластинах, є квадратні і біквадратні рівняння, системи рівнянь з двома невідомими і навіть прості кубічні рівняння. При цьому вавилоняни також не використовували букв. На подальший розвиток алгебри суттєво вплинули праці Діофанта, в яких розглядалися складні системи рівнянь. Для таких рівнянь Діофант шукав лише додатні раціональні розв'язки.

З VI ст. центром математичних досліджень стають Індія та Китай, країни Близького Сходу і Середньої Азії. Китайські учені розробили метод послідовного виключення невідомих для розв'язування систем лінійних рівнянь, подали нові методи наближеного розв'язування рівнянь вищих степенів. Індійські математики використовували від'ємні числа й удосконалили буквену символіку. Проте лише в працях учених Близького Сходу і Середньої Азії алгебра сформувалася в самостійну галузь математики, що розглядає питання, безпосередньо пов'язані із розв'язуванням рівнянь.

Способи розв'язування лінійних рівнянь описав Мухамед Аль-Хорезмі в трактаті «Аль-Джебра і Аль-Мукабала». В перекладі «аль-джебр» означає перенесення доданків із однієї частини рівняння в іншу, а «аль-мукабала» –

зведення доданків. Учені Сходу вивчали і розв’язування кубічних рівнянь, хоча не зуміли отримати загальної формули для їх коренів [26].

У Західній Европі вивчення алгебри почалося в XIII ст. Одним з визначних математиків цього часу був італієць Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (1170 – 1228). Його «Книга про абак» містила відомості з арифметики і алгебри до квадратних рівнянь включно. Велика заслуга у створенні алгебраїчної символіки і вдосконалення теорії розв’язування квадратних рівнянь належить французькому математику Франсуа Вієту (1540-1603). Вієт увів буквенне позначення невідомих і саме від нього бере початок сучасна алгебраїчна символіка.

Першим визначним самостійним досягненням західноєвропейських учених було відкриття в XVI ст. формули для знаходження коренів кубічного рівняння (С.Дель Ферро, Н.Тарталья і Дж. Кардано). Л. Феррарі знайшов метод знаходження коренів рівняння 4-го степеня. Вивчення деяких питань, пов'язаних з коренями кубічних рівнянь, привело італійського алгебриста Р. Бомбеллі до відкриття комплексних чисел. Наприкінці XVIII ст. було доведено, що будь-яке рівняння алгебри з комплексними коефіцієнтами має хоч би один комплексний корінь. Це твердження носить назву основної теореми алгебри [26].

Упродовж двох з половиною століть увага математиків була прикута до знаходження формули коренів загального рівняння 5-ого степеня. Проте, на початку XIX ст. італієць П.Руффіні і норвежець Н. Абель незалежно один від одного довели, що такої формули у загальному випадку не існує. Ці дослідження були завершені французьким математиком Е. Галуа, методи якого дозволяють для кожного даного рівняння визначити, чи розв’язується воно в радикалах.

Отже, алгебра має тисячолітній досвід стосовно розв’язування рівнянь і тому рівняння є невід’ємним елементом шкільної математичної підготовки.

Протиріччя між високим рівнем математизації та інформатизації в житті людини та досить низьким рівнем математичної підготовки підростаючого покоління вказує на існування завдання підвищення якості математичної підготовки учнів. Вирішення поставленої проблеми передбачає модернізацію змісту, методів та прийомів, форм і засобів навчання, зокрема, у ході вивчення алгебри в основній школі. Відповідно доцільним є встановлення методичних особливостей вивчення рівнянь в основній школі, тому тема дипломної роботи є актуальною.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики в основній школі.

Предмет дослідження – методичні особливості вивчення квадратних рівнянь в основній школі.

Мета роботи: розкрити методичні особливості вивчення квадратних рівнянь в основній школі; розробити урок за темою дослідження.

Завдання дослідження:

1) Проаналізувати навчальну, психолого-педагогічну та науково-методичну літературу з теми дослідження.

2) Розкрити методичні особливості вивчення квадратних рівнянь в основній школі.

3) Розробити урок за темою дослідження.

Методи дослідження: *теоретичні* – аналіз навчально-методичної літератури з теми дослідження; *емпіричні* – бесіди з учителями шкіл та викладачами; вивчення та аналіз досвіду роботи вчителів, що працюють у 5-9 класах, спостереження.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено об’єкт, предмет і мету дослідження, сформульовано завдання дослідження.

Перший розділ дипломної роботи «Теоретичні основи проблеми дослідження» присвячено аналізу програм і підручників з алгебри в контексті дослідження, а також з'ясуванню особливостей вивчення рівнянь у 5-7 класах.

У другому розділі «Методика вивчення квадратних рівнянь в основній школі» наведено методичні особливості вивчення таких рівнянь в основній школі та запропоновано розробку уроку з теми дослідження. У висновках подано основні результати дипломної роботи.

Загальний обсяг роботи становить 46 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел включає 37 найменувань.

Практична цінність. У роботі розглянуто основні методичні особливості навчання учнів основної школи розв'язувати квадратні рівняння, наведено аналіз програм та підручників з теми та розробку уроку. Тому робота може бути використана вчителями при підготовці та проведенні уроків з даної теми та студентами при підготовці до занять.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Аналіз діючих освітніх програм навчання математики в контексті дослідження

Вивчення математики в основній школі передбачає забезпечення базової математичної підготовки учнів, яка спрямована на їх загальний розвиток, формування математичної грамотності та є достатньою для реалізації обраного шляху подальшого здобуття освіти. Курс математики основної школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. Навчання математики в основній школі продовжує формування предметної математичної компетентності, реалізуються такі освітні завдання, як забезпечення оволодіння учнями мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебраїчних виразів, розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи, моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати;

Зміст математичної освіти в основній школі структурується за такими змістовими лініями: числа; вирази; рівняння і нерівності; функції; геометричні фігури; геометричні величини; елементи комбінаторики; початки теорії ймовірностей та елементи статистики. Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на певному ступені шкільної математичної освіти, вікових особливостей і навчальних можливостей учнів [37; 54].

У змісті Програми з математики для 5-9 класів [37] вказано той навчальний матеріал, який підлягає вивченню у відповідному класі. Вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів орієнтують на результати навчання, які є об’єктом контролю й оцінювання. Зміст навчання математики структуровано за темами відповідних навчальних курсів з визначенням кількості годин на їх вивчення. Такий розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителю та авторам підручників надається право коригувати його залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій. В кінці кожного року навчання передбачено години для узагальнення й систематизації вивченого.

Аналіз діючої програми з математики основної школи дає підстави стверджувати, що змістова лінія рівнянь суттєво «розтягнута» у часі, починаючи з 5 класу і до 9 класу включно. Основна частина змістової лінії «Рівняння» сконцентрована у програмі 7 та 8 класів [23; 37].

На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих у попередні роки, у 7 класі вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною.

Тема «Квадратні рівняння» традиційна для курсу математики 8 класу. У ній розглядаються неповні квадратні рівняння, квадратні тричлени, розкладання квадратного тричлена на множники; знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання і розв’язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач, теорема Вієта. Значне місце відводиться застосуванню рівнянь до розв’язування різноманітних задач. Важливе значення надається формуванню умінь застосовувати алгоритм розв’язування задачі за допомогою рівняння. На вивчення даної теми відводиться 18 годин.

Фрагменти програм з алгебри для 8 класу наведено у таблиці 1.1.

Таблиця А.2.

Фрагмент програми з алгебри для 8 класів [37]

8-й клас. АЛГЕБРА		
К-ть год.	**Зміст навчального матеріалу**	**Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів**
18	**Тема 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ** Квадратний тричлен	**наводить приклади** квадратних рівнянь, квадратних тричленів **формулює:**

	Квадратні рівняння Формула коренів квадратного рівняння Теорема Вієта Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі	• означення квадратного рівняння та квадратного тричлена; кореня квадратного рівняння; • теорему Вієта **записує** формулу: коренів квадратного рівняння; розкладання квадратного тричлена на лінійні множники **розв'язує вправи, що передбачають:** знаходження коренів квадратних рівнянь; розкладання квадратного тричлена на множники; знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання і розв'язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач

Розвиток цієї змістової лінії здійснюється інтегровано з вивченням відповідних чисел і операцій над ними. Істотне місце займають текстові задачі, основними функціями яких є ілюстрація практичного застосування рівнянь. За умовою задачі учні мають скласти відповідне рівняння, що розв'язують спочатку на основі залежності між компонентами арифметичних дій, а згодом з використанням основних властивостей рівнянь. Розв'язування таких задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою [25].

Рівняння розглядають також як матеріал для практичного застосування навичок тотожних перетворень виразів. Систематичне застосування рівнянь під час вивчення тотожніх перетворень збагачує і робить цікавішим для учнів ці перетворення.

Важливим є навчання учнів використання рівнянь як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ і розв'язування на цій основі прикладних задач [62].

У процесі вивчення квадратних рівнянь ставляться такі державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів [37]:

- наводить приклади рівняння з однією та двома змінними, лінійних рівнянь з однією та двома змінними, *квадратних рівнянь*;
- формулює означення лінійних рівнянь з однією та двома змінними, розв'язку рівняння з двома змінними, *квадратного рівняння, кореня квадратного рівняння;*
- розв'язує вправи, що передбачають розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику дробу, *знаходження коренів квадратних рівнянь, знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання і розв'язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач;*
- *формулює теорему Вієта;*
- *записує формулу коренів квадратного рівняння.*

Отже, тема «Квадратні рівняння» є однією з центральних тем шкільного курсу математики.

1.2. Аналіз підручників з теми дослідження

Проаналізуємо діючі підручники з алгебри для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів наступних колективів авторів: Г.П. Бевз, В.Г. Бевз [4] і А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір [39];

Підручник «Алгебра, 8» (автори Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, 2016) [4] відповідає дидактичним принципам науковості, доступності та систематичності навчання.

Засосом активізації навчання учнів алгебри виступають наявні в підручнику відомості про відомих математиків і математичні премії, засновані на їх честь. На початку кожного розділу подано короткий огляд змісту українською та англійською мовами. Усі параграфи починаються рубрикою «Використовуємо набуті компетентності». Також наявні рубрики «Відкритих задач» та «Скарбничка досягнень».

Тема «Квадратні рівняння» у підручнику подана у такій послідовності: «Неповні квадратні рівняння», «Формула коренів квадратного рівняння», «Теорема Вієта», «Квадратний тричлен», «Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі», «Завдання для самостійної роботи», «Історичні відомості», «Головне в розділі», «Готуємося до тематичного оцінювання», «Тестові завдання», «Типові завдання до контрольної роботи».

Теоретичний матеріал подано в основному традиційно, відповідно до програми. У підручнику містяться слова надруковані курсивом – це математичні терміни, які потрібно запам'ятати. Виділені жирним шрифтом речення – це правила або інші важливі математичні твердження, які потрібно запам'ятати і вміти застосовувати.

Задачі на закріплення матеріалу розташовані відразу ж після його викладу. Наявні завдання за рівнями (А, Б). Наявні рубрики: «Виконайте усно», «Виконаємо разом», «Вправи для повторення». Для тих, хто хоче знати більше пропонуються теми творчого характеру. Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриках «Історичні відомості».

Зміст підручника «Алгебра. 8 клас» (автори А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір) [39] і послідовність викладення матеріалу відповідають програмі курсу алгебри для 8-х класів загальноосвітніх навчальних закладів. Структура викладення матеріалу уніфікована. Кожен пункт містить теоретичну частину, приклади застосування зазначеного теоретичного матеріалу для розв'язування задач, контрольні запитання для перевірки засвоєння теоретичного матеріалу та завдання для розв'язування.

Наприкінці підручника подано стислі відомості з курсу математики 7 класу, оформлені у вигляді довідкового матеріалу. Поняття рівносильного та раціонального рівняння вводяться разом з раціональними виразами і вивчаються у I розділі, спочатку наводяться приклади рівносильних рівнянь, а потім дається їх означення: «*Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь коренів не має*».

Вказаний підручник відрізняє велика кількість засобів, спрямованих на активізацію навчальної діяльності, індивідуального підходу до учнів, підвищення інтересу до предмету. Наявна велику кількість завдань, структурованих за рівнем складності та методичною доцільністю їх використання. Наведено також завдання підвищеної складності, які можуть бути використані в роботі математичного гуртка або факультативу.

Підручник ураховує вікові особливості мислення учнів, пропонує прийоми підвищення ефективності засвоєння матеріалу. Так, широко використовується графічне представлення об'єктів, схеми їх класифікації. Вивчені властивості об'єктів узагальнюються у вигляді таблиць.

За структурою, принципами викладення навчального матеріалу, добіркою практичних вправ відповідає дидактичним принципам: науковості, доступності, наступності та систематичності навчання.

У III розділі «Квадратні рівняння» діти вчаться розв'язувати рівняння виду $ax^2 + вx + c = 0$, теорему Вієта, освоюють прийоми розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.

В параграфі «Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь» діти знайомляться з означенням рівняння першого степеня, що є окремим випадком лінійного рівняння. Далі дається означення квадратного рівняння: «*Квадратним рівнянням називають рівняння виду* $ax^2 + вx + c = 0$,*де x - змінна, а, в, с - деякі числа, причому* $a \neq 0$. *Числа а, в, с — називаються коефіцієнтами квадратного рівняння. Число а – перший коефіцієнт, в - другий коефіцієнт, с - вільний член. Якщо в квадратному рівнянні хоча б один з коефіцієнтів в або с дорівнює нулю, то таке рівняння називається неповним квадратним рівнянням*», зведеного або неповного квадратного рівняння. [39]

Після теоретичної частини запропоновано 1 приклад розв'язаного квадратного рівняння, 35 завдань різного рівня складності: 16 - середнього, 13 - достатнього, 6 – високого.

У параграфі «Формула коренів квадратного рівняння» виводиться формула знаходження дискримінанта, надано три приклади обчислень на дану тему, 40 різнорівневих завдань. Для підведення учнів до теореми Вієта (якщо x_1 , x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2+вx +c =0$, то $x_1+ x_2= - в/a$; $x_1 x_2= c/a$.) пропонується розв'язати кілька вправ, які підкажуть яким чином сума і добуток коренів квадратного рівняння пов'язані з його коефіцієнтами. Крім прямої теореми Вієта у підручнику наводиться й обернена до теореми Вієта.

В темі «Квадратні рівняння» також окремо розглядається пункт «Квадратний тричлен».

Квадратним тричленом називається многочлен виду $ax^2 + вx + c$ *, де x - змінна, a, в, c - деякі числа, причому* $a\neq 0$. *Коренем квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.* Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + вx + c$, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2 + вx + c = 0$. [39]

Знаючи корені квадратного тричлена, його можна розкласти на множники на основі теореми: якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + вx + c$ додатній, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники $ax^2 + вx + c = a(x — x_1)(x — x_2)$, де x_1, x_2 - корені квадратного тричлена.

Крім того у підручниках розглядаються «рівняння, які зводяться до квадратних» (біквадратні рівняння (дано означення та наведені приклади) та дробово-раціональні рівняння. Останні розглядаються за допомогою прикладів та значної кількості завдань для розв'язання).

Основними поняттями, на яких ґрунтується вивчення квадратних рівнянь, є: поняття рівності із невідомим, правильної рівності, рівняння, розв'язку (корінь) рівняння, розв'язання рівняння, рівносильних рівнянь, властивостей рівнянь, – вони розглядаються раніше, у 7 класі. Наприклад, у підручнику з алгебри для 7-го класу [28] властивості рівнянь сформульовано так.

1. Якщо виконати тотожні перетворення деякої частини рівняння, одержимо рівняння, рівносильне даному.

2. Якщо деякий доданок рівняння перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінівши при цьому його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.
3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на ордне й те саме число, відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Таким чином, аналіз підручників з алгебри для 8 класу демонструє, що тема «Квадратні рівняння» відображена в них повно і досить широко. За будь-яким із згаданих підручників можливо вивчати розв’язування рівнянь. Різнорівневі вправи на закріплення дають можливість застосувати вивчений матеріал на практиці у стандартних завданнях і у завданнях підвищеного рівня складності, що дозволяє дотриматися принципу диференціації навчання та реалізувати його розвивальну функцію [52].

Матеріал, відведений в курсі алгебри 8 класів на вивчення теми «Рівняння», досить об’ємний і в обов’язковому порядку входить у програму Державної підсумкової атестації у 9 класі.

1.3. Пропедевтика вивчення квадратних рівнянь

У молодшій та основній школі поняття рівняння трактують як рівність, що містить невідоме. Відразу вводиться означення кореня рівняння як числа, за якого рівняння перетворюється на правильну рівність.

У 5 класі повторюють цей матеріал, уточнюють, що означає розв'язати рівняння, що таке розв'язок або корінь рівняння, як розуміти твердження «число *а* задовольняє рівняння» тощо. Розв'язують їх спочатку на основі залежностей між компонентами і результатами дій.

Ознайомлення з рівняннями відбувається ще у початковій школі. Розглядається, наприклад, така задача [51].

Задача. До невідомого числа додали 3 і отримали 8. Знайдіть невідоме число.

Наводиться короткий запис задачі: □ + 3 = 8. Число, яке треба підставити замість □, знаходять підбором. Потім говорять, що рівність

$$□ + 3 = 8$$

можна записати за допомогою букви *x*, якою позначають невідоме: x+3= 8.

В початковій школі учні розв’язують найпростіші рівняння. Наприклад, такі: а) $7 + x = 10$; б) $x – 3 = 10 + 5$. Невідоме число спочатку знаходять підбором, а пізніше на основі залежностей між компонентами арифметичних дій. Наприклад, розв’язуючи рівняння $7 + x = 10$ учні мають міркувати так: «Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок. Отримаємо: $x = 10 – 7$; $x = 3$».

У курсі математики 5-6 класів зберігається наступність і в тлумаченні рівняння, і в способі розв’язування рівнянь [5; 29; 30, 42; 43]. У навчальному процесі переважають індуктивні міркування, як правило, на наочно-інтуїтивному рівні з опорою на практичний досвід учнів. При цьому здобуті у початковій школі знання поглиблюються і розширюються.

На початку вивчення курсу алгебри, поняття рівняння вводиться описово, шляхом його виділення з розв'язання текстової задачі. У цьому випадку рівняння виступає як непряма форма задання деякого невідомого числа, що має згідно з сюжетом задачі конкретну інтерпретацію. Описово вводяться також поняття кореня рівняння, що означає розв’язати рівняння. У підручнику з математики для 5-го класу авторів Г.П. Бевз та ін. [5] про рівняння сказано так: «Рівність, яка містить невідоме число позначене буквою, називається рівнянням». Це не означення, а зрозумілий для п’ятикласників опис.

У 6-му класі означення рівняння не уточнюється і не поглиблюється. Безпосередньо тема «Рівняння» розглядається у 6 класі при вивченні теми «Раціональні числа і дії над ними» [37].

Учні далі розв’язують рівняння на основі залежності результатів арифметичних дій від компонентів, причому невідоме у рівнянні міститься тільки в лівій його частині. Тут більше уваги приділяється формулюванню правил знаходження невідомих компонентів, невідоме число може позначатися різними буквами, а не лише буквою *x.* Розв'язуються більш складні лінійні рівняння.

У процесі вивчення програмового матеріалу рівняння, які пропонуються для розв’язання, поступово ускладнюють. Так, після вивчення дистрибутивного закону і поняття подібних доданків учням пропонують рівняння виду $5 - 2y + 3y - 7 = -1$; $8(x - 5) - 7x + 3 = -10$. Ознайомлення з розкриттям дужок спрощує спосіб розв’язання таких рівнянь, чого вони в 5 класі ще не могли [50].

У 6 класі вивчається властивість рівняння щодо додавання (віднімання) до обох частин того самого числа. З цієї властивості виводиться наслідок, який стверджує, що доданки можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, зі зміною знаків доданків на протилежні. За цим правилом розв’язуються рівняння, що раніше учні розв’язати не могли. Воно дає можливість розв’язувати рівняння, де невідомі присутні в обох частинах рівняння. Зокрема, рівняння виду

а) $15y - 8 = -6y + 4{,}6$; б) $6x - 12 = 5x + 4$.

На цьому етапі навчання можна формулюється правило-орієнтир розв’язування таких рівнянь [30]:

1) спростити рівняння (розкрити дужки, звести подібні доданки);

2) перенести доданки, що містять невідоме, в одну частину (зазвичай ліву), а доданки, що не містять невідомої, – в іншу, змінивши при цьому знаки на протилежні;

3) звести подібні доданки;

4) знайти корінь рівняння, якщо потрібно, то зробити перевірку.

Отже, в курсі математики початкової школи та 5-6 класів [37] навчальний матеріал, що стосується рівнянь, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує учнів до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсах алгебри. Учні повинні мати уявлення про використання букв для запису законів арифметичних дій, формул, обчислювати значення простих буквених виразів, складати за умовою задачі і розв’язувати нескладні рівняння першого степеня спочатку на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом з використанням основних властивостей рівнянь.

У 7-му класі учні знайомляться із поняттям лінійного рівняння, а саме вивчають такі теми: «Лінійне рівняння з однією змінною», «Лінійне рівняння з двома змінними та його графік». На цьому етапі учні повинні вміти навести приклади рівнянь з однією та двома змінними; лінійних рівнянь з однією та двома змінними.

Під час вивчення теми «Перетворення цілих виразів», зокрема, формул скороченого множення, як серед ілюстративних прикладів, так і вправ, розглядаються рівняння, що містять в записі x^2. При цьому такі рівняння або зводяться до лінійних, або їх ліва частина розкладається на лінійні множники, а права є нулем. Формулюється правило про те, що добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників є нулем. Окрім того, розглядаються двочленні квадратні рівняння виду $x^2=a$, де a – довільне раціональне число або .

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

2.1. Методичні особливості вивчення рівнянь в основній школі

2.1.1. Основні поняття теорії рівнянь з однією змінною

В навчальній та методичній літературі є багато різних означень поняття «*рівняння*». Основні з них означають рівняння через вираз, функцію і предикат [1; 54; 60; 62].

Означення 2.1. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність $f_1(x) = f_2(x)$ виразів $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що визначені відповідно на множинах M_1 і M_2, для якої поставлено завдання відшукати множину всіх значень x з $M_p \subset M = M_1 \cap M_2$ таких, щоб вирази $f_1(x)$ і $f_2(x)$, мали однакові числові значення [60].

Означення 2.2. Рівнянням з однією змінною x (або з одним не відомим x) називають рівність $f_1(x) = f_2(x)$ двох аналітично заданих функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ з областями визначення D_1 і D_2 і областями зміни Y_1 і Y_2, де $Y_1 \subseteq R$, $Y_2 \subseteq R$, для якої поставлено завдання від шукати всі значення x з $D_r \subseteq D = D_1 \cap D_2$ такі, щоб обидві функції мали однакові числові значення [62].

Означення 2.3. Предикат $f_1(x) = f_2(x)$ з множиною визначення D, для якого поставлено завдання знайти множину істинності $D_r \subseteq D$, називають рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x). [1].

Таке трактування поняття «рівняння» досить складні і важкі для учнів. На нашу думку більш точним є наступне визначення.

Рівняння *– це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами та інші числові дані. Невідомі числа в рівнянні називають змінними.* [54]

Змінні найчастіше позначають буквами x, y, z хоч можна застосувати і інші букви латинського або грецького алфавіту. При підстановці замість змінних конкретних числових значень, одержимо числову рівність (правильну або неправильну).

Наприклад, якщо у рівнянні $13x - 30 = 7x$ замість змінної x підставити число 5, матимемо правильну числову рівність.

$$13 \cdot 5 - 30 = 7 \cdot 5$$

У таких випадках говорять, що число задовольняє дане рівняння.

Число, яке задовольняє рівняння, називається його *коренем*, або *розв'язком.*

Рівняння може не мати жодного розв'язку на заданій множині (або на області визначення). Таким, наприклад, є рівняння $x = x + 5$.

А якщо рівняння має розв'язки, то він може бути один, кілька або навіть безліч. Так, рівняння $3x = 9$ має лише один розв'язок $x = 3$; рівняння $x^2 = 4$ має два розв'язки: $x = 2$ і $x = -2$; рівняння $2 \cdot x = 3 \cdot y$ має безліч розв'язків; його розв'язком буде будь-яка пара значень невідомих: $x = c$, у $= \frac{2}{3} \cdot$ с, де с – довільне число.

Якщо розв'язком рівняння є будь-яка допустима система значень невідомих, то кажуть, що рівняння задовольняється тотожно, тобто є тотожністю в області визначення. Так, рівняння $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ задовольняється тотожно у будь-якому числовому полі.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені, або показати, що їх не існує. Найпростіші рівняння можна розв'язувати на підставі відомих залежностей між доданками та сумою, між множниками і добутком тощо.

Кожне рівняння має ліву і праву частину. Наприклад, у рівнянні $27\text{-}4x=11$ різниця $27 - 4x$ – це ліва частина, а число 11 - права частина. Разом $27 - 4x$ та 11 - члени цього рівняння.

Розглянемо два рівняння: $x+7=12$ і $x - 3=2$. Кожне з них має один і той самий розв'язок: $x=5$. Такі рівняння називаються *рівносильними.*

Означення 2.4. Два рівняння, задані на одній і тій же множині, називаються рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються.

Зокрема, рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають розв'язків, наприклад: $x+5=x$ та $2 - x = 3 - x$.

Основний спосіб розв'язування рівнянь ґрунтується на тому, щоб звести дане рівняння до більш простого, рівносильного йому рівняння. Зокрема, якщо в будь-якій частині рівняння звести подібні доданки або розкрити дужки, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Додавши до обох частин правильної числової рівності одне й те саме число, отримаємо також правильну рівність. З цього випливає, що коли, наприклад, до обох частин рівняння $23y = 10y + 39$ додати по $-10y$, то отримане $23y - 10y = 39$ рівняння, рівносильне даному. А додати по $-10y$ - це те саме, що перенести з правої частини рівняння в ліву його член $-10y$ з протилежним знаком. Взагалі, якщо з однієї частини рівняння в іншу перенести будь-який його член з протилежним знаком, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Згадаємо також, що обидві частини числової рівності можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля. Тому й коли обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному рівнянню.

Отже, до **перетворень**, які дозволяють перейти від даного рівняння до рівносильного йому можна віднести наступні:

1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки.

2. До обох частин рівняння можна додати (відняти) одне й те ж число, або вираз зі змінною, який визначений на області допустимих значень рівняння.

3. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

4. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

5. Якщо усі корені рівняння $f(x) = 0$ належать області визначення функції $\varphi(x)$, а корені рівняння $\varphi(x) = 0$ належать ОДЗ функції $f(x)$, то рівняння $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0 \end{array}\right.$

6. Якщо функція $\psi(x)$ визначена для всіх x з ОДЗ рівняння $f(x) = \varphi(x)$ і $\psi(x) \neq 0$, то рівняння $f(x) \cdot \psi(x) = \varphi(x)\psi(x)$ рівносильне даному.

Рівняння $F(x) = \Phi(x)$, всі корені якого є коренями рівняння $f(x) = \varphi(x)$, називається наслідком рівняння $f(x) = \varphi(x)$.

Наприклад, рівняння $x^2 - 4x - 5 = 0$ є наслідком рівняння $x - 5 = 0$, бо всі корені останнього (тобто $x = 5$) є коренями першого.

Очевидно, рівняння-наслідок може мати ще й інші корені, які є сторонніми для даного рівняння.

У процесі розв'язування рівнянь іноді доводиться виконувати такі дії, які приводять до зміни області допустимих значень. При цьому розширення ОДЗ рівняння може привести до появи сторонніх коренів, а звуження – до втрати коренів.

До розширення області визначення рівняння можуть привести, зазвичай, такі перетворення, як скорочення дробів, піднесення до парного степеня, множення обох частин рівняння на вираз, який визначений для всіх значень невідомого тощо.

До звуження області визначення рівняння може привести, загалом, додавання чи множення обох частин рівняння функції $\psi(x)$, яка не визначена для деяких значень x з ОДЗ рівняння. У цьому випадку необхідно підстановкою в рівняння перевірити всі допустимі значення невідомого, при яких функція $\psi(x)$ не визначена, і з'ясувати, чи немає серед них коренів рівняння. Якщо відбувається звуження області допустимих значень, необхідно дослідити, чи не втрачаються при цьому корені даного рівняння.

Нехай, наприклад, задано рівняння

$$x(x+3)=0$$

Корені цього рівняння: $x=0$ і $x=-3$.

Додамо до обох частин цього рівняння дріб $\frac{1}{x}$. Одержимо рівняння $x(x+3)+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$, яке має лише один корінь $x=-3$ (вираз $\frac{1}{x}$ при $x=0$ не визначений). Отже, виконане перетворення призвело до втрати коренів.

Окрім того, якщо в процесі розв'язування рівняння доводилось обидві його частини множити на вираз, який при деяких допустимих x може дорівнювати нулю, чи підносити обидві частини до деякого парного степеня $n>0$ чи виконувати дії, що приводять до розширення ОДЗ рівняння, то все це може привести до появи сторонніх коренів. У цьому випадку обов'язкова перевірка коренів: перша – на належність їх області допустимих значень рівняння; друга – безпосередня підстановка у вихідне рівняння. Ті корені, для яких виконуються обидві перевірки, будуть коренями вихідного рівняння.

2.1.2. Методика вивчення квадратних рівнянь

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь задають формулою коренів квадратного рівняння. З метою підготовки до виведення цієї формули розв'язують кілька рівнянь способом вилучення квадрата двочлена [62].

Практика свідчить, що деякі учні припускаються помилок під час обчислення дискримінанта і застосування формули коренів квадратного рівняння внаслідок неправильного вибору знаків другою коефіцієнта b і вільного члена c. Тому, вводячи означення квадратного рівняння, слід звернути увагу учнів на те, що ліва частина рівняння

$$ax^2+bx+c=0$$

при $a \neq 0$ є алгебраїчною сумою. Якщо в конкретному рівнянні біля членів є знаки «–», то вони стосуються чисел a, b і c. Після цього потрібно розв'язати кілька усних вправ і назвати a, b і c у конкретних прикладах квадратних рівнянь.

Загалом методична схема введення поняття квадратного рівняння може бути такою [62].

1. Розглянути задачу.

Задача. Одне число більше від другого на 5, а добуток їх дорівнює 176. Знайдіть ці числа.

Розв'язуючи її, отримаємо рівняння

$$x(x + 5) = 176,$$

яке після перетворення зводиться до рівняння

$$x^2 + 5x - 176 = 0.$$

2. Повідомити, що таке рівняння називають квадраним.

3. Сформулювати означення «Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратним».

4. Виділити суттєві особливості цього поняття.

5. Розглянути вправи:

– на підведення під поняття;

– на формування вміння називати коефіцієнти в записі квадратного рівняння.

Наприклад, такі.

1. Чи є квадратним рівняння?

а) $3{,}7x^2 + 5x + 1 = 0$, б) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$, в) $7{,}8x^2 + 3x - \frac{4}{7} = 0$,

г) $1 - 17x = 0$, д) $7x^2 - 15x = 0$, е) $-x^2 = 0$,

є) $0x^2 + 2x + 3 = 0$, ж) $x^2 + \frac{1}{x} + 3 = 0$, з) $3x^2 + \frac{x}{7} + 4 = 0$.

2. Назвати коефіцієнти a, b і c квадратного рівняння.

Зауважимо, що вправи такого типу мають включатись в усну роботу систематично, особливо на перших уроках вивчення теми [45].

а) $4x^2 - 3x + 1 = 0$, б) $5x + 4 - x^2 = 0$, в) $x^2 - 7 = 0$,

г) $1 - x^2 + 5x = 0$, д) $4x + \frac{7}{5}x^2 + 9 = 0$, е) $7x^2 = 0$,

є) $-4x^2 + 5x = 0$, ж) $2x^2 + \frac{x}{6} + 1 = 0$.

3. Звести рівняння до виду $ax^2 + bx + c = 0$:

а) $(2x – 1)(2x + 1) = x(2x + 3)$;

б) $(3x + 2)^2 = (x + 2)(x – 3)$;

в) $(x + 3)(3x – 2) = (4x + 5)(2x – 3)$.

4. Замінити рівняння рівносильним йому квадратним рівнянням:

а) $4x^2 – 2x(3x + 1) = 5$;

б) $x^2 – (1 – x)(1 – 3x) = x$;

в) $– 5x(x + 6) = 4(x – 3) – 10$.

Навчати учнів розв'язувати квадратні рівняння доцільно починати з неповних квадратних рівнянь виду:

1) $ax^2 + c = 0$; 2) $ax^2 + bx = 0$; 3) $ax^2 = 0$.

Далі розв'язки квадратного рівняння знаходять за формулою коренів квадратного рівняння, яку отримують, виділяючи квадрат двочлена у виразі ax^2+bx+c. Навички виділення повного квадрата із квадрата тричлена застосовуватимуться під час розкладання квадратного тричлена на множники, дослідження квадратичної функції та побудови її графіка. Детальне обґрунтування формули коренів квадратного рівняння наведено у діючих шкільних підручниках.

Формуючи в учнів вміння розв'язувати квадратні рівняння, варто на початковому етапі [62]:

– записувати або усно називати коефіцієнти квадратного рівняння;

– пропонувати квадратні рівняння із невідомими x, y, t, z тощо;

– окремі квадратні рівняння записувати, змінивши порядок доданків.

Доцільно запропонувати учням швидкий спосіб запам'ятовування розв'язання кожного виду неповного квадратного рівняння:

а) якщо в обох доданках є змінна x, то виносимо її за дужки і прирівнюємо кожний з множників до нуля. Одержимо два корені. Приклад.

$2x^2 – 5x = 0$,

$x(2x – 5) = 0$,

$x_1 = 0$ або $2x - 5 = 0$, $x_2 = 2{,}5$.

б) якщо ліва частина неповного квадратного рівняння містить два доданки і тільки в одному є змінна x, то вільний член переносимо у праву частину, діленням знаходимо x^2, а потім x_1 і x_2. Наприклад,

$2x^2 - 8 = 0$,

$2x^2 = 8$,

$x^2 = 4$,

$x_{1,2} = \pm 2$.

Також вивчення розв'язування квадратних рівнянь способом виділення з тричлена квадрата двочлена слід проводити на конкретних прикладах:

$x^2 + 6x + 5 = 0$,

$x^2 + 6x + 5 = (x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 9) - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$,

$(x + 3)^2 - 4 = 0$,

$(x + 3)^2 = 4$,

$x + 3 = \pm 2$,

$x_1 = -1$, $x_2 = -5$.

Потім розглянуті приклади доцільно узагальнити разом з учнями у алгоритмічний припис [62] із використанням дискримінанта:

1) записуємо коефіцієнти квадратного рівняння та знаходимо його дискримінантD:

$$D = b^2 - 4ac,$$

2) якщо $D > 0$, то корені $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ квадратного рівняння різні.

3) якщо $D = 0$, то $\sqrt{D} = 0$. У цьому випадку корені рівняння однакові $x_{1,2} = \frac{b}{2a}$.

4) Якщо $D < 0$, то рівняння дійсних коренів не має.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння

$$20x^2 + 13x + 2 = 0$$

Розв'язання

$$D = 169 - 4 \cdot 20 \cdot 2 = 169 - 160 = 9$$

$$x_1 = \frac{-13+3}{2 \cdot 20} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-13-3}{2 \cdot 20} = -\frac{2}{5}$$

Відповідь: $x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = -\frac{2}{5}$.

Як правило, якщо учні добре засвоїли алгоритм знаходження коренів квадратного рівняння, то типовими помилками при їх розв'язанні є, як правило, помилки в обчисленнях. Проте, іноді виникають алгоритмічного характеру: учні неправильно визначають знаки коефіцієнтів при обчисленні дискримінанта (переважно знаків другого коефіцієнта і вільного члена) або самі коефіцієнти при обчисленні коренів у випадку нестандартного запису рівняння [22]. Відповідний приклад наведено нижче.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння

$$-x + 2\,x^2 - 21 = 0$$

Можна зустріти наступне «розв'язання» цього рівняння:

$$-x + 2\,x^2 - 21 = 0;$$

$$D = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-21) = -80 < 0$$

тому рівняння розв'язків не має.

З іншого боку, дане рівняння має два дійсні корені $x_1 = -3,\ x_2 = 3{,}5$. Справді, запишемо рівняння по степеням x:

$$2x^2 - x - 21 = 0; D = 169,$$

Звідки $x_1 = -3,\ x_2 = 3{,}5$.

Окрім того, учні допускають помилки логічного характеру, плутаючи поняття системи рівнянь з поняттям сукупності рівнянь.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння

$$(5x-7)(x+6) = 0$$

Частина учнів зводить задане рівняння до системи $\begin{cases} 5x-7=0 \\ x+6=0 \end{cases}$, яка не має розв'язків.

У даному випадку уникнути даних помилок, краще спочатку користуватися словами «і» та «або» замість символів [, {.

Крім того, при розв’язуванні рівнянь внаслідок виконання нерівносильних перетворень може статися або втрата кореня (при звуженні області допустимих значень невідомого), або поява сторонніх коренів (помилки алгоритмічного характеру). З метою виключення сторонніх коренів, часто виконують перевірку отриманого розв'язку рівняння [16].

2.1.3. Теорема Вієта для квадратних рівнянь та її застосування

При розв’язуванні зведених квадратних рівнянь (тобто рівнянь, в яких коефіцієнт при x^2 дорівнює 1) у багатьох випадках зручно використовувати наступне твердження.

Теорема Вієта [39]. *Якщо зведене квадратне рівняння* $x^2 + px + q = 0$ *має невід'ємний дискримінант, то сума коренів цього рівняння дорівнює другому його коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену, тобто, якщо* x_1, x_2 *– корені рівняння*

$$x^2 + px + q = 0,$$

То $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$.

Кожне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$:(при $a \neq 0$) рівносильне зведеному квадратному рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тому якщо таке рівняння має два корені x_1, x_2, то:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ та } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Теорема (**обернена до теореми Вієта**) [39]. *Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно –p і q, то m і n – корені рівняння* $x^2 + px + q = 0$

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння.

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Розв'язання

За теоремою Вієта

$$x_1 x_2 = 9 \text{ і } x_1 + x_2 = 20,$$

звідки

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 4$$

Відповідь: $x_1 = 5,\ \ x_2 = 4.$

При розв'язуванні квадратних рівнянь застосовують формули скороченого множення [4]:

1. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$
2. $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y)$
3. $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y)$

За допомогою квадратних рівнянь можна спростити розв'язування багатьох задач.

Приклад 2.5. Знайдіть довжини сторін прямокутника, периметр якого дорівнює 42 см, а площа 108 см^2.

Розв'язання. Півпериметр прямокутника дорівнює сумі його основи та бокової сторони (висоти) - 21 см. Якщо основу прямокутника позначити x см, то висоту прямокутника можна розрахувати як $(21–x)$ см. Площа прямокутника дорівнює добутку основи та висоти прямокутника:

$$x(21 - x) = 108$$

$$-x^2 + 21x - 108 = 0$$

$$x^2 - 21x + 108 = 0$$

Розв'яжемо це рівняння

$D = 21^2 - 4 * 108 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2}$$

З теореми Вієта випливають важливі наслідки[15]:

1) якщо зведене квадратне рівняння має корені і $q < 0$, то x_1 і x_2 мають різні знаки.

2) якщо зведене квадратне рівняння має корені і $q > 0$, то x_1 і x_2 обидва мають однаковий знак. Знак суми x_1 і x_2 є протилежним до знака p.

У ході вивчення теореми Вієта доцільно запропонувати учням евристичне завдання № 406 [40; 60]. У разі виникнення труднощів вчитель може задати наступні запитання^

- Що у даному рівнянні показує число 7, число 5?

($7 = x_1 + x_2$, $5 = x_1 \cdot x_2$).

- Як перетворити першу рівність, щоб вона містила вираз $x_1^2 + x_2^2$?

Також у ході вивчення квадратних рівнянь доцільно пропонувати учням на етапі актуалізації опорних знань усні вправи з розв'язання рівнянь:

$(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 0$ $(5 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 5) = 0$

$x^2 - 11x + 30 = 0$, $x^2 + 11x + 30 = 0$.

2.2. Практичні напрацювання з теми дослідження

2.2.1. Розробка уроку з алгебри для 8-го класу «Формула коренів квадратного рівняння»

Мета уроку:

- *навчальна:* систематизувати та узагальнити знання про квадратне рівняння, відтворити знання про квадратне рівняння, його види, способи розв'язування; вміння розв'язувати квадратні рівняння, використовувати рівняння, що зводяться до квадратних, перетворення раціональних виразів; систематизувати та узагальнити навчальні досягнення учнів щодо розв'язання квадратних рівнянь та їх використання в ході уроку алгебри;

- *розвивальна:* розвивати увагу, мислення, пам'ять, культуру математичного мовлення, вміння працювати самостійно, вміння спілкуватись, допомагати іншим аналізувати ситуацію, оцінювати свої дії та дії інших учнів; вміння і навички щодо розв'язування рівнянь, нерівностей, оформлення завдань; продовжити розвивати загальнонавчальні навички (ведення зошита організація роботи, робота з роздавальним матеріалом, застосувань теоретичних знань для виконання завдань тощо); сприяти розвитку комунікативної, інформаційної, соціальної, полікультурної компетентностей, а також самоосвіти й саморозвитку продуктивної творчої діяльності;

- *виховна*: виховувати уважність, кмітливість, акуратність, працьовитість, самостійність, дисциплінованість, самокритичність.

Тип уроку: узагальнення та систематизація знань, умінь і навичок.

Обладнання: Ілюстрація світлофора, маркер, портрет Ф.Вієта, друкований «Алгоритм розв’язування квадратних рівнянь», роздатковий матеріал, комп’ютер, проектор, підручник [39].

Тип уроку: Комбінований урок.

Обладнання:

Хід уроку.

І. Організація класу. Орієнтація.

ІІ. Актуалізація опорних знань учнів.

1.) Фронтальне опитування:

- *Сформулюйте означення квадратного рівняння.*
- *Чому на коефіцієнт а накладається додаткова умова?*
- *Як називають коефіцієнти квадратного рівняння?*
- *А чи можуть другий коефіцієнт і вільний член дорівнювати нулю?*
- *Як тоді називаються рівняння?*
- *Що таке зведене квадратне рівняння?*
- *Покажіть на дошці, як отримати зведене квадратне рівняння з рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. (завдання виконує учень біля дошки)*

2) ***Відтворення способів розв’язування різних видів неповних квадратних рівнянь.***

Завдання 1 : На дошці записати загальний алгоритм розв’язування неповного квадратного рівняння та навести приклад, якщо:

1) b=0; 2) c=0; 3)b=c=0.

***(** завдання виконують 3 учні на дошці)*

3) *Вправа «Ланцюжок».*

Завдання1: Назвіть коефіцієнти квадратних рівнянь:

1.) $-2x^2 + 3x - 4 = 0$;

2.) $11-3x^2 +4=0$;

3.) $12+ x^2 - 5x = 0$;

4.) $7x -x^2 =5$;

5.) $-x^2 -2x+5=0$;

6.) $13x -5x^2 +1 = 0$;

7.) $14-x^2 -x=0$;

8.) $x^2 + 4 = 6x$.

Завдання2: Складіть квадратне рівняння за даними коефіцієнтами:

1.) a=1, b=-2, c=3;

2.) b=4, a=-1, c=4;

3.) c=-5, a=2, b=-1;

4.) a=2, b=-1, c=0;

5.) b=0, c=0, a=-1;

6.) b=0, c=9, a=-1.

4) *Самостійна робота.* **(** В цей час перевірка записів на дошці)

Завдання: Виділіть повний квадрат суми або різниці:

1.) $4x^2 + 20x + 31$; $(2x+ 5)2-25+31= (2x+ 5)2+6$

2.) $9x^2 -24x+20$; $(3x - 4)2-16+20= (3x - 4)2+4$

3.) $x^2 + 10x +16$. $(x+ 5)2-25+16= (2x+ 5)2- 9$

III. Мотивація навчальної діяльності.

1) *Оголошення теми і мети уроку.*

Ми навчилися розв'язувати неповні квадратні рівняння, повторили все необхідне для того, щоб вчитися розв'язувати повні квадратні рівняння. Тому запишемо тему уроку: Формула коренів квадратного рівняння. *(на дошці).*

2) *Історична довідка.*

Квадратні рівняння простіших видів вавилонської математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. Згодом розв'язували їх також: в Китаї і

Греції. Особливо багато уваги квадратним рівнянням приділяв Мухаммед аль-Хорезмі (IX ст.). Він показав, як розв'язувати рівняння видів $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $ax + b = x^2$, але тільки при додатних a і b. Від'ємних коренів тоді не знаходили.

Формули коренів квадратного рівняння в тому вигляді, в якому ми їх вивчатимемо сьогодні на уроці, вперше вивів французький математик Франсуа Вієт (1540-1633).

IV. Вивчення нового матеріалу.

1.) ***Ознайомлення з формулами для обчислення коренів квадратного рівняння***

Формули коренів квадратного рівняння можна отримати різними способами. Розглянемо один із них:

$$\underline{ax^2 + bx + c = 0}$$

Помножимо обидві частини рівняння на 4a (a≠0)

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2 * 2ax * b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Позначимо вираз b^2*-4ac* через *D: D=* b^2*-4ac*. Цей вираз називають ***дискримінантом квадратного рівняння***. В перекладі з латинської мови це слово означає «розрізняти», «розділяти». А в тлумачному математичному словнику записано: **дискримінант квадратного тричлена** - величина, що визначає характер його коренів. Тоді:

$$(2ax + b)^2 = D$$

$$2ax + b = \sqrt{D} \qquad 2ax + b = -\sqrt{D}$$

$$2ax = -b + \sqrt{D} \qquad 2ax = -b - \sqrt{D}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad де \quad D = b^2 - 4ac$$

Проаналізуємо отриману формулу:

Якщо $D > 0$, то рівняння має 2 корені.

Якщо $D = 0$, то рівняння має 2 однакових кореня $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$

Якщо $D < 0$, то рівняння коренів не має.

Отже, від дискримінанта залежить кількість коренів квадратного рівняння.

2.) ***Формула для квадратних рівнянь, у яких b=2k, k∈Z.***

Для квадратних рівнянь, у яких другий коефіцієнт парне число, формулу коренів зручно записати у іншому вигляді.

Розглянемо квадратне рівняння

$$\underline{ax^2 + 2kx + c = 0}$$

Знайдемо дискримінант

$$D = 4k^2 - 4al = 4(k^2 - ac)$$

Кількість коренів рівняння залежить від знака виразу $k^2 - ac$.

Позначимо цей вираз D_1.

Якщо $D_1 \geq 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння дістанемо що $x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{2a}$$

Якщо $D_1 < 0$, то рівняння коренів не має.

3) ***Складання алгоритму розв'язування квадратного рівняння.***

(Після того, як учні склали усно алгоритм, прикріплюю друкований алгоритм на дошці)

V. Первинне сприйняття нового матеріалу.

Демонстраційний приклад *(розв'язує вчитель на дошці):*

$3x^2$-2x-16=0

a=? b=? c=?

D= (-2)²-4·3·(-16)= 4+192=196>0

$$\tilde{o}_1 = \frac{2-\sqrt{196}}{2\cdot 3} = \frac{2-14}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$\tilde{o}_2 = \frac{2+\sqrt{196}}{2\cdot 3} = \frac{2+14}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Відповідь: -2; $\mathbf{2\frac{2}{3}}$.

Запитання до учнів:

- *Чи залежить кількість коренів рівняння від знаку числа b? Чому?*
- *Чи залежить кількість коренів рівняння від знаків чисел a і c? Як?*

(якщо a і c одного знаку, то рівняння може мати 2 однакові корені, а може й не мати коренів;

якщо a і c різних знаків, то рівняння завжди матиме 2 різні корені)

Розв'язування вправи 33.1. на дошці:

а) $x^2+2x-4=0$

D=$2^2-4\cdot 1\cdot(-4)=4+16=20>0 \rightarrow$ *2 різні корені.*

б) $x^2-3x+5=0$

D= $(-3)^2-4\cdot 1\cdot 5=9-20=-11<0 \rightarrow$ *немає коренів.*

в)$2x^2-6x-3{,}5=0$

D= $(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-3{,}5)=36+28=64>0 \rightarrow$ *2 різні корені.*

б) $5x^2-2x+0{,}2=0$

D= $(-2)^2-4\cdot 5\cdot 0{,}2=4-4=0 \rightarrow$ *2 однакових корені.*

Відповідь: -0,5; 3,5.

Коментоване розв'язування рівняння № 33.4 (1, 15)

1) $x^2-4x+3=0$

a=? b=? c=?

D=$(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4>0$

$$\tilde{o}_1 = \frac{4-\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Відповідь: 1;3.

$$\tilde{o}_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

15) $x^2-8x+20=0$

$D= (8)^2-4\cdot 1\cdot 20=64 - 80=-16<0 \rightarrow$ *немає коренів.*

VI. Підсумок уроку.

Вправа «Встановлення відповідності».

- На дошці малюнок світлофора. Як ви думаєте, з яким поняттям, вивченим сьогодні на уроці він логічно взаємопов'язаний?

- Встановіть якому кольору відповідає яке значення дискримінанта.

(учні записують на червоному - $D<0$; на жовтому – $D=0$; на зеленому - $D>0$)

Рефлексія.

- Молодці. Ви добре сьогодні працювали. Дякую за урок. І бажаю, щоб у житті вам зажди горіло зелене світло!

VII. Домашнє завдання.

1. Опрацювати §6. п.33. Вивчити формули та алгоритм розв'язування квадратного рівняння. ІІІ рівень – вміти виводити формули коренів.

2. Розв'язати вправи: І рівень – № 33.2; І рівень – № 33.3; №33.5(1-3) ІІІ рівень - №33.5 [39].

2.2.2. Система завдань до теми «Квадратні рівняння»

Диференціація – один з ключових шляхів організації навчальної діяльності учнів. Диференціація не тільки сприяє розвитку науки, культури, а й відповідає різноманітності задатків і здібностей людини, її індивідуальним нахилам до того чи іншого виду діяльності.

Головним заданням вивчення математики є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь, необхідних у повсякденному житті, а також достатніх для вивчення суміжних дисциплін і продовження освіти. Разом з вирішенням головної задачі, оволодінням конкретними обов'язковими математичними знаннями, диференційоване навчання математики передбачає формування стійкого інтересу учнів до предмету, виявлення і розвиток їх математичних здібностей [11; 46].

У наведеній нижче системі завдань завдання 1, 2, 3, 6 відповідають середньому і низькому рівню навчальних можливостей учня; відповідно, завдання 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – достатньому і високому рівню. Запропоновану систему завдань можна використовувати як у ході уроку, так і для довгострокового домашнього завдання з теми.

1. **Які з даних рівнянь є квадратними**?

I варіант	II варіант
А) $3x^2 - 5x = x - 3$;	А) $2x + 1 = 0$;
Б) $7x + 11 = 0$;	Б) $x(x + 3) = x^2 - 9x$;
В) $x(x - 1) = x^2 - 2x$;	В) $5x^2 + 3x = x + 7$;
Г) $(x - 7) : x = 0$;	Г) $(x + 4) : x = 0$;
Д) $3x = 2$;	Д) $4x^2 - 9x + 3 = 0$;
Е) $7x^2 = 9x + 12$;	Е) $7x + 14 = 0$;
Ж) $x(x + 3) = x^2 - 2x$;	Ж) $x(x + 3) = x^2 - 7x + 5$;
З) $(x + 1) : x = 0$.	З) $(x - 2) : x = 5$.

2. Випишіть коефіцієнти *a*,*b*, *c* квадратного рівняння.

I варіант	II варіант
1. $x^2 + 2x + 7 = 0$.	1. $5x^2 - 8x + 4 = 0$.
А) 1, 2, 7.	А) 5, -8, -4.
Б) 1, -2, 7.	Б) 5, -8, 4.
В) 1, 2, -7.	В) 5, 8, 4.
Г) -1, 2, 7.	Г) -5, -8, -4.
2. $3x^2 - 5x - 2 = 0$.	2. $x^2 - 81 = 0$.
А) -3, -5, -2.	А) 1, 0, -81.
Б) 3, -5, 2.	Б) 0, -81.

В) 3, 5, -2.

Г) 3, -5, -2.

3. $4x^2 - x = 0$.

А) 4,-1.

Б) 4, 0, -1.

В) 4, -1, 0.

Г) 4, 1.

В) 1, -81.

Г) 1, -81, 0.

3. $x^2 - 7x + 8 = 0$.

А) 1, 7, 8.

Б) -1, 7, -8.

В) 1, -7, 8.

Г) 1, 7, -8.

3.Розв'язати рівняння (І варіант №№ 1 – 5; ІІ варіант №№ 6 – 10).

1) $6x^2 - 18 = 0$

2) $x^2 - 5x = 0$

3) $-\frac{3}{7}x^2 = 0$

4) $4x^2 + 36 = 0$

5) $6x - 3x^2 = 0$

6) $3x^2 - 12x = 0$

7) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6} = 0$

8) $7x^2 + x = 0$

9) $x^2 - 3x - 5 = 11 - 3x$

10) $4x - 5x^2 = 0$

4. Які з наступних рівнянь не мають коренів?

І варіант

1. $2x^2 + x + 3 = 0$;
2. $2x^2 - x - 3 = 0$;
3. $3x^2 - 6x + 3 = 0$.

ІІ варіант

1. $2x^2 - x + 3 = 0$;
2. $2x^2 + x - 3 = 0$;
3. $3x^2 + 6x + 3 = 0$.

5. **Розв'язати рівняння**

І варіант

1. $3x^2 - x = 0$.
2. $x^2 - 25 = 0$.
3. $2x^2 + x - 3 = 0$.
4. $5x^2 = 0$.
5. $x^2 - 3x - 10 = 0$.
6. $7x^2 - 5x + 6 = 0$.
7. $x^2 - 4x + 3 = 0$.

ІІ варіант

1. $-3x^2 - 2x + 5 = 0$.
2. $x^2 + 2x - 8 = 0$.
3. $2x^2 + 5x = 0$.
4. $3x^2 = 0$.
5. $2x^2 + 3x - 8 = 0$.
6. $x^2 - 5x + 1 = 0$.
7. $6x^2 + 12 = 0$.

8. $9x^2 - 12x + 4 = 0.$

8. $4x^2 - x = 0.$

6. Знайти дискримінант рівняння

I варіант

1. $2y^2 + 3y + 1 = 0.$

А) 11; Б) 17; В) -5; Г) 1.

2. $2y^2 + 5y + 2 = 0.$

А) 41; Б) 9; В)-11; Г) 21.

II варіант

1. $x^2 - 6x + 5 = 0.$

А) 16; Б) -56; В) -16; Г) 56.

2. $x^2 - 7x + 12 = 0.$

А) -1; Б) -97; В)1; Г) 97.

7. Скільки коренів має рівняння?

I варіант

1. $x^2 - 9x + 14 = 0$?

А) два; Б) один;

В) не має коренів; Г) безліч.

2. $x^2 - 8x + 15 = 0$?

А) два; Б) один;

В) не має коренів; Г) безліч.

II варіант

1. $2x^2 + x + 2 = 0$?

А) два; Б) один;

В) не має коренів; Г) безліч.

2. $3x^2 + x + 4 = 0$?

А) два; Б) один;

В) не має коренів; Г) безліч.

8. Не розв’язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів

I варіант

1. $x^2 - 3x - 10 = 0.$

А) -3; -10; Б) 3; -10;

В) -3; 10; Г) 3; 10.

2. $x^2 - 5x - 14 = 0.$

А) 5; -14; Б) -5; -14;

В) 5; 14; Г) -5; 14.

II варіант

1. $x^2 + 5x - 24 = 0.$

А) 5; 24; Б) 5; -24;

В) -5; 24; Г) -5; -24.

2. $x^2 - 19x + 6 = 0.$

А) 6; -19; Б) -6; 19;

В) 19; 6; Г) -6; 19.

9. Складіть квадратне рівняння, яке має корені:

I варіант

1. 1 і 3.

А) $x^2 - 4x + 3 = 0;$

Б) $x^2 - 3x + 4 = 0;$

II варіант

1. 2 і 7.

А) $x^2 + 9x + 14 = 0;$

Б) $x^2 - 9x + 14 = 0;$

В) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

Г) $x^2 + 4x - 3 = 0$.

2. 2 і 5.

А) $x^2 - 7x - 10 = 0$;

Б) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

В) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

Г) інша відповідь.

В) $x^2 - 9x - 14 = 0$;

Г) інша відповідь.

2. 3 і 4.

А) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

Б) $x^2 + 3x + 4 = 0$;

В) $4x^2 + 3x = 0$;

Г) $x^2 - x - 12 = 0$.

10. Виконати завдання

І варіант

1) Скласти квадратне рівняння, якщо його корені рівні

$x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 2$.

2) У рівнянні

$x^2 + px - 12 = 0$

один з коренів дорівнює 4.

Знайти інший корінь і число p.

ІІ варіант

1) Скласти квадратне рівняння, якщо його корені рівні

$x_1 = 2 - \sqrt{3}$ і $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

2) У рівнянні

$(a - 7)x^2 - 13x - a = 0$

один з коренів дорівнює 5.

Знайти інший корінь і число a.

11. Розв’язати рівняння

І варіант

1. $2x^2 + x - 3 = 0$;
2. $5x^2 - 18x + 16 = 0$;
3. $5x^2 - 16x + 3 = 0$;
4. $36y^2 - 12y + 1 = 0$;
5. $-x^2 = 5x - 14$;
6. $(2x - 3)^2 = 11x - 19$;
7. $15x^2 - 4x - 3 = 0$;
8. $x^2 - 7x + 4 = 0$;
9. $x^2 + 5x + 9 = 0$.

ІІ варіант

1. $5x^2 + x - 6 = 0$;
2. $x^2 - 18x + 80 = 0$;
3. $x^2 - 22x - 23 = 0$;
4. $5x^2 + 9x + 4 = 0$;
5. $6x + 9 = x^2$;
6. $x(x + 7) = (x - 2)(x + 2)$;
7. $x^2 - 20x + 91 = 0$;
8. $(3x - 1)(3x + 1) - 2x(1 + 4x) = -2$;
9. $(3x + 1)^2 - x(7x + 5) = 4$.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі розглянуто одну з центральних тем шкільного курсу математики – квадратні рівняння, вивчення яких передбачено навчальними програмами основної школи та також проаналізовано методику їх вивчення.

Дана дипломна робота написана на основі аналізу наявної методичної літератури та шкільних підручників. Було встановлено, що розв’язування рівнянь сприяє формуванню в учнів системи математичних знань, виробленню вмінь і навичок математичного моделювання, обчислення, розвитку прийомів розумової діяльності. Від оволодіння такими уміннями залежить не лише якісна підготовка школярів з алгебри на даному етапі навчання, а й осмислене засвоєння знань у подальшому вивченні математики в старшій школі та ВНЗ.

У роботі систематизовано та обґрунтовано методику вивчення квадратних рівнянь в основній школі, а саме, проведено аналіз навчальної програми, розроблено плани-конспекти уроку та систему вправ.

Дана дипломна робота може бути використана вчителями при підготовці та проведенні уроків з даної теми та студентами при підготовці до занять, а також усіма, хто цікавиться математикою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Бевз В.П. – К.: Вища школа, 1977. – 206 с.

2. Бевз Г.П. Методи навчання математики / Бевз В.П. – Х.: Вид. група «Основа», 2003. – 95 с.

3. Бевз Г.П. Алгебра. 7 клас / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Освіта, 2015. – 191 с.

4. Бевз Г.П. Алгебра. 8 клас / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Освіта, 2016.–254 с.

5. Бевз Г.П. Математика. 5 клас / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.

6. Білицький О. Управління процесом розвитку особистості засобами варіативного компоненту змісту освіти / Білицький О. // Директор школи. – 2002. – № 8. – С. 2-3.

7. Бродський Я. Про нові програми з математики / Бродський Я., Павлов О. / Математика. – 2000. – № 25-26. – С. 2-4.

8. Бугайов О.І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі / Бугайов О.І., Дейкун Д.І. – К.: Освіта, 1992. – 134 с.

9. Бурлуцька І. Розв’язування рівнянь. Урок-гра. 6 клас / І. Бурлуцька / Математика. – 2009. – № 10. – С. 11-13.

10. Василюк А. Основна школа в системі європейської середньої освіти / Василюк А., Жук О. // Директор школи. Україна. – 2002. – № 1. – С. 50-58.

11. Вікова та педагогічна психологія / [Уклад. О.В. Скрипченко, Л.В. Волинська, З.В. Огороднійчук та ін.] – К.: Просвіта, 2001. – 416 с.

12. Возняк Г.М. Математика. 5 клас / Г.М. Возняк, Г.М. Литвиненко, М.Г. Маланюк. – К.: Освіта, 2002. – 271 с.

13. Возрастная и педагогическая психология / [Под. ред. А.В. Петровского]. – М.: Просвещение, 1999. – 375 с.

14. Войтенко Т. Разноуровневое обучение: положительные результаты и негативные последствия / Войтенко Т., Соколова М., Уланов В. // Директор школи. Україна. – 2001. – № 2. – С. 15-23.

15. Дорофеев Г.В. Дифференциация в обучении математике / Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В. // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 18-21.

16. Єрмаков І.Г. Проектне бачення компетентнісно спрямованої 12-річної середньої школи / Єрмаков І.Г., Пузаков Д.О. – Запоріжжя, 2005. – 112 с.

17. Єршова А.П. Дидактичні матеріали з алгебри для 7 класу / Єршова А.П. – Х.: Основа, 2001. – 88 с.

18. Жалдак М.И. Математика с компьютером / Жалдак М.И., Горошко Ю.В., Винниченко Е.Ф. – К.: РУНЦ „ДИНИТ", 2004. – 251 с.

19. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / Жалдак М.І. // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. Наук праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – С. 3-16.

20. Запара О. Системи лінійних рівнянь з двома змінними. Підсумковий урок з алгебри у 7 класі / О. Запара / Математика. – 2010. – № 19. – С. 9-16.

21. Зимняя И.А. Педагогическая психология / Зимняя И.А. – М.: Издательская корпорация «Логос», 1999. – 270 с.

22. Земляна Т. Пошуки способів розв'язування квадратних рівнянь. Алгебра. 8 клас / Т. Земляна / Математика. – 2010. – № 13. – С. 12-14.

23. Інструктивно-методичний лист про вивчення математики у 2016/2017 навчальному році // Математика в школі. – 2016. – № 6. – С. 3-19.

24. Каганов Э.Д. 400 самых интересных задач с решениями по школьному курсу математики для 6 – 11 классов / Каганов Э.Д. – М.: ЮНВЕС, 1997. – 280с.

25. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе / Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Оганесян В.А., Саннинский В.Я. – М.: Просвещение, 1975. – 344 с.

26. Конфорович А.Г. Математика служить людині / Конфорович А.Г. – К.: Рад. Шк., 1984. – 192 с.

27. Концепція розвитку загальної середньої освіти / Освіта України. – 2000. – № 3. – С. 8-11.

28. Кравчук В. Алгебра. 7 клас / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 224 с.

29. Кравчук В. Математика. 5 клас / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 264 с.

30. Кравчук В. Математика. 6 клас / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 272 с.

31. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти // Директор школи. – 2000. – № 39-40. – С. 27-36.

32. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / Крутецкий В.А. – М.: Просвещение, 1968 – 432 с.

33. Курякова Т. Рівняння. Кути. Многокутники. 5 клас / Т. Курякова / Математика. – 2010. – № 42. – С. 3-6.

34. Лисюк А. Лінійні рівняння. Цілі вирази. Алгебра. 7 клас / А. Лисюк / Математика. – 2010. – № 1. – С. 6-9.

35. Мадзігон В.М. Методологія нової освіти / Мадзігон В.М. // Проблеми сучасного підручника: Зб. Наук. Праць / Редкол. К.: Педагогічна думка, 2003. – Вип. 4. – С. 3–7.

36. Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики / Маркова І.С. – Х.: Вид група «Основа», 2007. – 128 с.

37. Математика 5-11 класи. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Ірпінь, 2017. – 65 с.

38. Мерзляк А.Г. Алгебра. 7 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2015. – 256 с.

39. Мерзляк А.Г. Алгебра. 8 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 340 с.

40. Мерзляк А.Г. Алгебра. 9 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 320 с.

41. Мерзляк А.Г. Збірник завдань для тематичного оцінювання, 7 клас, алгебра / А.Г. Мерзляк – Х.: Основа, 2004. – 68 с.

42. Мерзляк А.Г. Математика. 5 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2008. – 288 с.

43. Мерзляк А.Г. Математика. 6 клас / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2006. – 304 с.

44. Мішанчук Т. Квадратні рівняння. Алгебра. 8 клас / Т. Мішанчук / Математика. – 2009. – № 1. – С. 18-20.

45. Осмоловская И. Нужны вариативность, гибкость и готовность удовлетворить потребности каждого ученика / Осмоловская И. // Директор школи. Україна. – 2001. – № 2. – С. 41-46.

46. Остапик О. Квадратні рівняння. Узагальнюючий урок з алгебри у 8 класі / О. Остапик / Математика. – 2010. – № 19. – С. 20-21.

47. Пєхота О.М. Освітні технології / Пєхота О.М., Кіктенко А.З. – К.: А.С.К., 2004. – 124 с.

48. Пометун О. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання / Пометун О., Пироженко Л. – К.: А.С.К., 2005. – 134 с.

49. Пономарьова Л. Рівняння. Основні властивості рівнянь. 6 клас / Л. Пономарьова / Математика. – 2009. – № 14. – С. 5-7.

50. Преподавание алгебры в 6-8 классах. – [сост. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк]. – М.: Просвещение, 1980. – 270 с.

51. Репьев В.В. Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе / Репьев В.В. – М.: Просвещение, 1967. – 276 с.

52. Родигіна І.В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання / Родигіна І.В. – Х.: Вид. група «Основа», 2005. – 114 с.

53. Сиротинко Г.О. Сучасний урок: інтерактивні технології навчання / Сиротинко Г.О. – Х.: Вид. група «Основа», 2003. – 98 с.

54. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / Слєпкань З.І. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

55. Тихомиров В. Математична освіта (мета, концепції, структура, перспективи) / Тихомиров В. // Математика в школі. – 2003. – № 7. – С. 2-6.

56. Тополя Л. Дидактичні ігри на уроках алгебри і геометрії. 7-9 класи / Тополя Л., Швець В. – К.: Шкільний світ, 2009. – 128 с.

57. Урок математики в сучасних технологіях. – Х.: Основа, 2007. – 128 с.

58. Федченко Л.Я. Алгебра 7-8. Завдання для тематичних та ітогових контрольних робіт / Федченко Л.Я, Г.Н. Литвиненко. – Х.: Основа, 2001. – 74 с.

59. Хряпак О. Квадратні рівняння. Теорема Вієта. Алгебра. 8 клас / О. Хряпак / Математика. – 2009. – № 10. – С. 19-21.

60. Чашечников С.М. Вивчення алгебри в 6-8 класах / Чашечников С.М., Чашечникова Л.Г., Чертков Й.Я. – К.: Радянська школа, 1981. – 206 с.

61. Чекова Г. Ю. Алгебра. Практичний довідник школяра з відеосупроводом: навч. Посіб. /Г. Ю.Чекова. – Чернігів: Країна мрій, 2015. – 224 с.

62. Швець В.О. Практикум з методики навчання математики. Основна школа / В.О. Швець, В.Г. Бевз, О.Є. Волянська, В.Я. Забранський, В.М. Кліндухова та ін.: за ред. проф. В.О. Швеця. – К.: Вид-во НПУ ім. Н.П. Драгоманова, 2012. – 267 с.